

Théorie élémentaire du signal

© LAVOISIER, 2005

LAVOISIER

11, rue Lavoisier

75008 Paris

Serveur web : www.hermes-science.com

2-7462-0993-4 ISBN Général

2-7462-0996-9 ISBN Volume 3

Tous les noms de sociétés ou de produits cités dans cet ouvrage sont utilisés à des fins d'identification et sont des marques de leurs détenteurs respectifs.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, d'une part, que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite" (article L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

**APPLICATIONS MATHÉMATIQUES
AVEC MATLAB®**

Théorie élémentaire du signal

rappel de cours et exercices corrigés

Luc Jolivet
Rabah Labbas

hermes
Science
—publications—

Table des matières

Avant-propos	9
Chapitre 1. Les nombres complexes	13
1.1. Définitions et représentation	13
1.1.1. Partie réelle et partie imaginaire	13
1.1.2. Module et argument	14
1.2. Opérations sur les complexes	15
1.2.1. Egalité de deux complexes	15
1.2.2. Complexes conjugués	15
1.2.3. Somme et produit de deux complexes	16
1.2.4. Notation algébrique et trigonométrique	17
1.2.5. Calculs avec <i>Matlab</i>	18
1.2.6. Formule de De Moivre et applications	19
1.2.7. Formules d'Euler et exponentielle complexe	21
1.2.8. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe	22
1.3. Exercices	25
1.3.1. Module et argument avec <i>Matlab</i>	25
1.3.2. Partie réelle et partie imaginaire avec <i>Matlab</i>	25
1.3.3. Vérifications d'identités complexes	25
1.3.4. Racines cubiques de 1	26
1.3.5. Polynômes de Tchebycheff	26
1.4. Solutions	27
Chapitre 2. Généralités sur les signaux	35
2.1. Introduction et définitions	35
2.1.1. Qu'est-ce qu'un signal ?	35
2.1.2. Différents types de signaux	35
2.1.3. Remarques	37

2.1.4. Analyse et reconstitution d'un signal	38
2.2. Exemple de signal causal, introductif à la distribution de Dirac	39
2.3. Exercices	44
2.3.1. Etude d'un signal à valeurs complexes	44
2.3.2. Etude d'un signal oscillant	44
2.4. Solutions	45
Chapitre 3. Notions sur les séries	53
3.1. Introduction	53
3.2. Séries numériques	55
3.2.1. Définitions - Exemples	55
3.2.2. Espace vectoriel des séries convergentes	58
3.2.3. Critères de convergence pour les séries à termes positifs	58
3.2.4. Séries alternées et critère d'Abel	59
3.2.5. Calculs avec <i>Matlab</i>	60
3.3. Séries de fonctions	61
3.3.1. Exemple	61
3.3.2. Définitions	65
3.3.3. Propriétés des séries de fonctions	66
3.4. Exercices	67
3.4.1. Séries numériques : étude de convergence	67
3.4.2. Séries géométriques	67
3.4.3. Série de fonctions à valeurs complexes	68
3.4.4. Sommes trigonométriques	68
3.5. Solutions	69
Chapitre 4. Analyse des signaux périodiques	75
4.1. Les séries trigonométriques	75
4.1.1. Définitions	75
4.1.2. Convergence de la série	76
4.1.3. Illustration graphique	76
4.2. Séries de Fourier d'un signal	77
4.2.1. Coefficients de Fourier	77
4.2.2. Propriétés des séries de Fourier	78
4.2.3. Energie et formule de Parseval d'un signal	78
4.2.4. Exemple modèle	80
4.2.5. Ecriture complexe des séries de Fourier	83
4.3. Exercices	89
4.3.1. Série de Fourier d'un signal créneau	89
4.3.2. Série de Fourier d'un signal sinusoïdal redressé	90
4.4. Solutions	91

Chapitre 5. Notions sur les intégrales généralisées	99
5.1. Cas d'un intervalle borné	99
5.1.1. Définition	99
5.1.2. Exemple de référence	100
5.1.3. Critères de convergence	101
5.1.4. Remarque	102
5.2. Cas d'un intervalle infini $[a, +\infty[$	103
5.2.1. Définition	103
5.2.2. Remarque	105
5.3. Cas d'un intervalle ouvert $]a, b[$	105
5.3.1. Définition	105
5.3.2. Remarque	106
5.4. Intégrale généralisée sous <i>Matlab</i>	107
5.5. Exercices	107
5.5.1. Intégrale généralisée et fonctions équivalentes	107
5.5.2. Intégrale de Gauss	108
5.5.3. Intégrale généralisée sur $]0, +\infty[$	108
5.6. Solutions	109
Chapitre 6. La convolution de signaux	113
6.1. Introduction	113
6.2. Définitions et propriétés	115
6.2.1. Convolution continue	115
6.2.2. Exemple de convolution continue	116
6.2.3. Convolution discrète	119
6.2.4. Exemple de convolution discrète	120
6.3. Exercices	123
6.3.1. Convolution de deux portes	123
6.3.2. Convolution d'un signal par une porte de Dirac	124
6.3.3. Construction d'une fonction "plateau"	125
6.4. Solutions	126
Chapitre 7. Analyse de signaux apériodiques	139
7.1. Introduction	139
7.2. La transformée de Fourier continue	139
7.2.1. Définition	139
7.2.2. Conditions suffisantes d'existence	140
7.2.3. Remarque	141
7.2.4. Temporel/Fréquentiel	141
7.2.5. Exemple	141
7.2.6. Propriétés	144
7.2.7. Transformée de Fourier inverse	146

7.3. Transformée de Fourier et signaux discrets	147
7.3.1. Transformée de Fourier à temps discret	147
7.3.2. Transformée de Fourier discrète	148
7.3.3. Propriétés de la TFD	157
7.3.4. Notion de filtre d'un signal	158
7.4. Exercices	162
7.4.1. Signal triangulaire et transformée de Fourier	162
7.4.2. Signal de type exponentiel et transformée de Fourier	163
7.4.3. TFD d'un signal de période 4	163
7.4.4. TFD d'un signal aléatoire	163
7.5. Solutions	164
Bibliographie	177
Index	179

Avant-propos

Le but de cette collection "Applications Mathématiques avec *Matlab*" est de comprendre et d'utiliser les outils mathématiques fondamentaux de premier cycle à l'aide d'un logiciel de calcul. Elle correspond à l'esprit des formations en IUT, BTS, Ecoles d'ingénieurs, mais aussi en premiers semestres du cycle L du nouveau schéma LMD.

Nous nous sommes basés sur l'expérience de nos cours, travaux dirigés et séances de travaux pratiques de mathématiques avec des étudiants de 1^{ère} et 2^{ème} année du département d'Informatique d'IUT de l'Université du Havre. Pour cet enseignement, nous disposons du logiciel *Matlab*¹(la version actuellement installée est 6.5.0) et de son extension *Symbolic Math Toolbox* (version 2.1.3).

Ces outils nous ont permis d'accompagner les notions de base présentées, par des illustrations numériques et graphiques, et par des vérifications utilisant le calcul formel.

L'utilisation d'un logiciel de calcul permet de se concentrer davantage sur la compréhension du problème posé, sur une stratégie de résolution et sur l'interprétation des résultats. L'étudiant devra aussi porter un regard critique sur les réponses fournies, en prenant garde aux erreurs d'arrondi dans les calculs numériques, et aux simplifications abusives dans certaines expressions symboliques.

Dans ce troisième tome, on présente un ensemble d'outils mathématiques indispensables en théorie du signal : nombres complexes, séries numériques, séries de fonctions, intégrales généralisées, convolution, transformée de Fourier, ...

Dans chaque chapitre, les rappels de cours sont accompagnés d'illustrations et d'exemples traités avec *Matlab*. Des exercices sont ensuite proposés. Certains sont

1. *Matlab* est une marque déposée de *The MathWorks Inc*. Tous les autres produits cités sont des marques déposées de leur société respective.

originaux, d'autres sont repris ou inspirés de divers manuels dont la liste est donnée en bibliographie. La correction de ces exercices se trouve en fin de chapitre. Nous avons choisi de la présenter en utilisant systématiquement *Matlab*. Le lecteur pourra cependant traiter la plupart de ces exercices "à la main".

Lorsqu'une commande *Matlab* est utilisée pour la première fois, elle est expliquée et apparaît en gras. Les programmes et séquences de calcul sous *Matlab* sont mis en évidence dans des tableaux. Le lecteur pourra trouver une initiation à la pratique de ce logiciel dans les premiers chapitres du tome 1.

En fin d'ouvrage, se trouve un index regroupant les mots-clés mathématiques et les commandes *Matlab* utilisées. Ces dernières apparaissent en italique.

Nous tenons à remercier vivement tous nos collègues qui ont consacré un temps précieux à la lecture de cet ouvrage, notamment Serge Derible, Thierry Dumont, Khaled Sadallah et Francis Wirth.

Nous remercions particulièrement François Coquet, Professeur à l'Université du Havre, pour sa lecture attentive, ses remarques et conseils judicieux .

Nous accueillerons avec reconnaissance les éventuelles remarques que le lecteur voudra bien nous faire parvenir.

Note au lecteur

Ce recueil de rappels de cours et d'exercices corrigés fait partie d'un ensemble comportant trois tomes.

Tome 1

- première partie : présentation de *Matlab*,
- deuxième partie : algèbre linéaire,
- troisième partie : géométrie.

Tome 2

- première partie : analyse,
- deuxième partie : analyse numérique élémentaire.

Tome 3

- théorie élémentaire du signal.

Chapitre 1

Les nombres complexes

On introduit dans ce chapitre l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes et les calculs élémentaires sur ces nombres indispensables en théorie du signal.

1.1. Définitions et représentation

Soient a et b deux nombres réels quelconques. On appelle nombre complexe, le couple ordonné $z = (a, b)$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , le point M de coordonnées (a, b) est l'**image** du complexe z . On dit que M a pour **affixe** z et on note $M(z)$.

L'ensemble des complexes est noté \mathbb{C} .

1.1.1. Partie réelle et partie imaginaire

Soit $z = (a, b)$. La **partie réelle** de z , est par définition

$$\operatorname{Re}(z) = a,$$

et la **partie imaginaire** est

$$\operatorname{Im}(z) = b.$$

Autrement dit, l'axe des abscisses constitue l'ensemble des parties réelles, tandis que l'axe des ordonnées est l'ensemble des parties imaginaires. Le complexe nul correspond à $z = (0, 0)$ et sera noté

$$z = 0.$$

1.1.2. Module et argument

1.1.2.1. Module d'un complexe

Pour tout complexe z , le **module** de z noté $|z|$ est la longueur du segment $[OM]$. On a

$$|z| = \rho = OM = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1.1.2.2. Argument d'un complexe

Pour $z \neq 0$, l'angle orienté $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est appelé l'**argument** de z et est noté

$$\arg(z) = \theta,$$

il est naturellement défini à $2k\pi$ près, ($k \in \mathbb{Z}$).

1.1.2.3. Relations entre module et argument

Il est facile de voir qu'on a les relations

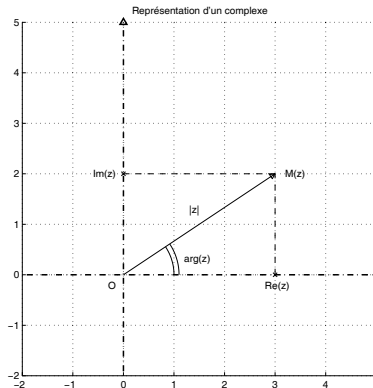
$$\begin{cases} a = \rho \cos(\theta) \\ b = \rho \sin(\theta) \\ \tan(\theta) = b/a \quad \text{si } a \neq 0, \end{cases}$$

d'où

$$\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{si } a > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

On notera aussi, pour un complexe z non nul, de module ρ et d'argument θ

$$z = [\rho, \theta].$$



1.2. Opérations sur les complexes

1.2.1. Egalité de deux complexes

On remarquera que deux complexes $z_1 = (a_1, b_1)$ et $z_2 = (a_2, b_2)$ sont égaux si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2, \end{cases}$$

autrement dit si leurs images M_1 et M_2 sont confondues.

1.2.2. Complexes conjugués

Si les images M_1 et M_2 des deux complexes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, on dira que les deux complexes z_1 et z_2 sont conjugués. On a alors

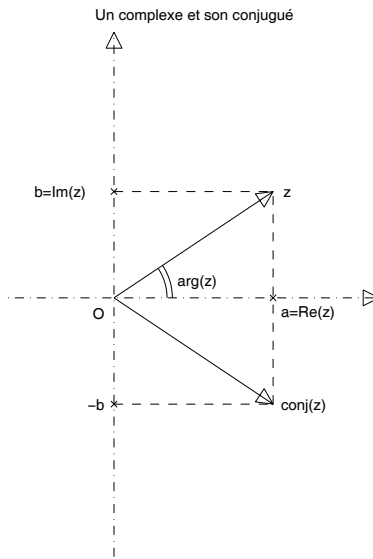
$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = -b_2. \end{cases}$$

Le conjugué de $z = (a, b)$ est noté \bar{z} . On a

$$\bar{z} = (a, -b).$$

Si $z = [\rho, \theta]$

$$\bar{z} = [\rho, -\theta].$$



1.2.3. Somme et produit de deux complexes

La somme de deux complexes, écrits sous forme

$$z_1 = (a_1, b_1), \quad z_2 = (a_2, b_2),$$

est définie par

$$s = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

et leur différence est

$$d = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2).$$

Le produit des deux complexes, écrits sous forme

$$z_1 = [\rho_1, \theta_1], \quad z_2 = [\rho_2, \theta_2]$$

est par définition

$$p = z_1 \cdot z_2 = [\rho_1 \cdot \rho_2, \theta_1 + \theta_2].$$

En posant $p = (a, b)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} a &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b &= \rho_1 \cdot \rho_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 (\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)) \\ &= a_1 b_2 + a_2 b_1, \end{aligned}$$

d'où la règle de multiplication :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$ et $z = [\rho, \theta]$ on a

$$z^n = [\rho^n, n\theta].$$

De même, le quotient $q = \frac{z_1}{z_2}$ de deux complexes avec $z_2 \neq 0$, est défini par

$$q = [\rho, \theta],$$

où

$$\begin{cases} \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ \theta = \theta_1 - \theta_2. \end{cases}$$

L'inverse d'un complexe $z = [\rho, \theta]$ est le complexe

$$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{\rho}, -\theta \right].$$

1.2.4. Notation algébrique et trigonométrique

1.2.4.1. Deux écritures d'un complexe

Les nombres complexes de la forme $z = (0, b)$, situés sur l'axe des ordonnées sont appelés imaginaires purs. Ceux de la forme $z = (a, 0)$, situés sur l'axe réel des abscisses, peuvent être confondus avec les nombres réels a .

Le nombre complexe particulier $(0, 1)$, d'argument $\pi/2$ et de module 1 est noté i . On a

$$i = (0, 1) = [1, \pi/2] = (1 \cos(\pi/2), 1 \sin(\pi/2)).$$

Tenant compte de la multiplication définie précédemment, un nombre complexe

$$z = (a, b)$$

peut être écrit sous la forme

$$\begin{aligned} z &= (a, 0) + (0, b) \\ &= a + (0, 1) \cdot (b, 0) \\ &= a + ib. \end{aligned}$$

On en déduit l'écriture dite **algébrique**

$$z = a + ib,$$

et l'écriture dite **trigonométrique**

$$z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

On remarquera que le nombre complexe particulier i vérifie

$$\begin{aligned} i^2 &= ([1, \pi/2])^2 = [1, \pi] \\ &= 1 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = -1. \end{aligned}$$

1.2.4.2. *Remarque*

On retiendra par la suite que dans l'ensemble

$$\mathbb{C} = \{a + ib, a, b \in \mathbb{R}\},$$

toutes les règles de calcul usuelles sur les nombres réels (commutativité, associativité, structure d'espace vectoriel, ...) restent vraies. Par contre, il n'y a pas de structure d'ordre : deux complexes quelconques ne sont pas comparables.

1.2.5. *Calculs avec Matlab*

Sous *Matlab*, le nombre complexe i est prédéfini, et on peut effectuer les opérations usuelles dans \mathbb{C} (+, -, *, /, ^). Les fonctions **real**, **imag**, **abs** et **angle** donnent respectivement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'une expression complexe :

```

» z1 = -1+i*sqrt(3);
» z2=1-i;
» z=z1*z2
z = 0.7321+ 2.7321i
» x = real(z)
x = 0.7321
» y = imag(z)
y = 2.7321
» r = abs(z)
r = 2.8284
» theta = angle(z)
theta = 1.3090

```

La fonction

$$[a, b] = \text{pol2cart}(\theta, \rho)$$

donne les partie réelle et imaginaire en fonction de l'argument et du module (dans cet ordre !). La fonction

$$[\theta, \rho] = \text{cart2pol}(a, b)$$

effectue la conversion inverse.

```

» [a,b] = pol2cart(pi/4,2)
a = 1.4142
b = 1.4142
» [theta,rho] = cart2pol(-1,sqrt(3))
theta = 2.0944
rho = 2.0000

```

Les fonctions *real*, *imag*, *abs*, *pol2cart* permettent aussi d'effectuer des calculs symboliques.

```

» z = sym('-1+i*sqrt(3)');
» x = real(z)
x = -1
» y = imag(z)
y = 3^(1/2)
» r = abs(z)
r = 2
» [a,b] = pol2cart(sym('pi/4'),sym('2'))
a = 2^(1/2)
b = 2^(1/2)

```

Il n'en est pas de même pour les fonction *angle* et *cart2pol*, qui utilisent une fonction auxiliaire *atan2* :

```

» theta = angle(z)
??? Function 'atan2' not defined for variables of class 'sym'.
On line 15 ==> p = atan2(imag(h), real(h));
» [theta,rho] = cart2pol(sym('-1'),sym('sqrt(3)'))
??? Function 'atan2' not defined for values of class 'sym'.

```

Pour obtenir la valeur exacte de l'argument, il faut utiliser une double conversion

```

» theta= sym(angle(double(z)))
theta = 2*pi/3

```

ou les formules du paragraphe 1.1.2.3 :

```

» theta=atan(y/x)+pi
theta = 2/3*pi

```

1.2.6. Formule de De Moivre et applications

Le nombre complexe

$$z = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = [1, \theta],$$

de module 1 et d'argument θ , vérifie, grâce à la règle de puissance $n^{\text{ième}}$

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Cette formule est utile pour **linéariser** $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$, c'est-à-dire exprimer ces puissances en fonction de

$$\cos(k\theta) \text{ et } \sin(k\theta), k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Linéarisons par exemple $\cos^3 \theta$ et $\sin^3 \theta$. On écrit que

$$\begin{aligned} & (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 \\ = & \cos(3\theta) + i \sin(3\theta) \\ = & \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta - i \sin^3 \theta \end{aligned}$$

et on égale les parties réelles et les parties imaginaires. On a

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \end{aligned}$$

d'où

$$\cos^3 \theta = \frac{\cos(3\theta) + 3 \cos \theta}{4}.$$

De même

$$\begin{aligned} \sin(3\theta) &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \\ &= 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta, \end{aligned}$$

d'où

$$\sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4}.$$

Ces résultats peuvent être obtenus par *Matlab*. En utilisant la commande *simple*, le mode de simplification *combine(trig)* donne l'expression linéarisée :

```
» syms theta
» simple((cos(theta))^3)
combine(trig) :
1/4*cos(3*theta)+3/4*cos(theta)
```

De même

```
» simple((sin(theta))^3)
combine(trig) :
-1/4*sin(3*theta)+3/4*sin(theta)
```

1.2.7. Formules d'Euler et exponentielle complexe

1.2.7.1. Exponentielle complexe

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on définit e^z par

$$e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

cette définition généralise celle de l'exponentielle réelle. Sa justification rigoureuse utilise la théorie des séries entières. Nous l'admettrons dans ce manuel.

On remarquera que

$$\begin{cases} |e^z| = e^x, \\ \arg(e^z) = y. \end{cases}$$

L'exponentielle complexe vérifie aussi les propriétés suivantes, valables pour tous complexes z, z'

$$\begin{cases} e^0 = 1, \\ \frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}, \\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}, \\ e^z \neq 0, \end{cases}$$

1.2.7.2. Formules d'Euler

On a, pour tout réel y

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y, \\ e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \end{cases}$$

On en déduit les formules, dites d'Euler

$$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{cases}$$

1.2.7.3. Application : dessin du cercle trigonométrique

Soit l'ensemble de complexes

$$C = \{e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]\}.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points images de C est le cercle trigonométrique. Pour le dessiner avec *Matlab*, on définit le tableau

$$T = \left[0, \frac{\pi}{100}, \frac{2\pi}{100}, \dots, 2\pi \right],$$

puis

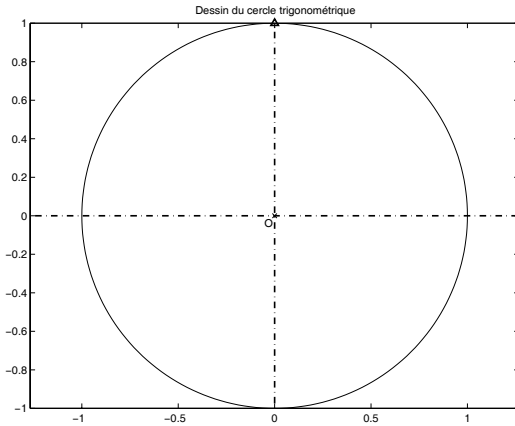
$$Z = e^{iT} = \left[e^{i0}, e^{i\frac{\pi}{100}}, e^{i\frac{2\pi}{100}}, \dots, e^{i2\pi} \right].$$

L'instruction *plot(Z)* permet alors de dessiner les images de ces complexes, en joignant ces points, suffisamment proches les uns des autres.

```

» T=[0 :pi/100 :2*pi];
» Z=exp(i*T);
» plot(Z)
» hold on ; axis equal
» plot(0,0,'x') % on marque l'origine
» gtext('O')
» dessineRepere
» title ('Dessin du cercle trigonométrique')

```



1.2.8. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe

1.2.8.1. Théorème

On a le résultat

Théorème
 || Tout complexe non nul Z admet n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes.

En effet, posons $Z = re^{i\alpha}$ et $z = \rho e^{i\theta}$. L'équation

$$z^n = Z$$

équivalent à

$$\rho^n e^{in\theta} = r e^{i\alpha},$$

soit à

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On en déduit les n racines

$$\begin{cases} z_k = r^{1/n} (\cos(\alpha/n + 2k\pi/n) + i \sin(\alpha/n + 2k\pi/n)) \\ k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

1.2.8.2. Exemple

Grâce aux formules précédentes, les racines cubiques de $i = e^{i\pi/2}$ sont données par

$$\begin{cases} z_0 = \cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_1 = \cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ z_2 = \cos(9\pi/6) + i \sin(9\pi/6) = -i. \end{cases}$$

on le vérifie sous *Matlab*

```

» syms z
» S1 = solve('z^3=i')
S1 =
[-i*(-1/2+1/2*i*3^(1/2))]
[-i*(-1/2-1/2*i*3^(1/2))]
[-i]
» expand(S1)
ans =
[ 1/2*3^(1/2)+1/2*i]
[ 1/2*i-1/2*3^(1/2)]
[-i]
» double(S1)
0.8660+ 0.5000i
-0.8660+ 0.5000i
0- 1.0000i

```

1.2.8.3. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

En particulier pour $Z = 1$, l'équation

$$z^n = 1,$$

admet les n racines suivantes

$$\begin{cases} z_0 = 1, \\ z_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n), \\ z_2 = \cos(4\pi/n) + i \sin(4\pi/n), \\ \vdots \\ z_n = \cos(2(n-1)\pi/n) + i \sin(2(n-1)\pi/n). \end{cases}$$

Toutes ces racines ont des points images sur le cercle unité et la ligne qui les joint forme un polygone régulier.

Dessignons sous *Matlab* ce polygone pour $n = 5$. On calcule la valeur numérique des cinq racines

```

» n=5;
» for k=1 :n;
    Z(k)=cos(2*(k-1)*pi/n)+i*sin(2*(k-1)*pi/n);
end
» Z
Z = 1.0000 0.3090+ 0.9511i -0.8090+ 0.5878i
    -0.8090- 0.5878i 0.3090- 0.9511i

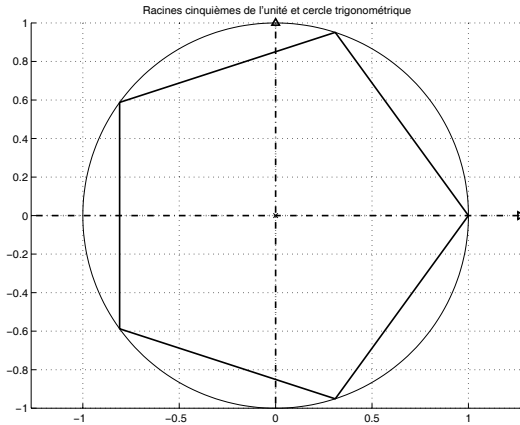
```

Z est ici un tableau de complexes, et la commande $plot(Z)$ va construire la ligne polygonale joignant les images de ces complexes. Il suffit ensuite de joindre le dernier sommet au premier, de marquer l'origine du repère. On dessine sur la même figure le cercle unité (voir § 1.2.7.3).

```

» clf; hold on; axis equal;grid on
» plot(Z,'LineWidth',1.5)
» plot([Z(5) Z(1)],'LineWidth',1.5)
» plot(0,0,'x')
» T=[0 :pi/100 :2*pi]; Z1=exp(i*T);
» plot(Z1); dessineRepere
» title('Racines cinquièmes de l'unité et cercle trigonométrique')

```

1.3. Exercices

1.3.1. Module et argument avec Matlab

Utiliser les fonctions *cart2pol* et *pol2cart* de *Matlab* pour :

- 1) donner le module et l'argument du nombre complexe $-3 + 3i$,
- 2) donner les parties réelle et imaginaire du nombre complexe $[1, \pi/12]$.

(solution p. 27)

1.3.2. Partie réelle et partie imaginaire avec Matlab

Donner avec *Matlab* la partie réelle et imaginaire ainsi que le module et l'argument du complexe

$$z = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}.$$

(solution p. 28)

1.3.3. Vérifications d'identités complexes

Vérifier sous *Matlab* les propriétés suivantes :

- 1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

3) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$,

4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

(solution p. 28)

1.3.4. Racines cubiques de 11) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^3 = 1.$$

On notera z_0 la racine réelle, z_1 et z_2 (les racines complexes).2) Vérifier que $\overline{z_2} = z_1$ et que ces deux racines satisfont à l'équation

$$1 + z + z^2 = 0.$$

3) Placer les images M_0 , M_1 et M_2 de ces trois racines sur un repère orthonormé.

(solution p. 29)

1.3.5. Polynômes de TchebycheffPour tout entier $n \geq 0$ et tout réel x appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$, on définit

$$T_n(x) = \operatorname{Re} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \right)^n.$$

1) Calculer $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$.

2) On pose

$$t = \arccos(x).$$

Vérifier que

a)

$$\left(x + i\sqrt{1-x^2} \right)^n = e^{int},$$

b)

$$e^{i(n+1)t} + e^{i(n-1)t} = 2e^{int} \cos t,$$

3) En déduire la formule de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

4) Montrer par récurrence que, pour $n \geq 1$, $T_n(x)$ est un polynôme de degré n , dont le coefficient de x^n est 2^{n-1} .

5) Calculer avec *Matlab* la suite des polynômes

$$T_k(x), \quad k = 3, \dots, 10$$

et représenter graphiquement T_{10} .

6) En utilisant l'égalité obtenue à la question (2a), montrer que, les n réels

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n$$

sont les n racines du polynôme $T_n(x)$. Vérifier par le calcul avec *Matlab* ce résultat dans le cas $n = 10$. Illustrer graphiquement.

(solution p. 30)

1.4. Solutions

Exercice 1.3.1

1) Conversion de $z_1 = -3 + 3i$.

```

» x1 = -3 ; y1 = 3 ;
» [theta1,rho1] = cart2pol(x1,y1)
theta1 = 2.3562
rho1 = 4.2426
» % Sous forme symbolique
» sym(theta1)
ans = 3*pi/4
» simplify(sym(rho1))
ans = 3*2^(1/2)

```

D'où

$$-3 + 3i = [3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}].$$

2) Conversion de $z_2 = [1, \pi/12]$

```

» rho2 = 1 ; theta2 = pi/12 ;
» [x2,y2]=pol2cart(theta2,rho2)
x2 = 0.9659
y2 = 0.2588
» % Pour obtenir les valeurs exactes :
» [x2,y2]=pol2cart(sym(theta2),sym(rho2))
x2 = 1/4*6^(1/2)*(1+1/3*3^(1/2))
y2 = 1/4*6^(1/2)*(1-1/3*3^(1/2))

```

On a donc

$$\operatorname{Re}(z_2) = \frac{1}{4}\sqrt{6} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \simeq 0,9659$$

et

$$\operatorname{Im}(z_2) = \frac{1}{4}\sqrt{6} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \simeq 0,2588.$$

Exercice 1.3.2

On calcule et simplifie la partie réelle, la partie imaginaire et le module.

```

» z=sym('(-2-2*i*sqrt(3))/(sqrt(3)+i)');
» x=simple(real(z))
x = -3^(1/2)
» y=simple(imag(z))
y = -1
» rho=simplify(abs(z))
rho = 2

```

Pour l'argument, on fait appel à la fonction *angle* qui utilise le complexe en numérique et une double conversion

```

» theta=sym(angle(double(z)))
theta = -5*pi/6

```

Mais, si le calcul numérique de *angle(double(z))* génère une erreur d'arrondi, on peut ne pas retrouver la valeur exacte en convertissant en symbolique. Il est donc plus sûr d'utiliser la formule du paragraphe 1.1.2.3 :

```

»theta=simplify(atan(y/x)+pi)
theta =7/6*pi

```

On obtient le même argument (à 2π près) et finalement

$$z = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = -\sqrt{3} - i = \left[2, -5\frac{\pi}{6} \right].$$

Exercice 1.3.3

On déclare deux complexes quelconques

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

et on vérifie les propriétés demandées.

```

» syms a b c d real
» z1=a+i*b ; z2=c+i*d ;
» conj(z1)
ans=a-i*b
» conj(z1+z2)-conj(z1)-conj(z2)
ans=0
» conj(z1*z2)-conj(z1)*conj(z2)
ans=0
» conj(z1)+z1
ans=2*a
» expand(conj(z1)*z1)
a^2+b^2
» abs(z1)
(a^2+b^2)^(1/2)

```

Exercice 1.3.4.

1) On utilise la commande *solve* pour résoudre l'équation demandée (par défaut, la résolution se fait dans \mathbb{C}).

```

» syms z
» S= solve('z^3-1=0')
S = [ 1]
[ -1/2+1/2*i*3^(1/2)]
[ -1/2-1/2*i*3^(1/2)]

```

Le tableau S contient les solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} S(1) = z_0 = 1 \\ S(2) = z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ S(3) = z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

2) Vérification des relations entre les racines

```

» z1 = S(2) ;
» z2=S(3) ;
» conj(z2)-z1
ans = 0
» simplify(1+z1+z1^2)
ans =0

```

3) On convertit en numérique l'ensemble des solutions S et on dessine le triangle dont les sommets ont pour affixes ces solutions

```

» T = double(S)
T = 1.0000 -0.5000+ 0.8660i -0.5000- 0.8660i
» axis equal ; hold on
» plot(T,'o-')
» plot([T(3) T(1)]) %pour joindre le troisième sommet au premier

```

On complète la figure en dessinant le repère, et le cercle trigonométrique (voir paragraphe 1.2.7.3); les complexes z_0, z_1, z_2 étant les racines cubiques de l'unité, leurs images se trouvent sur ce cercle.

```

» plot(0,0,'x')
» T1=[0 :pi/100 :2*pi];Z1=exp(i*T1);
» plot(Z1); dessineRepere

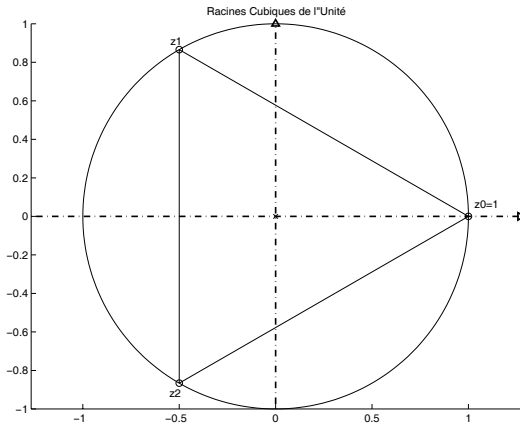
```

Enfin, pour faire apparaître la légende :

```

» gtext('z0=1')
» gtext('z1')
» gtext('z2')
» title ('Racines Cubiques de l'Unité')

```



Exercice 1.3.5

1) On a immédiatement

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x.$$

Avec *Matlab*, on calcule $T_2(x)$

```

» syms n x real
» Tn=real((x+i*sqrt(1-x^2))^n);
» T2=simplify(subs(Tn,n,2))
T2 = 3/2*x^2+i*x*(1-x^2)^(1/2)-1/2-i*x*conj((1-x^2)^(1/2))
    -1/2*conj((1-x^2)^(1/2))^2

```

L'hypothèse $x \in [-1, 1]$ qui implique que $\sqrt{1-x^2}$ est défini dans \mathbb{R} , n'est pas prise en compte par *Matlab*. On effectue donc la simplification

$$\overline{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

```

» T2=subs(T2,'conj((1-x^2)^(1/2))',(1-x^2)^(1/2))
T2 = 2*x^2-1

```

Ainsi $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

a) De $t = \arccos x$, on déduit que

$$\begin{cases} x = \cos t \\ t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

D'où $\sqrt{1-x^2} = \sin t$ et grâce à la définition de l'exponentielle complexe, on a

$$x + i\sqrt{1-x^2} = \cos t + i \sin t = e^{it}.$$

b) Avec *Matlab*, on vérifie que

$$2e^{int} \cos t = e^{i(n+1)t} + e^{i(n-1)t}.$$

```

» syms t real
» E=2*exp(i*n*t)*cos(t);
» simplify(E)
ans =exp(i*t*(n+1))+exp(i*t*(n-1))

```

2) Grâce à la formule précédente, on a

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \operatorname{Re} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \right)^{n+1} \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i(n+1)t} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(2e^{int} \cos t \right) - \operatorname{Re} \left(e^{i(n-1)t} \right) \\ &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

3) $T_1(x) = x$ est un polynôme de degré 1, le coefficient de x^1 est

$$1 = 2^{1-1}.$$

De même, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ est un polynôme de degré 2, le coefficient de x^2 est

$$2 = 2^{2-1}.$$

On suppose que $T_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $n - 1$, et que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n , dont le coefficient de x^n est 2^{n-1} . Alors

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

est un polynôme de degré $n + 1$, dont le coefficient de x^{n+1} est

$$2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$

4) On utilise la relation de récurrence ci-dessus :

```

» syms x real
» T(1)=x;
» T(2)=2*x^2-1;
» for n=2 :9,
    T(n+1)=collect(2*x*T(n)-T(n-1));
end
» T
T =
[ x,
  2*x^2-1,
  4*x^3-3*x,
  8*x^4-8*x^2+1,
  16*x^5-20*x^3+5*x,
  32*x^6-48*x^4+18*x^2-1,
  64*x^7-112*x^5+56*x^3-7*x,
  128*x^8-256*x^6+160*x^4-32*x^2+1,
  256*x^9-576*x^7+432*x^5-120*x^3+9*x,
  512*x^10-1280*x^8+1120*x^6-400*x^4+50*x^2-1]

```

Ainsi

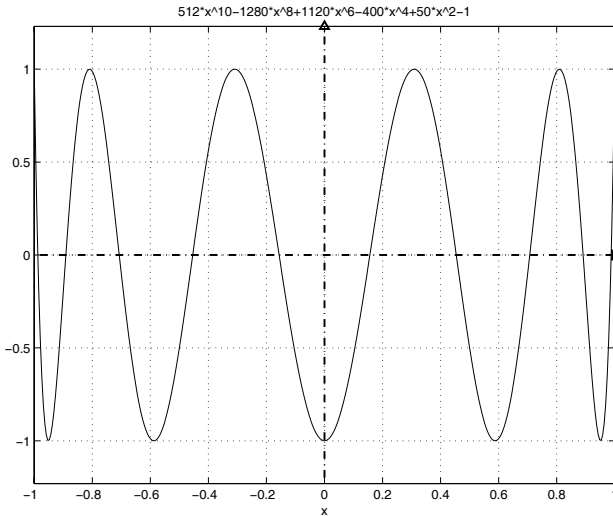
$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1.$$

La représentation graphique de T_{10} est donnée par :

```

» T10=T(10);
» ezplot(T10,-1,1)
» hold on ; grid on
» dessineRepere

```

5) Pour

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n$$

posons

$$t_k = \arccos x_k = \frac{(2k-1)\pi}{n}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} T_n(x_k) &= \operatorname{Re} \left(x_k + i\sqrt{1-x_k^2} \right)^n \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{int_k} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i(2k-1)\pi} \right) = 0. \end{aligned}$$

On effectue la vérification demandée pour $n = 10$:

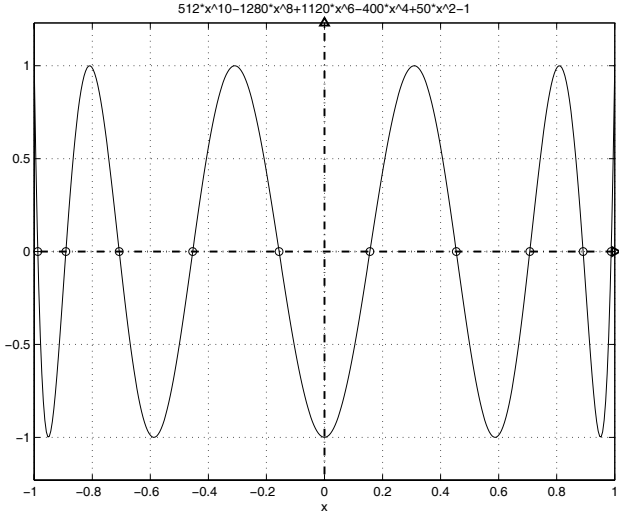
```

» PI=sym('pi');
» for k=1 :10,
    X(k)=cos((2*k-1)*PI/(2*10));
    Y(k)=simple(subs(T10,x,X(k)));
end
» Y
Y = [ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    
```

On représente graphiquement les 10 points de coordonnées

$$\left(\begin{matrix} x_k \\ T_{10}(x_k) \end{matrix} \right).$$

```
» plot(double(X),double(Y),'o');
```



Chapitre 2

Généralités sur les signaux

2.1. Introduction et définitions

2.1.1. *Qu'est-ce qu'un signal ?*

On appelle **signal** (unidimensionnel) toute fonction

$$\begin{aligned} s : E &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto s(t), \end{aligned}$$

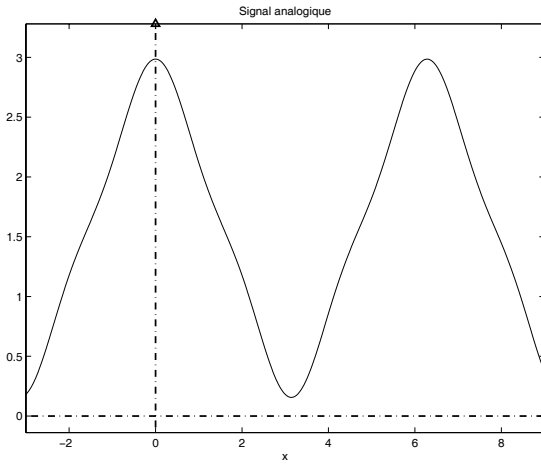
où E est une partie de \mathbb{R} . La valeur réelle ou complexe $s(t)$, est souvent donnée par un appareil de mesure. Comme exemples classiques de signaux, on cite :

- une tension,
- un courant,
- une température, ...

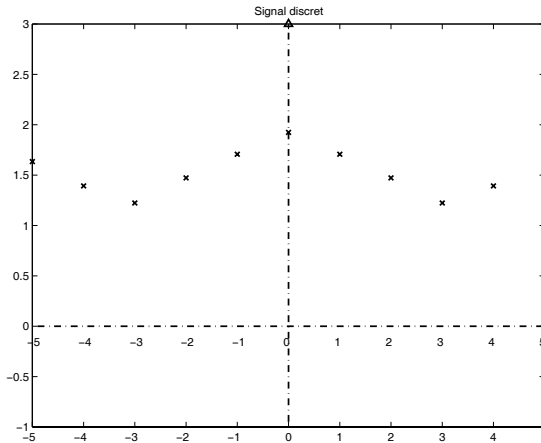
2.1.2. *Différents types de signaux*

Il y a plusieurs sortes de signaux :

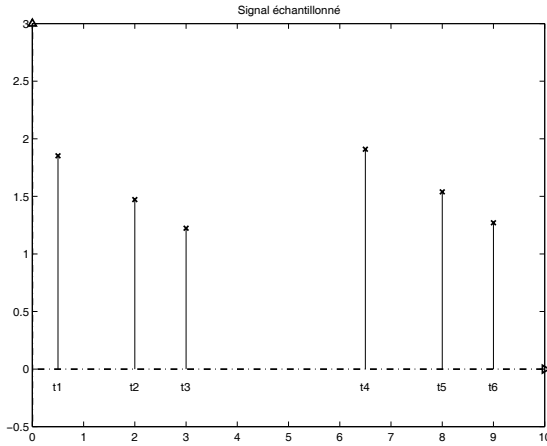
1) si E est un intervalle réel, le signal est dit **analogique** ou continu,



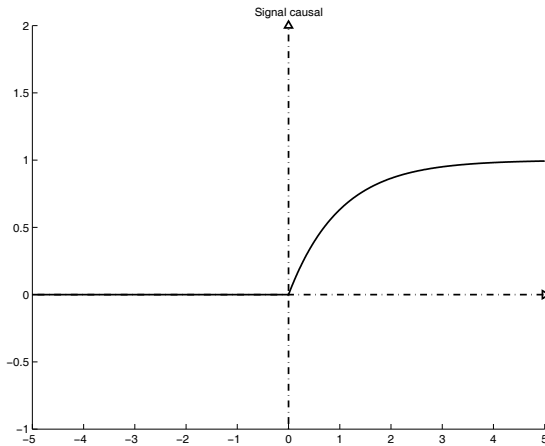
2) si $E = \mathbb{Z}$, le signal est appelé **discret** ou numérique,



3) si $E = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, le signal est dit **échantillonné**.



4) lorsque le signal, défini sur \mathbb{R} , est nul pour $t < 0$, on dira qu'il est **causal**.



2.1.3. Remarques

2.1.3.1. Fonctions à valeurs complexes

Si E est un intervalle de \mathbb{R} , et s une fonction de E vers \mathbb{C}

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto s(t) = s_1(t) + i s_2(t),$$

on dira que s admet une limite $l = l_1 + il_2$ pour $t \rightarrow t_0$ si

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} s_1(t) = l_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} s_2(t) = l_2. \end{cases}$$

On dira de même que s est continue, dérivable, intégrable, etc..., si et seulement si s_1 et s_2 le sont. Par exemple, dans le cas de la dérivabilité, on notera

$$s'(t) = s_1'(t) + is_2'(t),$$

et dans le cas de l'intégrabilité

$$\int_a^b s(t)dt = \int_a^b s_1(t)dt + i \int_a^b s_2(t)dt.$$

Si $E = \mathbb{N}$, en notant

$$s(n) = s_n = a_n + ib_n,$$

on dira que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $l = l_1 + il_2$ pour $n \rightarrow +\infty$ si et seulement si

$$\begin{cases} \lim a_n = l_1 \\ \lim b_n = l_2. \end{cases}$$

Comme la plupart des commandes *Matlab*, *limit*, *diff* et *int* s'appliquent aussi pour les fonctions à valeurs complexes (voir exercice 2.3.1).

2.1.3.2. Signaux multidimensionnels

Un signal peut être multidimensionnel. Par exemple une application

$$\begin{aligned} s : I \times J &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto s(x, y), \end{aligned}$$

peut représenter la teneur en gris des points d'une photo de cadre $I \times J$.

Nous nous limiterons aux signaux unidimensionnels.

2.1.4. Analyse et reconstitution d'un signal

On se limite ici aux définitions simples suivantes :

2.1.4.1. Analyse

Analyser un signal s , c'est pouvoir l'écrire sous forme d'une somme (finie ou infinie) de fonctions élémentaires, faciles à étudier et à tracer localement.

2.1.4.2. Reconstitution

Reconstituer un signal, c'est retrouver la fonction s à partir de la superposition de fonctions élémentaires données. (On parlera ainsi de synthèse).

2.1.4.3. Exemple

Un exemple concret de parfaite analyse d'un signal est illustré lorsqu'un orchestre joue une partition musicale.

En effet si $s(t)$ désigne le son à l'instant t , alors $s(t)$, dans cette partition musicale, devient une superposition "d'harmoniques" (donc de fonctions élémentaires) jouées à l'instant qu'il faut avec la bonne fréquence. On parle alors du **fréquentiel-temporel** bien localisé.

2.1.4.4. Cas général

On voudrait faire de même dans le cas général.

Nous parlerons, dans ce manuel, de deux types d'analyse de signaux :

- 1) analyse par les séries de Fourier (cas périodique),
- 2) analyse par la transformée de Fourier.

2.2. Exemple de signal causal, introductif à la distribution de Dirac

L'exemple suivant introduit concrètement et d'une manière simple l'impulsion dite de Dirac en zéro (appelée aussi masse de Dirac) dont nous n'aborderons pas l'explication mathématique.

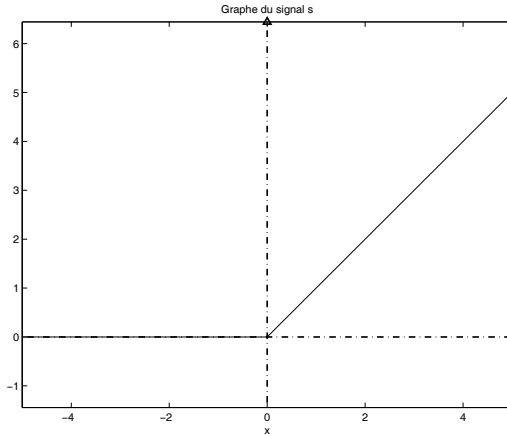
On considère le signal causal (modélisant, par exemple, le débit linéaire en eau, d'un robinet ouvert à l'instant $t = 0$)

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

- 1) On représente graphiquement le signal s sur l'intervalle $[-5, 5]$.

```

» syms t real
» ezplot('t',0,5)
» hold on
» ezplot('0',-5,0)
» axis auto ;axis equal
» dessineRepere
» title ('Graphe du signal s')
```



2) s est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et la fonction dérivée s' est définie par

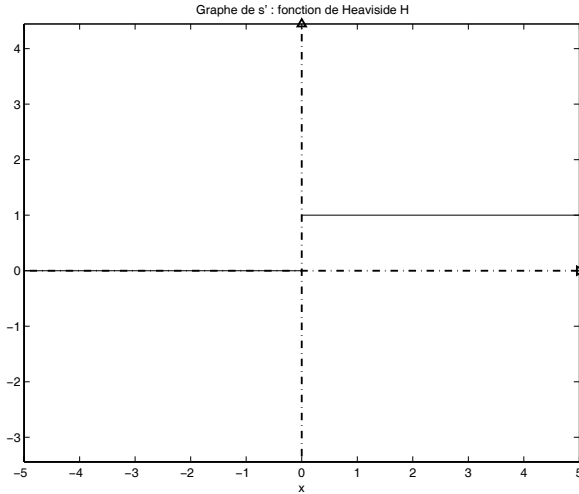
$$s'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On note $s' = H$ (fonction de Heaviside). On représente graphiquement s' .

```

» figure(2);clf
» ezplot('0',-5,0)
» hold on
» ezplot('1',0,5)
» axis auto ; axis equal
» dessineRepere
» title ('Graphe de s' : fonction de Heaviside H')

```

3) On considère un "recollement" continu de H (en vue d'éviter le saut en 0),

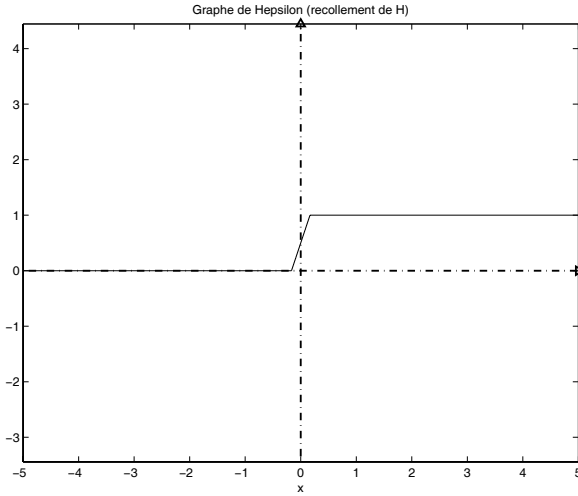
$$H_\varepsilon(t) = \begin{cases} H(t) & \text{si } |t| \geq \varepsilon/2 \\ \frac{1}{\varepsilon}(t + \varepsilon/2) & \text{si } |t| < \varepsilon/2. \end{cases}$$

On représente graphiquement H_ε pour $\varepsilon = 1/3$.

```

» epsi=1/3 ;
» figure(3) ; clf
» ezplot('0',-5,-epsi/2);
» hold on
» ezplot(1/epsi*(t+epsi/2),-epsi/2,epsi/2)
» ezplot('1',epsi/2,5)
» axis auto ; axis equal
» dessineRepere
» title('Graphe de Hepsilon (recollement de H)')

```



4) H_ϵ est dérivable sur $] -\infty, -\epsilon/2[\cup] -\epsilon/2, \epsilon/2[\cup]\epsilon/2, +\infty[$ et on a

$$H'_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \epsilon/2 \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{si } |t| < \epsilon/2. \end{cases}$$

On représente les trois segments horizontaux constituant le graphe de H'_ϵ .

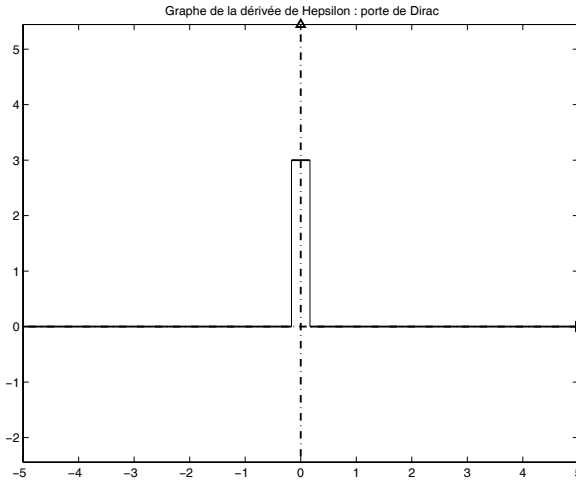
```

» figure(4);clf
» plot([-5 -epsi/2],[0 0],'LineWidth',1.5);
» hold on
» plot([-epsi/2 epsi/2],[1/epsi 1/epsi],'LineWidth',1.5);
» plot([epsi/2 5],[0 0],'LineWidth',1.5);
    
```

Puis on "ferme la porte", dite de Dirac, par deux segments verticaux.

```

» plot ([-epsi/2 -epsi/2],[0 1/epsi])
» plot ([epsi/2 epsi/2],[0 1/epsi])
» axis auto; axis equal
» dessineRepere
» title('Graphe de la dérivée de Hepsilon : porte de Dirac')
    
```



5) Pour tout A supérieur ou égal à $\varepsilon/2$, on a

$$\int_{-A}^A \delta_\varepsilon(t) dt = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1.$$

On dit que la porte de Dirac est de masse égale à 1.

- Pour t fixé différent de 0, on a

$$\delta_\varepsilon(t) = 0,$$

dès que $\varepsilon < 2|t|$, d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = 0.$$

- Pour $t = 0$, on a

$$\delta_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon},$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(0) = +\infty.$$

Cette "limite" exprime l'idée d'une impulsion, notée δ , en zéro. Intuitivement on a envie d'écrire abusivement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Mais on prendra garde que δ n'est pas une fonction. On pourra par contre parler par la suite de **portes de Dirac** en divers points.

2.3. Exercices

2.3.1. Etude d'un signal à valeurs complexes

Soit s le signal à valeurs complexes défini par

$$\begin{aligned} s &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto s(t) = e^{ut}, \end{aligned}$$

où $u = a + ib$, avec a et b deux réels donnés, $b \neq 0$.

1) Ecrire $s(t)$ sous forme algébrique et montrer que $s'(t) = ue^{ut}$. Vérifier ce résultat avec *Matlab*.

2) Calculer avec *Matlab* une primitive de s et

$$\int_0^{2\pi/b} s(t) dt.$$

3) On fixe pour toute la suite

$$a = -1/2, \quad b = 3.$$

Représenter graphiquement dans le plan complexe l'ensemble des valeurs

$$\{s(t) : t \in [0, 5\pi]\}.$$

4) Représenter aussi les fonctions

$$s_1 : t \mapsto \operatorname{Re}(s(t))$$

et

$$|s| : t \mapsto |(s(t))|.$$

(solution p. 45)

2.3.2. Etude d'un signal oscillant

On donne le signal défini par

$$\begin{aligned} s &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t) = \begin{cases} t(1+t) \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1) Vérifier avec *Matlab* la continuité de s en 0. Justifier mathématiquement le résultat.

- 2) Le signal est-il dérivable en 0 ?
- 3) Donner le graphe de s sur l'intervalle $[-1, 2]$.
- 4) Définir dans un fichier *Heaviside.m* la fonction définie par

$$Heaviside(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

et l'utiliser pour définir et représenter graphiquement, sur $[-1, 2]$, la fonction

$$diffHeaviside(t) = Heaviside(t) - Heaviside(t-1).$$

- 5) Dessiner le graphe de la fonction

$$t \mapsto s(t) \cdot diffHeaviside(t)$$

sur le même intervalle.

(solution p. 48)

2.4. Solutions

Exercice 2.3.1

- 1) On a, grâce à la définition de l'exponentielle complexe

$$s(t) = e^{at} \cdot e^{ibt} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt),$$

d'où

$$\begin{cases} s_1(t) = \operatorname{Re}(s(t)) = e^{at} \cos bt \\ s_2(t) = \operatorname{Im}(s(t)) = e^{at} \sin bt, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} s'(t) &= s_1'(t) + i s_2'(t) \\ &= a e^{at} \cos bt - b e^{at} \sin bt + i(a e^{at} \sin bt + b e^{at} \cos bt) \\ &= (a + ib) e^{at} \cos bt + (ia - b) e^{at} \sin bt \\ &= (a + ib) e^{at} \cos bt + i(a + ib) e^{at} \sin bt \\ &= (a + ib) e^{at} (\cos bt + i \sin bt) \\ &= u e^{ut}. \end{aligned}$$

On vérifie sous *Matlab* ce dernier calcul

```

» syms a b t real
» u=a+i*b;
» sDEt=exp(u*t)
sDEt = exp((a+i*b)*t)
» sPrimeDEt=diff(sDEt,t)
sPrimeDEt = (a+i*b)*exp((a+i*b)*t)
```

2) La méthode utilisant la décomposition :

$$\int s(t)dt = \int s_1(t)dt + i \int s_2(t)dt$$

nécessiterait deux intégrations par parties. *Matlab* donne directement

```
» I=int(sDEt,t)
I = 1/(a+i*b)*exp((a+i*b)*t)
```

d'où

$$\int e^{ut} dt = \frac{1}{u} e^{ut} + cste.$$

Pour l'intégrale définie, on a

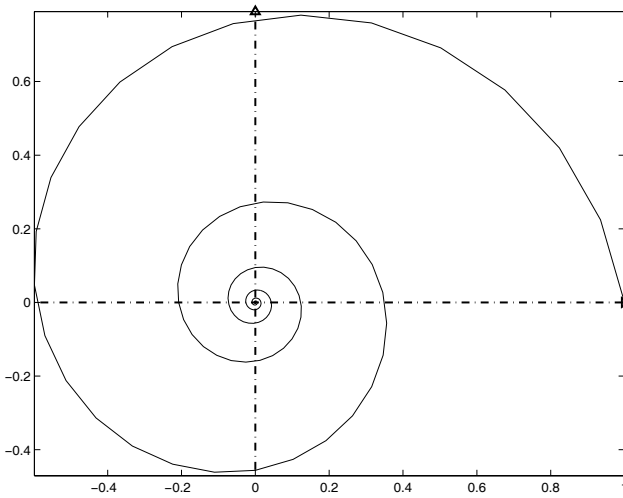
```
» PI=sym('pi');
» I=int(sDEt,t,0,2*PI/b)
I = (exp(2/b*a*pi)-1)/(a+i*b)
```

c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi/b} s(t)dt = \frac{1}{a + ib} \left(e^{\frac{2a}{b}\pi} - 1 \right).$$

3) On remplace a et b par les valeurs données puis on procède comme pour le dessin du cercle trigonométrique (voir chapitre 1, paragraphe 1.2.7.3)

```
» sDEt=subs(sDEt,{a,b},{-0.5,3})
sDEt = exp((-1/2+3*i)*t)
» T=[0 :pi/40 :5*pi];Z=double(subs(sDEt,t,T));
» figure(1);clf
» plot(Z)
» hold on ;axis equal
» dessineRepere
```

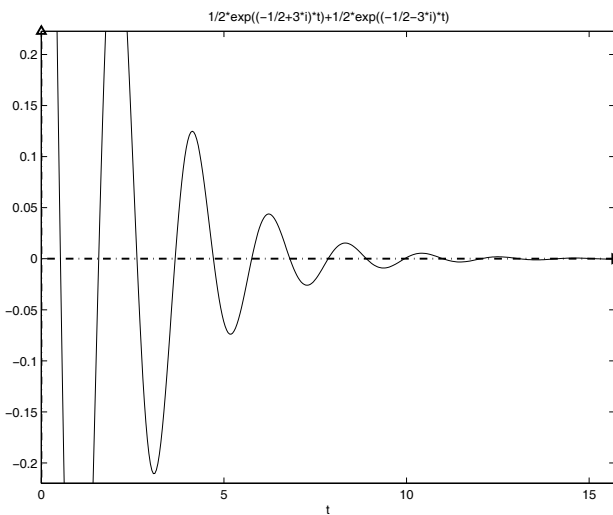


On explicite et on représente graphiquement la partie réelle de s :

```

» figure(2);clf
» s1DEt=real(sDEt)
s1DEt = 1/2*exp((-1/2+3*i)*t)+1/2*exp((-1/2-3*i)*t)
» ezplot(s1DEt,[0 5*pi])
» dessineRepere

```

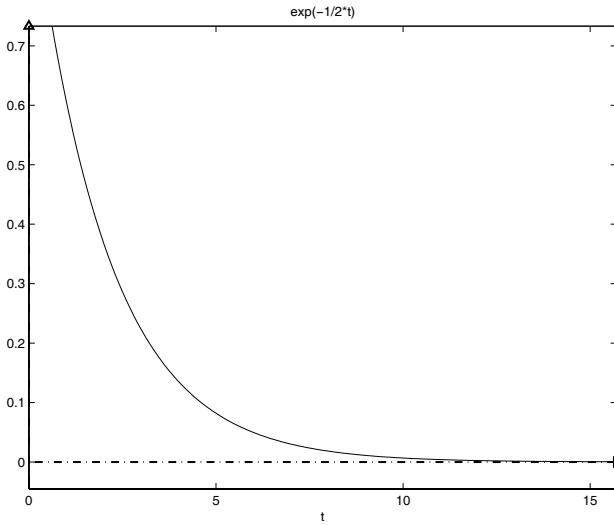


On fait de même pour le module de s

```

» figure(3);clf
» ModsDEt=abs(sDEt)
ModsDEt = exp(-1/2*t)
» ezplot(ModsDEt,[0 5*pi])
» dessineRepere

```



Exercice 2.3.2

1) On calcule avec *Matlab*

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t).$$

```

» syms t real
» sDEt=t*(1+t)*sin(1/t);
» limit(sDEt,t,0)
ans = 0

```

La limite obtenue est 0 car on multiplie la fonction bornée

$$t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

par la fonction

$$t \mapsto t(1+t),$$

qui tend vers 0 pour t tendant vers 0. Le signal est donc continu en 0.

2) On calcule la limite en 0 du rapport

$$\frac{s(t) - s(0)}{t - 0}$$

```
» limit(sDEt/t,t,0)
ans = -1 .. 1
```

Cela indique que le rapport

$$\frac{s(t)}{t} = (1 + t) \sin \frac{1}{t}$$

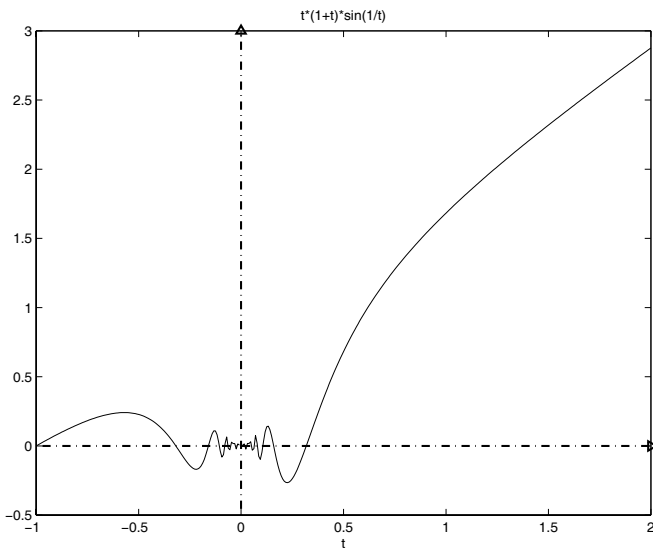
n'admet pas de limite en 0. Cette fois, la fonction oscillante

$$t \mapsto \sin \left(\frac{1}{t} \right)$$

est multipliée par une fonction tendant vers 1.

3) On a

```
» ezplot(sDEt,-1,2)
» axis auto
» dessineRepere
```



4) On définit

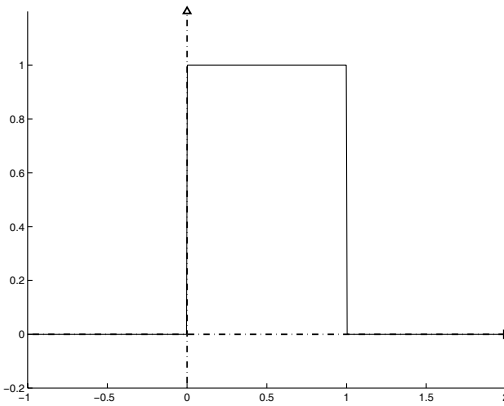
```
function y=Heaviside(t)
if t>=0
    y=1;
else
    y=0;
end
```

puis

```
function y=diffHeaviside(t)
y=Heaviside(t)-Heaviside(t-1);
```

Pour le graphe, on utilise la commande *fplot* :

```
» clf; hold on
» fplot('diffHeaviside',[-1 2])
» axis([-1 2 -0.2 1.2])
» dessineRepere
```

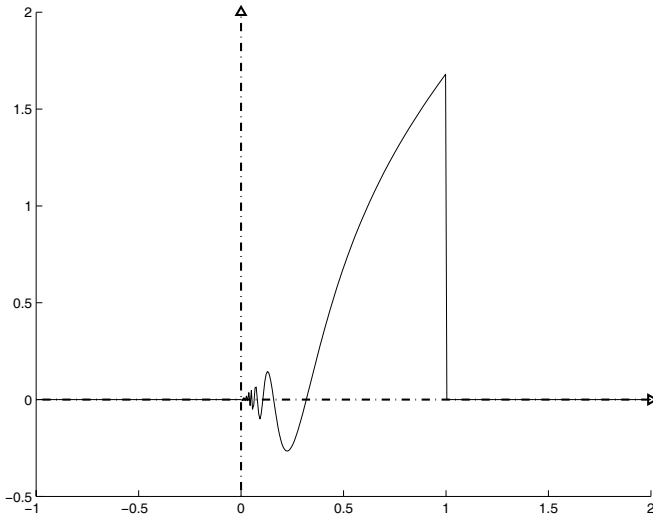


On notera que les barres verticales, générées par *fplot*, n'appartiennent pas au graphe.

5) On a de même :

```
function y=porteHeavisideSinus(t)
y=diffHeaviside(t)*t*(t+1)*sin(1/t);
```

```
» clf; hold on
» fplot(' porteHeavisideSinus',[-1 2])
» dessineRepere
```



Le produit du signal s par la différence des deux "Heaviside" ainsi considérés permet d'obtenir une "porte" de ce signal.

Chapitre 3

Notions sur les séries

3.1. Introduction

En théorie du signal, on est amené à ajouter des signaux élémentaires. Par exemple, si on a :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \cos t, \\ s_2(t) &= \frac{\cos(2t)}{2}, \\ &\vdots \\ s_n(t) &= \frac{\cos(nt)}{n}, \end{aligned}$$

on peut construire la somme

$$S_N(t) = \sum_{n=1}^{n=N} s_n(t),$$

et étudier la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{n=N} s_n(t).$$

Le résultat, lorsqu'il existe, dépendra de la variable t (on parlera alors de **série de fonctions**). La quantité $S_N(0)$ correspond à la somme

$$S_N(0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}.$$

Intuitivement, l'ordre de grandeur de la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{n}$$

n'est pas facile à apprécier. On a bien sûr

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

mais on ajoute un "grand" nombre de ces "petits" termes. Même le calcul numérique avec *Matlab* permet difficilement de conjecturer un résultat :

```

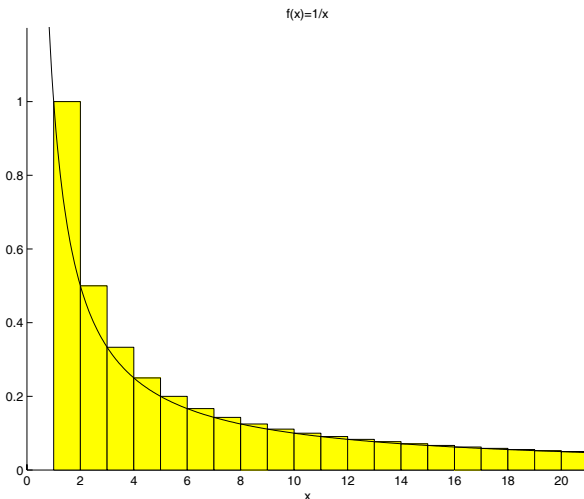
» N = 1 : 1 : 1000 ;
» S = sum(1./N)
S = 7.4855
» N = 1 : 1 : 10000 ;
» S = sum(1./N)
S = 9.7876
    
```

L'interprétation graphique de cette somme, et le calcul intégral montrent que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \dots + \int_N^{N+1} \frac{1}{x} dx,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx = \ln(N + 1).$$



Comme

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(N+1) = +\infty,$$

on déduit

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right) = +\infty.$$

3.2. Séries numériques

3.2.1. Définitions - Exemples

3.2.1.1. Séries convergentes et séries divergentes

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle ou complexe quelconque. On veut donner un sens à la sommation infinie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

Pour cela on pose

$$S_N = \sum_{n=0}^{n=N} u_n.$$

Si la limite $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$ existe et est finie, (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}), on dira que la série

$$\sum_{n \geq 0} u_n$$

est **convergente**. Sa limite

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^{n=N} u_n \right)$$

s'appelle la **somme** de la série et se note

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Si au contraire la suite (S_N) n'a pas de limite finie pour $N \rightarrow \infty$ (pas de limite, ou limite infinie), on dit que la série est **divergente**.

Dans le cas où $S = +\infty$, on notera

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty.$$

On a vu par exemple au paragraphe 3.1 que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right) = +\infty.$$

La série

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n}$$

est donc divergente.

3.2.1.2. Une condition nécessaire de convergence

On retiendra la **condition nécessaire** de convergence d'une série :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si la série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente alors le terme général } u_n \\ \text{tend vers 0 pour } n \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Cette condition n'est pas suffisante, on l'a vu avec la série

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n}.$$

Mais l'utilité de ce résultat est sa contraposée : une série dont le terme général ne tend pas vers zéro est nécessairement divergente. Par exemple la série

$$\sum_{n>0} \frac{n}{1+n},$$

est divergente, puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n} = 1.$$

3.2.1.3. Séries absolument convergentes

Si la série des modules (ou valeurs absolues)

$$\sum_{n \geq 0} |u_n|,$$

est convergente, on dira que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente. On montre que dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , une telle série est convergente. La réciproque n'est pas vraie.

3.2.1.4. Séries semi-convergentes

Une série convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente. On montrera par exemple (voir paragraphe 3.2.4.1) que la série

$$\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n}$$

est convergente, alors que la série des valeurs absolues,

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n},$$

ne l'est pas.

3.2.1.5. Séries géométriques

Un exemple simple de série absolument convergente (et donc convergente), est la série géométrique de raison r , définie par

$$\sum_{n \geq 0} r^n,$$

lorsque le nombre réel ou complexe r est tel que $|r| < 1$. Cette série est absolument convergente et de plus on a

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

(Voir l'exercice 3.4.2).

3.2.1.6. Séries de Riemann

On appelle séries de Riemann, les séries de la forme

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. On retiendra le résultat pratique

$$\left\| \begin{array}{l} \text{La série de Riemann } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente si } \alpha > 1 \\ \text{et divergente si } \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

3.2.2. Espace vectoriel des séries convergentes

Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont convergentes, de sommes S et S' , alors

– la série de terme général $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge, et a pour somme $S + S'$.

– la série de terme général $\sum_{n \geq 0} k \cdot u_n$ converge, sa somme est $k \cdot S$ (k réel ou complexe).

3.2.3. Critères de convergence pour les séries à termes positifs

3.2.3.1. Critères de comparaison

1) Soient deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ à termes positifs vérifiant

$$u_n \leq v_n,$$

pour n assez grand. Alors :

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet \text{ si la série } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente, } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge,} \\ \bullet \text{ si la série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente, } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ diverge.} \end{array} \right.$$

2) Si $u_n \sim v_n$ pour $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = 1$, alors les deux séries sont de même nature.

3.2.3.2. Critère de Cauchy

Soit une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes positifs. Posons

$$a = \lim (u_n)^{1/n}.$$

Alors,

$$\left\| \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente si } a < 1 \text{ et} \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente si } a > 1. \end{array} \right.$$

3.2.3.3. Critère de D'Alembert

De même, pour les séries à termes positifs et non nuls pour n assez grand, posons

$$L = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

alors

$$\left\| \begin{array}{l} \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente si } L < 1 \text{ et} \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente si } L > 1. \end{array} \right.$$

3.2.3.4. Remarque

Pour les deux critères ci-dessus, lorsque

$$L = 1 \text{ ou } a = 1,$$

on ne peut rien conclure.

3.2.4. Séries alternées et critère d'Abel

3.2.4.1. Critère pour les séries alternées

Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite alternée si u_n est de la forme

$$u_n = (-1)^n a_n,$$

où $a_n \geq 0$ pour tout entier n . On montre le résultat (dit d'Abel)

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si la suite } (a_n)_{n \geq 0} \text{ de termes positifs est décroissante et tend vers zéro} \\ \text{alors } \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n \text{ est convergente.} \end{array} \right.$$

Un exemple type est la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

3.2.4.2. Critère d'Abel

Le résultat précédent se généralise aux séries de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n b_n.$$

On a le résultat général d'Abel

Si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est positive, décroissante et tend vers zéro et si, pour tout N , les sommes partielles $\left| \sum_{n=0}^N b_n \right|$ sont majorées par une constante M , alors $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ est convergente.

Une application importante de ce critère sera vue au chapitre suivant, sur les séries trigonométriques.

3.2.5. Calculs avec *Matlab*

Si n, N sont des variables symboliques, a une constante entière et U_n une expression symbolique,

$$\text{symsum}(U_n, a, N)$$

représente

$$\sum_{n=a}^N U_n,$$

et on utilise

$$\text{symsum}(U_n, a, \text{inf})$$

pour calculer

$$\sum_{n=a}^{\infty} U_n.$$

Exemples

On peut vérifier avec *Matlab* que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

est semi-convergente :

```

» syms n
» symsum((-1)^n/n,1,inf)
ans = -log(2)
» symsum(1/n,1,inf)
ans = inf

```

De plus, la somme de cette série est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Mais dans bien des cas, la somme de la série ne peut être explicitement trouvée, et la commande *symsum* est inopérante. Il faut utiliser les théorèmes des paragraphes précédents pour établir la convergence ou la divergence de la série.

Etudions par exemple la série

$$\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On sait que, pour $n \rightarrow +\infty$,

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

est convergente, il en est de même pour la série

$$\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le calcul avec *Matlab* permet de vérifier l'équivalence

```

» syms n real
» Un=sin(1/n^2);
» limit(Un/(1/n^2),n,inf)
ans = 1

```

mais ne donne pas la valeur de la somme

```

» symsum(Un,1,inf)
ans = sum(sin(1/n^2),n = 1 .. inf)

```

3.3. Séries de fonctions

3.3.1. Exemple

On considère la série géométrique

$$\sum_{n \geq 0} x^n.$$

Cette série converge pour tout $x \in]-1, 1[$ (voir l'exercice 3.4.2) et on peut définir sur cet intervalle les fonctions f_n , S_N et S définies respectivement par :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x^n, \\ S_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x), \\ S(x) &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$, $S_N(x)$ converge vers $S(x)$. On peut l'illustrer en représentant graphiquement S , S_5 et S_{10} sur l'intervalle $]-1, 1[$. On déclare ces fonctions

```

» syms x n N real
» S= 1/(1-x);
» SN=(1-x^(N+1))/(1-x);
» S10 = subs(SN,N,10);
» S5 = subs(SN,N,5);

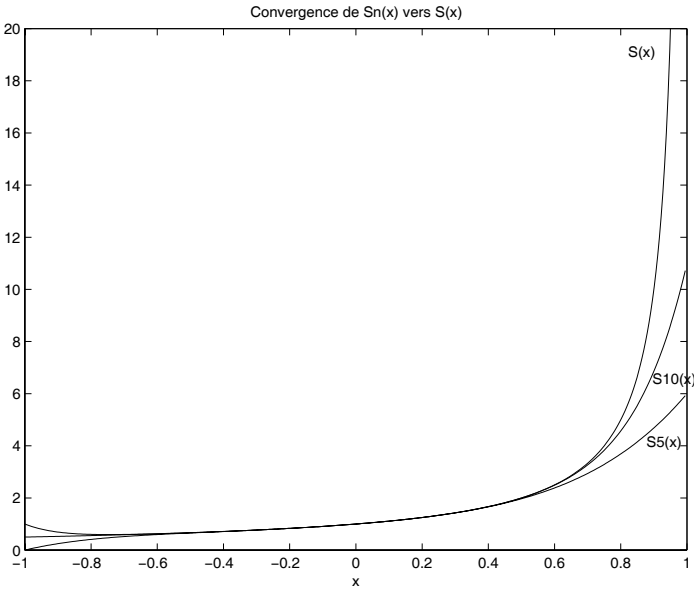
```

puis on trace leurs graphes

```

» ezplot(S,-1,1)
» hold on
» ezplot(S10,-1,1)
» ezplot(S5,-1,1)
» axis([-1 1 0 20])
» gtext('S(x)')
» gtext('S10(x)')
» gtext('S5(x)')
» title('Convergence de Sn(x) vers S(x)')

```



On constate graphiquement que l'écart entre $S(x)$ et $S_N(x)$, pour N donné, est "plus grand" au voisinage des points extrémités -1 et 1 .

Pour x donné dans $] -1, 1[$ et pour un ε petit fixé, cherchons à partir de quelle valeur de N est vérifié

$$|S(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon.$$

On a

$$S(x) - S_N(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{x^{N+1}}{1-x}.$$

L'inéquation

$$\left| \frac{x^{N+1}}{1-x} \right| \leq \varepsilon,$$

se résout en utilisant les logarithmes et donne

$$N \geq \frac{\ln \varepsilon + \ln(1-x)}{\ln |x|} - 1.$$

Notons

$$N_0(\varepsilon, x) = \frac{\ln \varepsilon + \ln(1-x)}{\ln |x|} - 1.$$

Fixons maintenant $\varepsilon = 10^{-6}$ et calculons $N_0(\varepsilon, x)$ pour quelques valeurs de x . (N_0 représente la valeur de N à partir de laquelle $|S(x) - S_N(x)|$ devient inférieur à 10^{-6}).

```

» epsilon = 1e-6;
» N0 = log(epsilon*(1-x))/log(abs(x))-1;
» double(subs(N0,x,.5))
ans = 19.9316
» double(subs(N0,x,.9))
ans = 151.9804
» double(subs(N0,x,.99))
ans = 1831.8

```

On constate que lorsque x s'approche de 1, $N_0(\varepsilon, x)$ devient de plus en plus grand. En fait on a

```

» limit(N0,x,1,'left')
ans = inf

```

Par contre, si on se restreint à l'intervalle $I = [-1/2, 1/2]$, on a, pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned}
 |S(x) - S_N(x)| &= \frac{|x|^{N+1}}{1-x} \\
 &\leq \frac{(1/2)^{n+1}}{1/2},
 \end{aligned}$$

donc

$$|S(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon,$$

pour tout $N > N_0$, avec

$$N_0(\varepsilon) = \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}.$$

Cette fois, la valeur de $N_0 = N_0(\varepsilon)$ est choisie de manière **uniforme** par rapport à tout $x \in [-1/2, 1/2]$.

Par exemple, pour $\varepsilon = 10^{-6}$, on trouve

```

» N0=-log(10^-6)/log(2)
N0 = 19.9316

```

ce qui veut dire que, pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$ et pour tout $N \geq 20$,

$$|S(x) - S_N(x)| \leq 10^{-6}.$$

Cela nous conduit à poser les définitions suivantes.

3.3.2. Définitions

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ où

$$\begin{aligned} f_n : E &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto f_n(x), \end{aligned}$$

où E est une partie de \mathbb{R} , le plus souvent un intervalle. On va alors étudier la série

$$\sum_{n \geq 0} f_n(x),$$

pour $x \in E$.

3.3.2.1. Convergence simple

On dira que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge **simplement** sur E si pour chaque $x \in E$,

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$$

admet une limite, notée $S(x)$, pour $N \rightarrow \infty$. On écrira

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Cette convergence est clairement dépendante de x . Ici tous les critères précédents de convergence des séries numériques s'appliquent.

3.3.2.2. Convergence absolue

La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge absolument sur E si la série

$$\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|$$

converge pour tout $x \in E$.

3.3.2.3. Convergence uniforme

La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge **uniformément** sur E vers une fonction S s'il existe un rang assez grand N_0 **indépendant de** $x \in E$, tel que pour $N \geq N_0$ et pour tout $x \in E$, la quantité

$$|S_N(x) - S(x)|$$

est aussi petite qu'on veut.

On écrira

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

3.3.2.4. *Remarque*

On fera la distinction entre :

– Convergence simple :

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists N_0(\varepsilon, x) : \\ & N \geq N_0(\varepsilon, x) \Rightarrow |S_N(x) - S(x)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

– Convergence uniforme :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) \quad \forall x \in E : \\ N \geq N_0(\varepsilon) \Rightarrow |S_N(x) - S(x)| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

3.3.2.5. *Convergence normale*

On dira que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge **normalement** si sont vérifiées les deux conditions suivantes :

- 1) pour tous $t \in E$, $n \geq 0$, $|f_n(t)| \leq a_n$,
- 2) la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente.

Cette convergence normale implique la convergence absolue et uniforme.

3.3.2.6. *Liens entre ces convergences*

On retiendra les implications importantes suivantes entre les différents types de convergence des séries de fonctions définies ci-dessus :

- $$\left\| \begin{array}{l} i) \text{ la convergence uniforme sur } E \text{ implique la convergence simple sur } E, \\ ii) \text{ la convergence absolue sur } E \text{ implique la convergence simple sur } E, \\ iii) \text{ la convergence normale sur } E \text{ implique la convergence absolue,} \\ \quad \text{simple et uniforme sur } E. \end{array} \right.$$

3.3.3. *Propriétés des séries de fonctions*3.3.3.1. *Continuité de la somme*

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si chaque fonction } f_n \text{ est continue sur } [a, b] \text{ et si la série de fonctions} \\ \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } E, \text{ alors la somme } S \text{ est continue sur } [a, b]. \end{array} \right.$$

3.3.3.2. Intersion des signes \sum et \int

Si, sur un intervalle $[a, b]$, chaque f_n est intégrable et la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément, alors sa somme S est intégrable sur $[a, b]$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt.$$

3.3.3.3. Dérivation terme à terme

Si la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ de fonctions dérivables f_n , converge simplement sur $[a, b]$ et que la série $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la somme S est dérivable, on peut dériver terme à terme et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)'(x).$$

3.4. Exercices

3.4.1. Séries numériques : étude de convergence

Etudier avec *Matlab* la nature des séries numériques définies par leur terme général :

1) $u_n = \cos\left(\frac{2}{1+n}\right)$, (étudier la limite de son terme général),

2) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$, (utiliser un développement de Taylor à l'ordre 4, pour trouver un équivalent du terme général u_n),

3) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1}$, (montrer que $u_n \sim 1/n$, pour $n \rightarrow \infty$ et conclure).

(solution p. 69)

3.4.2. Séries géométriques

1) Vérifier que pour tout réel $r \neq 1$ et tout entier n

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{(n+1)}}{1 - r}.$$

2) En utilisant le fait que pour $0 \leq r < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0,$$

donner la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

(solution p. 70)

3.4.3. Série de fonctions à valeurs complexes

Soit la série de fonctions $\sum_{n>0} f_n(x)$ où

$$f_n(x) = \frac{1}{n(x + in)}, \quad n > 0.$$

1) Montrer que pour tout x réel, on a

$$|f_n(x)| \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

2) Que peut on déduire pour la convergence de la série donnée ?

3) Vérifier que pour tout x réel et pour tout entier $n > 0$, on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2},$$

qu'en déduit on ?

(solution p. 70)

3.4.4. Sommes trigonométriques

Pour $t \neq 2k\pi$, et $N \in \mathbb{N}$, on considère les sommes

$$\begin{cases} S_1(t) = 1 + \cos(t) + \cos(2t) + \dots + \cos(Nt), \\ S_2(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \dots + \sin(Nt). \end{cases}$$

1) Calculer $S_1 + iS_2$ en utilisant l'exponentielle complexe et la somme des termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

2) Vérifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$2i \sin(\theta/2)e^{i\theta/2} = 1 - e^{i\theta}.$$

3) En déduire une expression simplifiée du rapport

$$S = \frac{1 - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}},$$

puis de $\operatorname{Re}(S)$ et $\operatorname{Im}(S)$.

4) En déduire que le critère d'Abel s'applique pour les séries

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nt)}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nt)}{n}.$$

(solution p. 71)

3.5. Solutions

Exercice 3.4.1

1) Etude de la première série :

```
» syms n real
» limit ('cos(2/(1+n))',n,inf)
ans=1
```

la série est donc divergente. On remarquera ici que la commande *symsum* de *Matlab* ne permet pas de conclure :

```
» syms n real
» symsum(cos(2/(1+n)),0,inf)
ans=sum(cos(2/(1+n)),n=0..inf)
```

2) Etude de la deuxième série avec les D.L.

```
» syms x nreal
» taylor (sin(x)-tan(x), 0, 4)
ans=-1/2*x^3
» subs(ans,x,1/n)
-1/2/n^3
```

Ce développement montre que la série considérée garde un signe constant (ici négatif) pour n assez grand. Elle est convergente grâce au critère de convergence des séries de Riemann puisque son terme général est équivalent à k/n^3 .

3) Etude de la troisième série

```

» syms n real
» Un=sqrt(n^2+n+1)-sqrt(n^2+n-1);
» limit(Un/(1/n),n,inf)
ans=1

```

Le terme général est donc équivalent à $1/n$, la série diverge.

Exercice 3.4.2

Soit $r \neq 1$, alors

```

» syms r n k real
» Sn=symsum(r^k,k,0,n)
Sn=r^(n+1)/(r-1)-1/(r-1)

```

on en déduit que si $r \in [0, 1[$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim \left(\frac{r^{n+1}}{r-1} - \frac{1}{r-1} \right) = \frac{1}{1-r}.$$

Exercice 3.4.3.

1) Pour x fixé, on définit

$$g_n(x) = |f_n(x)| = \left| \frac{1}{n(x + in)} \right|.$$

On calcule pour cela le module du terme général :

```

» syms x real ; syms n positive
» fnDEx= 1/(n*(x+i*n));
» gnDEx=abs(fnDEx)
gnDEx = 1/n/(x^2+n^2)^(1/2)

```

Puis on vérifie que

$$g_n(x) \sim \frac{1}{n^2}$$

est équivalent à $1/n^2$:

```

» limit(gnDEx/(1/n^2),n,inf)
ans = 1

```

2) Cela prouve que la série

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n(x+in)}$$

converge, simplement et absolument, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Mais on peut aussi obtenir une majoration uniforme de $|f_n(x)|$. On a, pour tout x réel :

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n\sqrt{x^2+n^2}} \leq \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}.$$

Il existe donc une série numérique convergente, de terme général

$$a_n = \frac{1}{n^2},$$

qui majore la série étudiée pour tout $x \in \mathbb{R}$: il y a convergence normale de la série, donc aussi convergence uniforme sur \mathbb{R} .

Exercice 3.4.4

1) On rappelle que $\cos(t) + i \sin(t) = e^{it}$. D'où

$$S_1 + iS_2 = 1 + e^{it} + e^{i2t} + \dots + e^{iNt} = \sum_{k=0}^N e^{ikt}.$$

C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{it} , d'où la somme

$$\begin{aligned} S_1 + iS_2 &= 1 + e^{it} + e^{i2t} + \dots + e^{iNt} \\ &= \frac{1 - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}}. \end{aligned}$$

Le calcul de cette somme s'effectue aussi sous *Matlab* :

```

» syms t k N real
» S1PlusIS2=symsum(exp(i*k*t),k,0,N)
S1PlusIS2 = 1/(exp(i*t)-1)*exp(i*(N+1)*t)-1/(exp(i*t)-1)

```

2) Vérification de l'égalité $2ie^{i\theta/2} \sin(\theta/2) = e^{i\theta} - 1$:

```

» syms theta real
» Expr1=factor(2*i*sin(theta/2)*exp(i*theta/2))
Expr1 = 2*i*sin(1/2*theta)*exp(1/2*i*theta)
» Expr2=simplify(Expr1)
Expr2 = exp(i*theta)-1

```

3) D'après la question précédente, on a donc

$$S = \frac{1 - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{2ie^{i(N+1)t/2} \sin((N+1)t/2)}{2ie^{it/2} \sin(t/2)}.$$

Mais d'après la première question, on a aussi

$$S_1 + iS_2 = S.$$

La partie réelle et la partie imaginaire de S s'obtiennent par

```

» S=exp(1/2*i*(N+1)*t)*sin(1/2*(N+1)*t)/(exp(1/2*i*t)*sin(1/2*t));
» S1=simplify(real(S))
S1 = sin(1/2*(N+1)*t)*cos(1/2*t*N)/sin(1/2*t)
» S2=simplify(imag(S))
S2 = sin(1/2*(N+1)*t)*sin(1/2*t*N)/sin(1/2*t)

```

D'où les égalités :

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + \cos(t) + \cos(2t) + \dots + \cos(Nt) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{N}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_2 &= \sin(t) + \sin(2t) + \dots + \sin(Nt) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{N}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \end{aligned}$$

4) On en déduit que la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nt)}{n}$$

est convergente simplement pour tout $t \neq 2k\pi$ grâce au lemme d'Abel. En effet la suite définie par $a_n = 1/n$ est positive et décroissante vers zéro. D'autre part les sommes partielles suivantes sont majorées par une constante indépendante de N :

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin(nt) \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right) \sin\left(\frac{N}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|}.$$

On pourra en déduire que la série est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[\theta, 2\pi - \theta]$ pour tout θ dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. Le raisonnement précédent est valable pour l'autre série.

Chapitre 4

Analyse des signaux périodiques

4.1. Les séries trigonométriques

4.1.1. Définitions

On appelle série trigonométrique, une série de la forme

$$\sum_{n \geq 0} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)),$$

où $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites complexes, ω est un nombre réel donné et $t \in \mathbb{R}$

On pourra aussi écrire cette série sous la forme

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

Pour tout $n > 0$, la fonction élémentaire

$$t \mapsto a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

est appelée une harmonique et constitue une fonction périodique de période

$$T_n = \frac{2\pi}{n\omega}.$$

Une période commune pour toutes les harmoniques est

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Le nombre $\omega = 2\pi/T$ est appelé **fréquence** de la série trigonométrique. Si celle-ci converge vers $s(t)$ pour un t donné (convergence simple), on a

$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega(t + 2\pi/\omega)) + b_n \sin(n\omega(t + 2\pi/\omega))) \\ &= s(t + 2\pi/\omega). \end{aligned}$$

La somme s est périodique, de période T .

4.1.2. Convergence de la série

4.1.2.1. Condition suffisante de convergence

Si on suppose que les séries $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ et $\sum_{n \geq 0} |b_n|$ sont convergentes, alors la série trigonométrique

$$\sum_{n \geq 0} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

est normalement convergente. On peut alors appliquer les résultats des paragraphes 3.3.2.6 et 3.3.3 du chapitre 3 pour déduire qu'elle est uniformément convergente, et sa somme est continue sur \mathbb{R} .

4.1.2.2. Critère d'Abel

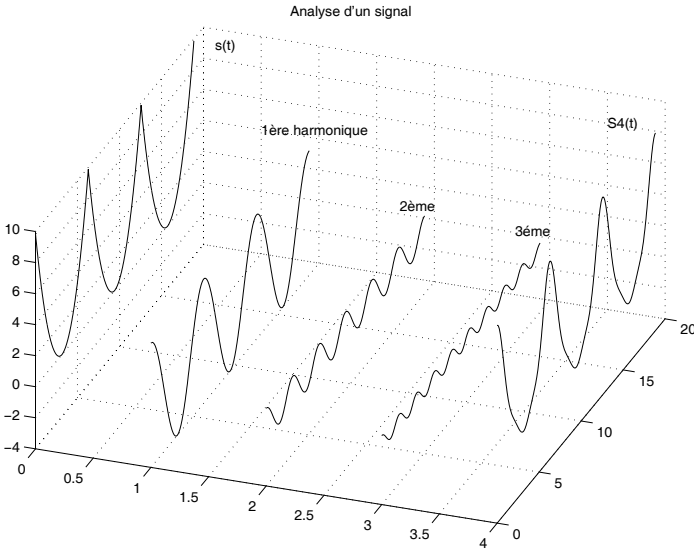
Si on suppose que les deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont réelles, positives et décroissantes vers zéro, le critère d'Abel s'applique pour dire que la série trigonométrique est convergente pour tout $t \neq kT = k \frac{2\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lorsque t est multiple de la période, on doit faire une étude particulière.

4.1.3. Illustration graphique

On donne ci-dessous une représentation graphique d'un signal périodique $s(t)$. On représente ses premières harmoniques et la somme partielle

$$S_4(t) = a_0 + \sum_{n=1}^4 (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$



4.2. Séries de Fourier d'un signal

4.2.1. Coefficients de Fourier

On part d'une série trigonométrique

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)),$$

et on suppose qu'elle converge vers un signal $s(t)$ sur un intervalle de longueur

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

de la forme $[\alpha, \alpha + T[$. Alors, on montre que les coefficients a_n et b_n s'expriment en fonction du signal de la manière suivante :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t) dt,$$

et pour tout $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Réciproquement, soit un signal T -périodique s , alors les formules précédentes constituent ce qu'on appelle les coefficients de Fourier de s et la série trigonométrique correspondante est dite **la série de Fourier de s** .

Ainsi, la série de Fourier d'un signal s périodique de période T , lorsqu'elle converge (simplement ou uniformément), constitue une analyse de s .

4.2.2. Propriétés des séries de Fourier

On retiendra les propriétés suivantes :

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet \text{ si le signal est une fonction paire alors } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0, \\ a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) dt \quad \text{et} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt, \\ \bullet \text{ si le signal est une fonction impaire alors } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0, \text{ et} \\ b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \sin(n\omega t) dt, \end{array} \right.$$

et le résultat de Dirichlet :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{si le signal périodique } s \text{ est dérivable par morceaux, alors sa série de} \\ \text{Fourier converge partout et on a :} \\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \begin{cases} s(t) & \text{si } s \text{ est continu en } t \\ \frac{1}{2} [s(t_+) + s(t_-)] & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Ici, $s(t_+)$, $s(t_-)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de s au point t .

4.2.3. Energie et formule de Parseval d'un signal

4.2.3.1. Energie

L'énergie d'un signal T -périodique s , est la quantité (lorsqu'elle est finie)

$$E(s) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |s(t)|^2 dt,$$

appelée aussi le carré de la valeur efficace de s sur l'intervalle $[\alpha, \alpha + T[$. L'énergie d'une harmonique de rang $p \geq 1$, sur un intervalle de longueur T , se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)|^2 dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} (a_p^2 \cos^2(p\omega t) + b_p^2 \sin^2(p\omega t) + 2a_p b_p \cos(p\omega t) \sin(p\omega t)) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} a_p^2 \cos^2(p\omega t) dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} b_p^2 \sin^2(p\omega t) dt \\
 &\quad + \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} a_p b_p \sin(2p\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} a_p^2 (1 - \sin^2(p\omega t)) dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} b_p^2 \sin^2(p\omega t) dt \\
 &= a_p^2 + \frac{b_p^2 - a_p^2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} \sin^2(p\omega t) dt \\
 &= a_p^2 + \frac{b_p^2 - a_p^2}{2T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} (1 - \cos(2p\omega t)) dt \\
 &= \frac{b_p^2 + a_p^2}{2}
 \end{aligned}$$

4.2.3.2. Formule de Parseval

En sommant toutes les énergies des harmoniques de la série de Fourier d'un signal périodique s (supposée convergente) on obtient la formule dite de Parseval

$$a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_p^2 + a_p^2}{2} = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |s(t)|^2 dt.$$

4.2.4. Exemple modèle

On donne le signal s , 2π -périodique et pair défini par

$$s(t) = \pi - t \quad \text{pour } t \in [0, \pi],$$

et on se propose de donner sa représentation graphique, ses coefficients et sa série de Fourier et une représentation approchée de celle-ci.

1) L'expression de $s(t)$ n'est donnée que sur l'intervalle $[0, \pi]$, mais, par parité, on déduit que, pour $t \in [-\pi, 0[$,

$$s(t) = s(-t) = \pi - (-t) = \pi + t,$$

et par périodicité, pour $t \in]\pi, 2\pi]$,

$$s(t) = s(t - 2\pi) = \pi + (t - 2\pi) = -\pi + t,$$

pour $t \in]2\pi, 3\pi]$,

$$s(t) = s(t - 2\pi) = \pi - (t - 2\pi) = 3\pi - t.$$

On pourrait de même obtenir l'expression de $s(t)$ sur les intervalles

$$]2k\pi - \pi, 2k\pi] \text{ et }]2k\pi, 2k\pi + \pi].$$

Ces résultats peuvent aussi s'obtenir par le calcul symbolique de *Matlab*.

```

» syms t real ;
» PI=sym('pi');
» sDeTsurO_Pi=pi-t;
» sDeTsurMoinsPi_0= subs(sDeTsurO_Pi,t,-t)
sDeTsurMoinsPi_0 = pi+t
» sDeTsurPi_2Pi = subs(sDeTsurMoinsPi_0,t,t-2*PI)
sDeTsurPi_2Pi = -pi+t
» sDeTsur2Pi_3Pi = subs(sDeTsurO_Pi,t,t-2*PI)
sDeTsur2Pi_3Pi = 3*pi-t

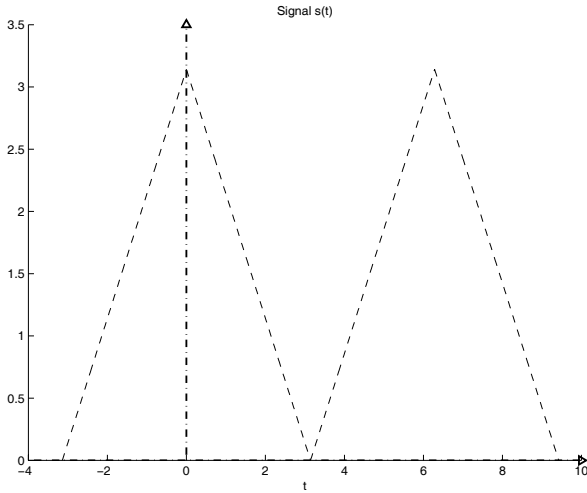
```

On peut alors construire la représentation graphique de s sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$.

```

» clf ; set(gca,'LineStyle','-')
» hold on
» ezplot(sDeTsurO_Pi,0,pi)
» ezplot(sDeTsurMoinsPi_0,-pi,0)
» ezplot(sDeTsurPi_2Pi,pi,2*pi)
» ezplot(sDeTsur2Pi_3Pi,2*pi,3*pi)
» axis auto
» dessineRepere
» title('Signal s(t)')

```

Avec *Matlab*, une autre méthode consiste à définir, sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$ la fonction mathématique s dans un fichier "*signalExemple.m*", puis à utiliser la commande *fplot* pour effectuer la représentation graphique.

```
function y=signalExemple(t)
if t>=0 & t<=pi
    y=pi-t;
else
    if t<0 & t>=-pi
        y=signalExemple(-t);%par parité
    else
        if t>pi & t<=3*pi
            y=signalExemple(t-2*pi);%par périodicité
        end
    end
end
end
```

```
» fplot('signalExemple',[-pi 3*pi],'LineStyle','--')
» title('Signal s(t)')
» dessineRepere
```

2) Pour le calcul des coefficients de Fourier, on reprend les formules du paragraphe 4.2.1, en précisant qu'ici on a

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi,$$

donc $\omega = 1$. L'intervalle adéquat de travail est $[-\pi, +\pi[$ et correspond à $\alpha = -\pi$. Le signal étant pair, on ne calculera que les a_p . Pour le calcul des coefficients a_0 et a_n

($n \geq 1$), on a

```

» syms t p real
» PI= sym('pi');
» a0=2/(2*PI)*int(PI-t,t,0,PI)
a0=1/2*pi
» ap=2/PI*int((PI-t)*cos(p*t),t,0,PI)
ap=-2/pi*(cos(pi*p)-1)/p^2

```

Ainsi, $a_0 = \pi/2$, et pour $p > 0$

$$a_p = \frac{2}{\pi p^2} (1 - \cos(p\pi)) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ pair} \\ 4/(\pi p^2) & \text{si } p \text{ impair.} \end{cases}$$

On en déduit que la série de Fourier de s est

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k \geq 0} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos(2k+1)t.$$

Le terme général de cette série vérifie pour tout $k \geq 1$, la majoration

$$\left| \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos(2k+1)t \right| \leq \frac{4}{\pi(2k+1)^2}.$$

Or

$$\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \sim \frac{1}{\pi k^2}.$$

Cela assure une convergence normale de la série sur tout \mathbb{R} et donc une convergence uniforme.

3) La représentation graphique de la somme partielle à l'ordre 3,

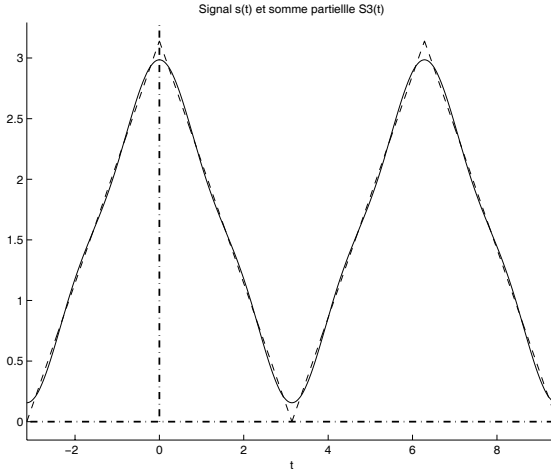
$$S_3(t) = \frac{\pi}{2} + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t) + a_3 \cos(3t),$$

est donnée par

```

» a1=a1=simplify(subs(ap,p,sym('1')))
a1=4/pi
» a2= simplify(subs(ap,p,sym('2')))
a2=0
» a3= simplify(subs(ap,p,sym('3')))
a3=4/9/pi
» S3=a0+a1*cos(t)+a2*cos(2*t)+a3*cos(3*t);
» ezplot(S3,[-pi 3*pi])
» title('Signal s(t) et somme partielle S3(t)')

```



Les graphes de s et de S_3 sont assez proches. Ici, s est continue et donc, d'après le résultat de Dirichlet, on a en tout $t \in \mathbb{R}$,

$$s(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t).$$

4.2.5. Écriture complexe des séries de Fourier

4.2.5.1. Coefficients complexes de Fourier

Il est souvent commode d'utiliser l'expression complexe des séries de Fourier, grâce à l'utilisation des formules d'Euler

$$\begin{cases} \cos(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \\ \sin(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) &= a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega t}. \end{aligned}$$

Posons

$$c_0 = a_0$$

et pour tout $n > 0$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t) (\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t) e^{-in\omega t} dt. \end{aligned}$$

On a de même

$$\frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t) e^{in\omega t} dt.$$

Pour $n > 0$, on convient alors de noter

$$c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t) e^{in\omega t} dt.$$

D'où l'écriture complexe

$$\begin{aligned} &a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \\ &= a_0 + \sum_{n \geq 1} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n \geq 1} c_{-n} e^{-in\omega t}. \end{aligned}$$

Cette dernière écriture peut se noter sous la forme d'une série à double entrée

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t},$$

et on définit la convergence de celle-ci comme suit : on dira qu'elle est convergente si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 0} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t})$$

est convergente.

On retiendra donc que l'écriture complexe de la série de Fourier de s est

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t},$$

où, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t) e^{-in\omega t} dt.$$

Ce dernier est appelé le coefficient complexe de Fourier de s .

Il est souvent commode de calculer ce coefficient pour ensuite en déduire les coefficients a_n et b_n .

4.2.5.2. Exemple modèle

On donne le signal périodique de période 1 défini sur $[0, 1[$ par

$$s(t) = e^{-t}.$$

1) Pour représenter graphiquement s sur l'intervalle $[-1, 3[$ par exemple, on utilise la périodicité :
pour k entier et $t \in [k, k + 1[$, on a

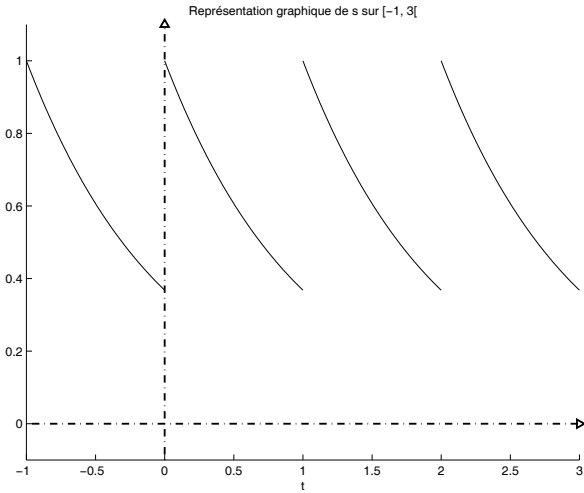
$$s(t) = s(t - k) = e^{-(t-k)}$$

D'où

```

» syms t real
» figure(1); clf
» set(gca,'LineStyle','-')
» hold on
» for k=-1 :2
    ezplot(exp(-(t-k)),k,k+1)
end
» axis([-1 3 -0.1 1.1])
» dessineRepere
» title('Représentation graphique de s sur [-1, 3[')

```



2) Pour calculer les coefficients de Fourier, on se place sur l'intervalle de travail

$$[\alpha, \alpha + T[= [0, 1[.$$

On a donc $\alpha = 0, T = 1, \omega = 2\pi$.

Ici, le calcul des coefficients complexes c_n est plus simple, en utilisant les calculs sur l'exponentielle complexe (voir chapitre 2, exercice 2.3.1) :

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} s(t) e^{-in\omega t} dt \\
 &= \int_0^1 e^{-t} e^{-2i\pi n t} dt \\
 &= \int_0^1 e^{-(1+2i\pi n)t} dt \\
 &= \frac{-1}{2i\pi n + 1} \left[e^{-(1+2i\pi n)t} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2i\pi n + 1} \left(e^{-(1+2i\pi n)} - 1 \right) \\
 &= -\frac{e^{-1} - 1}{2i\pi n + 1}.
 \end{aligned}$$

Ces calculs peuvent aussi s'effectuer avec *Matlab*.

```

» syms t n real
» PI = sym('pi');
» T = 1;
» omega = (2*PI)/T;
» s = exp(-t);
» Cn = simplify((1/T)*int(s*exp(-i*n*omega*t),t,0,T))
Cn = -1/(1+2*i*n*pi)*((-1)^(-2*n)*exp(-1)-1)

```

D'où la série de Fourier de s :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1 - e^{-1}}{1 + 2i\pi n} e^{2i\pi n t}.$$

3) En utilisant les coefficients de Fourier complexes, on calcule les premières harmoniques

$$h_k(t) = c_k e^{ik\omega t} + c_{-k} e^{-ik\omega t},$$

pour $k = 1, 2, 3$. On peut vérifier que les trois fonctions obtenues (et placées dans le tableau H) sont réelles.

```

» for k=1 :3
    Ck=subs(Cn,n,k);
    CMoinsk=subs(Cn,n,-k);
    H(k)=simplify(Ck*exp(i*k*omega*t)+CMoinsk*exp(-i*k*omega*t));
end
» simplify(imag(H))
ans = [ 0, 0, 0]

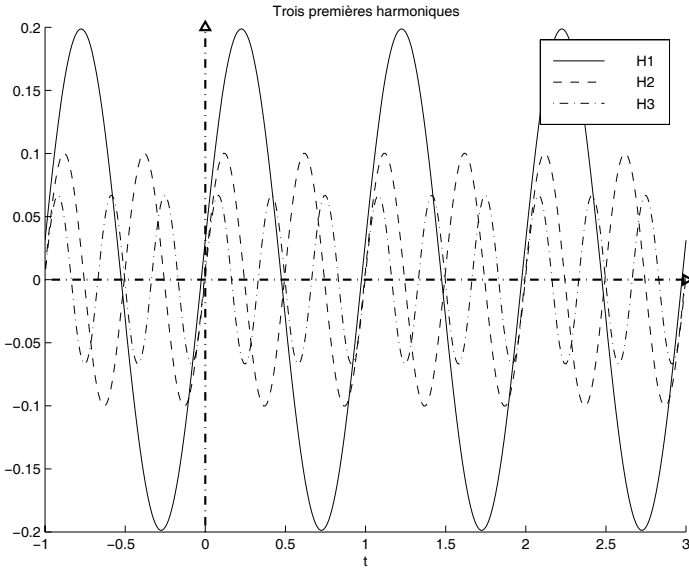
```

On représente graphiquement ces trois harmoniques, sur une deuxième figure.

```

» figure(2);clf
» set(gca,'LineStyle','-');hold on
» ezplot(H(1),-1,3)
» set(gca,'LineStyle','-')
» ezplot(H(2),-1,3)
» set(gca,'LineStyle','-')
» ezplot(H(3),-1,3)
» axis auto
» dessineRepere
» legend ('H1','H2','H3')
» title ('Trois premières harmoniques')

```



On calcule la somme partielle

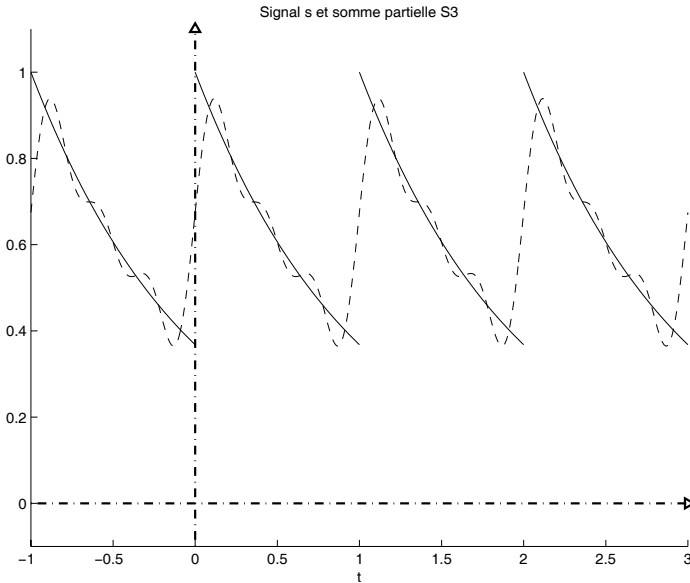
$$S_3(t) = c_0 + h_1(t) + h_2(t) + h_3(t),$$

et on la représente graphiquement (en traits pointillés) sur la même figure que $s(t)$.

```

» C0=subs(Cn,n,sym('0'))
C0 = -exp(-1)+1
» S3=C0+H(1)+H(2)+H(3);
» figure(1); set(gca,'LineStyle','-')
» ezplot(S3,-1,3)
» axis([-1 3 -0.1 1.1])
» title('Signal s et somme partielle S3')

```

Les graphes de s et de S_3 illustrent là encore le résultat de Dirichlet :

– pour t non entier,

$$s(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t),$$

– pour t entier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t) = \frac{1}{2} (s(t_+) + s(t_-)) = \frac{1}{2} (1 + e^{-1}) \simeq 0,68.$$

4.3. Exercices

4.3.1. Série de Fourier d'un signal créneau

Soit s le signal créneau pair, périodique de période 1, et tel que

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1/4 \\ 0 & \text{si } 1/4 < t \leq 1/2. \end{cases}$$

1) Ecrire une fonction *Matlab* $y = \text{creneau}(t)$ qui définit le signal dans l'intervalle $[-3/2, 3/2]$. On utilisera des conditionnelles traduisant les propriétés de parité et de périodicité (voir exemple modèle, paragraphe 4.2.4).

2) Représenter graphiquement le signal s sur $[-3/2, 3/2]$.

3) Justifier que s satisfait aux conditions de Dirichlet.

- 4) Donner son énergie totale.
- 5) Donner la série de Fourier de s .
- 6) Représenter sur le graphique précédent la somme partielle des huit premières harmoniques du signal.
- 7) Calculer l'énergie de cette somme partielle, et comparer à l'énergie totale.

(solution p. 91)

4.3.2. Série de Fourier d'un signal sinusoïdal redressé

Soit s le signal sinusoïdal redressé, défini par

$$s(t) = |\sin 2t|.$$

- 1) Représenter graphiquement s sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi]$.
- 2) Vérifier que le signal s est pair, et admet $\pi/2$ pour période.
- 3) En utilisant les formules d'Euler, calculer les coefficients de Fourier complexes c_n . Vérifier le résultat obtenu avec *Matlab*
- 4) Donner la série de Fourier de s , et étudier sa convergence.
- 5) En utilisant la propriété de convergence en $t = 0$, calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

- 6) Représenter sur le graphique précédent la somme partielle $S_7(t)$.
- 7) Calculer l'énergie de cette somme partielle, et la comparer à l'énergie totale.

(solution p. 94)

4.4. Solutions

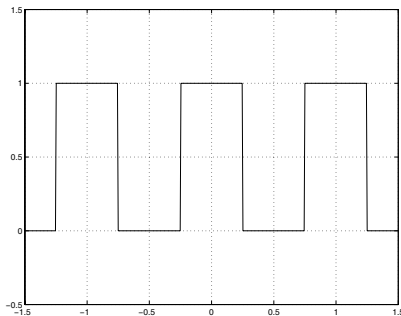
Exercice 4.3.1

1) On définit le signal créneau sur l'intervalle $[-3/2, 3/2]$, en utilisant les propriétés de parité et de périodicité.

```
function y=creneau(t)
    if t>=0 & t<=1/4
        y=1 ;
    else
        if t>1/4 & t<=1/2
            y=0;
        else
            if t>=-1/2 & t<0
                y=creneau(-t);
            else
                if t>1/2 & t<=3/2
                    y=creneau(t-1);
                else
                    if t>=-3/2 & t<=-1/2
                        y=creneau(t+1);
                    end
                end
            end
        end
    end
end
```

2) La fonction *creneau* ayant été définie dans un fichier *.m*, on utilise la commande *fplot* pour le graphe.

```
» fplot('creneau',[-3/2 3/2]);
» hold on ; axis([-3/2 3/2 -0.5 1.5]); grid on
```



On rappelle que les barres verticales générées par *fplot* n'appartiennent pas au graphe de la fonction.

3) Sur l'intervalle de longueur une période $[-1/2, 1/2]$, considérons la subdivision

$$x_0 = -1/2, x_1 = -1/4, x_2 = 1/4, x_3 = 1/2.$$

Sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, \dots, 2$, le signal s est la restriction d'une fonction constante, donc dérivable. Ainsi s est dérivable par morceaux.

4) On rappelle que

$$E(s) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |s(t)|^2 dt.$$

On choisit ici l'intervalle $[-1/2, 1/2]$ de longueur $T = 1$, en tenant compte du fait que le signal est nul en dehors de l'intervalle $[-1/4, 1/4]$. On a

```

» T=1;
» PI=sym('pi');
» w=2*PI/T;
» syms t real
» energieCreneau=(1/T)*int(1^2,t,-1/4,1/4)
energieCreneau =1/2

```

5) Le signal étant pair, on utilise les formules

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) dt,$$

et pour tout $n \geq 1$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = 0.$$

```

» a0=2/T*int(1,t,0,1/4)
a0 = 1/2
» syms n real
» an=4/T*int(1*cos(2*PI*n*t),t,0,1/4)
an =2*sin(1/2*pi*n)/pi/n

```

On en déduit que

$$a_0 = \frac{1}{2},$$

et, pour tout $k \geq 0$,

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k+1} = \frac{2}{\pi} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

La série de Fourier du signal est donc

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos 2\pi (2k+1) t.$$

On admet que cette série converge simplement vers le signal, en tout point où s est continue, et vers $1/2$ aux points de discontinuité

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \dots$$

6) On rappelle que l'harmonique d'ordre n du signal est

$$u_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).$$

Ici on a

$$u_0(t) = a_0$$

$$u_{2k}(t) = 0$$

$$u_{2k+1}(t) = a_{2k+1} \cos 2\pi (2k+1) t$$

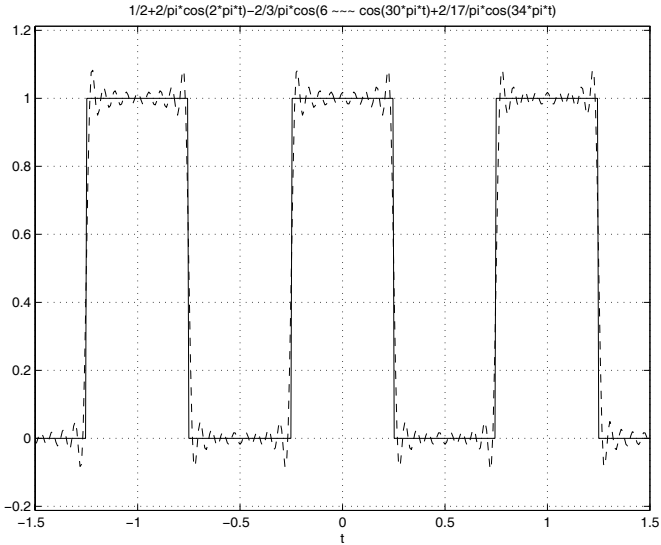
La somme des huit premières harmoniques est donc

$$S_7(t) = a_0 + \sum_{k=0}^3 u_{2k+1}(t).$$

```

» s7=a0;
for k=0 :3,
    s7=s7+subs(an,n,2*k+1)*cos(2*pi*(2*k+1)*t);
end
» set(gca,'LineStyle','- -')
» ezplot(s7,[-3/2 3/2])

```



7) On calcule l'énergie de cette somme partielle par

$$a_0^2 + \sum_{p=1}^7 \frac{b_p^2 + a_p^2}{2} = a_0^2 + \sum_{k=0}^3 \frac{a_{2k+1}^2}{2}.$$

```

» energiePartielle=double(a0^2);
» for k= 0 :3,
    energiePartielle=energiePartielle+double(subs(an,n,2*k+1))^2/2;
end
» energiePartielle
energiePartielle=0.4874
    
```

```

» pourcentage=energiePartielle/double(energieCreneau)*100
pourcentage = 97.4799
    
```

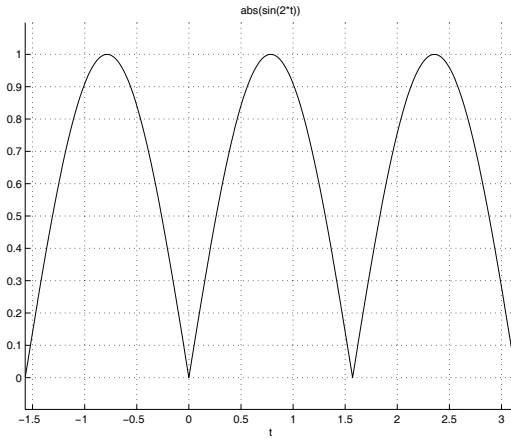
La somme partielle S_7 transmet environ 97,5% de l'énergie totale du signal.

Exercice 4.3.2

1) Représentation graphique du signal s

```

» syms t real
» PI=sym('pi');
» sDet=abs(sin(2*t));
» clf; hold on
» ezplot(sDet,-pi/2,pi)
» grid on
    
```



2) On vérifie que

$$s\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = s(t)$$

et

$$s(-t) = s(t).$$

```

» simplify(subs(sDet,t,t+PI/2))
ans = abs(sin(2*t))
» simplify(subs(sDet,t,-t))
ans = abs(sin(2*t))

```

On définit donc

```

» T=PI/2;
» w=2*PI/T
w = 4

```

3) Sur l'intervalle $[0, T] = [0, \pi/2]$, on a

$$|\sin 2t| = \sin 2t = \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i},$$

d'où

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-inwt} dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} \cdot e^{-inwt} dt \\
 &= \frac{1}{i\pi} \int_0^{\pi/2} \left[e^{(2-4n)it} - e^{(-2-4n)it} \right] dt \\
 &= \frac{1}{i\pi} \left(\frac{1}{i(2-4n)} \left[e^{(2-4n)it} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{i(-2-4n)} \left[e^{(-2-4n)it} \right]_0^{\pi/2} \right) \\
 &= \frac{1}{i^2\pi} \left(\frac{1}{(2-4n)} [e^{i\pi} - 1] - \frac{1}{(-2-4n)} [e^{-i\pi} - 1] \right) \\
 &= \frac{-1}{\pi} \left(\frac{-2}{(2-4n)} - \frac{-2}{(-2-4n)} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}.
 \end{aligned}$$

Pour vérifier ce résultat avec *Matlab*, on définit c_n

```

» syms n real
» cn=simplify(1/T*int(sDet*exp(-i*n*w*t),t,0,T))
cn = -1/pi/(4*n^2-1)*((-1)^(-2*n)+1)

```

Matlab n'effectue pas la simplification

$$(-1)^{-2n} = 1,$$

car la variable n n'a pas pu être définie comme entière.

```

» cn=subs(cn,'(-1)^(-2*n)',1)
cn = -2/pi/(4*n^2-1)

```

4) A partir des coefficients c_n , on calcule a_n et b_n .

```

» a0=subs(cn,n,sym(0))
a0 = 2/pi
» an=2*real(cn)
an = -4/pi/(4*n^2-1)
» bn=2*i*imag(cn)
bn = 0

```

On en déduit la série de Fourier du signal s :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 4nt.$$

Comme, pour tout $n \geq 1$,

$$\left| \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 4nt \right| \leq \frac{1}{4n^2 - 1}$$

et, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{1}{4n^2 - 1} \sim \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^2},$$

la série de Fourier du signal s est absolument convergente.

De plus, la fonction s étant continue et admettant en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, la série de Fourier de s converge vers $s(t)$ pour tout réel t .

5) En particulier pour $t = 0$, on a

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 0 = s(0) = 0.$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = \frac{1}{2}.$$

On peut vérifier ce résultat avec *Matlab* :

- numériquement

```

» N=[1 :1000];
» U=1./(4*N.^2-1);
» sum(U)
ans = 0.4998
```

- ou symboliquement

```

» symsum(1/(4*n^2-1),n,1,inf)
ans = 1/2
```

6) On a

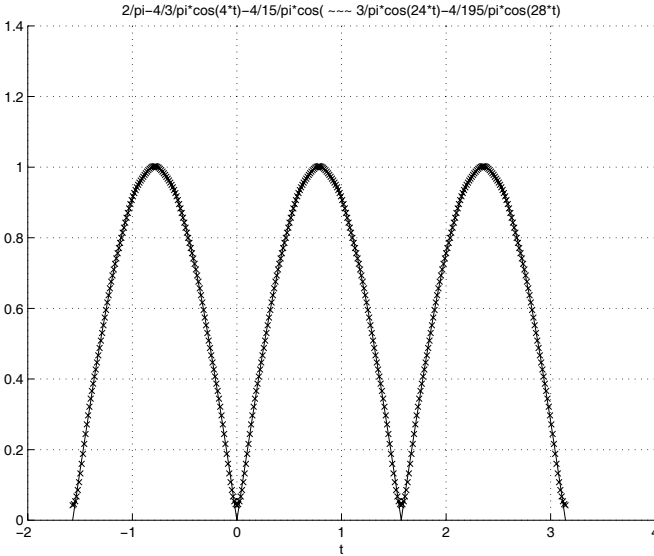
$$S_7(t) = a_0 + \sum_{k=1}^7 a_k \cos kwt.$$

On effectue le calcul et la représentation graphique de S_7

```

» s7=a0;
» for k= 1 :7,
    s7=s7+subs(an,n,k)*cos(k*w*t);
end
» set(gca,'LineStyle','x')
» ezplot(s7,[-pi/2 pi])
```

On doit utiliser un graphisme particulier car les courbes représentatives de s et S_7 sont pratiquement confondues.



7) On calcule l'énergie du signal par

$$E(s) = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt,$$

et celle de la somme partielle par

$$E_7 = a_0^2 + \sum_{k=1}^7 \frac{a_k^2}{2}.$$

```

» energieSignal=(1/T)*int(sDet^2,t,0,T)
energieSignal =1/2
» energiePartielle=double(a0^2);
» for k= 1 :7,
    energiePartielle=energiePartielle+double(subs(an,n,k))^2/2;
end
» energiePartielle
energiePartielle = 0.5000
» pourcentage=energiePartielle/double(energieSignal)*100
pourcentage =99.9920
    
```

On peut comparer les résultats obtenus avec ceux de l'exercice 4.3.1, dont la solution est donnée page 91.

Chapitre 5

Notions sur les intégrales généralisées

5.1. Cas d'un intervalle borné

5.1.1. Définition

On considère une fonction continue sur un intervalle borné non fermé $[a, b[$

$$\begin{aligned} f : [a, b[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t), \end{aligned}$$

telle que

$$\lim_{t \nearrow b} |f(t)| = +\infty.$$

Pour tout $x \in [a, b]$, on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On rappelle que cette intégrale existe puisque f est continue sur $[a, x]$. De plus, F est la primitive de f qui s'annule en a .

Lorsque la limite suivante existe et est finie

$$\lim_{x \nearrow b} F(x) = I,$$

on dira que l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(t) dt,$$

est convergente et on écrira

$$\int_a^b f(t) dt = [F(x)]_a^b = I.$$

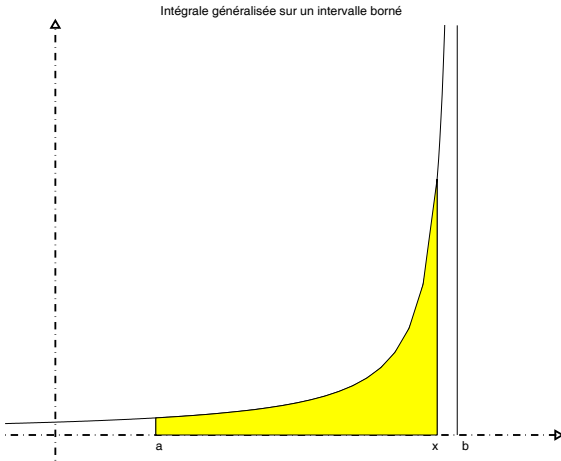
Dans les autres cas, on dira que cette dernière est divergente.

Si

$$\lim_{x \nearrow b} F(x) = \pm\infty,$$

on écrira

$$\int_a^b f(t) dt = \pm\infty.$$



5.1.2. Exemple de référence

Considérons la fonction modèle définie sur $[0, 1[$ par

$$f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(t) = \frac{1}{(1-t)^\alpha}.$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

1) si $\alpha = 1$

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1-t)} = -\ln(1-x),$$

d'où

$$\lim_{x \nearrow 1} F(x) = +\infty.$$

Ainsi l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)},$$

est divergente et

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = +\infty.$$

2) Si $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} [-(1-t)^{1-\alpha}]_0^x \\ &= \frac{1}{1-\alpha} [(1-a)^{1-\alpha} - (1-x)^{1-\alpha}] \end{aligned}$$

et

$$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } 1-\alpha < 0, \end{cases}$$

on a donc le résultat

$$\left\| \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} \right\| \text{ converge si } \alpha < 1 \text{ et diverge si } \alpha \geq 1.$$

5.1.3. Critères de convergence

Les principaux critères de convergence d'une intégrale généralisée sur $[a, b[$ sont les suivants :

1) Si f est continue positive sur $[a, b[$ avec $\lim_{t \rightarrow b} |f(t)| = +\infty$, alors l'intégrale

$$\int_a^b f(t) dt,$$

est convergente si et seulement si la fonction F

$$x \mapsto \int_a^b f(t) dt$$

est majorée sur $[a, b[$.

2) Si f et g sont deux fonctions continues positives sur $[a, b[$ avec

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow b} |f(t)| = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow b} |g(t)| = +\infty, \end{cases}$$

et si pour tout $t \in [a, b[$

$$f(t) \leq g(t),$$

alors la convergence de l'intégrale relative à g implique la convergence de celle relative à f . De même la divergence de l'intégrale relative à f implique la divergence de l'autre.

3) Si f et g sont deux fonctions continues positives sur $[a, b[$ avec

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow b} |f(t)| = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow b} |g(t)| = +\infty \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

autrement dit $f \sim g$ au voisinage (à gauche) de b , alors les intégrales

$$\int_a^b f(t) dt, \quad \int_a^b g(t) dt,$$

sont de même nature (c'est-à-dire toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

4) Dans le cas de fonctions de signe quelconque, on admettra le fait que si $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente. On parlera alors d'absolue convergence.

5.1.4. Remarque

D'une manière similaire, on peut répéter l'étude précédente pour les fonctions continues sur un intervalle borné non fermé $]a, b]$,

$$\begin{aligned} f :]a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t), \end{aligned}$$

telles que

$$\lim_{t \searrow a} |f(t)| = +\infty.$$

5.2. Cas d'un intervalle infini $[a, +\infty[$

5.2.1. Définition

Soit a un nombre réel fixé et f une fonction continue définie sur $[a, +\infty[$. On dira que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt,$$

est convergente vers le réel fini J si

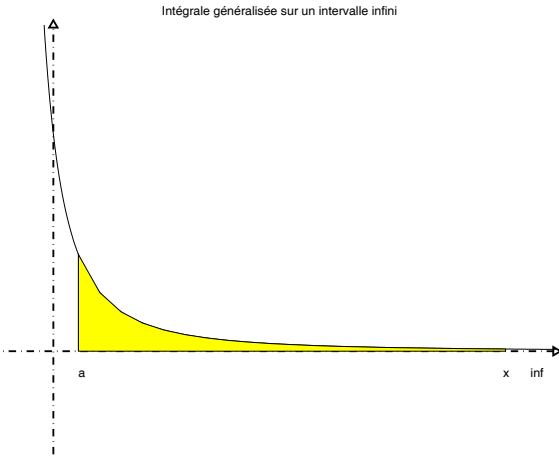
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = J,$$

où

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On écrira

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = [F(x)]_a^{+\infty} = J.$$



Un exemple simple est

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1. \end{aligned}$$

5.2.1.1. Exemple de référence

Soit à calculer l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

1) Si $\alpha = 1$

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln a,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty.$$

Ainsi l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

est divergente et

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty.$$

2) Si $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} [t^{1-\alpha}]_a^x \\ &= \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}], \end{aligned}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\alpha < 0 \\ +\infty & \text{si } 1-\alpha > 0, \end{cases}$$

donc on a le résultat

$$\left\| \int_a^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1 \text{ et diverge si } \alpha \leq 1. \right.$$

5.2.1.2. Critères de convergence

Si f est continue positive sur $[a, \infty[$, alors l'intégrale

$$\int_a^\infty f(t) dt,$$

est convergente si et seulement si la fonction F est majorée sur $[a, \infty[$.

Si f et g sont deux fonctions continues positives sur $[a, \infty[$ et si pour tout $t \in [a, \infty[$

$$f(t) \leq g(t),$$

alors la convergence de l'intégrale relative à g implique la convergence de celle relative à f . De même la divergence de l'intégrale relative à f implique la divergence de l'autre.

Si f et g sont deux fonctions continues positives sur $[a, \infty[$ et si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

autrement dit $f \sim g$ au voisinage $+\infty$, alors l'intégrale $\int_a^\infty f(t)dt$ est de même nature

que $\int_a^\infty g(t)dt$. (c'est-à-dire toutes les deux sont convergentes ou toutes les deux sont divergentes.)

1) Dans le cas de fonctions de signe quelconque, on utilisera le fait que si $\int_a^\infty |f(t)| dt$ est convergente alors $\int_a^\infty f(t)dt$ l'est aussi. On parlera d'absolue convergence.

5.2.2. Remarque

De même ici, on peut répéter l'étude précédente pour les fonctions continues sur un intervalle de la forme $] -\infty, a]$ pour l'étude des intégrales de type $\int_{-\infty}^a f(t)dt$.

5.3. Cas d'un intervalle ouvert $]a, b[$

5.3.1. Définition

Si f est une fonction définie et continue sur $]a, b[$ (avec éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$), on dira que l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(t)dt,$$

est convergente s'il existe un $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales $\int_c^b f(t)dt$ et $\int_a^c f(t)dt$ soient convergentes et on posera

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

On peut montrer que cette définition ne dépend pas du choix de c grâce à la relation de Chasles pour les intégrales.

5.3.2. Remarque

On prendra garde à ne pas utiliser

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f(t)dt$$

pour montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$. Car cette limite peut exister sans que l'intégrale concernée converge. En effet, si on prend par exemple $f(t) = t$, on a pour tout réel c

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_c^x tdt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^c tdt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{c^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) = +\infty,$$

donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} tdt$$

est divergente. Cependant

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f(t)dt = 0.$$

5.4. Intégrale généralisée sous *Matlab*

Le calcul d'une intégrale généralisée peut se faire directement sous *Matlab*

– soit en recherchant une primitive grâce à la commande **int**, puis en passant à la limite :

```

» syms t X real
» fDEt=1/(1-t)^(1/4);
» FdeX=int(fDEt,t,0,X)
FdeX = -4/3*(1-X)^(3/4)+4/3
» limit(FdeX,X,1,'left')
ans = 4/3

```

– soit directement, comme le montrent les exemples suivants

```

» syms t real
» int(1/(1-t)^(1/4),t,0,1)
ans=4/3
» int(1/(1-t)^(3/2),t,0,1)
ans=inf

```

et

```

» int(log(t)/t,t,1,inf)
ans=inf
» int(t,-inf,inf)
undefined

```

5.5. Exercices

5.5.1. Intégrale généralisée et fonctions équivalentes

On donne l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

- 1) Vérifier qu'il s'agit d'une intégrale généralisée.
- 2) En factorisant $1 - t^3$ et en utilisant un équivalent convenable de $1/\sqrt{1-t^3}$ au voisinage de 1, montrer la convergence de l'intégrale
- 3) Que donne *Matlab* pour cette intégrale ?

(solution p. 109)

5.5.2. Intégrale de Gauss

1) Soit l'intégrale dite de Gauss

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Montrer que

$$\forall t \geq 1 \quad e^{-t^2} \leq e^{-t}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale.

2) Que donne *Matlab* pour cette intégrale ?

(solution p. 110)

5.5.3. Intégrale généralisée sur]0, +∞[

1) Calculer $G(X) = \int_1^X te^{-t} dt$ et en déduire que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} te^{-t} dt$$

est convergente.

2) Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{1/3}}{e^t - 1} dt.$$

Pour cela :

a) au voisinage de 0, trouver un équivalent de $\frac{t^{1/3}}{e^t - 1}$,

b) au voisinage de +∞, en utilisant équivalents et majorations, se ramener à la question 1.

(solution p. 111)

5.6. Solutions

Exercice 5.5.1

1) La fonction $f : t \mapsto f(t) = 1/\sqrt{1-t^3}$ est définie et continue sur l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$ et vérifie

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = +\infty.$$

L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

est donc généralisée.

2) On définit avec *Matlab* les fonctions f et

$$f_1 : t \mapsto f_1(t) = 1 - t^3.$$

On factorise $f_1(t)$:

```

» syms t
» f=1/sqrt(1-t^3);
» f1=(1-t^3);
» factor(f1)
ans= -(1+t)*(t^2+t+1)
```

ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t+t^2)}}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{(1-t)}} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (t \rightarrow 1).$$

On vérifie cette équivalence :

```

» limit(f/(1/sqrt(3))*1/sqrt(1-t),t,1,'left')
ans=1
```

L'intégrale cherchée est convergente puisqu'elle est de même nature que

$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{1/2}}$. Cette dernière converge (voir paragraphe 5.1.2).

3) Le calcul direct de l'intégrale avec *Matlab* donne

```
» int(f,t,0,1)
ans=1/3*Beta(1/3,1/2)
» double(ans)
ans=1.4022
```

Exercice 5.5.2

1) Pour $t \geq 1$, on a $-t^2 \leq -t$, d'où l'inégalité demandée puisque l'exponentielle est croissante. On retrouve ce résultat sous *Matlab* :

```
» maple('solve(exp(-t^2)<exp(-t))')
ans=realRange(-inf,Open(0)), realRange(open(1),inf)
```

D'autre part l'intégrale généralisée

$$\int_1^{\infty} e^{-t} dt$$

est convergente puisque

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x e^{-t} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-1} - e^{-x}) \\ &= e^{-1}. \end{aligned}$$

La convergence de

$$\int_1^{\infty} e^{-t^2} dt$$

s'en déduit car, sur $[1, +\infty[$, on a

$$e^{-t^2} \leq e^{-t}.$$

Il en résulte que

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^{\infty} e^{-t^2} dt$$

converge également.

2) Avec *Matlab*, on obtient

```
» syms t real
» int(exp(-t^2),t,0,inf)
ans=1/2*pi^(1/2)
```

Le résultat

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

qui ne peut être démontré ici, est utile, notamment en calcul des probabilités.

Exercice 5.5.3

1) *Matlab* donne

```

» syms t X real
» gDet = t*exp(-t);
» GDeX = int(gDet,t,1,X)
GDeX = -X*exp(-X)-exp(-X)+2*exp(-1)

```

résultat qu'on peut retrouver par une intégration par parties. Et

```

» limit(GDeX,X,inf,'left')
ans = 2*exp(-1)

```

Ainsi

$$\int_1^{\infty} te^{-t} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} G(X) = 2e^{-1}.$$

2) L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$. On doit donc la partager en

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{1/3}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 \frac{t^{1/3}}{e^t - 1} dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{1/3}}{e^t - 1} dt,$$

et étudier ensuite chacune de ces deux intégrales.

a) Au voisinage de 0, on a les équivalences

$$e^t - 1 \sim t \quad (t \rightarrow 0),$$

d'où

$$\frac{t^{1/3}}{e^t - 1} \sim t^{-2/3} \quad (t \rightarrow 0),$$

ce qui montre la convergence de

$$\int_0^1 \frac{t^{1/3}}{e^t - 1} dt$$

car $2/3 < 1$.

b) Au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{t^{1/3}}{e^t - 1} \sim \frac{t^{1/3}}{e^t} \quad (t \rightarrow +\infty),$$

de plus, pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{t^{1/3}}{e^t} \leq \frac{t}{e^t}.$$

Or, $\int_1^{\infty} te^{-t} dt$ est convergente (vu en première question). Il en est donc de même pour

$$\int_1^{\infty} \frac{t^{1/3}}{e^t} dt, \text{ et aussi pour } \int_1^{\infty} \frac{t^{1/3}}{e^t - 1} dt.$$

Chapitre 6

La convolution de signaux

6.1. Introduction

En théorie du signal, un système est généralement une 'boîte' réceptrice de signaux dits signaux d'entrée $e(t)$. Un tel système réagit par des signaux de sortie $s(t)$. La nature de ces systèmes est déterminée par la correspondance ou la relation entre $e(t)$ et $s(t)$.

Les systèmes **linéaires** sont ceux pour lesquels le principe dit de **superposition** est vérifié. Cela veut dire que si s_1 et s_2 sont les signaux de sortie correspondants respectivement à e_1 et e_2 , alors le signal de sortie correspondant à la combinaison linéaire quelconque $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ est $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$.

L'exemple type d'un tel système est un circuit électrique *RLC* comprenant des résistances, des selfs et des capacités. Essayons, de décrire le signal de sortie $s(t)$ dans ce système lorsqu'il est soumis à un signal d'entrée $e(t)$ à partir d'un instant donné t_0 . Naturellement, ici, $e(t)$ est une force électromotrice et $s(t)$ un courant.

On montre, pour cet exemple, que la **correspondance**

$$e(t) \longmapsto s(t),$$

vérifie les propriétés suivantes :

1) à chaque combinaison linéaire de forces électromotrices $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ correspond la combinaison linéaire $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$ (le système est donc linéaire),

2) si $s(t)$ correspond à $e(t)$, alors $s(t - T)$ correspond à $e(t - T)$ quelque soit le décalage temporel T . On dira que le système est invariant dans le temps. En particulier si l'entrée est périodique, la sortie $s(t)$ l'est aussi,

3) si e est causal, s est causal. De cela et de la propriété précédente on déduit naturellement que si e est nul pour $t \leq t_0$, s l'est aussi.

Pour caractériser le système RLC précédent on peut le soumettre à une force électromotrice impulsive sous forme de porte de Dirac telle que

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pendant un temps très court. On note $R_\varepsilon(t)$ le signal de sortie, c'est-à-dire la réaction du système à cette impulsion $\delta_\varepsilon(t)$. $R_\varepsilon(t)$ est en fait une caractéristique du système physique (RLC ici). On notera que ce signal $R_\varepsilon(t)$ est causal (grâce à la propriété 3).

D'autre part, écrivons, que pour tout signal continu et causal d'entrée e et pour ε supposé très petit, on a

$$\begin{aligned} e(t) &\simeq \int_{t-\varepsilon}^t e(\tau) \frac{1}{\varepsilon} d\tau \\ &= \int_0^t e(\tau) \delta_\varepsilon(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

On a utilisé la formule de la moyenne pour les intégrales

$$\int_{t-\varepsilon}^t e(\tau) \frac{1}{\varepsilon} d\tau = \frac{1}{\varepsilon} (t - (t - \varepsilon)) e(c),$$

où

$$c \in]t - \varepsilon, t[.$$

La propriété de superposition implique qu'alors le signal de sortie correspondant est

$$s(t) \simeq \int_0^t e(\tau) R_\varepsilon(t-\tau) d\tau.$$

Cette dernière intégrale est appelée **convolution** de e et de R_ε . On retiendra donc que

||| Dans un système linéaire soumis à un signal causal d'entrée $e(t)$, le signal de sortie $s(t)$ est donné par une convolution intégrale entre e et le signal R_ε de réaction à l'impulsion de Dirac. R_ε est aussi appelé réponse impulsionnelle.

6.2. Définitions et propriétés

6.2.1. Convolution continue

On se donne deux signaux quelconques s_1 et s_2 définis sur \mathbb{R} . On appelle convolution de s_1 et s_2 le signal défini par

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau,$$

(lorsque l'intégrale converge), et on note

$$s = s_1 * s_2,$$

qu'on lit s_1 convolué par s_2 . Le signal s représente donc le signal de sortie d'un système linéaire lorsqu'il est soumis à un signal d'entrée s_1 . Le signal s_2 représente une caractéristique du système.

On montre les propriétés suivantes

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet \text{ commutativité : } s_1 * s_2 = s_2 * s_1, \\ \bullet \text{ associativité : } (s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3), \end{array} \right.$$

lorsque les intégrales généralisées qui les définissent convergent.

Lorsque de plus s_1 et s_2 sont deux signaux dérivables sur \mathbb{R} (sauf éventuellement en un nombre fini de points), on a

$$(s_1 * s_2)' = s_1' * s_2 = s_1 * s_2'.$$

Lorsque les signaux s_1 et s_2 sont causaux, on retrouve le résultat physique du paragraphe 6.1 en écrivant

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau + \int_0^t s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \\ &\quad + \int_t^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau, \end{aligned}$$

car $s_1(\tau) = 0$ pour $\tau \leq 0$ et $s_2(t - \tau) = 0$ pour $\tau \geq t$.

6.2.2. Exemple de convolution continue

Soit T un réel fixé. On donne les signaux suivants

$$s(t) = \begin{cases} 1 - t/T & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le premier est appelé 'triangle' et le deuxième est une porte.

On se propose de donner leurs représentations graphiques et d'étudier leur convolution. Pour l'illustration graphique on prendra

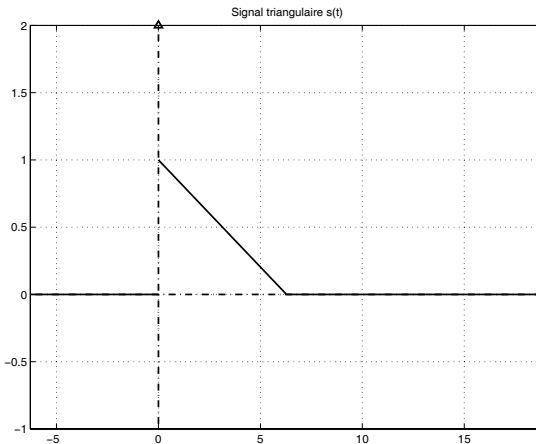
$$T = 2\pi.$$

Dessin du signal triangulaire s :

```

» syms t real
» T=2*pi;
» ezplot('0',-T,0);
» hold on
» ezplot(1-t/T,0,T)
» ezplot('0',T,3*T)
» axis([-T 3*T -1 2])
» dessineRepere ;grid on
» title ('Signal triangulaire s(t)')

```

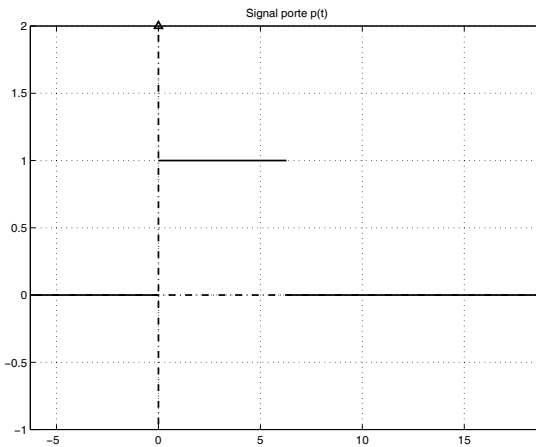


Dessin du signal porte p :

```

» clf
» ezplot('0',-T,0);
» hold on
» ezplot('1',0,T)
» ezplot('0',T,3*T)
» axis([-T 3*T -1 2])
» dessineRepere ;grid on
» title ('Signal porte p(t)')

```



Montrons maintenant qu'on a

$$(s * p)(t) = \int_{t-T}^t s(x) dx.$$

On a, par définition de la convolution,

$$(s * p)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)p(t-x) dx.$$

Or

$$p(t-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t-x \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc

$$p(t-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [t-T, t] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où

$$(s * p)(t) = \int_{t-T}^t s(x) dx.$$

Pour le calcul de cette dernière intégrale, sachant que $s(x)$ est nul hors de l'intervalle $[0, T]$, on doit chercher l'intersection des intervalles

$$[t-T, t] \text{ et } [0, T].$$

Pour cela on distinguera les cas :

- 1) $t < 0$,
- 2) $0 \leq t < T$,
- 3) $T \leq t \leq 2T$,
- 4) $2T < t$.

Il est clair que si $t < 0$, ou $2T < t$ on a $(s * p)(t) = 0$ puisque dans ces cas

$$[t-T, t] \cap [0, T] = \emptyset.$$

Lorsque $0 \leq t < T$, alors

$$[t-T, t] \cap [0, T] = [0, t],$$

enfin si $T \leq t \leq 2T$

$$[t-T, t] \cap [0, T] = [t-T, T].$$

On en déduit, après intégrations, que

$$(s * p)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{2tT - t^2}{2T} & \text{si } 0 \leq t < T \\ \frac{(2T - t)^2}{2T} & \text{si } T \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{si } 2T < t. \end{cases}$$

Vérifions sous *Matlab* deux cas :

```

» syms t T x real
» % Calcul de la convolution pour t compris entre 0 et T
» s1Det = simplify(int(1-x/T,x,0,t))
s1Det=-1/2*t*(-2*T+t)/T
» % Calcul de la convolution pour t compris entre T et 2T
»s2Det = simplify(int(1-x/T,x,t-T,T))
s2Det=1/2*(4*T^2-4*t*T+t^2)/T

```

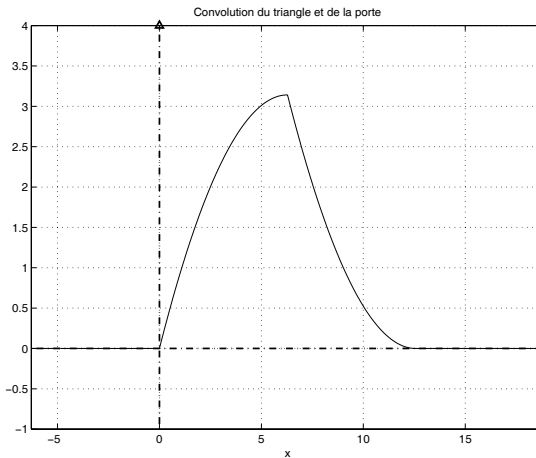
d'où le résultat annoncé.

Pour le graphe de la convoluée, on a

```

» T=2*pi;T=2*pi;
» clf; ezplot('0',-T,0);
» hold on
» ezplot((2*t*T-t^2)/(2*T),0,T)
» ezplot((2*T-t)^2/(2*T),T,2*T)
» ezplot('0',2*T,3*T)
» axis([-T 3*T -1 4])
» dessineRepere ;grid on
» title('Convolution du triangle et de la porte')

```



On vérifie que la fonction $s * p$ est continue sur tout \mathbb{R} . Par exemple au point T , on a

$$\lim_{t \nearrow T} (s * p)(t) = \lim_{t \searrow T} (s * p)(t) = T/2.$$

La convolution a un effet "régularisant".

6.2.3. Convolution discrète

Lorsque les deux signaux sont discrets

$$s_j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ k \mapsto s_j(k)$$

pour $j = 1, 2$, on peut définir par analogie, la convolution discrète, par

$$s(k) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} s_1(i)s_2(k-i).$$

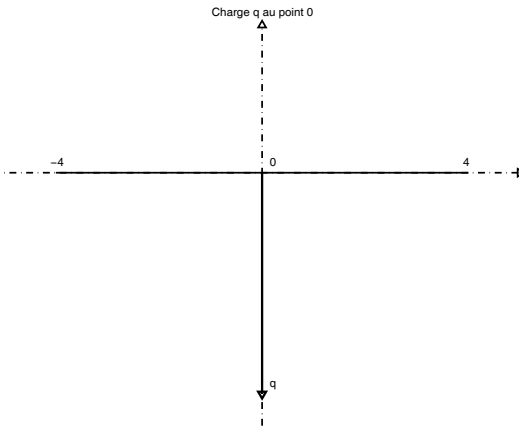
On rappelle que cette sommation infinie à double entrée existe lorsque la série

$$s_1(0)s_2(k) + \sum_{i \geq 1} (s_1(i)s_2(k-i) + s_1(-i)s_2(k+i))$$

est convergente.

6.2.4. Exemple de convolution discrète

Soit une corde élastique fixée à ses extrémités, représentée par l'intervalle $[-4, 4]$ et soumise à une charge unique q au point 0.



On représente cette charge grâce à *Matlab* par :

```

» plot([-4 4],[0 0],'LineWidth',1.5)
» hold on
» plot([0 0],[0 -3],'LineWidth',2)
» plot(0,-3,'v','LineWidth',2)
» axis([-5 5 -3.5 2])

```

```

» text(0.15,0.15,'0')
» text(0.15,-3+0.15,'q')
» text(-4-0.1,0.15,'-4')
» text(4-0.1,0.15,'4')
» title('Charge q au point 0')
» dessineRepere
» axis off

```


on suppose que l'allongement $u(k)$ est alors

$$u(k) = \frac{1}{2^{|k|}}$$

aux points entiers $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et vérifie

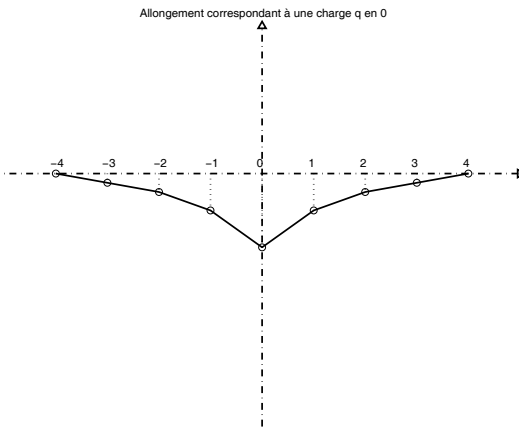
$$u(-4) = u(4) = 0.$$

On représente graphiquement cet allongement :

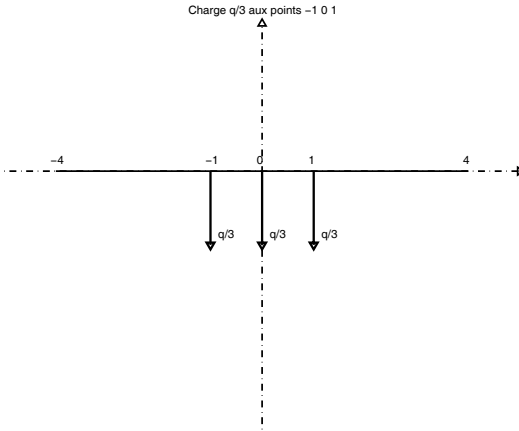
```

» I1 = -3 : 1 : 3 ; % points discrets de la corde, autres que les extrémités
» I = [-4 I1 4 ] ;
» U = [0 -1./2.^abs(I1) 0 ] ;
» clf ; plot(I,U,'ko')
» hold on
» plot(I,U,'k','LineWidth',1.5)
» title('Allongement correspondant à une charge q en 0')
» for i = 1 : length(I)
    plot([I(i) I(i)], [0 U(i)], 'k :', 'LineWidth', 1.5)
    text(I(i)-0.1, 0.15, num2str(I(i)))
end
» axis([-5 5 -3.5 2]) ; dessineRepere ; axis off

```



On répartit la charge q équitablement aux points $-1, 0, 1$ de la corde :



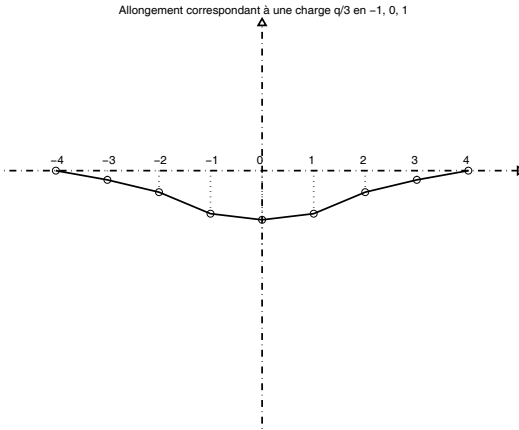
On veut calculer le nouvel allongement noté $a(k)$ aux points entiers de la corde.

Nous admettrons qu'un tel système est linéaire et est régi par une convolution discrète :

pour $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, on a

$$\begin{aligned}
 a(k) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} q(i)u(k-i) \\
 &= \sum_{i=-3}^{+3} q(i)u(k-i) \\
 &= (q(-1)u(k+1) + q(0)u(k) + q(1)u(k-1)) \\
 &= \frac{q}{3} (u(k+1) + u(k) + u(k-1)) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^{|k+1|}} + \frac{1}{2^{|k|}} + \frac{1}{2^{|k-1|}} \right).
 \end{aligned}$$

D'où le graphe :



6.3. Exercices

6.3.1. Convolution de deux portes

On considère les deux portes

$$porte_2(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$porte_3(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \in [-1/2, 1/2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Définir dans un fichier d'extension ".m" ces deux fonctions et les représenter graphiquement.

2) Utiliser la commande **quad** pour calculer numériquement la convoluée

$$(porte_2 * porte_3)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} porte_2(t)porte_3(x - t)dt.$$

Indications :

- *quad*(*F*, *a*, *b*, [], [], *x*) donne une valeur approchée d'une intégrale définie dépendant d'un paramètre *x* de la forme

$$\int_a^b F(t, x)dt,$$

- il sera utile de définir dans deux fichiers les fonctions

$$(t, x) \mapsto \text{porte}_2(t)\text{porte}_3(x - t)$$

et

$$x \mapsto (\text{porte}_2 * \text{porte}_3)(x).$$

3) Représenter graphiquement cette dernière fonction.

4) Montrer mathématiquement que la convoluée est le signal triangulaire défini par

$$(\text{porte}_2 * \text{porte}_3)(x) = \begin{cases} 6(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 6(1+x) & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(solution p. 126)

6.3.2. Convolution d'un signal par une porte de Dirac

1) Représenter graphiquement sur l'intervalle $[-1, 1]$ le signal défini pour tout t réel par

$$s_1(t) = t \sin(10\pi t).$$

2) Calculer et représenter graphiquement les convoluées de s_1 par les portes de Dirac

$$s_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$s_3(t) = \begin{cases} 50 & \text{si } |t| \leq 1/100 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Qu'observe-t-on ?

3) Soit s un signal continu défini sur \mathbb{R} . On note S une primitive quelconque de s . Pour $h > 0$ on considère la porte de Dirac p_h :

$$p_h(t) = \begin{cases} 2/h & \text{si } |t| \leq h \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (s * p_h)(x) = s(x).$$

(solution p. 131)

6.3.3. Construction d'une fonction "plateau"

On considère les deux fonctions

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(1-x^2)}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

1) Donner les graphes de ces deux fonctions.

2) Vérifier avec *Matlab* que f est une fonction continument dérivable (en fait indéfiniment dérivable). On se contentera de faire l'étude au point 1.

3) On se propose de donner l'allure de la convoluée $p * f$. On a

$$\begin{aligned} (p * f)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-x)f(x)dx \\ &= \int_{t-2}^{t+2} f(x)dx. \end{aligned}$$

Montrer, en regardant le placement de l'intervalle $[t-2, t+2]$ par rapport à l'intervalle où f ne s'annule pas (dit support de f), qu'on a

$$(p * f)(t) = \begin{cases} h_1(t) = 0 & \text{si } t \leq -3, \\ h_2(t) = \int_{-1}^{t+2} e^{-\frac{1}{(1-x^2)}} dx & \text{si } -3 < t \leq -1, \\ h_3(t) = 1 & \text{si } -1 < t \leq 1, \\ h_4(t) = \int_{t-2}^1 e^{-\frac{1}{(1-x^2)}} dx & \text{si } 1 < t \leq 3, \\ h_5(t) = 0 & \text{si } t > 3. \end{cases}$$

4) Vérifier la continuité aux extrémités des intervalles.

5) On pose

$$I = \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{1}{(1-x^2)}} dx,$$

tracer le graphe de la fonction dite **plateau** définie sur \mathbb{R} par

$$g(t) = \frac{1}{I} (p * f)(t).$$

(solution p 133)

6.4. Solutions

Exercice 6.3.1

1) Pour définir la fonction $porte_2$, on utilise le fait que l'expression logique

$$abs(t) \leq 1/2$$

prend la valeur 1 lorsque la condition est vérifiée, 0 sinon.

```
function y=porte2(t)
y=2*(abs(t)<=1/2);
```

Cette fonction s'applique aussi à un tableau de valeurs, ce qui sera utile par la suite .

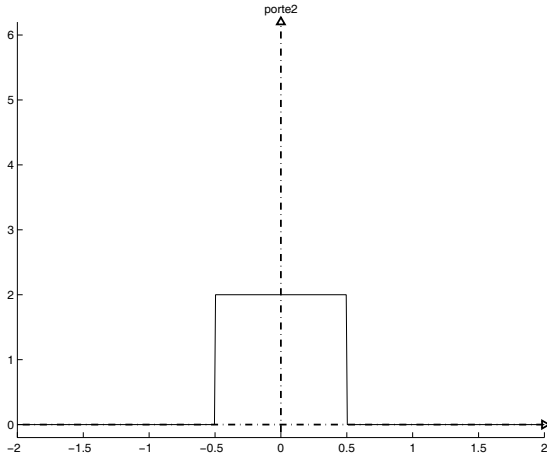
```
» porte2([-1 :0.1 :1])
ans =
Columns 1 through 12
0 0 0 0 2 2 2 2 2 2
Columns 13 through 21
2 2 2 2 0 0 0 0
```

On définit de même $porte_3$

```
function y=porte3(t)
y=3*(abs(t)<=1/2);
```

On utilise *fplot* pour représenter ces deux fonctions

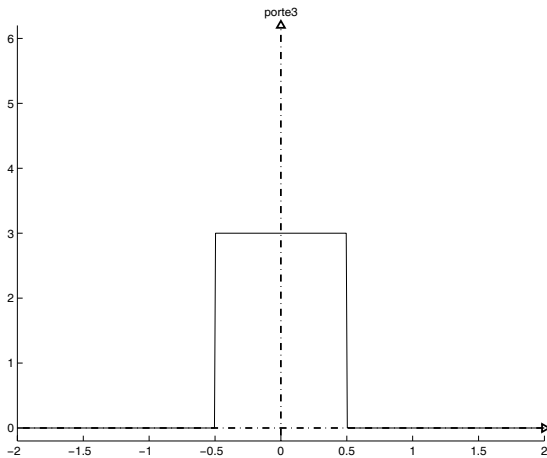
```
» figure(1);clf;hold on
» fplot('porte2',[-2 2])
» axis([-2 2 -0.2 6.2])
» dessineRepere
» title('porte2')
```



```

» figure(2);clf;hold on
» fplot('porte3',[-2 2])
» axis([-2 2 -0.2 6.2])
» dessineRepere
» title('porte3')

```



2) Pour calculer numériquement la convoluée

$$(porte_2 * porte_3)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} porte_2(t)porte_3(x-t)dt,$$

on définit tout d'abord la fonction *produit*

```
function y=produit(t,x)
y=porte2(t).*porte3(x-t);
```

qui peut aussi s'appliquer à un tableau de valeurs

```
» produit([-1 :0.1 :1],1/2)
ans =
Columns 1 through 12
0 0 0 0 0 0 0 0 0 6 6
Columns 13 through 21
6 6 6 6 0 0 0 0
```

Sachant que $\text{porte}_2(t)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, on utilise $\text{quad}(F, a, b, [], [], x)$ avec $a = -1/2$ et $b = 1/2$.

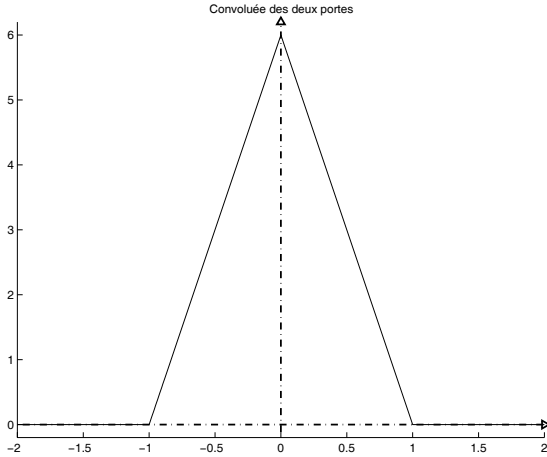
```
function y=porte2CONVporte3(x)
y=quad('produit',-1/2,1/2,[],[],x);
```

On teste cette fonction :

```
» i=0;
» for x=-2 :0.25 :2
    i=i+1;
    Y(i)=porte2CONVporte3(x);
end
» Y
Y =
Columns 1 through 7
0 0 0 0 0.0000 1.5000 3.0000
Columns 8 through 14
4.5000 6.0000 4.5000 3.0000 1.5000 0.0000 0
Columns 15 through 21
0 0 0 0 0 0 0
```

3) On effectue enfin la représentation graphique.

```
» figure(3);clf;hold on
» fplot('porte2CONVporte3',[-2 2])
» axis([-2 2 -0.2 6.2])
» dessineRepere
» title('Convuluee des deux portes')
```

4) On a

$$\begin{aligned} (p_2 * p_3)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{porte}_2(t) \text{porte}_3(x-t) dt \\ &= 2 \int_{-1/2}^{+1/2} p_3(x-t) dt. \end{aligned}$$

On distingue alors les quatre cas suivants :

a) si $x < -1$ alors pour tout $t \in [-1/2, 1/2]$ on a

$$x - t \leq x + 1/2 < -1/2$$

et donc $\text{porte}_3(x-t) = 0$, d'où

$$(p_2 * p_3)(x) = 0$$

b) si $-1 \leq x < 0$ alors tout $t \in [-1/2, 1/2]$ on a

$$-3/2 \leq x - t < 1/2$$

et $-1/2 \leq x - t$ si $t \leq x + 1/2$. Donc

$$\begin{aligned} (\text{porte}_2 * \text{porte}_3)(x) &= 2 \int_{-1/2}^{+1/2} \text{porte}_3(x-t) dt = 2 \int_{-1/2}^{x+1/2} 3 dt \\ &= 6(1+x). \end{aligned}$$

c) si $0 \leq x < 1$ alors tout $t \in [-1/2, 1/2]$ on a

$$-1/2 \leq x - t < 3/2$$

et $x - t \leq 1/2$ si $t \geq x - 1/2$. Donc

$$\begin{aligned}
 (\text{porte}_2 * \text{porte}_3)(x) &= 2 \int_{-1/2}^{+1/2} \text{porte}_3(x-t) dt = 2 \int_{x-1/2}^{1/2} 3 dt \\
 &= 6(1-x).
 \end{aligned}$$

d) enfin si $x \geq 1$ alors pour tout $t \in [-1/2, 1/2]$ on a

$$x - t \geq x - 1/2 \geq 1/2$$

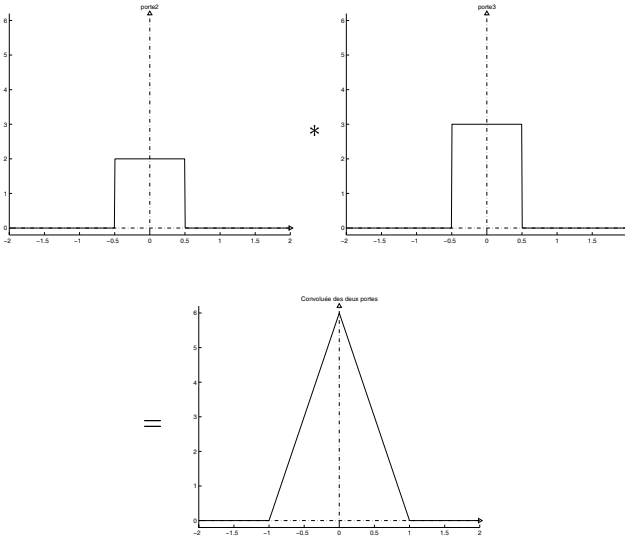
et donc $p_3(x - t) = 0$, d'où

$$(\text{porte}_2 * \text{porte}_3)(x) = 0.$$

On a finalement

$$(\text{porte}_2 * \text{porte}_3)(x) = \begin{cases} 6(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 6(1+x) & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On retiendra que la convoluée des deux portes est un "triangle" :

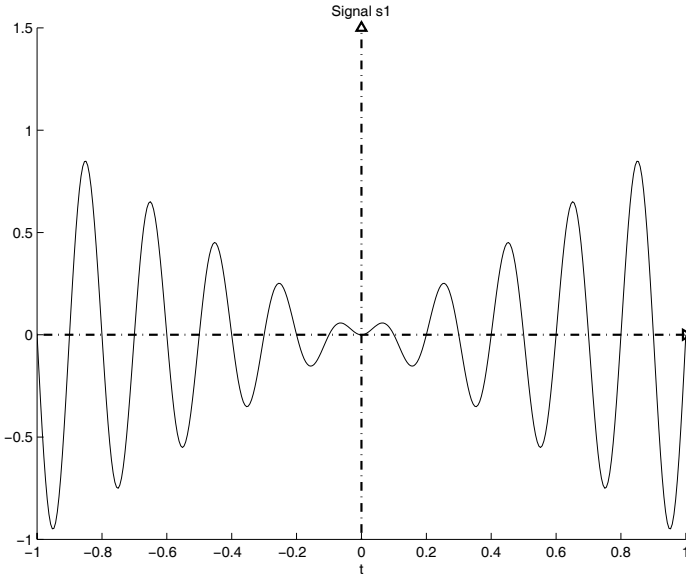


Exercice 6.3.2

1) On déclare s_1 et on représente graphiquement le signal.

```

» syms t real
» s1=t*sin(10*pi*t)
» figure(1); clf;hold on
» ezplot(s1,-1,1)
» axis([-1 1 -1 1.5])
» dessineRepere
» title('Signal s1')
```



2) On a

$$(s_1 * s_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2(x-t)dt.$$

Or $s_2(x-t) = 1$ si

$$-\frac{1}{2} \leq x-t \leq \frac{1}{2},$$

soit

$$x - \frac{1}{2} \leq t \leq x + \frac{1}{2},$$

et $s_2(x-t) = 0$ sinon. Donc

$$(s_1 * s_2)(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} s_1(t)dt.$$

On obtient de même

$$(s_1 * s_3)(x) = \int_{x-1/100}^{x+1/100} 50s_1(t)dt.$$

```

» syms x real
» s1CONVs2=simple(int(s1,t,x-1/2,x+1/2))
s1CONVs2 = 1/10/pi*cos(10*pi*x)
» s1CONVs3=simple(50*int(s1,t,x-1/100,x+1/100));

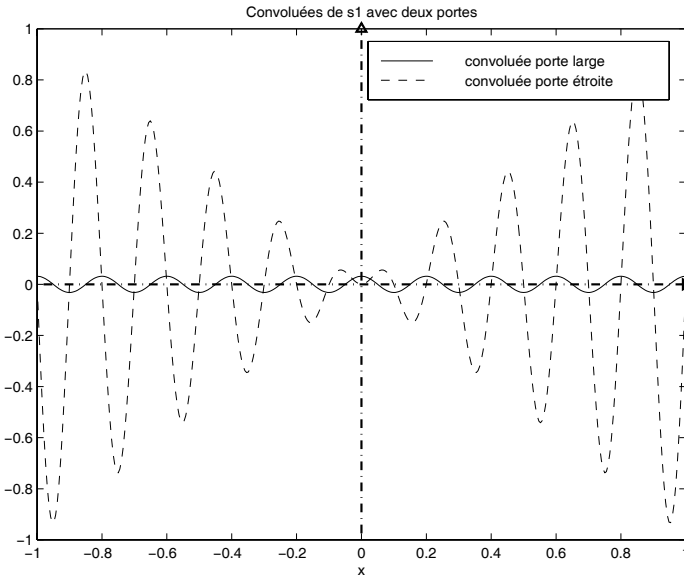
```

On représente graphiquement ces deux convoluées.

```

» figure(2);clf
» ezplot(s1CONVs2,-1,1)
» hold on
» set(gca,'LineStyle','--')
» ezplot(s1CONVs3,-1,1)
» axis auto
» legend('convoluée porte large','convoluée porte étroite')
» dessineRepere
» title('Convoluées de s1 avec deux portes')

```



On remarque que la convoluée du signal s_1 avec une porte de Dirac étroite est proche de celui-ci. La réponse suivante confirme mathématiquement ce résultat.

3) En généralisant les calculs ci-dessus on a

$$\begin{aligned}
 (s * p_h)(x) &= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} s(t) dt \\
 &= \frac{1}{2h} (S(x+h) - S(x-h)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{S(x+h) - S(x)}{h} + \frac{S(x-h) - S(x)}{-h} \right),
 \end{aligned}$$

ainsi

$$\lim_{h \rightarrow 0} (s * p_h)(x) = \frac{1}{2} (S'(x) + S'(x)) = s(x).$$

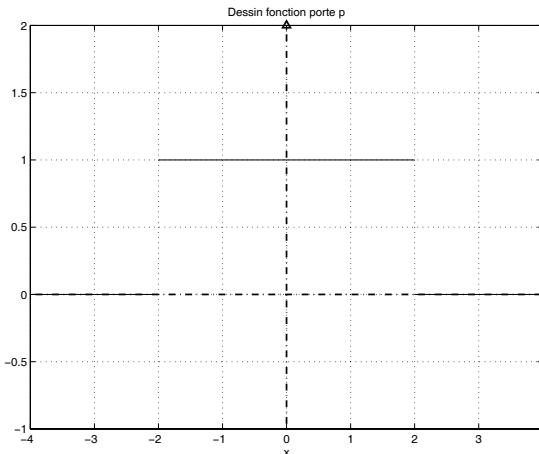
Exercice 6.3.3

1) a) Graphe de la fonction p restreint à l'intervalle $[-4, 4]$:

```

» ezplot('0',-4,-2);
» hold on
» ezplot('1',-2,2)
» ezplot('0',2,4)
» axis([-4 4 -1 2])
» dessineRepere ;grid on
» title('Dessin fonction porte p')

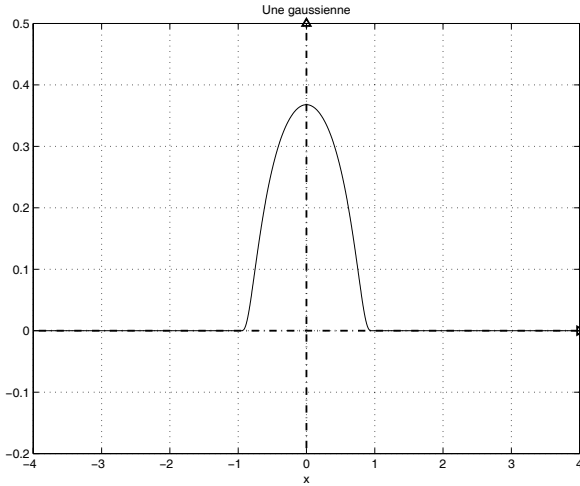
```



b) Graphe de la fonction f :

```

» syms x real
» clf; ezplot('0',-4,-1);
» hold on
» ezplot(exp(-1/(1-x^2)),-1,1);
» ezplot('0',1,4);
» axis([-4 4 -0.2 0.5])
» dessineRepere ;grid on
» title('Une gaussienne')
    
```



2) Etude de la classe C^1 pour f :

```

» syms x real
» limit(exp(-1/(1-x^2)),x,1,'left')
ans=0
    
```

Ainsi

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} f(x) = 0 = f(1).$$

et

```

» limit((exp(-1/(1-x^2))-0)/(x-1),x,1,'left')
ans =0
    
```

d'où

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0 = f'(1).$$

La fonction dérivée f' est continue en 1 car :

```
» limit(diff(exp(-1/(1-x^2))),x,1,'left')
ans =0
```

3) Pour l'étude de la convolution on utilise naturellement les expressions données vérifiables selon les différentes positions de l'intervalle

$$[t - 2, t + 2]$$

par rapport à l'intervalle $[-1, 1]$.

Par exemple, lorsque $-3 < t \leq -1$, on a

$$\begin{cases} -5 < t - 2 \leq -3 \leq -1 \\ -1 < t + 2 \leq 1, \end{cases}$$

d'où

$$\int_{t-2}^{t+2} f(x) dx = \int_{-1}^{t+2} e^{\frac{-1}{(1-x^2)}} dx.$$

On fait de même pour les autres intervalles et on obtient

$$(p * f)(t) = \begin{cases} h_1(t) = 0 & \text{si } t \leq -3, \\ h_2(t) = \int_{-1}^{t+2} e^{-\frac{1}{(1-x^2)}} dx & \text{si } -3 < t \leq -1, \\ h_3(t) = 1 & \text{si } -1 < t \leq 1, \\ h_4(t) = \int_{t-2}^1 e^{-\frac{1}{(1-x^2)}} dx & \text{si } 1 < t \leq 3, \\ h_5(t) = 0 & \text{si } t > 3. \end{cases}$$

4) On vérifie par exemple la continuité de la convoluée en -3 .

```
» syms t x
» h2Det=int(exp(-1./(1-x.^2)),x,-1,t+2);
» h2Dmoins3= simplify(subs(h2Det,t,-3))
h2Dmoins3=0
```

5) On affiche la valeur approchée de I

```
» I=int(exp(-1/(1-x^2)),x,-1,1);
» Id=double(I)
Id =0.4440
```

Pour obtenir le graphe de la fonction g , on trace h_1 :

```
»clf; ezplot('0',-4,-3)
```

Pour tracer h_2 et h_4 , on utilisera la commande *quad*, qui calcule des valeurs approchées d'intégrale. Pour cela, on déclare dans un fichier ".m" la fonction à intégrer :

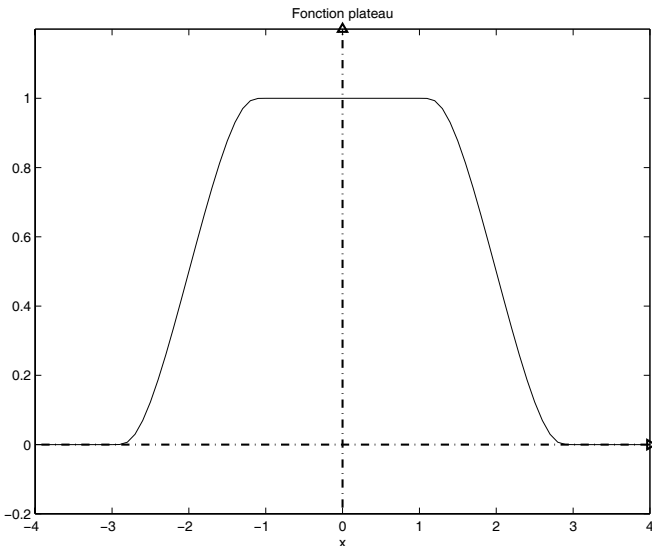
```
function y=expr(x)
y=exp(-1./(1-x.^2));
```

On calcule $h_2(t)$, pour t variant de -3 à -1 , avec un pas $d = 0, 1$.

```
»hold on
» d = 0.1 ;
» n = 21 ;
» for i =1 :n
    t2(i) = -3+d*(i-1) ;
    h2(i) = quad('expr',-0.9999,t2(i)+2);
end
» plot(t2,h2/Id)
```

On fait de même pour les autres expressions de la convoluée.

```
» ezplot('1',-1,1)
» for i =1 :n
    t4(i) = 1+d*(i-1) ;
    h4(i) = quad('expr',t4(i)-2,0.9999);
end
» plot(t4,h4/Id)
» ezplot('0',3,4)
» axis ([-4 4 -0.2 1.2]); dessineRepere
```



On remarque que la fonction ainsi construite g a les qualités suivantes :

- g est continue partout (et même indéfiniment dérivable),
- g est identiquement égale à 1 au voisinage de $[-1, 1]$,
- g est nulle en dehors de l'intervalle $[-3, 3]$.

Ce procédé s'appelle un **lissage**. Il permet en effet de lisser la fonction porte p en une fonction très régulière tout en conservant sa valeur constante sur un intervalle plus petit.

Chapitre 7

Analyse de signaux aperiodiques

7.1. Introduction

Nous avons étudié les signaux périodiques et leur analyse par les séries de Fourier. Un signal périodique de période $T = 2\pi/\omega$ apparaissait comme une somme infinie d'harmoniques de fréquences $n\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ces fréquences sont des valeurs isolées de \mathbb{R} .

Lorsque les signaux sont quelconques définis sur \mathbb{R} (aperiodiques), les fréquences ne sont plus des valeurs isolées. Elles prennent toutes les valeurs réelles. La **transformée de Fourier** est un outil d'analyse et de synthèse de ces signaux.

L'analyse de Fourier utilise dans les deux cas (périodique et non périodique), les fonctions trigonométriques sinus et cosinus. Ces deux fonctions ne sont pas localisées. On améliore nettement l'analyse en utilisant des fonctions très localisées appelées **ondelettes**. Cette théorie dépasse le cadre de cet ouvrage.

On supposera dans ce chapitre que les signaux considérés sont au moins continus par morceaux.

7.2. La transformée de Fourier continue

7.2.1. Définition

On donne un signal

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto s(t). \end{aligned}$$

On appelle **transformée de Fourier** du signal s le signal \widehat{s} (lire : s chapeau) défini par l'intégrale

$$\widehat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2i\pi\omega t} dt,$$

lorsque celle-ci est convergente. On note aussi

$$\widehat{s}(\omega) = [F(s)](\omega)$$

(lire : Fourier de s au point ω).

La transformée d'un signal s est donc une intégrale dépendant du paramètre ω . La quantité $\widehat{s}(\omega)$ définie pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ est en général à valeurs complexes.

7.2.2. Conditions suffisantes d'existence

La transformée de Fourier de s est notamment définie dans chacun des cas suivants :

- 1) le signal s est nul pour $|t|$ assez grand,
- 2) l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt$$

est convergente. On utilise, en effet, la majoration

$$|s(t)e^{-2i\pi\omega t}| \leq |s(t)|,$$

3) le signal s est une fonction à **décroissance rapide**, c'est-à-dire, une fonction s indéfiniment dérivable et telle que, pour tous entiers k, j , la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto (1+t^2)^k s^{(j)}(t) \end{aligned}$$

est bornée sur \mathbb{R} . La fonction $s^{(j)}$ représente la dérivée d'ordre j de s .

Un exemple type d'un tel signal est la fonction de Gauss

$$t \longmapsto s(t) = e^{-t^2}.$$

On peut en effet vérifier par récurrence que les dérivées successives de s sont de la forme

$$s^{(j)}(t) = P_j(t)e^{-t^2},$$

où P_j est un polynôme de degré j , et on a toujours

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (1+t^2)^k P_j(t)e^{-t^2} = 0.$$

L'ensemble des fonctions à décroissance rapide sur \mathbb{R} est noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

4) On construit aussi la transformée de Fourier \widehat{s} pour les signaux s à énergie totale finie, c'est-à-dire tels que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

soit convergente.

7.2.3. Remarque

Certains ouvrages définissent la transformée de Fourier du signal s par

$$\mathcal{F}(s)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt,$$

on passe de l'une à l'autre par une simple dilatation de la variable ω :

$$\widehat{s}(\omega) = \mathcal{F}(s)(2\pi\omega).$$

On utilisera dans la suite, la définition du paragraphe 7.2.1.

7.2.4. Temporel/Fréquentiel

On vient de définir une application

$$F : s \mapsto \widehat{s} = F(s)$$

qui, à un signal temporel s associe sa transformée de Fourier \widehat{s} (signal fréquentiel.) On schématise par

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto s(t) \end{array}} \xrightarrow{F} \boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \omega \mapsto \widehat{s}(\omega) \end{array}} \begin{array}{l} \text{(temporel)} \\ \text{(fréquentiel)} \end{array}$$

7.2.5. Exemple

Calculons \widehat{p} où p est la porte de Dirac centrée à l'origine

$$p(t) = \begin{cases} 1/T_0 & \text{si } |t| \leq T_0/2 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)| dt = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \frac{1}{T_0} dt = 1,$$

donc p admet une transformée de Fourier (voir paragraphe 7.2.2) et

$$\begin{aligned}
 \hat{p}(\omega) &= \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \frac{1}{T_0} e^{-2i\pi\omega t} dt \\
 &= \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \frac{1}{T_0} [\cos(-2\pi\omega t) + i \sin(-2\pi\omega t)] dt \\
 &= \frac{1}{2\pi\omega T_0} [\sin(2\pi\omega t)]_{-T_0/2}^{T_0/2} + i \frac{1}{2\pi\omega T_0} [\cos(2\pi\omega t)]_{-T_0/2}^{T_0/2} \\
 &= \frac{1}{\pi\omega T_0} \sin(\pi T_0\omega).
 \end{aligned}$$

Cette intégrale peut aussi se calculer avec *Matlab* :

```

» syms t T0 omega real ; p=1/T0
» PI= sym('pi');
» E=cos(-2*PI*omega*t)+i*sin(-2*PI*omega*t)
» pChapeau=int(p*E,t,-T0/2, T0/2);
» simplify(pChapeau)
ans = 1/pi/omega/T0*sin(T0*pi*omega)

```

On a donc

$$\begin{aligned}
 \hat{p}(\omega) &= \frac{\sin(\pi T_0\omega)}{\pi T_0\omega} \\
 &= \frac{\sin u}{u},
 \end{aligned}$$

où $u = \pi T_0\omega$. On introduit la fonction dite **sinus cardinal** définie par

$$u \mapsto \text{Si}(u) = \begin{cases} \frac{\sin u}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

On remarquera qu'elle est continue en 0.

On retiendra que la transformée de Fourier de la porte particulière

$$p_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

est

$$\text{Si}(\omega) = \frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}.$$

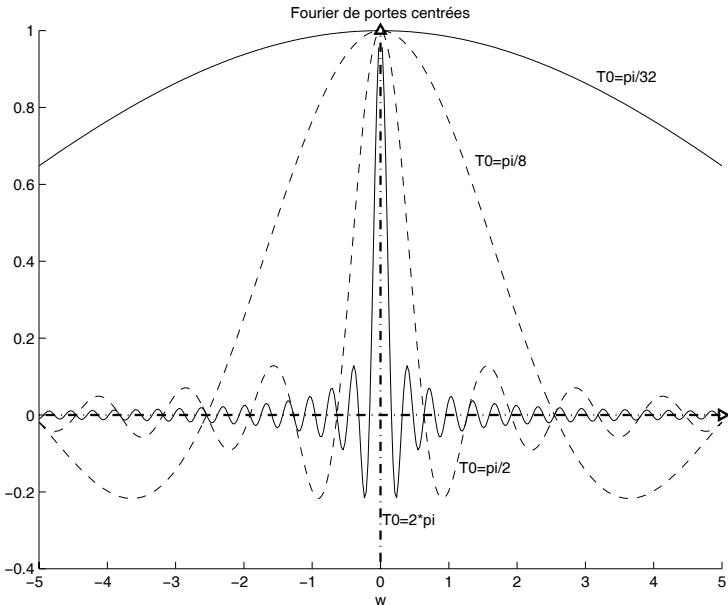
Regardons graphiquement les courbes de différentes portes de Dirac correspondant à

$$T_0 = 2\pi, \pi/2, \pi/8, \pi/32.$$

```

» syms T0 w real
» f=sin(pi*T0*w)/(pi*T0*w);
» hold on
» f1=subs(f,T0,2*pi); set(gca,'LineStyle','-');ezplot(f1,[-5 5])
» f1=subs(f,T0,pi/2); set(gca,'LineStyle','-');ezplot(f1,[-5 5])
» f1=subs(f,T0,pi/8); set(gca,'LineStyle','-');ezplot(f1,[-5 5])
» f1=subs(f,T0,pi/32); set(gca,'LineStyle','-');ezplot(f1,[-5 5])
» axis auto
» dessineRepere
» title('Fourier de portes centrées')
» gtext('T0=2*pi');gtext('T0=pi/2');
» gtext('T0=pi/8'); gtext('T0=pi/32')

```



On constate :

- 1) La continuité de \hat{p} sur \mathbb{R} .
- 2) Plus la porte de Dirac est étroite (T_0 est petit), plus sa transformée de Fourier est "large".
- 3) Si on regarde la correspondance temps-fréquence (exprimé par t et ω), on constate qu'un signal très abrupt (le cas de la porte pour T_0 très petit), admet une transformée de Fourier contenant de hautes fréquences.

On a comme exemple typique concret : les orages, les étincelles ou tout parasite électromagnétique bref. Lors d'un passage dans un tunnel, (cela correspond à une porte p dans le temps), le capteur radio (jouant le rôle de "transformée de Fourier"), donne un parasite \hat{p} continu, qui est entendu grâce à sa largeur de fréquence (voir figure précédente).

7.2.6. Propriétés

7.2.6.1. Continuité

|| Lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt$ existe, la transformée \hat{s} est une fonction continue sur \mathbb{R} et de plus $\hat{s}(\omega)$ tend vers zéro pour $|\omega|$ tendant vers ∞ .

7.2.6.2. Linéarité

|| La transformée de Fourier est linéaire, autrement dit

$$\widehat{s_1 + s_2} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$$

$$\widehat{\lambda s_1} = \lambda \hat{s}_1.$$

7.2.6.3. Parité et imparité

|| Si s est un signal pair alors \hat{s} est à valeurs réelles et

$$\hat{s}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} s(t) \cos(2\pi\omega t) dt,$$

si s est un signal impair alors \hat{s} est à valeurs imaginaires pures et

$$\hat{s}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} s(t) \sin(2\pi\omega t) dt.$$

7.2.6.4. Transformée de Fourier d'une convolution

|| On a

$$\widehat{s_1 * s_2} = \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2.$$

7.2.6.5. Transformée de Fourier et dérivation

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } s : t \mapsto s(t) \text{ est un signal dérivable de transformée de Fourier} \\ \omega \mapsto \widehat{s}(\omega), \\ \text{alors :} \\ \widehat{s'}(\omega) = 2i\pi\omega \cdot \widehat{s}(\omega). \end{array} \right.$$

7.2.6.6. Transformée de **Fourier et décalage temporel**

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si pour un signal } s : t \mapsto s(t), \text{ on considère sa traduite } \tau_{t_0} s \\ \text{définie par} \\ (\tau_{t_0} s)(t) = s(t - t_0), \\ \text{alors} \\ \widehat{\tau_{t_0} s}(\omega) = e^{-2i\pi\omega t_0} \cdot \widehat{s}(\omega). \end{array} \right.$$

Cette propriété montre qu'il y a déphasage fréquentiel. Vérifions là :

On a

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_{t_0} s}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau_{t_0} s)(t) e^{-2i\pi\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - t_0) e^{-2i\pi\omega t} dt. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t - t_0 = u$, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_{t_0} s}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(u) e^{-2i\pi\omega t_0} e^{-2i\pi\omega u} du \\ &= e^{-2i\pi\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(u) e^{-2i\pi\omega u} du \\ &= e^{-2i\pi\omega t_0} \cdot \widehat{s}(\omega). \end{aligned}$$

7.2.7. Transformée de Fourier inverse

7.2.7.1. Définition

On appelle transformée de Fourier **inverse** du signal s , le signal $\overline{F}(s)$ (lire : Fourier barre de s), défini par l'intégrale

$$[\overline{F}(s)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{2i\pi\omega t} dt,$$

lorsque celle-ci est convergente.

7.2.7.2. Formules de réciprocity

On montre que, pour les signaux à décroissance rapide (voir paragraphe 7.2.2, cas n°3), on a

$$\begin{aligned} [\overline{F}(F(s))](t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{s}(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega \\ &= s(t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [F(\overline{F}(s))](t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\overline{F}(s)](\omega)e^{-2i\pi\omega t} d\omega \\ &= s(t). \end{aligned}$$

Ainsi \overline{F} est l'application linéaire inverse de F dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\overline{F} \circ F = F \circ \overline{F} = I,$$

où I est l'application identité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ $s \mapsto s$.

On peut voir dans la formule (analyse fréquentielle)

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{s}(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega,$$

vraie pour $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mais aussi pour d'autres signaux, une reconstruction du signal s , de coordonnées $\hat{s}(\omega)$ suivant la "base" des exponentielles complexes $\{e^{2i\pi\omega t}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$. La fonction "module" $\omega \mapsto |\hat{s}(\omega)|$ est appelé spectre du signal.

La transformée de Fourier inverse \overline{F} s'étend aux signaux s à énergie finie (cas n°4 du paragraphe 7.2.2). On montre qu'on a encore

$$F(\overline{F}(s)) = \overline{F}(F(s)) = s.$$

pour tout signal à énergie finie s .

7.3. Transformée de Fourier et signaux discrets

Cette section est consacrée à la description d'un outil important dans les applications concrètes, appelé **TFD** (transformée de Fourier discrète), permettant le traitement numérique des signaux discrets.

7.3.1. Transformée de Fourier à temps discret

Soit $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto s(n) = s_n$, un signal discret. Par analogie au cas continu, on définit la transformation de Fourier dite à temps discret (**TFTD**) :

$$\mathcal{T} : s \mapsto \mathcal{T}(s),$$

où

$$\mathcal{T}(s)(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{-2i\pi n \omega},$$

pour $\omega \in \mathbb{R}$, lorsque cette dernière série (à double entrée) converge.

Si, par exemple la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |s_n|$$

est convergente, alors $\mathcal{T}(s)$ est bien définie.

Grâce aux propriétés des exponentielles complexes $e^{-2i\pi n \omega}$, la fonction

$$\omega \mapsto \mathcal{T}(s)(\omega)$$

est périodique de période 1 sur \mathbb{R} et donc, pour le calcul de cette TFTD, il suffit de le faire sur un intervalle de fréquences de longueur 1.

Numériquement, cette transformation n'est pas pratique, puisque, à l'opposé du temps qui est discret, la variable fréquentielle ω est continue.

D'où la nécessité d'introduire une transformée de Fourier limitée à la fois à un nombre fini de points temporels et de points fréquentiels. C'est la **TFD** (transformée de Fourier discrète) qu'on décrit ci-dessous.

7.3.2. Transformée de Fourier discrète

7.3.2.1. Définitions

Fixons un entier $N \in \mathbb{N}^*$. La TTFD d'un signal discret fini connu en N points (temporels)

$$s = (s_0, s_1, \dots, s_{N-1}),$$

s'écrit

$$\mathcal{T}(s)(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-2i\pi n \xi},$$

avec $\xi \in [0, 1[$. Donc si on veut limiter le calcul sur machine de $\mathcal{T}(s)(\xi)$, on choisit N fréquences

$$(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1})$$

réparties à pas équidistants dans l'intervalle $[0, 1[$. Ce sont les valeurs

$$\xi_m = m/N,$$

avec $m = 0, 1, \dots, N - 1$.

On obtient alors

$$\mathcal{T}(s)(\xi_m) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-2i\pi n m/N}.$$

On va s'inspirer de cette dernière formule pour définir la TFD.

Notons $w_N = e^{2i\pi/N}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$w_N^n = (w_N)^n = e^{2i\pi n/N}.$$

La suite $(w_N^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est périodique de période N et vérifie les propriétés :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_N^N = w_N^0 = 1, \\ \sum_{n=0}^{N-1} w_N^n = 0, \\ \overline{w_N^n} = w_N^{-n}. \end{array} \right.$$

A tout signal temporel

$$s = (s_0, s_1, \dots, s_{N-1}),$$

on associe le signal fréquentiel noté

$$\hat{s} = (\hat{s}_0, \hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{N-1}),$$

défini par

$$\hat{s}_m = \sum_{n=0}^{N-1} s_n w_N^{-nm} = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-2i\pi nm/N},$$

pour $m = 0, 1, \dots, N - 1$.

L'application qui à $s = (s_0, s_1, \dots, s_{N-1})$ fait correspondre $\hat{s} = (\hat{s}_0, \hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{N-1})$ est appelée la transformée de Fourier discrète (**TFD**). On notera

$$\hat{s} = F_D(s).$$

7.3.2.2. Représentation matricielle

On vérifie que

$$\begin{pmatrix} \hat{s}_0 \\ \hat{s}_1 \\ \vdots \\ \hat{s}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & \dots & w_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & \dots & w_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{N-1} \end{pmatrix},$$

ainsi, la transformée de Fourier discrète est une application linéaire sur \mathbb{C}^N dont la matrice carrée d'ordre N relativement à la base canonique est symétrique et est donnée par

$$M_D = \left(w_N^{-(n-1)(m-1)} \right)_{\substack{m=1,2,\dots,N \\ n=1,2,\dots,N}}.$$

7.3.2.3. Remarques

Dans les cas concrets de calcul de la TFD, il est conseillé, pour des raisons d'efficacité d'algorithme, de prendre N égal à une puissance de 2.

Grâce à la périodicité de w_N^n (période N), on prolonge le signal discret fini

$$s = (s_0, s_1, \dots, s_{N-1}),$$

et sa TFD

$$\hat{s} = (\hat{s}_0, \hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{N-1}) = F_D(s),$$

à tout \mathbb{Z} , en posant naturellement pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tous $n, m \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$

$$\begin{cases} s_{n+kN} = s_n \\ \hat{s}_{m+kN} = \hat{s}_m. \end{cases}$$

7.3.2.4. *Exemple modèle*

Considérons le signal apériodique défini sur \mathbb{R} par

$$s(t) = \begin{cases} \cos(2\pi t) + \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{2}\pi t) + \frac{1}{3} \cos(2\sqrt{3}\pi t) & \text{si } |t| \leq 2\pi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sur $[-2\pi, 2\pi]$, ce signal est la superposition de trois fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

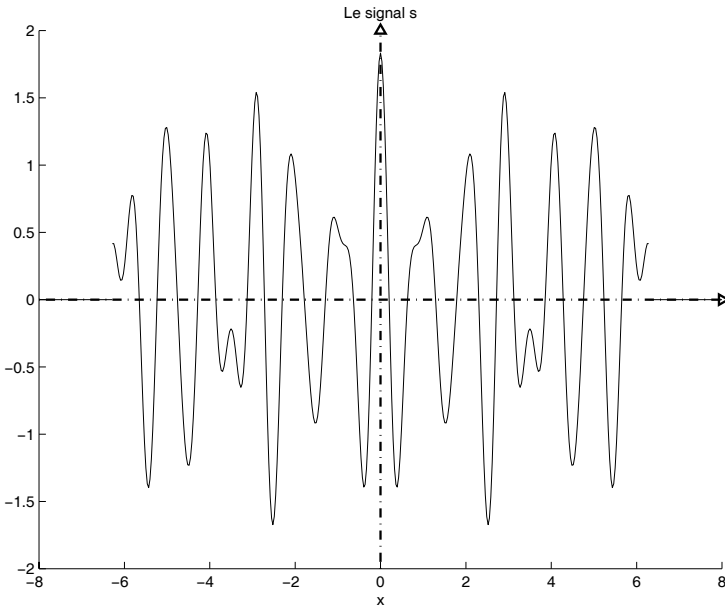
On déclare l'expression symbolique de s

```

» syms t real
» PI=sym('pi');
» T=2*PI;
» s=cos(2*PI*t)+1/2*cos(sqrt(2)*2*PI*t)+1/3*cos(sqrt(3)*2*PI*t);

```

puis on trace son graphe sur $[-8, +8]$



On l'obtient par

```

» figure(1);clf
» Tapp=double(T);
» clf ; hold on
» ezplot('0',[-8 -Tapp])
» ezplot(s,[-Tapp Tapp ])
» ezplot('0',[Tapp 8])
» axis auto
» dessineRepere
» title ('Le signal s')

```

Le signal s est continu par morceaux et nul pour $|t| > 2\pi$, il admet donc une transformée de Fourier. Utilisant sa parité, on calcule sa transformée de Fourier notée $sChapeau$

```

» syms w
» sChapeau=simple(2*int(s*cos(2*PI*w*t),t,0,T));

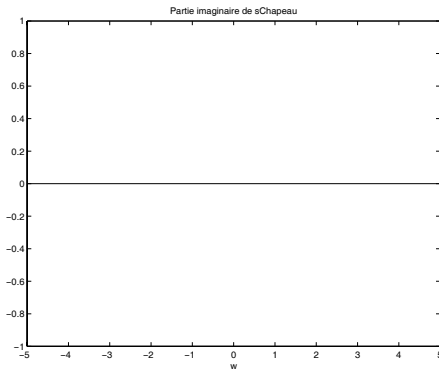
```

puis on vérifie graphiquement que la partie imaginaire de $sChapeau$ est nulle

```

» figure(10); ezplot(imag(sChapeau),-5,5)
» title('Partie imaginaire de sChapeau')

```

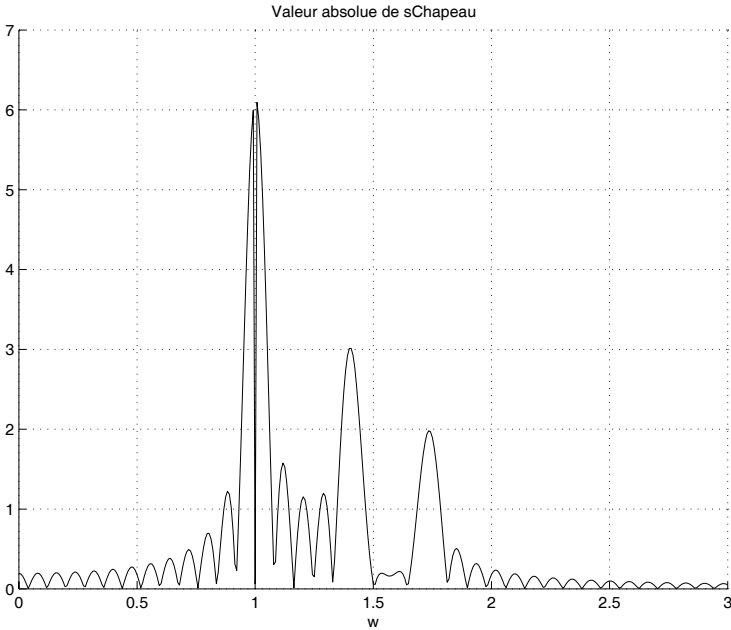


On représente la valeur absolue de $sChapeau$

```

» figure(2);clf;hold on
» ezplot(abs(sChapeau),0,3);
» axis auto ; grid on
» title ('Valeur absolue de sChapeau')

```



On note trois raies principales dans ce graphe correspondant aux fréquences 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Pour discrétiser le signal s , on fixe $N = 64$ et on construit la suite $(S_n)_{n=0,1,\dots,N-1}$ définie par

$$S_n = s(T_n),$$

où la subdivision (T_n) , de pas $4\pi/N$, est donnée par

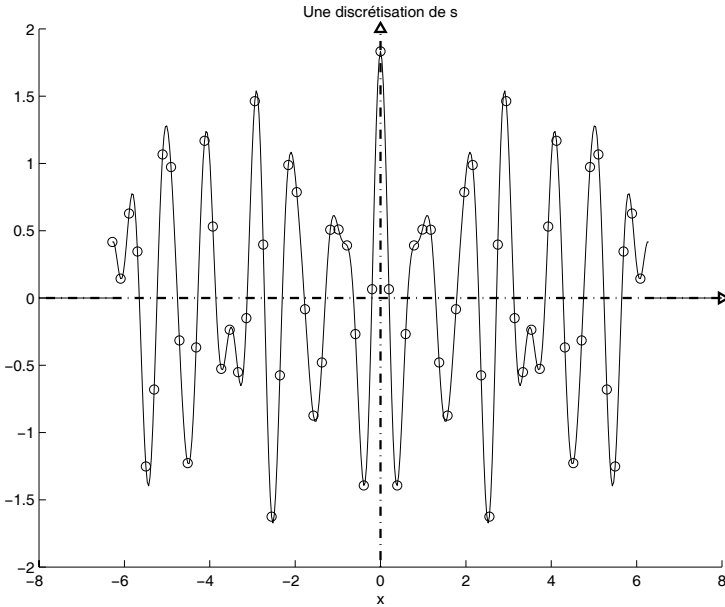
$$T_0 = -2\pi, \dots, T_n = -2\pi + \frac{4n\pi}{N}, \dots, T_{N-1} = 2\pi - \frac{4\pi}{N}.$$

On représente ensuite le graphe de $(S_n)_{n=0,1,\dots,N-1}$.

```

> N=64 ;
> Un=[0 :(N-1)]/N ; % subdivision de [0, 1]
> Tn=-Tapp+2*Tapp*Un ; %subdivision de [-Tapp, Tapp]
> Sn=double(subs(s,t,Tn));
> figure(1);hold on
> plot(Tn,Sn,'ok')
> title('Une discrétisation de s')

```

On calcule matriciellement la TFD de $(S_n)_{n=0,1,\dots,N-1}$

```

» wN=exp(2*i*pi/N);
» for n=1 :N
  for m=1 :N
    Md(m,n)=wN^(-(n-1)*(m-1));
  end
end
» tfdSn=Md*Sn';

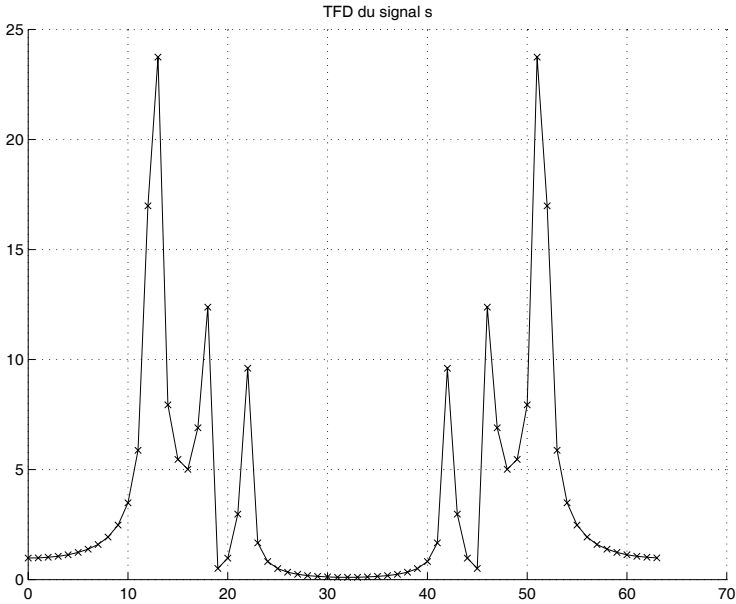
```

Le graphe de $(|S_n|)_{n=0,1,\dots,N-1}$ s'obtient par :

```

» figure(3); clf;hold on
» Iw=[0 :(N-1)];
» plot(Iw,abs(tfdSn),'kx-')
» hold on ;grid on
» title('TFD du signal s')

```



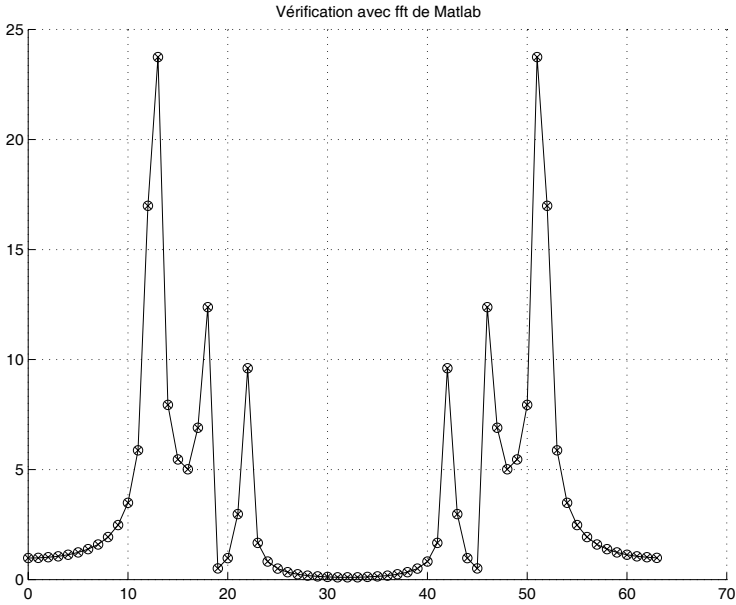
Les trois premiers pics correspondent, à un facteur multiplicatif près, aux trois raies principales citées précédemment.

La commande *Matlab* **fft** (*Fast Fourier Transform*) permet le calcul direct de la TFD par un algorithme rapide :

```

» tfdSnMatlab=fft(Sn);
» plot(Iw,abs(tfdSnMatlab),'o')
» title('Vérification avec fft de Matlab')

```



7.3.2.5. La TFD inverse

Considérons la matrice

$$(w_N^{nm})_{\substack{m=0,1,\dots,N-1 \\ n=0,1,\dots,N-1}}$$

alors son produit par celle de la TFD

$$M_D = (w_N^{-nm})_{\substack{m=0,1,\dots,N-1 \\ n=0,1,\dots,N-1}}$$

donne la matrice

$$(c_{mn})_{\substack{m=0,1,\dots,N-1 \\ n=0,1,\dots,N-1}}$$

avec

$$\begin{aligned} c_{mn} &= \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{mk} w_N^{-kn} = \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{mk} w_N^{-kn} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (w_N^{m-n})^k, \end{aligned}$$

ainsi, si $n = m$

$$c_{mn} = N,$$

et si $n \neq m$

$$c_{mn} = \sum_{k=0}^{N-1} (w_N^{m-n})^k = \frac{1 - (w_N^{m-n})^N}{1 - w_N^{m-n}} = 0,$$

on en déduit que la transformée de Fourier discrète F_D est inversible et son inverse est

$$F_D^{-1} = \frac{1}{N} \overline{F_D}$$

où la matrice de $\overline{F_D}$ est

$$(w_N^{nm})_{\substack{m=0,1,\dots,N-1 \\ n=0,1,\dots,N-1}},$$

d'où le résultat :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } s \text{ et } \hat{s} \text{ sont tels que } \hat{s} = F_D(s), \text{ alors } s = F_D^{-1}(\hat{s}), \\ \text{où } F_D^{-1} = \frac{1}{N} \overline{F_D}. \text{ Autrement dit, on reconstitue } s \text{ par} \\ s_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{s}_m w_N^{nm}, \text{ pour } n = 0, 1, \dots, N-1. \end{array} \right.$$

On vérifie la formule d'inversion ci-dessus pour $N = 4$, en affichant successivement les matrices M_D et $\overline{M_D}$, puis le produit $M_D \times \overline{M_D}/4$

```

» PI=sym('pi');
» for m=1 :4
    for n=1 :4
        Md(m,n)=exp(-2*i*PI*(m-1)*(n-1)/4);
    end
end
» Md
Md=
[ 1, 1, 1, 1]
[ 1, -i, -1, i]
[ 1, -1, 1, -1]
[ 1, i, -1, -i]

```

```

» for m=1 :4
    for n=1 :4
        MdBarre(m,n)=exp(2*i*PI*(m-1)*(n-1)/4);
    end
end
» MdBarre
MdBarre =
[ 1, 1, 1, 1]
[ 1, i, -1, -i]
[ 1, -1, 1, -1]
[ 1, -i, -1, i]

```

```

» Md*MdBarre/4
ans =
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]

```

Sous *Matlab*, la TFD inverse se calcule par la commande **ifft**, comme le montre l'exemple suivant

```

» sChapeau=[1,-i,-1,i];
» s=ifft(sChapeau,4)
s= 0 1 0 0

```

7.3.3. Propriétés de la TFD

7.3.3.1. Translation et modulation

Soit $s = (s_0, s_1, \dots, s_{N-1})$ un signal discret prolongé sur \mathbb{Z} par périodicité de période N . On définit, pour k fixé dans \mathbb{Z} :

1) le signal translaté $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que

$$u_n = s_{n-k},$$

2) le signal modulé $v = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec

$$v_n = s_n w_N^{kn}.$$

On vérifie que $\hat{u} = F_D(u)$ et $\hat{v} = F_D(v)$ s'obtiennent par

$$\begin{cases} \hat{u}_m = w_N^{-mk} \hat{s}_m \\ \hat{v}_m = \hat{s}_{m-k}, \end{cases}$$

pour $m \in \mathbb{Z}$.

7.3.3.2. Convolution

On rappelle que la convolution discrète des deux signaux

$$f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}), \quad g = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$$

est le signal

$$h = (h_0, h_1, \dots, h_{N-1}),$$

donné par

$$h_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_{n-k}.$$

On montre, comme dans le cas continu, que $\hat{h} = F_D(h)$ vérifie

$$\hat{h}_m = \hat{f}_m \cdot \hat{g}_m$$

pour tout $m = 0, 1, \dots, N - 1$.

7.3.4. Notion de filtre d'un signal

Souvent on a besoin de connaître l'analyse d'un signal dans une bande fréquentielle limitée $[-\omega_0, \omega_0]$ où ω_0 est un nombre donné strictement positif. On utilise alors la notion de filtre qu'on définit ci-dessous.

7.3.4.1. Définition

Une opération de convolution dans un système linéaire de signal d'entrée $e(t)$ et dont le signal de sortie $s(t)$ est régi par l'équation

$$s = h * e,$$

est appelée un **filtre** de caractéristique h (h est appelé filtre du système).

A titre illustratif, décrivons un exemple particulier de filtre.

On rappelle que si p est le signal porte de Dirac suivant

$$p(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in [-1/2, +1/2] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

sa transformée de Fourier (temporelle) est donnée par

$$\hat{p}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}.$$

Par analogie, si on considère le signal

$$f(t) = \frac{\sin(2\pi\omega_0 t)}{\pi t},$$

alors sa transformée de Fourier (barre) est

$$\overline{F}(f)(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in [-\omega_0, \omega_0] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

voir paragraphe 7.2.7.2.

Considérons maintenant un signal quelconque s d'énergie finie, alors son filtrage par f est donné par la convolution

$$s_f(t) = (f * s)(t),$$

qui est bien définie. D'où, par transformation de Fourier (barre)

$$\overline{F}(s_f) = \overline{F}(f)\overline{F}(s),$$

et on déduit que

$$\overline{F}(s_f)(\omega) = \begin{cases} \overline{F}(s)(\omega) & \text{si } \omega \in [-\omega_0, \omega_0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, sur la bande d'analyse fréquentielle fixée $[-\omega_0, \omega_0]$, la transformée de Fourier barre du signal s coïncide avec celle de son signal filtré. On dira que le signal filtré s_f est à bande limitée $[-\omega_0, \omega_0]$. Le filtre f qu'on vient d'utiliser est appelé filtre passe-bas idéal (**PBI**), de bande passante $[-\omega_0, \omega_0]$. On dira aussi que la transformée de Fourier barre $\overline{F}(s_f)$ est à support $[-\omega_0, \omega_0]$ ou que le signal filtré s_f est à bande limitée $[-\omega_0, \omega_0]$.

7.3.4.2. Remarque

Il existe d'autres types de filtres en théorie du signal qu'on ne développe pas dans ce manuel. On peut aussi effectuer le filtre d'un signal discret dans le cas de systèmes linéaires. Sous *Matlab*, cette opération se fait par la commande **filter** comme l'illustrent les exemples ci-dessous.

7.3.4.3. Exemple modèle

Soit le signal discret aléatoire s_1 donné par la commande *Matlab*

$$s_1 = \text{rand}(50, 1),$$

et le signal s_2 défini par

$$s_2(n) = \cos(n), \quad n = 1, 2, \dots, 50.$$

Examinons leur convolution par les filtres suivants

$$h_1 = (1/8, 1/4, 1/4, 1/4, 1/8)$$

et

$$h_2 = \frac{1}{2^{16}} (C_{16}^0, C_{16}^1, \dots, C_{16}^{16}),$$

où

$$C_{16}^p = \frac{16!}{p!(16-p)!}.$$

```

» h1=[1/8 1/4 1/4 1/4 1/8];
» num=prod(1:16);
» for p=1:15
    C(p)=num/(prod(1:p)*prod(1:16-p));
end
» C=[1 C 1];
» h2=C/2^16;

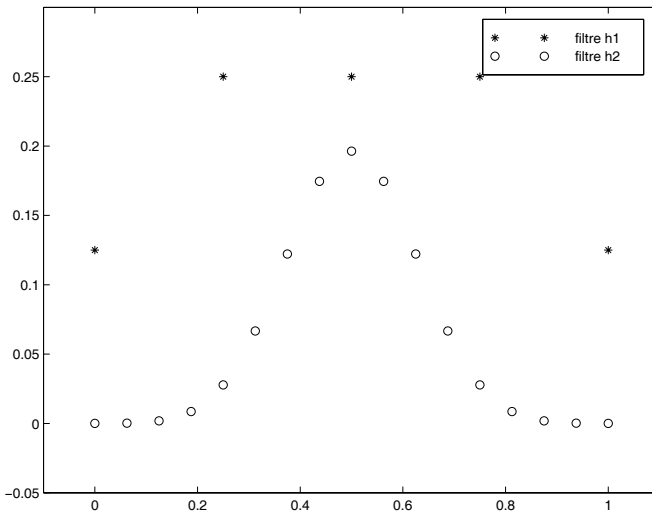
```

Les graphes de ces deux filtres sont donnés par :

```

» plot(0 : 1/(length(h1)-1) : 1, h1, '*')
» hold on
» plot(0 : 1/(length(h2)-1) : 1, h2, 'o')
» axis([-0.1 1.1 -0.05 0.3])
» legend('filtre h1', 'filtre h2')

```

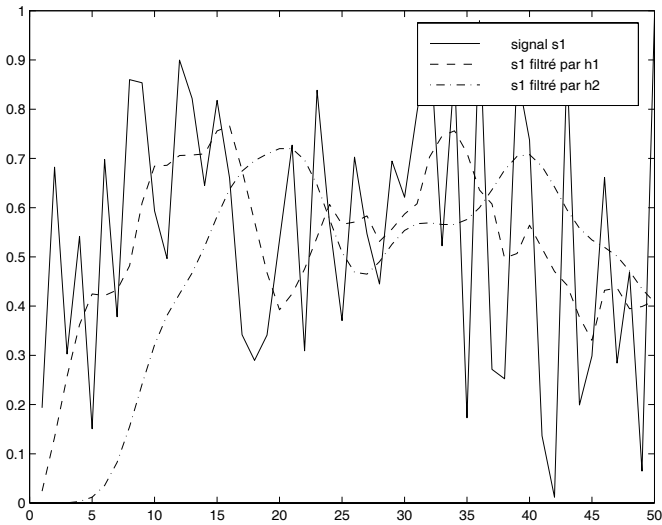


On définit le signal s_1 et on calcule ses filtrés par h_1 et h_2 .

```

» figure(2); clf
» s1=rand(50,1);
» plot(s1,'-')
» hold on
» sFiltre11=filter(h1,1,s1);
» plot(sFiltre11,'k-')
» sFiltre12=filter(h2,1,s1);
» plot(sFiltre12,'k-')
» legend('signal s1','s1 filtré par h1', 's1 filtré par h2')

```

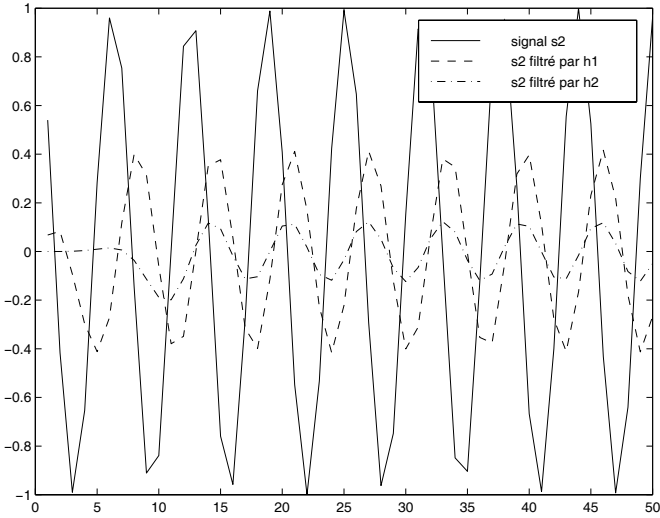
La sortie est un signal moins "aléatoire", plus régularisé que celui d'entrée. L'effet du premier filtre h_1 (en tirets sur le dessin) est une action de moyenne commise sur chaque séquence de cinq échantillons consécutifs. Le filtre gaussien h_2 (en traits mixtes) provoque un meilleur lissage.

On fait de même pour s_2 .

```

» s2= cos(1 :50);
» clf; plot(s2,'-')
» hold on
» sFiltre21=filter(h1,1,s2);
» plot(sFiltre21,'k-')
» sFiltre22=filter(h2,1,s2);
» plot(sFiltre22,'k-.')
» legend('signal s2','s2 filtré par h1', 's2 filtré par h2')

```



En plus de l'effet de lissage, on constate une réduction des oscillations.

7.4. Exercices

7.4.1. Signal triangulaire et transformée de Fourier

Soit s le signal triangulaire défini par

$$s(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1, +1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Donner son graphe, sa transformée de Fourier \hat{s} et le graphe de \hat{s} .
- 2) Calculer la dérivée s' (là où elle existe) et donner le graphe de s' .
- 3) Vérifier qu'alors on a

$$s'(t) = p(t + 1/2) - p(t - 1/2),$$

où p est la porte

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in] -1/2, +1/2[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4) En utilisant la transformée de Fourier de cette porte et la propriété de décalage temporel, donner \hat{s}' et retrouver le calcul précédent de \hat{s} .

5) Retrouver \hat{s} grâce à la formule $s = p * p$ (voir les résultats de l'exercice 6.3.1, p. 123, du chapitre "Convolution de signaux").

(solution p. 164)

7.4.2. Signal de type exponentiel et transformée de Fourier

1) Tracer le graphe du signal pair $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$f(t) = e^{-|t|}.$$

2) Vérifier que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$$

est convergente et donner sa valeur.

3) Vérifier avec *Matlab* que la transformée de Fourier \hat{f} est donnée par la fonction paire

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1 + 4\pi^2\omega^2}.$$

Donner son graphe.

4) Montrer mathématiquement que la transformée de Fourier d'un signal pair (lorsqu'elle existe) est paire.

(solution p. 167)

7.4.3. TFD d'un signal de période 4

On donne le signal discret périodique de période 4 défini par

$$s = (s_0, s_1, s_2, s_3) = (1, 0, 0, 0).$$

- 1) Donner la matrice M_D de la TFD de ce signal et calculer sa TFD \hat{s} .
- 2) Retrouver ce dernier résultat en utilisant la commande *fft*.
- 3) Représenter en bâtons sur deux repères s et \hat{s} .

(solution p. 169)

7.4.4. TFD d'un signal aléatoire

1) Créer un signal complexe discret aléatoire S à $N = 64$ éléments (utiliser la commande *rand(k, l)* qui génère un tableau de k lignes et l colonnes d'éléments réels compris entre 0 et 1). En donner la représentation graphique dans le plan complexe.

2) Donner de même le graphe de la TFD de S .

3) Représenter par des diagrammes en bâtons le module et l'argument de la TFD de S .

(solution p. 172)

7.5. Solutions

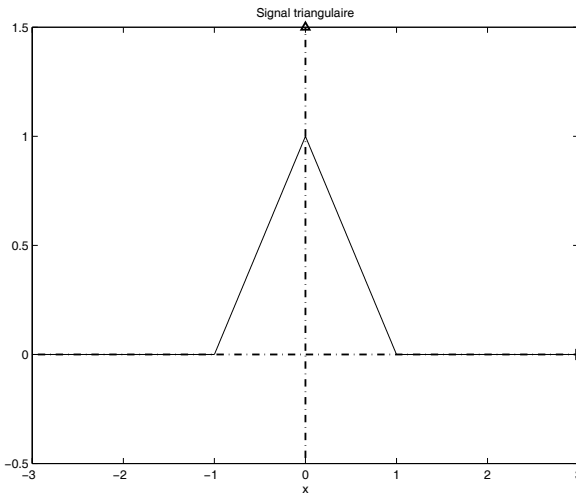
Exercice 7.4.1

1) L'allure du graphe du signal donné se fait par :

```

» syms t w real
» sDEt=1-abs(t);
» ezplot(sDEt,-1,1)
» hold on
» ezplot('0', -3,-1);
» ezplot('0', 1,3);
» axis ([-3 3 -0.5 1.5])
» title ('Signal triangulaire')

```



Le signal est continu par morceaux et nul pour $|t| > 1$, donc il admet une transformée de Fourier. Utilisant la parité, elle se calcule par la formule

$$\widehat{s}(\omega) = 2 \int_0^1 (1-t) \cos(2\pi\omega t) dt,$$

d'où

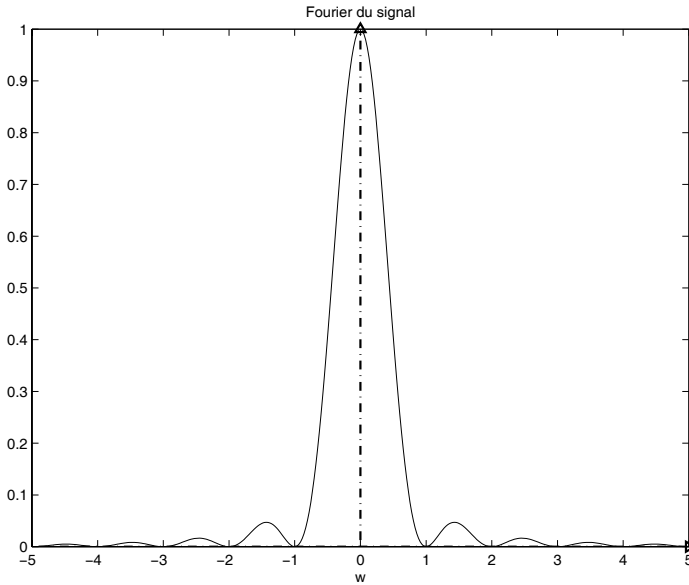
```

» sChapeauDEw= simplify(int(2*sDEt*cos(2*pi*w*t),t,0,1))
sChapeauDEw = -(cos(pi*w)^2-1)/pi^2/w^2
» figure(2);clf
» ezplot(sChapeauDEw,-5,5); hold on
» axis auto; dessineRepere
» title('Fourier du signal')

```

ainsi

$$\widehat{s}(\omega) = \frac{\sin^2(\pi\omega)}{(\pi\omega)^2}.$$



2) On vérifie que

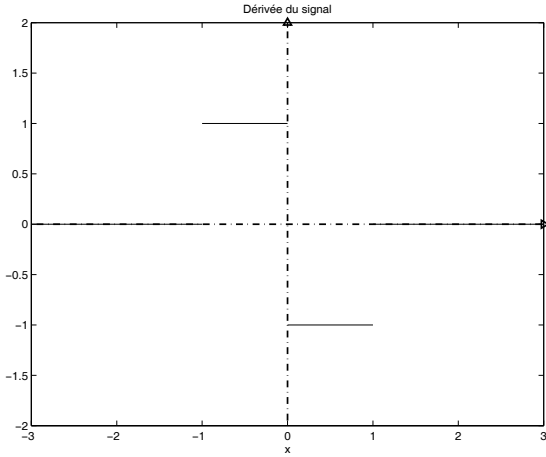
$$s'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]-1, 0[\\ -1 & \text{si } t \in]0, 1[\\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

d'où le graphe

```

» figure(3);clf;
» ezplot('0',-3,-1); hold on
» ezplot('1',-1,0);ezplot('-1',0,1)
» ezplot('0',1,3)
» axis([-3 3 -2 2]); dessineRepere
» title('Dérivée du signal')

```



3) Si $t \in] - \infty, 1[$, on a $s'(t) = 0$ et
 $t + 1/2 \in] - \infty, - 1/2[$
 $t - 1/2 \in] - \infty, - 3/2[$

donc

$$p(t + 1/2) = p(t - 1/2) = 0 = s'(t)$$

où p est le signal porte donné dans l'énoncé :

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in] - 1/2, 1/2[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $t \in] - 1, 0[$, alors $s'(t) = 1$ et

$t + 1/2 \in] - 1/2, 1/2[$
 $t - 1/2 \in] - 3/2, - 1/2[$

donc

$$p(t + 1/2) = 1$$

$$p(t - 1/2) = 0,$$

d'où

$$p(t + 1/2) = p(t - 1/2) = 1 = s'(t).$$

De même pour les autres cas. D'où l'égalité demandée pour tout t .

4) On a vu au paragraphe 7.2.5 que

$$\widehat{p}(\omega) = \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}.$$

Ecrivant que

$$p(t + 1/2) = (\tau_{-1/2}p)(t)$$

$$p(t - 1/2) = (\tau_{1/2}p)(t)$$

(translatées de p de $-1/2$ et de $1/2$) et utilisant les propriétés de la transformée de Fourier (cf. § 7.2.6), il vient

$$\begin{aligned}\widehat{s'}(\omega) &= (\widehat{\tau_{-1/2}p})(\omega) - (\widehat{\tau_{1/2}p})(\omega) \\ &= e^{i\pi\omega}\widehat{p}(\omega) - e^{-i\pi\omega}\widehat{p}(\omega) \\ &= (e^{i\pi\omega} - e^{-i\pi\omega})\widehat{p}(\omega) \\ &= 2i \sin(\pi\omega) \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega},\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\widehat{s'}(\omega) = (2i\pi\omega)\widehat{s}(\omega),$$

d'où le résultat pour $\widehat{s}(\omega)$.

5) On vérifie que $s = p * p$, ainsi

$$\widehat{s} = \widehat{p * p} = \widehat{p} \cdot \widehat{p} = \left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega} \right)^2.$$

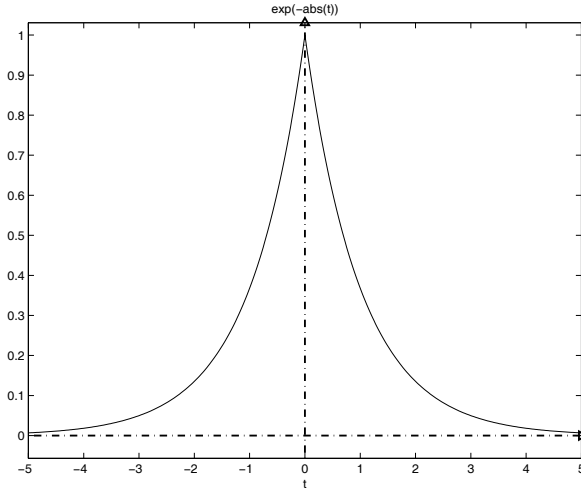
Exercice 7.4.2

1) On déclare le signal $t \mapsto e^{-|t|}$, puis on trace son graphe

```

» syms t w real
» fDEt=exp(-abs(t));
» figure(1);clf;
» ezplot(fDEt,-5,5)
» dessineRepere

```



2) On vérifie qu'il est intégrable sur \mathbb{R} :

```
» I=int(fDEt,-inf,inf)
I=2
```

3) On calcule sa transformée de Fourier continue

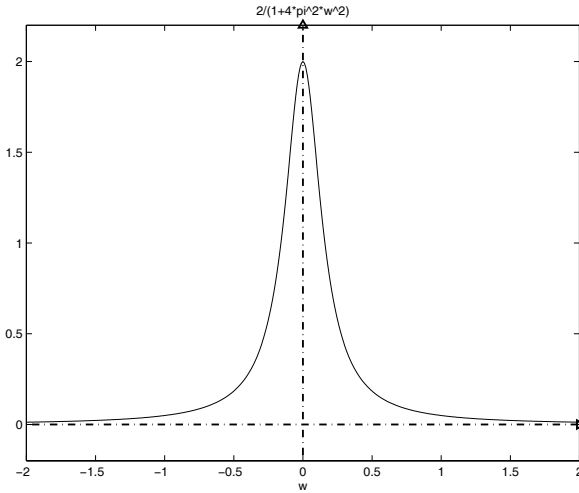
```
» fChapeauDEw=simplify(int(2*fDEt*cos(2*pi*w*t),t,0,inf))
fChapeauDEw =2/(1+4*pi^2*w^2)
```

ainsi

$$\widehat{s}(\omega) = \frac{2}{1 + 4\pi\omega^2}.$$

On trace le graphe de cette dernière

```
» figure(2);clf
» ezplot(fChapeauDEw,-2,2)
»axis([-2 2 -0.2 2.2]); dessineRepere
```

4) Par définition, pour un signal s pair défini sur \mathbb{R} et admettant une transformée de Fourier, on a

$$\widehat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2i\pi\omega t} dt.$$

Par le changement de variable $\tau = -t$, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{s}(\omega) &= \int_{+\infty}^{-\infty} s(-\tau)e^{-2i\pi\omega(-\tau)}(-1)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)e^{2i\pi\omega\tau} d\tau \\ &= \widehat{s}(-\omega). \end{aligned}$$

Exercice 7.4.3

1) Ici on a $N = 4$ et pour $m = 0, 1, 2, 3$

$$\widehat{s}_m = \sum_{n=0}^3 s_n e^{-2i\pi n m/4} = s_0 e^{-i\pi \cdot 0 \cdot m/2} = 1,$$

d'où

$$\widehat{s} = (1, 1, 1, 1).$$

La matrice M_D de la TFD est la matrice carrée symétrique donnée par

$$\left(e^{-i\pi(n-1)(m-1)/2} \right)_{\substack{m=1,\dots,4 \\ n=1,\dots,4}}$$

ou bien

$$M_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\pi/2} & e^{-i\pi} & e^{-3i\pi/2} \\ 1 & e^{-i\pi} & e^{-2i\pi} & e^{-3i\pi} \\ 1 & e^{-3i\pi/2} & e^{-3i\pi} & e^{-9i\pi/4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

On peut aussi effectuer le calcul avec *Matlab*

```

» s=[1 0 0 0];
» PI=sym('pi');
» for m=1 :4
    for n=1 :4
        Md(m,n)=exp(-2*i*PI*(m-1)*(n-1)/4);
    end
end
» Md
Md =
[ 1, 1, 1, 1]
[ 1, -i, -1, i]
[ 1, -1, 1, -1]
[ 1, i, -1, -i]

```

```

» sChapeau=(Md*s.').'
sChapeau =[ 1, 1, 1, 1]

```

On a utilisé la transposition matricielle pour transformer s en matrice colonne et le résultat en matrice ligne. Cette transposition s'effectue, pour les matrices à éléments complexes, avec l'opérateur *point prime* (\cdot')

2) En utilisant *fft* on a :

```

» fft(s)
ans =1 1 1 1

```

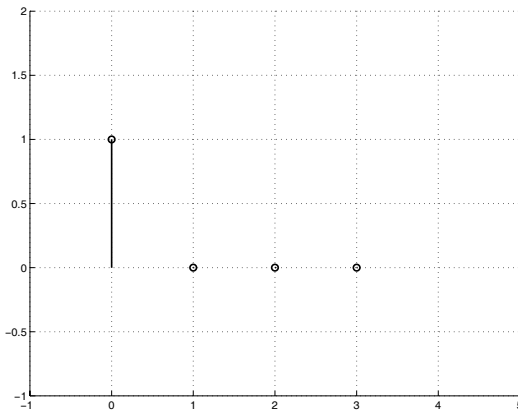
3) Les représentations graphiques de s et \hat{s} s'obtiennent par

```

» sChapeau=double(sChapeau);
» clf ; hold on
» for i =1 :4,
    plot(i-1,s(i),'o')
    plot([i-1 i-1],[0 s(i)])
end
» axis ([-1 5 -1 2])
» grid on

```

d'où le graphe en bâtons de s

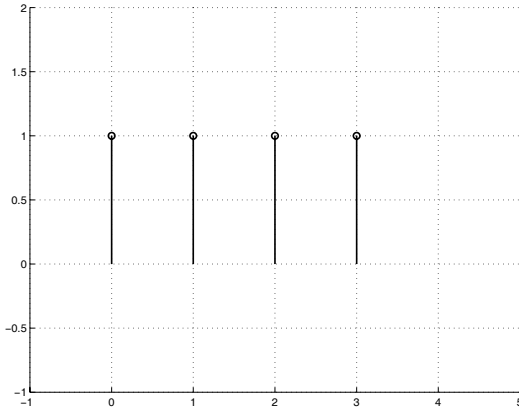


et pour celui de \hat{s}

```

» clf ; hold on
» for i =1 :4,
    plot(i-1,sChapeau(i),'o')
    plot([i-1 i-1],[0 sChapeau(i)])
end
» axis ([-1 5 -1 2])
» grid on

```

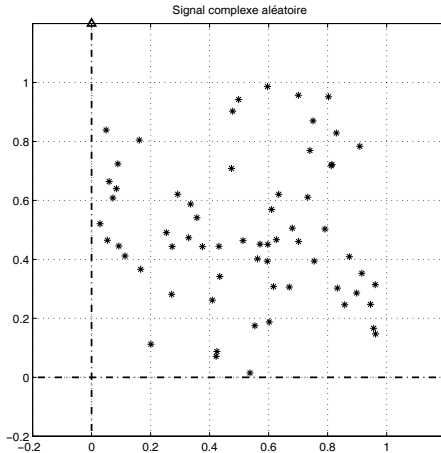


Exercice 7.4.4

1) Les parties réelle et imaginaire des éléments du signal S (comprises entre 0 et 1) sont générées par la commande *rand*. La commande *plot* permet alors de représenter le tableau complexe S .

```

» N=64;
» S=rand(1,N)+i*rand(1,N);
» figure(1); clf
» plot(S,'*')
» hold on; axis equal
» axis([-0.2 1.2 -0.2 1.2])
» grid on; dessineRepere
» title('Signal complexe aléatoire')
    
```



2) Grâce à *fft*, on a

```

» SChapeau=fft(S);
» figure(2);clf
» plot(SChapeau,'*')
» hold on ; grid on
» axis equal

```

Pour contenir strictement tous les points de *SChapeau*, on stocke dans *V* les valeurs par défaut

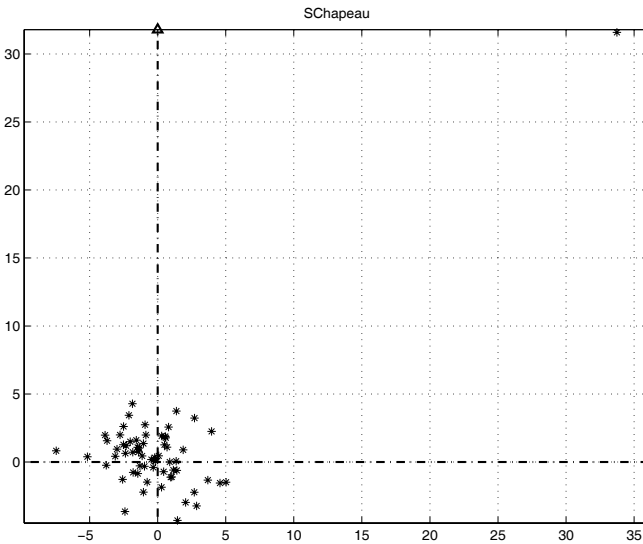
$$X_{\min}, \quad X_{\max}, \quad Y_{\min}, \quad Y_{\max}$$

du repère et on agrandit légèrement celui-ci. D'où

```

» V=axis ;
» axis([V(1)-0.2 V(2)+0.2 V(3)-0.2 V(4)+0.2])
» dessineRepere
» title('SChapeau')

```



3) A l'aide d'une instruction itérative, on dessine les points

$$M_i \left(\begin{array}{c} i - 1 \\ |S_{Chapeau}(i - 1)| \end{array} \right),$$

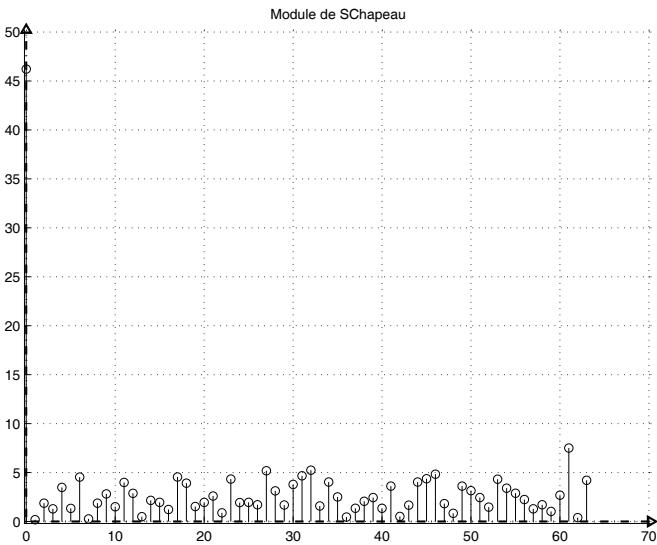
et les segments verticaux $[N_i M_i]$, avec

$$N_i \left(\begin{array}{c} i - 1 \\ 0 \end{array} \right).$$

```

» modSChapeau=abs(SChapeau);
» figure(3); clf;hold on
» for i =1 :N,
    plot(i-1,modSChapeau(i),'o')
    plot([i-1 i-1],[0 modSChapeau(i)])
end
» grid on
» axis auto
» V=axis;
» axis([V(1)-0.2 V(2)+0.2 V(3)-0.2 V(4)+0.2])
» dessineRepere
» title('Module de SChapeau')

```

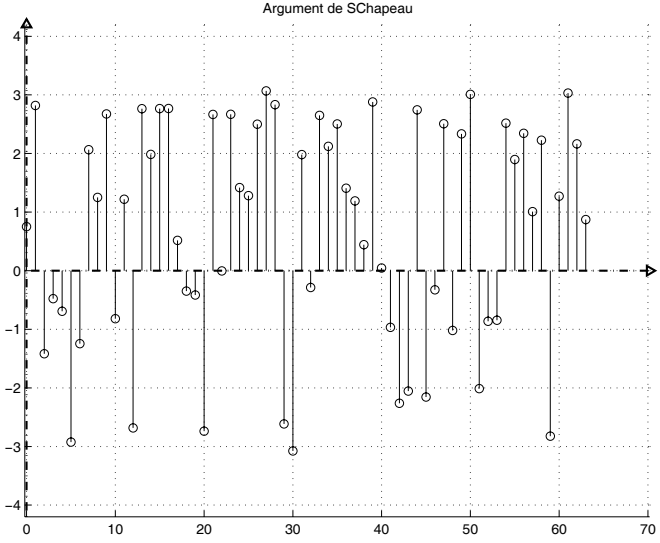


On fait de même pour les arguments

```

» argSChapeau=angle(SChapeau);
» figure(4); clf;hold on
» for i =1 :N,
    plot(i-1,argSChapeau(i),'o')
    plot([i-1 i-1],[0 argSChapeau(i)])
end
» grid on; axis auto
» V=axis;
» axis([V(1)-0.2 V(2)+0.2 V(3)-0.2 V(4)+0.2])
» dessineRepere
» title('Argument de SChapeau')

```



Bibliographie

- [BAR 02] A. BARRAUD, "Outils d'analyse numérique pour l'automatique", Hermes, Paris 2002.
- [LEL 72] J. LELONG-FERRAND, J.M. ARNAUDIES, "Cours de Mathématiques, tome 2 : analyse", Dunod, Paris, 1972.
- [RIV 94] M. RIVOIRE, J.-L. FERRIER, "Cours d'automatique, tome 1, signaux et systèmes", Eyrolles, 1994.
- [RIV 92] M. RIVOIRE, J.-L. FERRIER, J. GROLEAU, "Exercices d'automatique, tome 1, signaux et systèmes", Eyrolles, 1992.
- [SOI 93] C. SOIZE, "Méthodes mathématiques en analyse du signal", Masson, 1993.
- [THU 92] P. THUILLIER, J.C. BELLOC, "Mathématiques, analyse 3", Masson, 2ème édition, 1992.

Index

- A**
- Abel (critère d') 60
 - abs* 18, 19
 - absolument convergente (série) 56
 - affixe 13
 - analogique (signal) 36
 - analyser (un signal) 38
 - angle* 18
 - argument (d'un complexe) 14
- C**
- cart2pol* 18, 19
 - Cauchy (critère de) 58
 - causal (signal) 37
 - cercle trigonométrique 21
 - coefficients de Fourier 78, 85
 - conjugué (d'un complexe) 15
 - convergence normale (d'une série de fonctions) 66
 - convergence simple (d'une série de fonctions) 65
 - convergence uniforme (d'une série de fonctions) 65
 - convergente (intégrale généralisée) 100
 - convergente (série) 55
 - convolution continue 115
 - convolution de signaux 113
 - convolution discrète 120
- D**
- D'Alembert (critère de) 59
 - de Moivre (formule de) 19
 - dérivable par morceaux 92
 - Dirac (distribution) 39
 - Dirac (porte de) 42
 - Dirichlet (résultat de) 78
 - discrèt (signal) 36
 - divergente (intégrale généralisée) 100
 - divergente (série) 55
- E**
- échantillonné (signal) 37
 - écriture algébrique (d'un complexe) 17
 - écriture trigonométrique (d'un complexe) 17
 - énergie (d'un signal) 78
 - Euler (formule d') 21
 - exponentielle complexe 21
- F**
- fft* 154
 - filter* 159
 - filtre 158
 - fréquence (d'une série trigonométrique) 76
 - fréquentiel-temporel 39
- G**
- Gauss (intégrale de) 108
- I**
- iffi* 157
 - imag* 18, 19

int 107

intégrale généralisée 99

L

linéariser 20

M

module (d'un complexe) 14

P

Parseval (formule de) 79

partie imaginaire (d'un complexe) 13

partie réelle (d'un complexe) 13

plot 22

pol2cart 18, 19

Q

quad 123

R

racines nièmes (d'un complexe) 22

real 18, 19

reconstituer (un signal) 39

S

semi-convergente (série) 57

série 55

série alternée 59

série de Fourier (d'un signal) 78

série de Riemann 57

série géométrique 57

série trigonométrique 75

signal 35

sinus cardinal 142

somme (d'une série) 55

symsum 60

synthèse (d'un signal) 39

T

transformée de Fourier 140

transformée de Fourier à temps discret 147

transformée de Fourier discrète 148

transformée de Fourier inverse 146

transposée (d'une matrice complexe) 170

Sommaire du volume 1

Avant-propos

PREMIÈRE PARTIE. PRÉSENTATION DE MATLAB

Chapitre 1. Calculs avec Matlab

- 1.1. Calculs numériques usuels
- 1.2. Graphiques
- 1.3. Calcul symbolique avec *Symbolic Math Toolbox*
- 1.4. Itérations et étude de suites
- 1.5. Exercices
- 1.6. Solutions

Chapitre 2. Programmation avec Matlab

- 2.1. Créer des sous-programmes
- 2.2. Traitements conditionnels, expressions logiques
- 2.3. Les types de données utilisés par *Matlab*
- 2.4. Quelques commandes importantes de *Matlab*
- 2.5. Exercices
- 2.6. Solutions

DEUXIÈME PARTIE. ALGÈBRE LINÉAIRE

Chapitre 3. Systèmes linéaires : méthode de Gauss

- 3.1. Systèmes linéaires
- 3.2. Opérations fondamentales sur les systèmes
- 3.3. Méthode de résolution de Gauss
- 3.4. Résolution avec *Matlab*
- 3.5. Exercices
- 3.6. Solutions

Chapitre 4. Matrices

- 4.1. Généralités
- 4.2. Opérations sur les matrices
- 4.3. Inversion de matrices carrées
- 4.4. Déterminant d'une matrice carrée
- 4.5. Propriétés des déterminants
- 4.6. Calculs de déterminants
- 4.7. Retour aux systèmes et formules de Cramer
- 4.8. Exercices
- 4.9. Solutions

Chapitre 5. Espaces vectoriels

- 5.1. L'espace vectoriel \mathbb{R}^2
- 5.2. L'espace vectoriel \mathbb{R}^n
- 5.3. Cas général
- 5.4. Bases d'un espace vectoriel
- 5.5. Exercices
- 5.6. Solutions

Chapitre 6. Applications linéaires

- 6.1. Définitions et exemples
- 6.2. Propriétés fondamentales
- 6.3. Applications linéaires en dimension finie
- 6.4. Applications linéaires et matrices diagonales
- 6.5. Exercices
- 6.6. Solutions

TROISIÈME PARTIE. GÉOMÉTRIE

Chapitre 7. Calcul vectoriel et géométrie

- 7.1. Rappels : vecteurs géométriques du plan ou de l'espace
- 7.2. Calculs avec les coordonnées cartésiennes dans le plan
- 7.3. Coordonnées cartésiennes dans l'espace
- 7.4. Changements de base et changements de repère
- 7.5. Exercices
- 7.6. Solutions

Chapitre 8. Produit scalaire et produit vectoriel

- 8.1. Bases orthonormées dans le plan et l'espace
- 8.2. Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan ou l'espace
- 8.3. Produit vectoriel dans \mathcal{V}_3

8.4. Exercices

8.5. Solutions

Chapitre 9. Transformations dans le plan et dans l'espace

9.1. Transformations géométriques et applications linéaires

9.2. Coordonnées homogènes et transformations planes

9.3. Coordonnées homogènes et transformations de l'espace

9.4. Projections et leurs matrices en coordonnées homogènes

9.5. Exercices

9.6. Solutions

Bibliographie

Index

Sommaire du volume 2

Avant-propos

PREMIÈRE PARTIE. ANALYSE

Chapitre 1. Suites réelles

- 1.1. Généralités sur les suites
- 1.2. Limite d'une suite
- 1.3. Propriétés des limites de suites
- 1.4. Suites monotones
- 1.5. Suites récurrentes
- 1.6. Exercices
- 1.7. Solutions

Chapitre 2. Fonctions numériques d'une variable réelle

- 2.1. Rappels généraux sur les fonctions
- 2.2. Limite d'une fonction
- 2.3. Continuité
- 2.4. Dérivation
- 2.5. Fonctions trigonométriques inverses
- 2.6. Comparaison de deux fonctions
- 2.7. Formules de Taylor et développements limités
- 2.8. Exercices
- 2.9. Solutions

Chapitre 3. Intégration

- 3.1. Intégrale de Riemann
- 3.2. Primitive d'une fonction

- 3.3. Calcul intégral
- 3.4. Décomposition en éléments simples
- 3.5. Intégration de fractions rationnelles
- 3.6. Exercices
- 3.7. Solutions

DEUXIÈME PARTIE. ANALYSE NUMÉRIQUE ÉLÉMENTAIRE

Chapitre 4. Arithmétique de l'ordinateur

- 4.1. Représentation des entiers
- 4.2. Représentation des réels positifs en virgule fixe
- 4.3. Représentation des réels en virgule flottante
- 4.4. Les réels en V.F.N à t chiffres
- 4.5. Opérations de base sur les nombres machine
- 4.6. Exercices
- 4.7. Solutions

Chapitre 5. Gestion d'erreurs

- 5.1. Erreur absolue et erreur relative
- 5.2. Erreurs d'affectation
- 5.3. Cumul d'erreurs d'affectation et d'opération
- 5.4. Erreurs d'absorption
- 5.5. Erreurs de cancellation
- 5.6. Erreurs dues aux choix des formules algébriques
- 5.7. Erreurs dues aux perturbations des données
- 5.8. Estimation probabiliste de l'erreur
- 5.9. Exercices
- 5.10. Solutions

Chapitre 6. Approximation de racines d'équations

- 6.1. Méthode de la dichotomie
- 6.2. Méthode des approximations successives (ou du point fixe)
- 6.3. Méthode de Newton (ou de la tangente)
- 6.4. Plan pour la recherche d'une racine
- 6.5. Exercices
- 6.6. Solutions

Chapitre 7. Interpolation polynomiale

- 7.1. Le polynôme d'interpolation d'une fonction
- 7.2. Approche polynomiale de la dérivation
- 7.3. Exercices
- 7.4. Solutions

Chapitre 8. Intégration numérique

- 8.1. Description de la méthode
- 8.2. Méthode des rectangles
- 8.3. Méthode des trapèzes
- 8.4. Méthode de Simpson
- 8.5. Gestion d'erreur
- 8.6. Exercices
- 8.7. Solutions

Bibliographie

Index