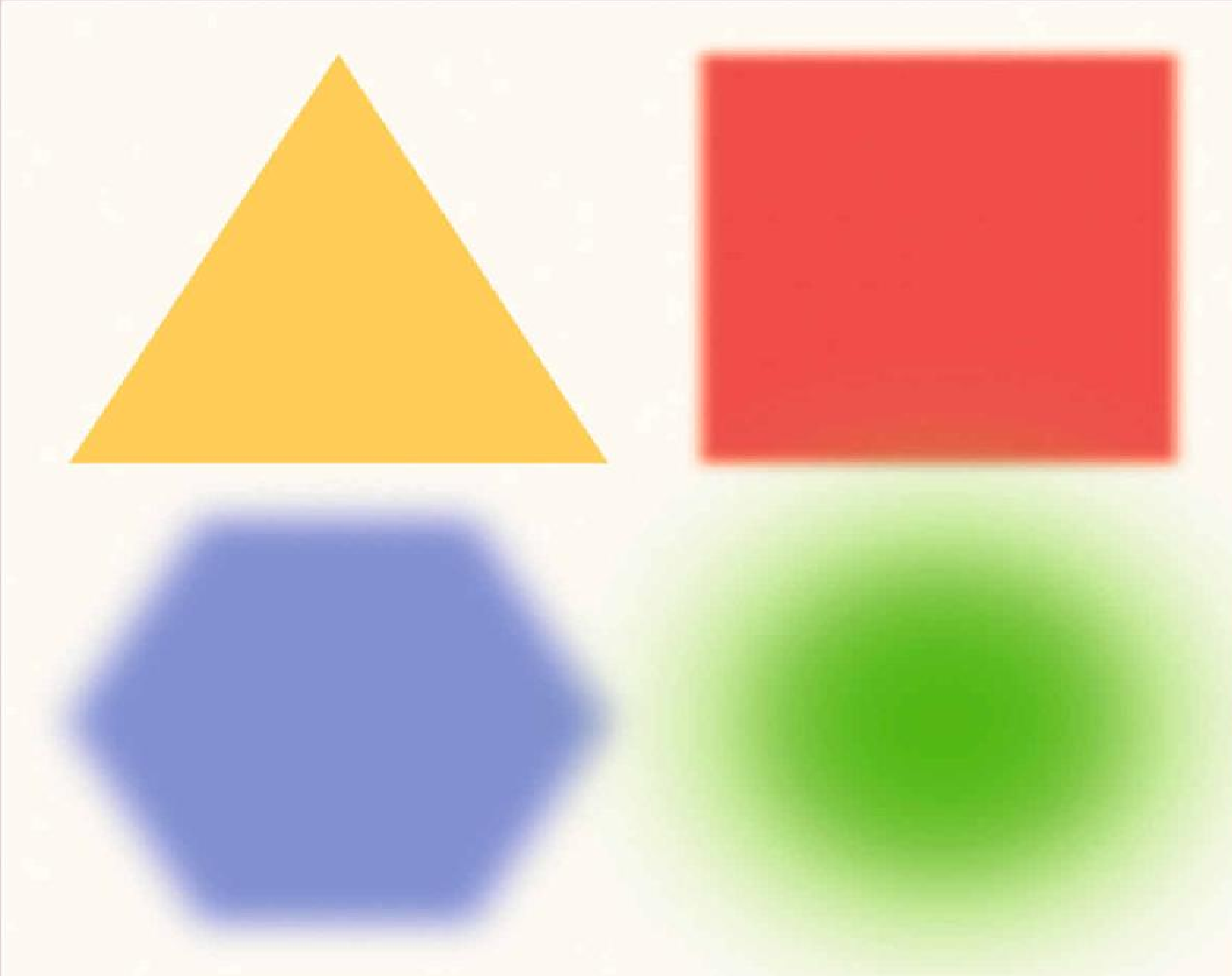
ALAIN CONNES

LA GÉOMÉTRIE ET LE QUANTIQUE



LES GRANDES VOIX DE LA RECHERCHE

CNRS EDITIONS

DE VIVE VOIX

Présentation de l'éditeur

En 1637, Descartes révolutionne la manière que l'on a de faire de la géométrie : en associant à chaque point de l'espace trois coordonnées, il pose les bases de la géométrie algébrique. Cette géométrie est dite « commutative » : le produit de deux quantités ne dépend pas de l'ordre des termes, et $A \times B = B \times A$.

Cette propriété est fondamentale, l'ensemble de l'édifice mathématique en dépend.

Mais au début du XX^e^ siècle, la découverte du monde quantique vient tout bouleverser. L'espace géométrique des états d'un système microscopique, un atome par exemple, s'enrichit de nouvelles propriétés, qui ne commutent plus. Il faut donc adapter l'ensemble des outils mathématiques. Cette nouvelle géométrie, dite « non commutative », devenue essentielle à la recherche en physique, a été développée par Alain Connes.

En un texte court, vif et fascinant, ce grand mathématicien nous introduit à la poésie de sa discipline.

Alain Connes est mathématicien, médaille Fields, médaille d'or du CNRS, et titulaire de la chaire Analyse et Géométrie du Collège de France.

Alain Connes

La géométrie et le quantique

CNRS ÉDITIONS

DE VIVE VOIX

La version audio du présent ouvrage
est disponible à l'achat sur le site www.devivevoix.com

Couverture : Paul Cox.

ISBN : 978-2-271-12772-3

www.cnrseditions.fr
www.devivevoix.com

Ce document numérique a été réalisé par PCA

Sommaire

Les Grandes Voix de la Recherche

Retrouvez tous les ouvrages de CNRS Éditions

Les Grandes Voix de la Recherche

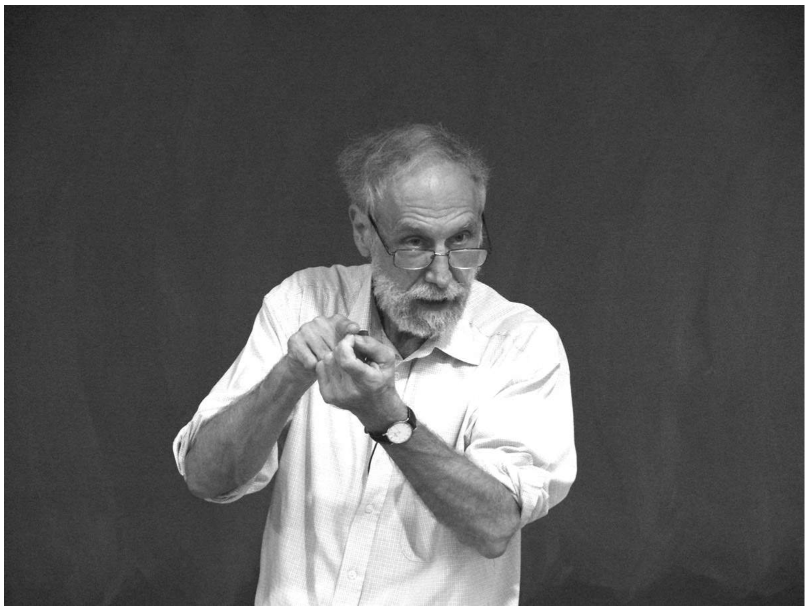
Une collection CNRS Éditions / De Vive Voix

Donner la parole aux lauréats et lauréates de la médaille d'or du CNRS, la plus prestigieuse récompense scientifique française : telle est l'ambition de la collection *Les Grandes Voix de la Recherche*.

En des textes courts et vivants, les médailles d'or retracent leur parcours, nous transmettent leur passion, nous présentent leurs travaux. Grâce à des contenus accessibles et à jour des dernières avancées scientifiques, ils nous introduisent au meilleur de la recherche française.

En passeurs et médiateurs, ces grandes voix de la recherche explorent tous les domaines de la connaissance et présentent de manière claire les grands défis de la science.

À écouter ou à lire, ces grandes voix de la recherche sont disponibles sous forme de livre audio et de livre papier.



Alain Connes lors d'une conférence en 2012 à Villeneuve-d'Ascq.

Le principe d’incertitude

Il s’agit ici de retracer un parcours scientifique, en l’occurrence le mien, mais c’est en quelque sorte secondaire. Ce qui compte avant tout, ce sont les rencontres, et surtout les domaines scientifiques concernés.

Après être entré à l’École normale supérieure, j’ai décidé de ne pas passer l’agrégation parce que je ne voulais pas recommencer à bachoter. J’avais commencé, à l’École, à faire de la recherche en mathématiques, mais je n’ai vraiment trouvé un sujet qui m’intéressait qu’après en être sorti, avec la mécanique quantique. J’avais toujours avec moi le petit livre publié par Heisenberg en 1930 (*The Physical Principles of Quantum Theory*) et j’avais été extrêmement inspiré par la manière dont il expliquait comment il avait découvert la mécanique des matrices qui sous-tend la mécanique quantique. Je commence par là, parce que cette découverte de Heisenberg a joué, tout au long de mon parcours, un rôle absolument essentiel.

Avant la découverte de Heisenberg, il y avait un modèle pour l’atome, que l’on appelait « l’atome de Bohr » et qui postulait des électrons en orbite circulaire stable autour du noyau. Et il y avait des règles complètement *ad hoc,* qui n’avaient aucune justification conceptuelle mais permettaient de retrouver, par exemple, comment était fait le spectre de l'hydrogène. Heisenberg s'occupait justement de calculer des spectres d'atomes, c'est à dire déterminer mathématiquement l'ensemble des longueurs d'onde présentes dans la lumière émise par l'atome en question. Par un concours de circonstances – le hasard joue un rôle important en sciences –, il avait été envoyé par son université sur l'île d'Helgoland, dans la mer du Nord, pour soigner un grave rhume des foins : à l'époque, le seul remède était de se réfugier dans un endroit totalement à l'abri des pollens. C'est une île très petite, où il était logé chez une vieille dame et avait tout le temps nécessaire pour réfléchir et faire des calculs. Il avait élaboré sa nouvelle mécanique mais sa théorie lui paraissait contradictoire : la conservation de l'énergie, qui joue un rôle essentiel dans le formalisme classique, posait problème et devait rester vraie dans son nouveau formalisme. Il fit donc des calculs avec le système qu'il avait créé et il s'aperçut finalement que l'énergie était bien conservée ! Il décrit ce moment de manière très frappante dans son autobiographie. Il était alors 3 ou 4 heures du matin, et il dit qu'à cet instant-là il a eu devant les yeux un paysage qui l'a presque effrayé par son immensité. Au lieu d'aller dormir, il a gravi un des pitons rocheux qui bordent l'île et y a attendu le lever du soleil.

Cette découverte de Heisenberg a été mon point de départ. Quand je suis sorti de l'École normale, j'étais élève de Gustave Choquet et il a eu l'idée de me faire apprendre de la physique en m'envoyant à l'école d'été des Houches, en 1970. Il y avait des conférences d'Oscar Lanford, qui expliquait ce que von Neumann avait fait après Heisenberg. Ce qu'avait trouvé Heisenberg c'est que, lorsque l'on fait des calculs de physique pour des systèmes microscopiques, comme un atome en interaction avec la lumière, un phénomène tout à fait extraordinaire se produit : on ne peut plus avoir la liberté que l'on a d'habitude de permuter l'ordre des termes dans une équation. Quand on écrit $E = mc^2$, on pourrait aussi bien écrire $E = c^2m$, le résultat serait le même : c'est la règle d'algèbre essentielle que l'on dit « de commutativité », qui fait que si l'on permute les deux termes d'un produit, le résultat est inchangé. Mais Heisenberg a trouvé que, lorsque l'on travaille avec un système microscopique et que l'on multiplie des quantités observables, par exemple la position d'une particule par sa vitesse, ou plus exactement par son moment (sa vitesse multipliée par sa masse), on ne peut plus permuter librement les termes du produit. Le corollaire est très connu : c'est le principe d'incertitude de Heisenberg, qui dit qu'il existe une limite à la précision avec laquelle on peut connaître simultanément deux propriétés d'une même particule associées à des observables qui ne commutent pas. Par exemple, plus on connaît avec une grande précision sa position, et moins on connaît précisément sa vitesse, et inversement.

C'est la partie physique de ce qui se passe, on y reviendra. Conséquence : il y a une espèce de nouveauté permanente, de liberté, de la mécanique qui fait que, lorsque l'on répète certaines expériences au niveau microscopique, on n'obtient pas le même résultat. Par exemple, si l'on envoie un électron à travers une fente dont la taille est de l'ordre de la longueur d'onde de l'électron, celui-ci arrive sur une cible placée au-delà de la fente, à un endroit précis. Mais on ne peut pas reproduire l'expérience de telle sorte que l'électron arrive à nouveau à ce même endroit précis. Tout ce que l'on connaît, c'est la probabilité pour qu'il arrive à tel ou tel endroit. Il n'y a aucun moyen, c'est le principe d'incertitude de Heisenberg qui le dit, de répéter l'expérience de telle sorte que l'électron arrive exactement au même endroit. Il y a donc une espèce de fantaisie du quantique qui se manifeste à tout instant, chaque fois que l'on fait une telle expérience au niveau microscopique.

Mathématiquement, c'est une autre histoire, parce que la découverte de Heisenberg a appris aux physiciens qu'il leur fallait faire attention lorsqu'ils manipulaient ces quantités observables dans le cadre de ce qui est devenu la mécanique quantique, c'est-à-dire la mécanique des systèmes microscopiques. Cela peut paraître déroutant, mais il s'agit en fait d'un phénomène auquel nous sommes habitués : il se manifeste tous les jours lorsque nous écrivons. Si nous permutons entre elles les lettres utilisées, comme quand on fait des anagrammes, nous modifions le sens des phrases : ainsi « *onde gravitationnelle* » comprend les mêmes lettres mais n'a pas le même sens que « *le vent d'orage lointain* ».

Les deux ont pourtant la même valeur quand on travaille en algèbre commutative, où l'on se permet de permuter les lettres. Pour que les phrases ne perdent pas leur sens, on a compris qu'il faut faire attention à l'ordre des lettres dans une phrase. Et Heisenberg a montré que, quand on travaille au niveau microscopique, on n'a plus le droit de simplifier comme on simplifie dans les calculs de physique ordinaire. C'est une découverte majeure parce qu'elle a un impact considérable, non seulement en physique, mais aussi en mathématiques. En ce qui me concerne, j'ai passé l'essentiel de mon existence de scientifique à l'exploiter sur le plan mathématique.

Max Born et Pascual Jordan ont compris que les calculs que faisait Heisenberg étaient ce que l'on appelle, en mathématiques, des calculs de matrices. Inutile de savoir ce qu'est une matrice. Ce qui est essentiel, c'est que les matrices ont cette propriété, par rapport aux nombres ordinaires, de ne pas commuter entre elles. Le produit de deux matrices dans l'ordre « ab » aura un résultat en général différent du produit « ba ». Born et Jordan ont compris que

Heisenberg avait redécouvert les matrices, mais sous une forme naturelle, à partir d’observations.

Les spectres

Dans le langage courant, les spectres sont des fantômes ou signalent en tout cas des choses étranges. En physique, le mot spectre désigne une réalité, tout comme en mathématiques. Un des miracles qui s'est produit au XXᵉ siècle, c'est que les spectres de la physique ont pu être calculés comme des spectres au sens mathématique dans les exemples physiques les plus importants.

Le sens physique des spectres se comprend de la manière suivante : quand, en suivant Newton, on prend la lumière qui provient du Soleil et qu'on la fait passer à travers un prisme, elle donne, une fois décomposée par son passage à travers le prisme, un arc-en-ciel, c'est-à-dire qu'elle se décompose en éléments plus simples qui correspondent chacun à une des couleurs de l'arc-en-ciel. Mais en affinant cette expérience, on s'est aperçu que l'on observait à un endroit de l'arc-en-ciel une raie noire, que l'on appelle la raie noire du sodium. On a considéré cette raie comme un élément isolé, jusqu'à ce que l'opticien allemand Fraunhofer ait, au XIXᵉ siècle, l'idée extraordinaire de regarder l'arc-en-ciel obtenu après le passage de la lumière du Soleil à travers un prisme avec un microscope. Il s'est alors aperçu qu'il n'y avait pas une seule raie noire, mais en a répertorié environ cinq cents. Elles constituent ce que les physiciens appellent un « *spectre d'absorption* », qui se présente un peu comme un code-barres. Des années après, Robert Bunsen et Gustav Kirchhoff, entre autres, se sont aperçus qu'en faisant chauffer certains corps, comme le sodium, on pouvait obtenir la même configuration, non pas avec des raies noires sur un fond arc-en-ciel, mais avec des raies brillantes sur un fond noir. On a alors compris que ces raies étaient une espèce de signature du corps chimique en question, et réussi à reproduire, avec des corps chimiques différents, un certain nombre de raies qui apparaissaient dans le spectre du Soleil.

Ainsi, ces codes-barres, ces « spectres d'absorption », apparaissent comme des raies noires lorsque l'on regarde la lumière du Soleil à travers un prisme, avec la précision extraordinaire que procure un microscope. Mais on observe des raies que l'on ne parvient pas à rapporter à un élément connu. C'est là que les physiciens et les chimistes sont intervenus pour dire qu'elles étaient peut-être celles d'un corps chimique inconnu. Et, comme il vient du Soleil, on l'a l'appelé « hélium ».

Survient alors, au début du XX^e siècle, l'éruption du Vésuve. Avec les mêmes procédés spectrométriques, on a analysé la lumière de ses laves et on y a trouvé de l'hélium. C'est merveilleux. Ça explique ce que sont les spectres au sens de la physique, ça donne leur sens et leur importance : chacun d'entre eux est une signature. Chaque corps chimique différent a une signature différente, un code-barres différent. Quand le corps chimique est pur, sa signature n'est pas une superposition de signatures différentes, elle est également pure.

Évidemment, on a tout de suite essayé de comprendre quelle était la nature de cette signature. On l'a cherché pour le corps disponible le plus simple, l'hydrogène, car c'était plus difficile pour l'hélium. On a mis un certain temps pour comprendre que, si l'on regardait un spectre général, non pas en longueurs d'onde, mais en fréquences, celui-ci avait une structure remarquable. C'était en fait un spectre formé par les différences A – B entre éléments quelconques A, B d'un ensemble plus simple de fréquences. C'est-à-dire qu'il fallait indexer les fréquences qui apparaissent dans un spectre général par deux indices comme (a, b) ou (c, d). Bien entendu, si l'on prend la différence (A – B) entre A et B et qu'on l'ajoute à la différence (B – C), entre B et C, cela donne la différence entre A et C.

Cela a donné une règle générale de composition pour les fréquences qui apparaissent dans un spectre qui s'appelle la « règle de composition de Ritz-Rydberg ». Le génie de Heisenberg, c'est d'avoir construit sa mécanique à partir de cette règle. Il a compris la chose suivante : si la mécanique classique avait été valable pour un corps microscopique, on n'aurait pas eu cette règle de composition-là mais la règle d'un groupe, c'est-à-dire que deux fréquences u et v du spectre s'additionnent pour donner une nouvelle fréquence u+v du spectre. On aurait obtenu, par un procédé mathématique que l'on appelle la transformée de Fourier, l'algèbre des observables. Heisenberg a eu cette idée merveilleuse de dire que ce sont la physique, le principe de Ritz-Rydberg et la chimie qui doivent primer. Comme c'est ce que l'on trouve expérimentalement, on va baser l'algèbre des observables sur cette règle de Ritz-Rydberg.

Ce sont Born et Jordan qui ont expliqué à Heisenberg que la structure mathématique qu'il avait trouvée était bien connue des mathématiciens, qui appellent cela les matrices. Une matrice n'est rien d'autre qu'un tableau, et au lieu d'être indexé comme une suite par une seule lettre, il est indexé par deux lettres. Quand on multiplie deux matrices, on utilise la règle de Ritz-Rydberg.

Peu après cette découverte de Heisenberg, Schrödinger a fait un autre pas extrêmement important. Grâce à lui, on a fait le lien entre les spectres qui apparaissaient en physique et ceux qui apparaissaient en mathématiques. Car, et c'est remarquable, le mot « spectre » était déjà connu en mathématiques, par l'école de Hilbert par exemple, et connu à cause de ce que l'on appelle les opérateurs et le spectre d'opérateurs. Il n'est pas question de l'expliquer précisément ici, mais c'est quelque chose qui a un sens mathématique parfaitement défini.

Schrödinger a été le premier à calculer le spectre associé à l'hydrogène par un calcul mathématique, alors que les physiciens l'appréhendaient par des mesures. Ce qui est extraordinaire, c'est que la théorie de Schrödinger et la théorie de Heisenberg sont les mêmes, ce qui a donné lieu à un formalisme réalisé par l'un des plus grands mathématiciens de l'époque, qui n'était d'ailleurs pas que mathématicien : John von Neumann.

Von Neumann a compris qu'il y a un formalisme mathématique existant, développé par l'école de Hilbert, et qui utilise comme cadre mathématique commun ce que l'on appelle l'espace de Hilbert. Cet espace, considérons-le comme une espèce de joker abstrait, unique, qui va jouer un rôle essentiel dans tout ce qui va suivre. Il n'y a qu'un seul espace de Hilbert et il va être le siège de la mécanique quantique. C'est le cadre le plus approprié que l'on connaisse jusqu'à présent.

On connaît l'espace euclidien, le plan, on connaît aussi l'espace de dimension 3. Pour passer à l'espace de Hilbert, il faut faire quelques pas difficiles, et même si l'on ne comprend pas tous les détails, il faut savoir que ça existe. Le premier pas, c'est qu'il faut passer d'un espace réel à un espace complexe, ce qui n'est pas encore trop difficile à comprendre. On est très habitué aux nombres réels, mais ils ne sont pas très flexibles et manipulables pour faire de la physique. On a eu besoin d'ajouter aux nombres réels un autre nombre, baptisé « nombre imaginaire pur », qui vérifie que son carré est égal à –1. Il est très précieux pour faire de la physique et en particulier de l'électromagnétisme.

Le pas suivant est beaucoup plus difficile à accepter : l'espace de Hilbert possède une infinité de dimensions. C'est grâce à cela qu'un nombre incroyable de merveilles vont apparaître.

La première de ces merveilles, c'est qu'il y a une coïncidence entre le point de vue de Heisenberg (qui est extrêmement pratique, extrêmement concret, parce que les observables qu'il a découvertes deviennent des opérateurs, c'est-à-dire quelque chose qui agit dans cet espace de Hilbert) et celui de Schrödinger (qui a découvert comment on pouvait calculer le spectre d'un élément chimique, qui se manifeste lui aussi par un opérateur dans l'espace de Hilbert). Cela paraît très mystérieux, mais si on a compris quelque chose sur la nature, sur la réalité, sur la mécanique quantique, c'est bien que la scène mathématique correspondante est celle de l'espace de Hilbert et que les acteurs sont les opérateurs dans cet espace.

Les algèbres d'opérateurs

Ce tout début de l'histoire a eu lieu de 1925 aux années 1930. Von Neumann a donné ensuite son formalisme à la mécanique quantique. Mais il ne s'est pas arrêté là. Il s'est posé la question, absolument fondamentale, des sous-systèmes d'un système quantique. Il a compris que la mécanique quantique ordinaire se formalise à travers l'espace de Hilbert. Avec un collaborateur, Murray, il a essayé de comprendre ce que cela signifiait d'avoir un sous-système, c'est-à-dire de ne pas connaître toute l'information sur un système quantique. C'est ce que l'on a appelé les algèbres d'opérateurs, et avec elles que mon existence mathématique a commencé.

Pour la petite histoire, c'est après être allé à l'école d'été des Houches, en 1970, que j'ai été repéré par un organisme américain comme un « jeune mathématicien prometteur ». On m'a donc invité, l'année suivante, à Seattle, pour une conférence. J'étais alors jeune marié et nous en avons profité pour visiter les États-Unis. Nous n'aimions pas trop l'avion, et avions donc choisi de rallier Seattle en train, en traversant le Canada, soit quatre ou cinq jours à travers de grandes plaines un peu monotones. J'ai cherché, lors d'un premier arrêt à Princeton, à acheter un livre de maths à lire pendant le trajet et ai fini par en repérer un d'un auteur japonais qui m'a paru intéressant. Je n'ai pris que celui-là et sa lecture m'a absolument fasciné. Arrivé à Seattle, je me suis rendu à l'Institut Battelle pour prendre connaissance du programme. Qu'ai-je lu ? L'auteur du livre était là et faisait une série de conférences ! À ce moment-là, j'ai appliqué ce que dit Brutus dans le *Jules César* de Shakespeare :

There is a tide in the affairs of men, Il est une marée dans les affaires des hommes,

Which, taken at the flood, leads on to fortune ; Qui, prise à son apogée, conduit à la fortune ;

Omitted, all the voyage of their life Ignorée, tout le voyage de leur vie

Is bound in shallows and in miseries. Est confiné aux bas-fonds et aux écueils.

J'ai décidé que je n'irai à aucune autre conférence que celle de ce Japonais et que je travaillerai sur le sujet qu'il exposait. Rentré en France, je suis allé dès septembre au seul séminaire qui existait sur les algèbres d'opérateurs : celui de Jacques Dixmier. Celui-ci a expliqué que, cette année-là, son séminaire serait sur un autre sujet, qui n'avait *a priori* rien à voir avec celui du Japonais. Il a demandé qui, parmi l'auditoire, souhaitait faire un exposé. Je me suis porté volontaire, et il m'a donné à lire un article sur les produits tensoriels infinis. En rentrant chez moi, en train, j'ai compris qu'il y avait un lien extraordinaire entre l'article que Dixmier m'avait donné et les travaux du Japonais, et c'est cette confluence qui a été le point de départ de ma thèse.

J'ai écrit une petite lettre à Dixmier, d'une demi-page. Il m'a répondu que ce que j'avais écrit était incompréhensible et qu'il fallait que je donne des détails. Je les lui ai donnés, puis suis allé le voir, et il m'a dit : « Foncez ! » C'est comme ça que les choses se sont enclenchées. Au bout du compte, le point de départ de ma carrière, c'est ce lien avec le travail du Japonais. Qui, en fait, était deux. Celui qui a trouvé la théorie en question, que l'on appelle la théorie des algèbres modulaires, s'appelait Tomita. Mais, sourd depuis l'âge de deux ans, il avait des difficultés à communiquer, et c'est Takesaki, un autre mathématicien japonais, qui a mis en forme et communiqué sa théorie. C'est ce dernier qui parlait à Seattle.

J'ai relié immédiatement la théorie de Tomita à des travaux sur les facteurs de type III faits par Araki et Woods. Ce que j'ai trouvé, quelques mois après avoir défini des invariants généraux en utilisant la théorie de Tomita, c'est qu'il y a un phénomène tout à fait miraculeux d'indépendance qui permet de calculer ces invariants. L'évolution dans le temps ne dépend pas du choix d'un état de l'algèbre, pourvu que l'on travaille *modulo* les automorphismes intérieurs : il y a automatiquement une évolution dans le temps qui n'est pas complètement canonique, mais canonique *modulo* les automorphismes intérieurs ! Une algèbre de von Neumann est précisément une algèbre comme celle que Heisenberg avait découverte, c'est-à-dire non commutative, au sens où l'on n'a plus le droit de permuter entre eux les termes d'un produit. Pour résumer, lorsque l'on ne connaît pas toute l'information sur le système quantique, cette connaissance partielle est à l'origine d'une évolution qui émerge comme par miracle à partir du fait précisément que notre connaissance est imparfaite. Cela m'a permis, non seulement d'écrire ma thèse, mais de complètement décanuler toutes ces algèbres qui paraissaient extrêmement mystérieuses, et de comprendre leur structure. Quelque chose m'échappait encore : comment cette apparition miraculeuse du temps pouvait être reliée à la physique. Cela restait totalement mystérieux dans mes travaux, qui étaient purement mathématiques. Cet élément-là me manquait et ne viendrait que beaucoup plus tard.

Le mille-feuille

J'ai donc trouvé ces résultats, puis, après ma thèse, j'en ai trouvé d'autres, très importants, sur les mêmes algèbres. Ensuite, j'ai été invité à l'Institut des Hautes Études scientifiques (IHES) à Bures-sur-Yvette. Et là, j'ai eu un choc : j'avais travaillé sur un sujet quand même assez spécialisé et je ne connaissais pas du tout l'ampleur du reste des mathématiques. Quand je suis arrivé à l'IHES, les gens parlaient de choses que je ne comprenais pas. J'ai été plongé dans un milieu totalement différent du milieu de spécialistes auquel j'étais habitué. Ma situation était un peu embarrassante parce que je voulais absolument participer à ce développement des mathématiques, qui paraissait tellement important – et qui l'était bel et bien. Grothendieck était déjà parti, mais à l'IHES quelqu'un a joué un rôle crucial pour moi : Dennis Sullivan. Il avait cette particularité tout à fait extraordinaire d'interroger tout nouveau venu sur ses recherches en mathématiques ou en physique avec des questions extrêmement naïves. On avait l'impression qu'il comprenait difficilement. Mais, au bout d'un moment, son interlocuteur s'apercevait que c'était lui-même qui ne comprenait pas de quoi il parlait. Son pouvoir socratique était absolument incroyable, et c'est lui qui m'a appris la géométrie différentielle. J'ai compris à ce moment-là que j'avais un atout considérable : il y avait un moyen de fabriquer les algèbres que j'avais classifiées, celles de von Neumann, à partir d'objets de géométrie différentielle bien connus que l'on appelle les feuilletages. Ce que j'avais fait jusqu'alors pouvait être illustré à partir d'objets que les gens qui font de la géométrie différentielle pouvaient parfaitement comprendre.

Qu'est-ce qu'un feuilletage ? Une montagne peut avoir une apparence stratifiée, c'est-à-dire que des strates de dimensions plus petites la composent. Un mille-feuille est un autre exemple typique de feuilletage, qui résulte d'un empilement de feuilles. La structure d'un mille-feuille est très simple. Il est composé de deux parties : les feuilles elles-mêmes, et l'ensemble de ces feuilles. Un ensemble de feuilles, dans un cahier par exemple, est très simple puisqu'il est indexé simplement par le numéro de la page. Mais, en mathématiques, un feuilletage peut avoir une structure beaucoup plus compliquée, comme une bobine de fil dans laquelle le fil, au lieu d'être enroulé de telle sorte qu'au bout d'un nombre fini de tours il revienne sur lui-même, est enroulé de manière irrationnelle. C'est-à-dire qu'il ne revient jamais sur lui-même, il va continuer à s'enrouler indéfiniment. Ce qui est extraordinaire, c'est que, quel que soit le feuilletage, l'algèbre qui en résulte est toujours non commutative.

Il y a d'autres exemples. Dans une conférence à laquelle j'ai assisté dans les années 1980, Roger Penrose expliquait avoir découvert des pavages quasi périodiques très explicites. Car s'il est relativement simple de paver un espace avec des pavés hexagonaux, par exemple, puisque l'on peut donner à un carreleur la recette pour le faire, les pavages quasi-périodiques sont plus compliqués, et ont notamment la particularité suivante : ils peuvent avoir une symétrie pentagonale qu'aucun pavage classique ne peut posséder. Ce qu'expliquait Penrose, c'était que ces pavages ont un côté quantique : quand on en prend deux, on peut en superposer des parties aussi grandes que l'on veut, bien qu'ils ne soient pas identiques. Cette espèce de presque coïncidence, mais jamais complète, a un aspect quantique qu'il avait bien senti intuitivement. Je me suis aperçu à ce moment-là que l'espace des pavages de Penrose avait les mêmes caractéristiques typiques de l'espace des feuilles d'un feuilletage, et que, grâce à l'algèbre de von Neumann associée, cela correspondait vraiment à la mécanique quantique.

La géométrie non commutative

C'est donc un peu cela, le point de départ de la géométrie non commutative. Elle est une conséquence presque directe de la découverte de Heisenberg.

Descartes a expliqué que l'on peut faire de la géométrie de manière entièrement algébrique. Par exemple, si l'on veut démontrer que les trois médianes d'un triangle se coupent, on peut utiliser les axiomes de la géométrie. Mais il y a une autre manière de démontrer ce théorème : les calculs algébriques. Il s'agit alors de calculer le barycentre de trois points, en utilisant les coordonnées de chacun d'entre eux dans le plan, et le théorème est immédiatement démontré.

Quel est l'avantage de transformer un problème géométrique en un problème algébrique ? Par exemple, démontrer géométriquement en dimension 5 l'analogue du fait que les médianes se coupent sera difficile, alors que le calcul est immédiat. On calcule le barycentre, et la démonstration est faite.

C'était l'idée de Descartes, ces coordonnées, et ça a été la base de la géométrie algébrique pendant des années. Ces coordonnées dites « cartésiennes » commutent. Mais les coordonnées dans ce que l'on appelle l'espace des phases, qui correspond au système microscopique, elles, ne commutent plus : c'est la découverte de

Heisenberg. C'est cela qui m'a conduit à développer la géométrie pour des espaces dont les coordonnées ne commutent plus et que l'on appelle donc géométrie non commutative.

On pourrait penser, et ce serait normal, que généraliser la géométrie à un cas où les coordonnées ne commutent plus serait faisable. C'est en fait assez délicat et trouve sa justification essentiellement par la mécanique quantique. Mais s'il n'y avait eu que cela, cela ne m'aurait pas suffi. Ce qui m'a motivé, c'est ce que j'ai trouvé dans ma thèse, c'est-à-dire le fait que de tels espaces ont quelque chose d'extraordinaire : ils génèrent leur propre temps. Ils ne sont pas statiques comme les espaces ordinaires, mais dynamiques, ils évoluent avec le temps.

Après cette découverte initiale, je me suis dit que cette propriété extraordinaire de générer son propre temps faisait que cette géométrie était forcément extrêmement différente de la géométrie classique, et d'autant plus intéressante. Après avoir trouvé les feuilletages, j'avais assez d'exemples et lorsque l'on essaie de développer une nouvelle théorie, il faut, outre une bonne raison, disposer d'une grande quantité d'exemples. En effet, si l'on en a trop peu, on risque de développer une théorie complètement formelle qui n'aura aucun sens. Le sens est donné par la variété des exemples.

Dès le départ, j'avais compris que les feuilletages les plus connus donnaient les facteurs les plus exotiques. J'avais aussi compris que l'algèbre de von Neumann associée ne percevait qu'un côté relativement fruste de l'espace non commutatif en question. Le fait que ces espaces de feuilles provenaient de la géométrie leur donnait de nombreuses autres structures issues de la géométrie différentielle et qu'il fallait comprendre dans le cas non commutatif.

Ça a été le point de départ de tout un développement durant les années 1980, dans lequel l'un des apports les plus importants a été la cohomologie cyclique, que j'ai trouvée, et qui joue maintenant un rôle essentiel dans bien d'autres domaines.

Cela a permis de comprendre et développer l'analogue de la géométrie différentielle dans le cadre non commutatif, de trouver l'analogue du complexe de de Rham, de la cohomologie etc. Il y a eu toutes sortes de surprises, par exemple l'invariant de Godbillon-Vey est apparu de manière miraculeuse dans ce cadre complètement différent. Il me restait cependant toujours cette frustration de ne pas savoir comment relier cette émergence du temps avec la physique.

Émergence du temps et thermodynamique

Entre-temps, j'ai toujours continué, comme un hobby, comme une tâche un peu parallèle, à m'intéresser à la physique, à propos de laquelle je lisais beaucoup. Mais pas n'importe quelle physique : la physique quantique bien sûr, mais au-delà, ce que l'on appelle la théorie des champs. Vers 1994, j'ai été invité pendant plusieurs mois au Newton Institute en Angleterre à une session dont le sujet était la gravitation. J'y suis allé parce que je voulais compléter mes connaissances. Sur place, je me suis un peu ennuyé parce qu'il n'y avait presque pas d'activité collective. Un jour, j'ai vu une annonce pour une conférence dont le titre m'a paru extrêmement prétentieux : *We know what quantum space-time is* (« Nous savons ce qu'est l'espace-temps quantique »). Comme on ne sait, en fait, toujours pas ce que c'est, je me suis un peu colleté avec le conférencier. Il s'agissait de Carlo Rovelli. Nous avons ensuite longuement discuté et je me suis aperçu qu'il avait un point de vue extraordinairement philosophique. J'ai trouvé ça formidable, parce que dans notre milieu, les gens sont écrasés par la technique, par leur spécialisation, et qu'il y a finalement très peu de discussions philosophiques, contrairement à l'époque d'Einstein et de Heisenberg. J'ai osé lui expliquer ce que j'avais trouvé dans ma thèse : cette extraordinaire émergence du temps. Il m'a alors quitté sans rien dire pour revenir quelques minutes plus tard avec deux articles qu'il avait écrits l'année précédente. Pour des raisons purement philosophiques basées sur sa réflexion à propos de ce qu'il se passerait si l'on essayait de quantifier la gravitation, il s'y plaçait à un niveau dit « semi-classique », c'est-à-dire pas encore quantique. Son idée était que, quand on écrit les équations de Wheeler-De Witt, on s'aperçoit que, quand on essaie de quantifier la gravitation, le temps disparaît. Et il disparaît parce que ce que l'on appelle l'hamiltonien, qui normalement engendre l'évolution dans le temps, fait partie des contraintes. On ne sait donc plus de quoi on parle lorsque l'on parle du temps.

Carlo s'était colleté à ce problème-là et, par la seule réflexion philosophique, il avait eu une idée : la seule manière dont le temps peut émerger, c'est à partir de la thermodynamique, parce que nous baignons dans une espèce de bain thermodynamique, un bain de la radiation à 3 degrés Kelvin qui vient du Big Bang. L'idée n'est donc pas complètement abstraite, elle se relie à quelque chose de très concret. Et c'est ce bain de chaleur qui aurait engendré le passage du temps.

Son idée était très séduisante parce que le passage du temps tel que nous le connaissons nous use. Quand le temps passe, ce à quoi nous nous heurtons, c'est l'usure. Et cette usure vient de la température, du fait que nous sommes dans un bain thermodynamique.

Pour mettre en œuvre son idée, il a écrit une équation, et j'ai reconnu tout de suite quand il me l'a montrée la limite semi-classique de l'équation utilisée pour avoir ce flot magique intervenant dans le quantique. C'est à ce moment-là que s'est faite la jonction. J'avais essayé de comprendre comment ce temps émergeant pouvait être relié à la physique. J'avais essayé de le faire en utilisant la théorie quantique des champs, mais je n'y étais pas arrivé parce que le vrai endroit où cela se produit, ce n'est pas dans la théorie des champs, mais dans la gravitation, quand on essaie de la quantifier.

Nous avons écrit un article en commun, mais il n'a ni les qualités philosophiques de Carlo Rovelli, ni mes qualités mathématiques. Il s'agissait davantage de prendre date afin de montrer que l'on avait reconnu ces équations, mais nous n'avons pas été assez loin dans l'interprétation du résultat.

Cette interprétation, je vais essayer de l'expliquer, parce qu'elle a joué un rôle essentiel dans le développement de la géométrie non commutative. Le paradigme auquel j'étais arrivé dans les années 1980 pour la géométrie non commutative peut s'expliquer très simplement à partir précisément du quantique et de ce qui s'y est produit.

La variabilité

L'idée, presque plus facile à expliquer, et plus fondamentale que la coïncidence trouvée avec Carlo Rovelli, est la suivante : le quantique a cette extraordinaire fantaisie, cet extraordinaire pouvoir imaginatif, qui fait que, chaque fois que l'on répète une expérience microscopique, on obtient une réponse que l'on ne peut ni prévoir ni reproduire. On touche là un problème central que je vais appeler « problème de la variabilité ».

Normalement, si l'on interroge quelqu'un sur ce qu'est la variabilité fondamentale, tout le monde, et pas seulement les physiciens, répond que la seule variabilité, c'est le passage du temps. On peut réduire toute variabilité au fait que le temps passe. Si l'on regarde bien, on s'aperçoit que presque toute la physique est écrite en termes de ce que l'on appelle une équation différentielle, c'est-à-dire que l'on écrit que la dérivée d'une quantité physique par rapport au temps est donnée par une certaine relation avec d'autres quantités. Toute la physique est écrite sur ce paradigme, et toute la compréhension que nous avons de la variabilité est pensée dans ces termes-là.

Faisons une petite excursion en mathématiques pour essayer de comprendre comment les mathématiciens ont cherché à formuler ce que c'est qu'une variable et comment cette formulation a été détrônée par le quantique. Quand on demande à un mathématicien ce qu'est une variable réelle, il dira ceci : c'est un ensemble et une application de cet ensemble dans les nombres réels. Cela peut paraître un peu obscur, mais c'est la réponse standard. On peut alors faire remarquer au mathématicien qu'il y a des variables qui ne prennent que des valeurs discrètes, par exemple l'âge d'une personne, qui ne sera exprimé que par un nombre entier, et d'autres qui prennent des variables continues. Les deux cas sont tout à fait différents.

Il ne peut y avoir en mathématiques coexistence d'une variable discrète et d'une variable continue. En effet, une variable discrète ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs (on peut les énumérer une à une) alors qu'une variable continue prend un nombre non dénombrable de valeurs de sorte que l'ensemble où elle prend sa source ne peut pas être le même que celui associé à une variable discrète. C'est un fait. La première merveille, c'est que le formalisme de la mécanique quantique que von Neumann a mis au point résout ce paradoxe de la non-coexistence du discret et du continu. Il est résolu, comme je le disais plus haut, parce que Schrödinger a trouvé que les spectres étaient des spectres d'opérateurs dans l'espace de Hilbert. Dans ce même espace de Hilbert, sur la même scène en quelque sorte, certains opérateurs auront un spectre discret, comme les entiers, et d'autres un spectre continu, c'est-à-dire qu'ils pourront prendre toutes les valeurs réelles entre zéro et l'infini. La seule nuance, c'est que les deux opérateurs ne peuvent pas commuter. Ainsi, le formalisme des opérateurs dans l'espace de Hilbert résout le paradoxe.

Ce formalisme donne le cadre de la géométrie non commutative. Et c'est grâce à lui que l'on va pouvoir essayer de comprendre l'émergence du temps.

Unité de longueur

Comment ce formalisme permet-il de généraliser la géométrie de telle sorte qu'elle absorbe tout ce que le quantique nous a apporté ? C'est là que le lien avec la physique apparaît de manière absolument fondamentale.

À l'époque de la Révolution française, il y avait en France à peu près autant de définitions d'unité de longueur que de villes, ou presque. Il devait y en avoir environ un millier. À l'entrée d'une bourgade, on trouvait quelque chose d'environ un mètre qui définissait l'unité de longueur en usage en ce lieu. Il fallait que le tissu d'un marchand soit un multiple de cette longueur pour pouvoir y être vendu. C'était très embêtant.

On a alors cherché à unifier l'unité de longueur, pour la France en particulier. On a d'abord demandé aux scientifiques d'en donner une définition valable qui ne soit pas dépendante du lieu. Ils ont réfléchi, et pris le plus gros objet à leur disposition : la Terre. Ils en ont considéré la circonférence, puis ont défini l'unité de longueur comme étant une portion de cette circonférence : la quarante millionième partie. Comme il est impossible de mesurer directement toute la circonférence de la Terre, ils ont utilisé un angle en pointant certaines étoiles. Ils connaissaient de manière très précise l'angle ayant pour sommets le centre de la Terre, Dunkerque et Barcelone, il leur était donc facile de calculer la longueur totale à partir de la mesure de la distance entre Barcelone et Dunkerque, qu'il fallait mesurer directement. Ils ont envoyé une équipe de scientifiques, Delambre et Méchain, pour faire ces mesures. L'expédition fut aventureuse, la France et l'Espagne étant en conflit. Alors qu'ils étaient en haut d'une colline, munis d'un télescope pour faire des mesures par triangulation, ils ont eu beaucoup de mal à expliquer aux soldats ennemis qu'ils ne se livraient pas à de l'espionnage. Mais ils ont réussi. Le résultat a été une barre de platine censée être exactement de la longueur de la quarante millionième partie de la circonférence terrestre. Elle a été déposée près de Paris, à Sèvres.

Cette unité de longueur, en tant que telle, n'était pas très pratique. Difficile de mesurer un lit en le comparant à cette barre. Des répliques ont donc été fabriquées. Et puis il s'est produit, dans les années 1920, un phénomène tout à fait fabuleux, un phénomène qui est l'exact parallèle du passage de la géométrie ordinaire à la géométrie non commutative.

Un physicien a fait des mesures très précises en comparant la barre de platine avec la longueur d'onde d'une raie spectrale du krypton, et il s'est aperçu que l'unité de longueur… changeait de longueur ! C'est très embêtant d'avoir une unité qui n'est pas stable ! Il a donc été décidé, après un temps assez long, d'utiliser ce qui avait permis de constater le changement comme nouvelle unité : la raie orange du krypton. Mais ce n'était pas pratique. Il valait mieux prendre une unité qui soit de l'ordre des micro-ondes, qui ont été d'ailleurs découvertes par accident (des gens qui travaillaient sur le radar se sont aperçus que leur tablette de chocolat avait fondu). Il y a heureusement un corps chimique, le césium, qui a ce que l'on appelle une transition hyperfine : dans la couche extérieure d'un atome de césium, il y a deux états tellement proches que leurs énergies sont très proches également. Cela signifie que la transition correspondante, celle dont je parlais à propos de Heisenberg, entre les deux niveaux d'énergie indexés par deux indices, est telle que sa fréquence est très petite et, donc, que la longueur d'onde associée est grande. Pour cette transition-là, on obtient une longueur d'onde de l'ordre de 3 centimètres, c'est-à-dire qu'il en faut environ 33 fois plus pour obtenir 1 mètre. On aura donc un instrument de mesure qui pourra faire de manière courante des mesures d'une précision fabuleuse.

On trouve désormais dans le commerce un appareil, basé sur cette longueur d'onde, qui mesure avec douze décimales une longueur donnée.

En revanche, si l'on veut unifier le système métrique dans toute la Galaxie, cela posera un problème parce que le césium n'est pas forcément présent sur d'autres systèmes stellaires. Un corps chimique avec un numéro atomique suffisamment élevé n'est en effet produit que dans des supernovæ, et même des super-supernovæ. Je pense que l'on arrivera un jour ou l'autre à baser l'unité de longueur, non pas sur le césium, mais sur l'hydrogène ou l'hélium. Pourquoi ? Parce qu'ils sont présents pratiquement partout dans l'Univers.

Les infinitésimaux

Que se passe-t-il au niveau mathématique ? Exactement la même chose. La géométrie a été basée par Riemann sur une mesure des longueurs qui correspond exactement à la manière de mesurer de Delambre et Méchain. Elle consiste, quand on prend deux points dans un espace géométrique, à considérer le chemin le plus court entre ces deux points. Ce faisant, on n'a besoin, pour mesurer cette longueur, que de l'élément de longueur infinitésimale, qu'on appelle ds, dont Riemann ne donne la formule que pour le carré, ce que l'on appelle ds^2.

Ce que l'on appelle la géométrie sous la forme riemannienne, c'est donc une géométrie basée sur l'élément de longueur infinitésimale, qui s'exprime sous la forme de ce que l'on appelle g, mu, nu. Peu importe le contenu mathématique, ce qu'il faut retenir, c'est que c'est quelque chose d'extrêmement concret et qui correspond exactement à la manière de mesurer de Delambre et Méchain.

En physique, on a été obligé de remplacer le paradigme de l'unité de longueur donnée par le mètre étalon par le paradigme spectral, qui correspond précisément à un spectre. La manière dont cela s'est produit en géométrie non commutative est exactement parallèle : les infinitésimaux ont leur place parmi les opérateurs dans l'espace de Hilbert. Certains opérateurs sont infinitésimaux. Ils ont justement un spectre discret, mais qui décroît vers zéro, et correspondent exactement à la définition que Newton donnait des infinitésimaux.

Ce qui est nouveau, c'est que les infinitésimaux ne peuvent plus commuter avec les variables continues. Le point crucial, c'est qu'il y a un infinitésimal qui est caractéristique d'une géométrie. Cet infinitésimal a été introduit par les physiciens lorsqu'ils ont fondé la théorie des champs et la théorie quantique, c'est ce qu'ils appellent le « propagateur » pour les fermions. Les physiciens ont donc, dans leur théorie, développé une entité qui est un opérateur dans l'espace de Hilbert et qui a toutes les propriétés voulues pour incarner l'élément de longueur infinitésimal. On voit bien le gain à la fois en physique et en mathématiques. En physique, cela permet d'avoir un système de mesure de longueur, basé sur le spectre de l'hydrogène, qui soit réellement universel. On pourra échanger avec un visiteur d'un autre système stellaire sans avoir besoin de le faire venir à Sèvres pour lui montrer l'étalon.

En mathématiques, c'est exactement la même chose. Lorsque l'on prend le propagateur des fermions comme élément de longueur d'une géométrie, comme il ne commute pas avec les coordonnées, puisque les coordonnées sont à valeur continue, il a la propriété de ne pouvoir être localisé et d'être présent partout. Il n'est plus localisé quelque part. S'il avait commuté avec les coordonnées, du fait qu'il est infinitésimal, il aurait été quelque part. Mais le fait qu'il ne commute pas lui permet d'être partout.

Cela donne une nouvelle géométrie de nature spectrale, c'est-à-dire qu'elle se manifeste sous la forme de spectre. C'est très nouveau puisque, habituellement, lorsque l'on parle d'un espace géométrique, on y pense comme à un ensemble muni d'une distance, d'une structure, qui lui sont données localement. Ce n’est pas comme ça qu’un espace de géométrie non commutative va se manifester. Il va se manifester par son spectre.

La musique des formes

Un phénomène nouveau apparaît : cette manifestation par un spectre peut être comprise de manière musicale. Si je prends une forme quelconque, un tambour, une sphère ou n'importe quelle autre, on sait depuis le XIX^e siècle grâce à Helmholtz qu'une gamme lui est associée. Et depuis Mark Kac et son fameux exposé *Peut-on entendre la forme d'un tambour ?*, c'est formalisé en mathématiques. Qu'est-ce que cela signifie ?

On pourrait croire que quand on tape sur un tambour, le son produit sera toujours le même. C'est une grave erreur. Au XVIII^e siècle, on a observé les vibrations du tambour en mettant du sable dessous. Lorsque le tambour vibre, le sable se concentre aux endroits où la vibration est la plus petite. On observe ainsi que la vibration du tambour est de telle ou telle forme selon l'endroit où on l'a percuté. Deux paramètres qualifient en fait exactement cette vibration : combien d'oscillations si l'on part du centre vers la circonférence ? et combien lorsque l'on fait le tour du tambour ? Si l'on connaît ces deux paramètres, par exemple trois oscillations du centre vers la circonférence et quatre quand on fait le tour, la vibration est alors parfaitement définie. Elle produira une fréquence particulière. La vibration la plus simple produit la fréquence la plus basse. Et, à chaque fois que l'on augmente la valeur des paramètres, la vibration devient plus aiguë. On peut calculer la fréquence de ces vibrations mathématiquement. On obtient une gamme. On s'aperçoit finalement que chaque forme a une gamme. Elles ne sont pas toujours différentes. Certaines formes, différentes, ont pourtant la même gamme. On perd donc un peu d'informations. Mais, en gros, on connaît essentiellement un objet à partir de sa gamme.

Un espace se manifeste par une gamme, et c'est le point de départ de la géométrie non commutative. Elle comprend l'espace à partir de sa gamme. Il y a un invariant supplémentaire, qu'il faut connaître pour vraiment appréhender l'espace en entier : quels sont les accords possibles ? Un point dans l'espace donne plus d'informations que la gamme, il donne un accord sur les notes de celle-ci. Si l'on connaît tous les accords, on reconnaît l'espace.

Quand j'ai trouvé ce résultat, j'ai donné une conférence au Collège de France sur le lien qu'il y avait entre les formes et la musique. J'avais appelé cela la « musique des formes ». En préparant cette conférence, je me suis posé une question : il y a quantité de formes différentes (sphère, disque, carré, rectangle, etc.), y en aurait-il une qui permette de faire de la musique telle que nous la connaissons ? J'ai essayé des formes différentes et je me suis aperçu que c'était une catastrophe. Si l'on veut par exemple jouer *Au clair de la Lune*, aucune des formes dont j'ai parlé ne donne de résultat convaincant.

Pour quelle raison ? L'oreille est sensible à la multiplication par deux. Si l'on multiplie par deux la fréquence d'une note, l'oreille entendra quelque chose d'agréable, une résonance entre les deux fréquences. Et cela correspond à quelque chose de très concret : c'est le passage à l'octave.

L'oreille est également très sensible à la multiplication par trois. Comme elle est sensible à la multiplication par deux, on peut aussi faire la multiplication par trois demis, ce qui revient à jouer un do et un sol.

Maintenant réfléchissons un peu. Pour retomber sur mes pieds, j'aimerais que multiplier par deux suffisamment de fois soit la même chose que de multiplier par trois un certain nombre de fois. C'est impossible, parce que, quand on prend une puissance de deux on a toujours un nombre pair, et quand on prend une puissance de trois on a toujours un nombre impair. Ce qui est vrai et étonnant, et c'est la base de la musique telle qu'on la connaît, c'est que multiplier dix-neuf fois par deux, c'est presque la même chose que multiplier douze fois par trois. Il y a une meilleure manière de le dire : la racine douzième de deux est presque égale à la racine dix-neuvième de trois.

Comment cela se manifeste-t-il ? C'est ce que j'appelle le spectre de la guitare. Sur le manche d'une guitare il y a les frettes, ces lignes perpendiculaires au manche qui permettent de produire un son précis. Elles ne sont pas régulièrement espacées. Ce n'est pas du tout une progression arithmétique. Ce sont les puissances de ce nombre : $2^{1/12}$. En prenant ce nombre-là, on obtient exactement les positions des frettes sur le manche d'une guitare.

Le spectre de l'espace que l'on cherche nous est donc donné par le spectre de la guitare. Est-ce que ça pourrait être une sphère de dimension 2 ? Non, parce que les théorèmes mathématiques disent comment la gamme d'une forme se développe lorsque l'on prend de plus en plus de notes, et la dimension de l'espace que l'on regarde est reliée intimement à la manière dont les notes se développent. Sur le spectre de la guitare, un petit calcul mathématique indique que la dimension de l'espace correspondant doit être nulle. Plus précisément, elle doit être plus petite que tout nombre positif. Donc on ne peut pas le trouver parmi les espaces que l'on connaît. Et…

c’est un espace non commutatif ; c’est ce que l’on appelle la sphère non commutative, qui a été trouvée par des physiciens. On voit donc là que la géométrie non commutative donne une liberté de trouver des espaces bien plus extraordinaire que celle que l’on a avec les espaces ordinaires.

Danye Chéreau, mon épouse, Jacques Dixmier et moi-même avons écrit un livre, *Le Spectre d’Atacama*, qui évoque le spectre reçu par le grand observatoire du désert d’Atacama (ALMA : *Atacama Large Millimeter Array*) et qui cherche à comprendre ce que représente ce spectre. Et l’on n’a toujours pas compris. Il est relié à l’une des conjectures les plus difficiles en mathématiques. C’est fascinant de voir qu’un espace tel qu’on le connaît produit un spectre. Mais il existe des exemples où l’espace est perçu par son spectre, et on ne sait pas quel est cet espace ; il demeure mystérieux.

Tout ce côté géométrique a été considérablement développé et nous a permis, avec mes collaborateurs Ali Chamseddine et Walter van Suijlekom, de comprendre pourquoi, dans la réalité physique, il n’y a pas uniquement la gravitation, mais aussi le modèle standard ; pourquoi il y a les autres forces de la physique qui apparaissent naturellement. Dans le cadre de la géométrie non commutative, on peut, par un raisonnement purement géométrique, tomber par miracle sur le fait qu’il est plus simple de décrire l’espace-temps, l’espace géométrique dans lequel on est, par des variables non commutatives. Cette manière plus simple de le décrire impose d’autres forces au-delà de la gravitation, mais qui sont la gravité pure dans ce nouvel espace. Ces autres forces correspondent exactement à ce que l’on mesure, c’est-à-dire les forces du modèle standard.

C'est une théorie très élaborée et extrêmement satisfaisante au niveau esthétique et conceptuel. Il lui manque un pan sur lequel nous travaillons : elle existe au niveau de ce que l'on appelle le premier quantifié, et n'atteint pas encore le niveau de ce que l'on appelle la gravitation quantique, c'est-à-dire dans laquelle on aurait vraiment quantifié les champs.

Mais revenons à l'essence du quantique. C'est quelque chose d'absolument fondamental, qui n'est pas encore vraiment compris.

Le tic-tac de l'horloge divine

Nous, êtres humains, réduisons toute variabilité au passage du temps. Et nous cherchons toujours à écrire une histoire. C'est une des manières que nous avons de comprendre les choses, et une histoire est bien sûr écrite en fonction du temps.

Mais quand on essaie de faire ça pour comprendre le quantique, on se trouve devant des paradoxes. Le plus typique, c'est ce que l'on appelle en français l'intrication. Einstein n'a jamais accepté le quantique, bien que ce soit lui qui l'ait pratiquement initié avec l'effet photo-électrique. Dans l'un de ses poèmes, Alfred Brendel raconte Einstein arrivant au ciel, s'apercevant que Dieu joue aux dés et demandant alors l'adresse de l'enfer. Car Einstein n'a jamais accepté le côté aléatoire du quantique et il a construit progressivement un certain nombre de contre-exemples, de paradoxes. Le premier a donné lieu à une histoire merveilleuse. Einstein imagine un coucou suisse suspendu à un ressort. Le coucou doit émettre un photon à un moment précis. Ainsi, il indiquera l'heure exacte où il l'a émis. En pesant le coucou avant et après l'émission du photon, on connaîtrait exactement sa masse, et donc celle du photon émis, ou plutôt son énergie, puisque l'énergie est égale à la masse. Ainsi, comme on connaîtra l'énergie du photon émis avec une précision sans limites, on contredira le principe d'incertitude de Heisenberg, qui dit que l'on ne peut pas connaître temps et énergie simultanément. Cela a donné lieu à un épisode extraordinaire, avec un Einstein triomphant qui explique son paradoxe. Et Bohr qui le suit avec une mine absolument déconfite car l'argument d'Einstein lui semble imparable. Mais l'histoire ne s'est pas arrêtée là.

Quelle était l'idée d'Einstein ? Comme on allait mesurer la masse du coucou (avant et après), la constante de gravitation serait impliquée dans le calcul de la masse à partir du poids. Il était donc impossible que ressorte la constante de Planck toute seule comme le demande le principe d'incertitude, il semblait impossible d'éliminer la constante de gravitation ! Bohr n'en a pas dormi de la nuit, et est revenu le matin avec une merveilleuses réponse. Il a montré que l'on obtenait exactement le principe d'incertitude de Heisenberg en utilisant la théorie d'Einstein de la gravitation ! Selon cette théorie, et cela a été mesuré depuis, le temps ne passe pas de la même manière quand on change d'altitude et ce changement fait intervenir à nouveau la constante de gravitation. Si l'on fait le calcul, on s'aperçoit que les deux constantes de gravitation s'éliminent. Il ne reste que la constante de Planck, et on obtient le principe d'incertitude tel qu'énoncé par Heisenberg.

Cet épisode a été une défaite pour Einstein, mais il ne s'est pas avoué vaincu. Cinq ou six ans après, il a écrit un article avec Podolsky et Rosen, article qui n'a d'abord presque pas été cité alors que, maintenant, ses citations sont en progression exponentielle. C'était la première fois qu'apparaissait l'intrication quantique. Einstein proposait de créer deux particules à un endroit donné, ces deux particules ayant exactement, par conservation du moment, des moments opposés. Ces particules se propagent. On mesure la position de l'une et le moment de l'autre. Comme elles sont causalement séparées, ces deux mesures sont indépendantes. On obtient donc une contradiction avec le principe d'incertitude puisque, d'un côté, on mesure la position, de l'autre côté, la vitesse et par symétrie on en déduit position et vitesse pour les deux : c'est gagné.

Ce paradoxe est beaucoup plus profond et beaucoup plus difficile à éliminer que celui que Bohr avait résolu. En gros, ce que les gens disent, c'est que, lorsque l'on fait une mesure d'un côté, il y a une action, qu'Einstein appelait *spooky action at a distance*, qui affecte l'autre côté quasi instantanément, et donc va beaucoup plus vite que la vitesse de la lumière. Alain Aspect a fait des expériences qui montrent que l'action se propage au moins dix mille fois plus vite que la vitesse de la lumière, ce qui est incroyable.

On pense résoudre le paradoxe en disant que, s'il y a bien une action, on ne peut pas pour autant transmettre d'information avec elle, mais on reste sur sa faim. Ce que je prétends, c'est que la raison de ce paradoxe est que l'on essaie d'écrire une histoire par rapport au temps. Et quand on essaie d'écrire une histoire par rapport au temps, on obtient forcément une contradiction. Pourquoi ? Parce que le fait que l'on soit en dehors du cône de lumière montre qu'il n'y a pas de relation causale entre les deux mesures, cela signifie que, selon le repère que l'on va prendre, un événement se produit avant l'autre ou l'autre avant l'un. Il ne peut donc pas y avoir de relation causale entre les deux. C'est strictement impossible. Ce que je prétends, c'est que la vraie signification de l'intrication quantique, c'est que l'aléa du quantique d'un côté et l'aléa du quantique de l'autre ne sont pas totalement indépendants.

L'idée fondamentale qui n'est pas encore concrétisée, c'est d'essayer de comprendre comment l'aléa du quantique engendre le passage du temps. Dans *Le Théâtre quantique*, notre premier livre avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, on avait trouvé une phrase qu'il faut retenir simplement parce qu'elle exprime bien le problème : « l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine ». Cela signifie que la vraie variabilité ne provient pas du passage du temps, mais de cette fantaisie, de cette imagination constante, du quantique. C'est là que les choses varient, et le temps n'est qu'un phénomène émergeant. Il faudrait avoir une réflexion philosophique beaucoup plus précise, beaucoup plus profonde, qui dirait que l'aléa du quantique n'est pas complètement aléatoire, pas complètement indépendant, lorsque l'on prend des points éloignés, mais qu'il va y avoir des corrélations entre l'aléa du quantique en un point et l'aléa à un autre point lorsqu'il y a intrication quantique. Il faudrait arriver à définir correctement l'aléa quantique, et on a l'outil mathématique qui permet alors de faire émerger le temps. Cet outil, c'est ce que j'avais trouvé dans ma thèse à partir de ce qu'avaient fait les deux Japonais.

On a donc les outils. Mais il manque une réflexion philosophique, exercice peu prisé des physiciens à notre époque. À l'époque d'Einstein, de Dirac, de Heisenberg, de Schrödinger, la réflexion philosophique était un ingrédient essentiel de la discipline. Par exemple, Heisenberg et Dirac ont eu la chance extraordinaire de faire un voyage en bateau de la Californie jusqu'au Japon et ils ont pu discuter indéfiniment. Notre époque est très encombrée par toutes sortes de perturbations extérieures. Nous ne connaissons plus l'ennui qui était fondamental dans le pouvoir créatif. On sait maintenant le succès extraordinaire de la théorie d'Einstein ou de la théorie quantique. Et on constate quand même une stagnation. On vit dans une période où on est constamment dérangé, par une quinzaine de mails quotidiens ou tel rapport à faire. On n'a plus le temps de s'ennuyer, et on n'a plus la volonté de le faire. *Le Spectre* *d'Atacama* est un éloge de l'ennui, d'une certaine manière. Le héros du livre est confronté à ce spectre qu'il ne comprend pas et, au lieu de rester à l'observatoire, il fuit dans le grand Sud pour vivre dans une île presque déserte pendant un certain temps. Et il arrive à retrouver cet état fondamental de l'âme, qui est celui de l'ennui.

C'est un état difficile à apprécier de nos jours. Il faut reconnaître que le CNRS est une des rares institutions qui permette de le retrouver. Ainsi, Vincent Lafforgue, qui vient d'avoir un très grand prix, a exactement ce fonctionnement-là. Il est capable de s'isoler pour réfléchir à un problème pendant des années, pratiquement en état sous-marin. Cette capacité lui donne la profondeur nécessaire pour faire de grandes découvertes. C'est un miracle que le CNRS le permette. C'est un système très différent de celui des ERC (European Research Council) ou de la NSF aux États-Unis. Les jeunes y sont constamment en train d'écrire des articles, et doivent constamment montrer qu'ils sont productifs. C'est une perversion qui a pour conséquence de créer des féodalités scientifiques et qui n'autorise pas la diversité. Il nous faut préserver cette chance inouïe qui permet à certains de s'isoler et de retrouver cet état de recherche fondamentale tellement important, tellement créatif et tellement impossible à apprécier, à juger à courte échéance. Ce qui est terrible dans ces modes de sélection sur projet c'est que l'on demande aux chercheurs de dire, à l'avance, ce qu'ils vont trouver. C'est ridicule, en physique comme en maths. Si l'on savait ce que l'on va trouver, la discipline perdrait son intérêt. Ce qui est vraiment intéressant, ce qui est vraiment excitant, c'est justement de se pencher sur un problème et puis, au détour d'un chemin, de trouver quelque chose que l'on n'attendait absolument pas.

J'ai eu récemment à faire un exposé au Collège de France sur le langage mathématique. Je me demandais de quoi j'allais parler. Et puis finalement j’ai choisi de parler du théorème de Morley. Morley a trouvé ce résultat par accident. Il cherchait des choses beaucoup plus compliquées, et il est tombé là-dessus ! L’énoncé en est très simple. On prend un triangle quelconque. On coupe chacun de ses angles en trois parties égales. Et puis on intersecte deux à deux les droites correspondantes. Le théorème de Morley dit que le triangle ainsi obtenu est équilatéral.

C’est très dommage de corseter la recherche dans un carcan de plus en plus administratif, parce que, finalement, cela incite les chercheurs à se confiner à des petits problèmes dans lesquels ils peuvent faire des petites avancées, et ne favorise en rien les grandes découvertes.

L'auteur

Alain Connes, né le 1er avril 1947 à Draguignan, entre à l'École normale supérieure en 1966. Il a révolutionné la théorie des algèbres de von Neumann et résolu la plupart des problèmes posés dans ce domaine, notamment la classification des facteurs de type III, ce qui lui a valu la médaille Fields en 1982. Il a développé un programme ambitieux visant à fonder une « géométrie non commutative ». Étape après étape, il a identifié les éléments constitutifs de cette nouvelle géométrie, introduisant de nouveaux concepts comme la cohomologie cyclique, la théorie des K-cycles et l'approche spectrale de la géométrie riemannienne. C'est maintenant une branche bien constituée des mathématiques impliquant plusieurs centaines de chercheurs. Elle fournit des modèles très intéressants pour la physique, par exemple un point de vue synthétique et géométrique sur le modèle standard de la théorie des particules élémentaires, et un cadre conceptuel pour l'effet Hall quantique, mais aussi une vision globale permettant de traiter de façon unifiée les espaces discrets et les espaces continus. Il en résulte de nouvelles connexions avec la théorie des nombres et la géométrie algébrique via un avatar de la théorie des motifs. Le prix Crawford lui est attribué en 2001.

Il est professeur à l'Institut des hautes études scientifiques et au Collège de France.

Du même auteur

Jean-Pierre Changeux et Alain Connes, *Matière à pensée*, Paris, Odile Jacob, coll. « Sciences », 1989, rééd. 2008.

Alain Connes, André Lichnerowicz et Marcel-Paul Schützenberger, *Triangle de pensées*, Paris, Odile Jacob, coll. « Sciences », 2000.

Alain Connes, *Noncommutative Geometry*, Cambridge (Massachusetts), Academic Press, 1994.

Alain Connes, Danye Chéreau et Jacques Dixmier, *Le théâtre quantique*, Paris, Odile Jacob, coll. « Sciences », 2013.

Alain Connes, Danye Chéreau et Jacques Dixmier, *Le spectre d'Atacama*, Paris, Odile Jacob, coll. « Sciences & Techniques », 2018.

Les Grandes Voix de la Recherche

Dans la même collection

Thibault Damour, *Ondes gravitationnelles et trous noirs*
Gérard Berry, *La pensée informatique*
Nicole Le Douarin, *Les secrets de la vie*
Jean Jouzel, *Climats passés, climats futurs*

À paraître

Claude Hagège, *Les langues*
Philippe Descola, *Une écologie des relations*
Jules Hoffmann, *L'immunité innée*
Claire Voisin, *Faire des mathématiques*
Jean Weissenbach, *Dépolluer la planète*
Alain Aspect, *Einstein et les révolutions quantiques*
Maurice Godelier, *Fondamentaux de la vie sociale*