

SCIENCES SUP

Rappels de cours et exercices résolus

Master • Écoles d'ingénieurs

MATHÉMATIQUES DU SIGNAL

3^e édition

***Dariush Ghorbanzadeh
Pierre Marry
Nelly Point
Denise Vial***

DUNOD

MATHÉMATIQUES DU SIGNAL

© Dunod l'éditeur, éditeur de livres Microsoft Press, ETFS, F. d'histoire, l'histoire d'histoire.

http://www.dunod.com

Recherche

Collection Index thématique

Mon compte

Accueil

Actualités

Interviews

Revenir les 100 livres de l'année

Ramirez 2000 : le meilleur de la nouvelle formule

Tout les interviews

Club Enseignants

Inscrivez-vous!

Evénements

Découvrez le vidéo

Profession dirigeant

En librairie ce mois-ci

Développement personnel et coaching : découvrez le nouveau site

www.dunod.com

Rechercher

Science et technique

Informatique

Gestion et Management

Sciences Humaines

Non panier

Profession dirigeant

De la conception du changement à l'action

Gérard Roth, Michel Kuryla

Bachus 2000

Exercices, stratégies et pratiques dans la filière

Yvricrice Jean-Pierre Gaudier, Hervé Hanin, François d'Hallier, Eberna Montagne

PYTHON

Petit guide à l'usage du développeur agile

Irenek Ziade

150 techniques de psychologie du sport

pour mieux comprendre les championnes, les stars

Yvan Paquet, Pascal Legrain, Elisabeth Rouzet, Monique Rusinek

LES BIBLIOTHÈQUES DES MÉTIERS

Bibliothèque du DSI

Section Industrie

Mémoire de la ligne et du train

Marketing et Communication

Directeur d'établissement social et médico-social

Toutes les bibliothèques

LES NEWSLETTERS

Action sociale

Psychologie

Développement personnel et bien-être

Entreprises

Expertise comptable

Informatique et TIC

Industrie

Toutes les newsletters

bibliothèque des métiers

informatique

Microsoft Press

sciences.net

support.dunod.com

histoire

histoire

MATHÉMATIQUES DU SIGNAL

Rappels de cours et exercices résolus

Dariussh Ghorbanzadeh

Maître de conférences au Conservatoire National
des Arts et Métiers (CNAM, Paris)

Pierre Marry

Maître de conférences au Conservatoire National
des Arts et Métiers (CNAM, Paris)

Denise Vial

Maître de conférences au Conservatoire National
des Arts et Métiers (CNAM, Paris)

Nelly Point

Professeur au Conservatoire National
des Arts et Métiers (CNAM, Paris)

3^e édition

Préfacé par

Hervé Reinhard

Professeur au CNAM (Paris)

DUNOD

Illustration de couverture : *DigitalVision*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
	

© Dunod, Paris, 2008
© Dunod, 2002, pour l'ancienne édition
ISBN 978-2-10-053806-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Préface

Un seul coup d'œil aux rayons « mathématiques » des librairies scientifiques suffit pour réaliser qu'il est inutile de convaincre les étudiants de la nécessité de faire des exercices pour réussir leurs examens. Les éditeurs le savent, qui publient une multitude de recueils d'exercices ; les étudiants le savent, qui achètent ces ouvrages.

Tout mathématicien, même apprenti, sait cependant qu'une condition nécessaire n'est pas toujours suffisante. Ainsi, il ne suffit pas d'acheter un livre d'exercices, ni même de le lire, pour réussir une épreuve de mathématiques, et, encore moins, pour comprendre les éléments d'une théorie et la façon de l'appliquer.

Il convient de faire un usage judicieux d'un ouvrage d'exercices corrigés. Les auteurs s'expliquent plus longuement sur ce point dans leur avant-propos.

Ceux-ci travaillent (ou ont travaillé) au sein de l'équipe d'enseignants des mathématiques du signal au Conservatoire National des Arts et Métiers. Ils y ont acquis une grande expérience pédagogique au service des étudiants de cet établissement et ont su mettre au point, avec toute l'équipe, en particulier Bénédicte Logé, des exercices variés et progressifs, adaptés à cette discipline. Ils ont noué avec des collègues d'autres disciplines, comme avec les étudiants, un dialogue riche dont ils ont su tirer parti.

Les lecteurs devraient donc trouver dans cet ouvrage un outil particulièrement efficace pour tester et approfondir leurs connaissances.

Hervé Reinhard

Avant propos

Les mathématiques du signal concernent le signal analogique, le signal numérique déterministe et le signal aléatoire.

Ce recueil d'exercices résolus recouvre l'ensemble de ces domaines mais les notions et les outils correspondants (analyse de Fourier, distribution et probabilités) sont utiles dans un cadre bien plus large incluant la mécanique, le contrôle.

Ce recueil complète l'ouvrage *Éléments de mathématiques du signal* de H. Reinhard. Le plan et le contenu des chapitres correspondent à ceux du volume précité.

Chaque chapitre s'ouvre sur des rappels des définitions, des propriétés et des théorèmes nécessaires à la résolution des exercices proposés.

Une liste de notations et un index complètent la table des matières.

Deux types d'exercices sont proposés. Certains visent seulement à l'apprentissage du maniement des concepts fondamentaux et peuvent, de ce fait, sembler un peu abstraits. Il convient cependant de ne pas les négliger car ils ont été sélectionnés pour permettre au lecteur d'éviter certaines idées fausses ainsi que des confusions avec des objets mathématiques déjà connus. D'autres sont orientés vers l'utilisation des concepts dans des applications pratiques.

Pour chaque exercice, le lecteur devrait essayer de chercher la solution, question par question. Une fois la réponse trouvée, ou en cas d'échec prolongé, on peut se reporter à la solution proposée et essayer de comprendre les erreurs ou les points de blocage éventuels avant de passer à la question suivante. Lire d'emblée la solution d'un exercice n'est d'aucun profit même si celle-ci est rédigée pour être facilement compréhensible.

Index des notations

C_n^p	coefficient du binôme : $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$, noté aussi $\binom{n}{p}$
$\mathcal{C}^0(I)$	espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle I
$\mathcal{C}^n(I)$	espace vectoriel des fonctions n fois continûment dérivables sur l'intervalle I
$\mathcal{C}^\infty(I)$	espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle I
$L^1(I)$	espace vectoriel des fonctions sommables sur l'intervalle I
$\ f\ _1$	norme de f dans $L^1(I)$: $\ f\ _1 = \ f\ _{L^1(I)} = \int_I f(t) dt$
$L^2(I)$	espace vectoriel des fonctions de carré sommable sur l'intervalle I
$\langle f, g \rangle$	produit scalaire de deux fonctions dans $L^2(I)$: $\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt$
$\ f\ _2$	norme de f dans $L^2(I)$: $\ f\ _2 = \ f\ _{L^2(I)} = \sqrt{\int_I f(t) ^2 dt}$
$\mathcal{D}$	espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact
$\mathcal{S}$	espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide
$\mathcal{D}'$	espace des distributions
$\mathcal{S}'$	espace des distributions tempérées
$F(f)$	transformée de Fourier de f , aussi notée $\hat{f}$
$L(f)$	transformée de Laplace de f
$H(f)$	transformée de Hilbert de f
$\mathcal{T}_z$	transformée en z
$Y(t)$	fonction de <i>Heaviside</i> ou <i>échelon unité</i> : $Y(t) = \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(t)$ notée aussi $H(t)$ ou $u(t)$
$\text{sgn}(t)$	fonction signe : égale à 1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, à -1 sur $\mathbb{R}^{-*}$ et à 0 en $t = 0$.
$\mathbb{1}_{[a,b]}(t)$	fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$: $\mathbb{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{si } t \notin [a,b] \end{cases}$

$P_a(t)$	fonction <i>porte</i> centrée de longueur a : $P_a(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]}(t)$
$\Delta_a(t)$	fonction <i>triangle</i> : $\Delta_a(t) = (1 - \left \frac{t}{a}\right) \mathbb{1}_{[-a, +a]}(t)$
$\Gamma(\alpha)$	fonction gamma : $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$ pour $\alpha > 0$
$\varphi(t)$	densité de probabilité de la loi normale centrée réduite $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$
$\Phi(t)$	fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$
$\operatorname{erf}(t)$	fonction d'erreur : $\operatorname{erf}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$
$[f]$	distribution régulière associée à la fonction f
$VP \int_I f(t) dt$	valeur principale de l'intégrale divergente $\int_I f(t) dt$
Pf	pseudo-fonction
$\delta_a, \delta(t-a)$	masse de Dirac au point a . On note $\delta = \delta_0 = \delta(t)$
$\sqcup \sqcup$	peigne de Dirac
$\mathcal{N}(0,1)$	loi de probabilité de Gauss (loi normale centrée réduite)
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	loi normale de moyenne μ et de variance σ^2

Table des matières

Préface	V
Avant propos	VII
Index des notations	IX
CHAPITRE 0 • Intégration	1
CHAPITRE 1 • Espaces	19
CHAPITRE 2 • Orthogonalité, projections dans $L^2(I)$	31
CHAPITRE 3 • Séries de Fourier	45
CHAPITRE 4 • Intégrales à paramètre, convolution	65
CHAPITRE 5 • Transformation de Fourier	85
CHAPITRE 6 • Transformation de Laplace	105
CHAPITRE 7 • Introduction à la théorie des distributions	121
CHAPITRE 8 • Dérivation, convergence, convolution des distributions	131
CHAPITRE 9 • Transformée de Fourier et de Laplace des distributions. Transformées en z des signaux numériques	161
CHAPITRE 10 • Filtrage	199
CHAPITRE 11 • Espace de probabilités	211
CHAPITRE 12 • Variables Aléatoires	225
CHAPITRE 13 • Covariance. Coefficient de corrélation	273
CHAPITRE 14 • Vecteurs gaussiens	289
CHAPITRE 15 • Processus stationnaires du second ordre. Signaux aléatoires	303

Chapitre 0

Intégration

RAPPELS

- Si la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ est une intégrale définie et c'est un nombre si a , b et f sont spécifiés.
- Pour $x \in [a, b]$, $\int_a^x f(t)dt$ est une fonction de x . C'est la primitive de f qui s'annule pour $x = a$.
- Si l'intervalle est non borné ou si f n'est pas bornée, on dit que l'intégrale est impropre (ou généralisée).
 - $\int_a^\infty f(x)dx$ est convergente si $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^X f(x)dx$ existe et a une valeur finie.
 - Si f n'est pas définie en b , $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ existe et a une valeur finie.Sinon, ces intégrales divergent.

- **Critères de Riemann**

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{converge si et seulement si } \alpha > 1, \text{ diverge sinon.} \quad (\text{R0.1})$$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx \quad \text{converge si et seulement si } \alpha < 1, \text{ diverge sinon.} \quad (\text{R0.2})$$

- Si, $\forall x \in [a, b]$, $0 \leq g(x) \leq f(x)$, alors $0 \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.

- Une intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite **absolument convergente** si $\int_a^b |f(x)|dx$ a une valeur finie. Cela implique qu'elle est convergente car $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

On dit alors que la **fonction** f est **sommable** sur $[a, b]$.

- **Critères de comparaison**

– Pour $n > 0$, $\frac{e^X}{X^n} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$, $\frac{\ln(X)}{X^n} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$, $\varepsilon^n \ln(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

– f et g sont équivalentes au voisinage de a , si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, on note $f \sim_a g$.

– f et g sont continues sur $]a, b]$ et si $f \sim_a g$ alors $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ sont de même nature.

– si f et g sont continues sur $[a, +\infty[$ et si $f \sim_{+\infty} g$ alors $\int_a^\infty f(x)dx$ et $\int_a^\infty g(x)dx$ sont de même nature.

- **Intégrales doubles**

– Changements de variables : si $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$, on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (\text{R0.3})$$

où Δ est l'image du domaine D , J est la matrice jacobienne : $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$

et $|J(u, v)|$ son déterminant, appelé Jacobien.

– **Théorème de Fubini**

Si f est sommable sur le domaine D , on peut indifféremment intégrer d'abord en x ou en y , le résultat est identique.

Exercice 0.1

En appliquant la définition d'une intégrale impropre, dire si les intégrales suivantes sont définies ou non.

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-t} dt \quad I_2 = \Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \text{ avec } n \geq 1$$

$$I_3 = \int_0^1 \ln t dt \quad I_4 = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad I_5 = \int_{-2}^2 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$$

$$1) \quad I_1 = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-t} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} (1 - e^{-X}) = 1. \text{ Donc, } I_1 \text{ est définie et vaut 1.}$$

$$2) \quad I_2 = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X t^{n-1} e^{-t} dt. \text{ Or, en intégrant par parties et si } n > 1,$$

$$\int_0^X t^{n-1} e^{-t} dt = -X^{n-1} e^{-X} + (n-1) \int_0^X t^{n-2} e^{-t} dt$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X t^{n-1} e^{-t} dt &= (n-1) \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X t^{n-2} e^{-t} dt \\ &= \dots = (n-1)(n-2)\dots 1 \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-t} dt = (n-1)! \end{aligned}$$

Donc, $\Gamma(n)$ existe et vaut $(n-1)!$ On a :

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)!$$

$$3) \quad I_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln t dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ [t \ln t]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 dt \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{-\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon\} = -1.$$

Donc, I_3 existe et vaut -1 .

$$4) \quad I_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^A \frac{e^{-t}}{t} dt + \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_A^X \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Posons $J(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$. En intégrant par parties, on a :

$$J(\varepsilon) = -\ln \varepsilon e^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \ln t e^{-t} dt \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J(\varepsilon) = +\infty \text{ car l'intégrale est bornée.}$$

$$\text{En effet : } 0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left| \int_{\varepsilon}^1 \ln t e^{-t} dt \right| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 |\ln t| e^{-t} dt \leq \int_0^1 -\ln t dt = 1 \text{ d'après 3).}$$

D'autre part, $\int_1^A \frac{e^{-t}}{t} dt$ est finie et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_A^X \frac{e^{-t}}{t} dt$ existe car :

$$0 \leq \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_A^X \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_A^X e^{-t} dt \leq \frac{1}{e^A} \quad \forall A \geq 1. \text{ Donc, } I_4 \text{ diverge.}$$

5) La fonction à intégrer étant paire, la nature de I_5 est la même que celle de I_6 où

$$I_6 = \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} \text{ et l'on a : } I_6 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}.$$

$$\text{En posant } t = 2 \sin x, \quad I_6 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\alpha} \frac{\cos x}{|\cos x|} dx \text{ où } \alpha = \arcsin(1 - \varepsilon/2)$$

$$\text{d'où } I_6 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\arcsin \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}, \text{ donc } I_5 \text{ existe et vaut } 2I_6, \text{ soit } \pi.$$

Exercice 0.2

Donner la nature des intégrales I_1, I_2, I_4, I_5 précédentes en utilisant la comparaison avec les intégrales de référence $\int \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$

1) $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$. Le seul problème est à l'infini. Or, si X est assez grand et $t \geq X$, $e^t > t^2$ et $0 \leq \left| \int_X^\infty e^{-t} dt \right| < \int_X^\infty \frac{dt}{t^2}$, cette dernière intégrale étant convergente, $\int_X^{+\infty} e^{-t} dt$ aussi et I_1 converge.

2) $I_2 = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$. Là aussi, la fonction est continue en 0. À l'infini, si t est assez grand, on peut écrire $e^t > t^{n+1}$ et, alors, $t^{n-1} e^{-t} < \frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale converge sur $[X, \infty[\forall X > 0$. I_2 converge aussi.

3) $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Pour t assez grand, $e^t > t$, et donc $\frac{e^{-t}}{t} < \frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale converge au voisinage de l'infini. Mais $\frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}$ en 0 et $\int_0^X \frac{e^{-t}}{t} dt$ n'a pas de valeur finie $\forall X$ fini. Donc, I_4 diverge.

Cette façon de procéder par équivalences est plus rapide que l'utilisation de la définition. (Comparer avec l'exercice 1).

4) $I_5 = \int_{-2}^2 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \int_{-2}^2 \frac{dt}{\sqrt{2-t}\sqrt{2+t}}$, et au voisinage de 2 (respectivement -2), $\frac{1}{\sqrt{4-t^2}} \sim \frac{1}{2\sqrt{2-t}}$ (respectivement $\frac{1}{2\sqrt{2+t}}$). Or, si $a < b$, $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ ou $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$. Donc I_5 converge.

Exercice 0.3

Examiner la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} dt \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}} \quad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1} dt.$$

1) $I_1 = \int_{-\infty}^0 e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$. La première intégrale vaut $\lim_{Y \rightarrow -\infty} \int_Y^0 e^{-t} dt = +\infty$ après intégration directe et on a vu que la seconde converge. I_1 diverge puisque somme d'une divergente et d'une convergente.

2) Pour I_2 , les seuls points à considérer sont 0 et $+\infty$, la fonction à intégrer étant continue entre les deux. À l'infini, $\frac{1}{(t+1)\sqrt{t}} \sim \frac{1}{t^{3/2}}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$. En 0, $\frac{1}{(t+1)\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable au voisinage de 0. Donc I_2 converge.

3) En 1, la fonction est continue. Si $\alpha > 1$, $\exists \beta$ tel que $1 < \beta < \alpha$ et on peut écrire : $\frac{\ln t}{t^\alpha} = \frac{\ln t}{t^{\alpha-\beta}} \frac{1}{t^\beta}$. Or, $\frac{\ln t}{t^{\alpha-\beta}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc, pour t assez grand, cette quantité est bornée par une constante c et $0 < \frac{\ln t}{t^\alpha} \leq c \frac{1}{t^\beta}$ qui est sommable sur tout intervalle $(X, +\infty)$ si $X > 1$.

Par contre, si $\alpha < 1$, $\frac{\ln t}{t^\alpha} \geq \frac{A}{t^\alpha}$ toujours pour t assez grand, car $\ln t$ tend vers $+\infty$ avec t , donc est minoré par une constante $A > 0$, mais cette fonction n'est pas intégrable à l'infini. Donc I_3 diverge.

Si $\alpha = 1$, on pose $u = \ln t$ et I_3 devient $\int_0^\infty u du$ qui diverge.

Donc I_3 diverge pour $\alpha \leq 1$ et converge si $\alpha > 1$.

4) I_4 existe si $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1} dt$ existent. Les points à considérer sont 0, 1, et ∞ .

À l'infini, $0 < \frac{\ln t}{t^2-1} \leq \frac{t^\beta}{t^2-1} \quad \forall \beta > 0$; cette fonction étant équivalente à $\frac{1}{t^{2-\beta}}$, qui est intégrable si $2-\beta > 1$, il suffit de choisir $\beta = 1/2$ et la fonction est intégrable à l'infini.

En 0, la fonction équivaut à $-\ln t$, donc intégrable (cf. exercice 0.1).

En 1, la fonction n'est pas définie mais, si l'on pose $x = t - 1$, avec le développement limité de $\ln(1+x)$, $\frac{\ln(1+x)}{(2+x)x} \sim \frac{1}{2+x}$ qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0. La fonction, prolongeable par continuité, est intégrable en 1. Donc I_4 converge et vaut $\frac{\pi^2}{4}$ (cf. exercice

0.18).

Exercice 0.4

- 1) Étudier la sommabilité de $\frac{\sin t}{t^\alpha}$ sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ selon les valeurs de α ($\alpha > 0$).
- 2) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge mais pas $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| dt$?
- 3) Application aux intégrales de Fresnel $C = \int_0^\infty \cos t^2 dt$ et $S = \int_0^\infty \sin t^2 dt$.

1) *Sommabilité sur $]0, 1]$* : la fonction est continue sur $]0, 1]$, non définie en 0 au voisinage duquel on a : $\left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| = \frac{\sin t}{t^\alpha} \sim \frac{t}{t^{\alpha-1}} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$, fonction sommable si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ soit $\boxed{\alpha < 2}$.

Sommabilité sur $[1, +\infty[$: $\left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$, fonction sommable si $\alpha > 1$. Mais, si $\alpha \leq 1$, on a simplement majoré par une fonction non sommable, ce qui n'induit rien pour $\left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right|$. Pour s'assurer que $\frac{\sin t}{t^\alpha}$ n'est pas sommable quand $\alpha \leq 1$, minorons $\left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right|$ par une fonction non sommable, à savoir : $\frac{1 - \cos 2t}{2t^\alpha}$.

En effet, $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \geq 0$ car $a^2 \leq a$ si $0 \leq a \leq 1$.

Pour $0 < \alpha < 1$, on a :

$$\int_1^\infty \frac{1 - \cos 2t}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{(1 - \alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^\infty - \left[\frac{\sin 2t}{2t^\alpha} \right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\alpha \sin 2t}{2t^{\alpha+1}} dt.$$

Le dernier terme est fini car $\left| \frac{\alpha \sin 2t}{2t^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{\alpha}{2t^{\alpha+1}}$ sommable sur $[1, +\infty[$. Le deuxième terme vaut $\frac{-\sin 2}{2}$ et le premier est infini car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha-1} = 0$.

Pour $\alpha = 1$, $\int_1^\infty \frac{1 - \cos 2t}{t} dt = [\ln t]_1^\infty - \left[\frac{\sin 2t}{2t} \right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\sin 2t}{2t^2} dt$ de valeur infinie à cause du premier terme.

Donc, $\frac{\sin t}{t^\alpha}$ est sommable sur $]0,1]$ pour $0 < \alpha < 2$ et sur $[1,+\infty[$ pour $\alpha > 1$.

2) Puisque la sommabilité de la fonction implique la convergence de l'intégrale, on peut conclure de 1) que l'intégrale converge sur $]0,+\infty[$ si $1 < \alpha < 2$. Voyons si l'intégrale converge pour d'autres valeurs de α .

Sur $]0,1]$, la fonction est positive et la convergence de l'intégrale équivaut à la sommabilité de la fonction, et l'intégrale converge si $0 < \alpha < 2$. Mais ce n'est plus le cas sur $[1,+\infty[$.

En intégrant par parties, on a :

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{-\cos t}{t^\alpha} \right]_1^x - \int_1^x \alpha \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt \right) = \text{valeur finie } \forall \alpha > 0$$

car $\alpha + 1 > 1$ et donc l'intégrale converge sur $]0,+\infty[$ pour $0 < \alpha < 2$.

En résumé : $\frac{\sin t}{t^\alpha}$ est sommable $\begin{cases} \text{sur }]0,1] & \text{pour } 0 < \alpha < 2 \\ \text{sur } [1,+\infty[& \text{pour } \alpha > 1 \end{cases}$

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge si $0 < \alpha < 2$ et $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| dt$ converge si $1 < \alpha < 2$.

En particulier, si $\alpha = 1$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge mais pas $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$.

3) Remarquons que les fonctions à intégrer sont continues mais n'ont pas de limite à l'infini et on ne peut utiliser immédiatement d'équivalent. Alors, transformons les intégrales en posant : $t = \sqrt{x}$.

On obtient : $C = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} dx$ et $S = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} dx$. $S = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{2x^{1/2}} dx$ converge d'après la question 2). Pour C , intégrons par parties :

$$C = \left[\frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} = 0$ car $0 \leq \left| \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} = 0$ et la dernière intégrale converge

d'après la question 2). Donc, C converge : on montre que ces intégrales de Fresnel valent

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 0.5 Valeur principale

- 1) Soit f une fonction quelconque, intégrable partout sauf en $+\infty$ et en $-\infty$ et soit f_p sa partie paire. On rappelle que $f_p(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$. Calculer $VP \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ en fonction de f_p en précisant dans quelle condition cette valeur existe.
- 2) Application : $f(t) = \frac{1+t-t^3}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}
 1) \quad VP \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{-X}^X f(t) dt \\
 &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\int_{-X}^0 f(t) dt + \int_0^X f(t) dt \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X [f(t) + f(-t)] dt \\
 &= \lim_{X \rightarrow +\infty} 2 \int_0^X f_p(t) dt
 \end{aligned}$$

qui existe si f_p est intégrable au voisinage de $+\infty$.

2) Application : f vérifie bien les hypothèses du 1) et $f_p(t) = \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Alors, $VP \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} 2 \arctan(X) = \pi$.

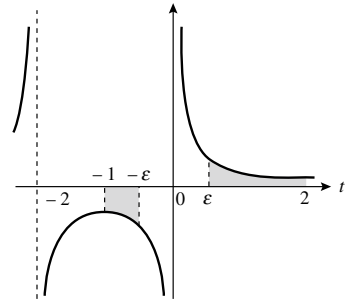
Exercice 0.6 Valeur principale

- 1) Tracer le graphe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(t) = \frac{1}{t(t+2)}$.
- 2) Vérifier que $\int_{-1}^2 \frac{1}{t(t+2)} dt$ diverge.
- 3) Calculer $VP \int_{-1}^2 \frac{1}{t(t+2)} dt$ directement, puis en fonction de sa partie paire f_p .

1) La fonction n'est pas définie pour $t = 0$ et $t = -2$ et $f'(t) = \frac{-2(t+1)}{t^2(t+2)^2}$ est positive si $t < -1$, négative sinon.

2) Au voisinage de 0, $\frac{1}{t(t+2)} \sim \frac{1}{2t}$ qui n'est pas intégrable et alors $\int_{-1}^2 \frac{1}{t(t+2)} dt$ diverge.

$$3) \quad VP \int_{-1}^2 \frac{1}{t(t+2)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t(t+2)} dt + \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{t(t+2)} dt \right).$$



En décomposant la fraction rationnelle, on a :

$$\frac{1}{t(t+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{et } VP \int_{-1}^2 \frac{1}{t(t+2)} dt &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left([\ln|t|]_{-1}^{-\varepsilon} + [\ln|t|]_{\varepsilon}^2 - [\ln|t+2|]_{-1}^{-\varepsilon} - [\ln|t+2|]_{\varepsilon}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln \varepsilon + \ln 2 - \ln \varepsilon - \ln(2 - \varepsilon) - \ln 4 + \ln(2 + \varepsilon)) = -\frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Cette valeur représente la limite de la somme algébrique des aires hachurées quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

$VP \int_{-a}^a f(t) dt = 2VP \int_0^a f_p(t) dt$ où f_p est la partie paire de f . Si f est impaire, f_p est nulle et

$$VP \int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

Ici, $f_p(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) = \frac{1}{t^2 - 4}$ et $f_p \in L^1(-1, +1)$.

$$\text{Alors } VP \int_{-1}^2 \frac{1}{t(t+2)} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 4} dt + \int_1^2 \frac{1}{t(t+2)} dt.$$

Exercice 0.7 Transformée de Hilbert

1) Étudier la sommabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{(t-a)(t^2+1)} \text{ et calculer } VP \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \text{ si elle existe.}$$

2) La transformée de Hilbert d'une fonction φ est définie par :

$$(H\varphi)(u) = \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-u} dt.$$

Calculer $\psi = H\varphi$ puis $\eta = H\psi$ dans le cas où : $\varphi(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

1) Au voisinage de a , f se comporte comme $\frac{1}{t-a}$ et n'est donc pas sommable, mais, au voisinage de l'infini, $f(t) \sim \frac{1}{t^3}$ qui est sommable.

Donc, f est sommable sur $]-\infty, a - \varepsilon_1] \cup [a + \varepsilon_2, +\infty[$, $\forall \varepsilon_1$ et $\varepsilon_2 > 0$.

En particulier, f est sommable sur $]-\infty, a - \varepsilon] \cup [a + \varepsilon, +\infty[$, $\forall \varepsilon > 0$.

Calculons alors $VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(t) dt + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} f(t) dt \right\}$.

En décomposant la fraction en éléments simples, on obtient :

$$f(t) = \frac{1}{(t-a)(t^2+1)} = A \left(\frac{1}{t-a} - \frac{t}{t^2+1} - \frac{a}{t^2+1} \right) \text{ où } A = \frac{1}{a^2+1}.$$

Une primitive de f est : $F(t) = A \left(\ln \frac{|t-a|}{\sqrt{t^2+1}} - a \arctan t \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{ F(a-\varepsilon) - F(-\infty) + F(+\infty) - F(a+\varepsilon) \} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ F(a-\varepsilon) - \frac{\pi a A}{2} - \frac{\pi a A}{2} - F(a+\varepsilon) \right\} \text{ avec} \\ F(a-\varepsilon) - F(a+\varepsilon) &= A \left\{ \ln \sqrt{\frac{(a+\varepsilon)^2+1}{(a-\varepsilon)^2+1}} - a \arctan(a-\varepsilon) + a \arctan(a+\varepsilon) \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{ F(a-\varepsilon) - F(a+\varepsilon) \} = 0 \text{ et } \boxed{VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = -\frac{\pi a}{a^2+1}}.$$

$$2) \quad \psi(u) = H(\varphi)(u) = \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-u)(t^2+1)} = -\frac{u}{u^2+1} \text{ d'après 1).}$$

$$\eta(t) = H(\psi)(t) = \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-u}{(u-t)(u^2+1)} du.$$

L'intégration se fait en décomposant en éléments simples :

$$g(u) = \frac{-u}{(u-t)(u^2+1)} = \frac{A}{u-t} + \frac{Bu+C}{u^2+1} \text{ où } C = \frac{-1}{t^2+1}, A = tC \text{ et } B = -A.$$

Une primitive de g est :

$$G(u) = A \ln|u-t| + \frac{B}{2} \ln(u^2+1) + C \arctan u = A \ln \frac{|u-t|}{\sqrt{u^2+1}} + C \arctan u$$

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} g(u) du + \int_{t+\varepsilon}^{+\infty} g(u) du \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} [G(+\infty) - G(-\infty)] + \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [G(t-\varepsilon) - G(t+\varepsilon)] = \frac{-1}{t^2+1} = -\varphi(t). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{H(H(\varphi)) = -\varphi}$ (voir exercice 9.10).

Exercice 0.8

Calculer $I = \iint_D x \, dx \, dy$ avec $D = \left\{ (x, y) / x^2 \leq y \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}$.

- 1) Dessiner le domaine et intégrer d'abord en y .
- 2) Intégrer d'abord en x . Comparer les deux résultats.

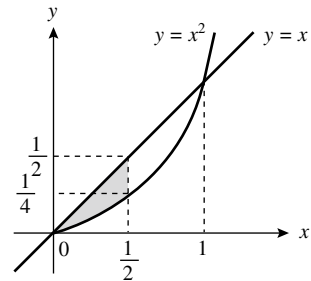
$$1) \quad I = \int_0^{1/2} x \left(\int_{x^2}^x dy \right) dx = \int_0^{1/2} x(x - x^2) dx = \frac{5}{192}.$$

2) D'après la figure, x varie soit de y à $\sqrt{y}$, soit de y à $1/2$: il faut alors couper le domaine en deux.

$$I = \int_0^{1/4} \left(\int_y^{\sqrt{y}} x \, dx \right) dy + \int_{1/4}^{1/2} \left(\int_y^{1/2} x \, dx \right) dy$$

$$I = \int_0^{1/4} \frac{1}{2} (y - y^2) dy + \int_{1/4}^{1/2} \left(\frac{1}{8} - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{5}{192}.$$

On obtient le même résultat car on intègre une fonction continue sur un domaine fermé borné et le théorème de Fubini s'applique, mais ce dernier calcul est plus long.

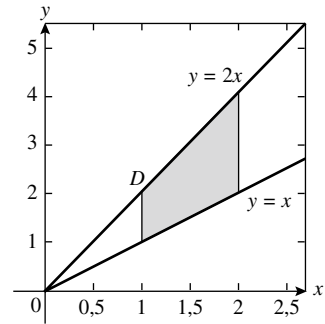


Exercice 0.9 Calcul d'une intégrale multiple dans le cas où l'ordre d'intégration s'impose

Soit $I = \int_1^2 \left(\int_x^{2x} \sin \frac{y}{x} dy \right) dx$.

- 1) Tracer le domaine D d'intégration et calculer I directement. Peut-on calculer I en intégrant d'abord en x ?
- 2) Calculer I par le changement de variables suivant :
$$\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad I &= \int_1^2 -x \left[\cos \frac{y}{x} \right]_x^{2x} dx \\
 &= -(\cos 2 - \cos 1) \int_1^2 x dx = \frac{3}{2} (\cos 1 - \cos 2).
 \end{aligned}$$



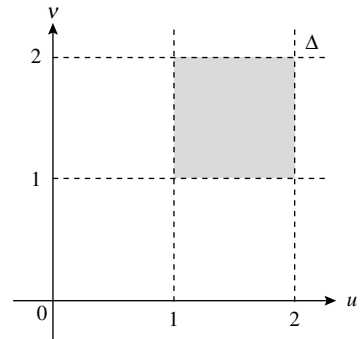
Comme $\sin \frac{y}{x}$ est > 0 sur D , $I = \iint_D \sin \frac{y}{x} dx dy = \iint_D \left| \sin \frac{y}{x} \right| dx dy$ d'après le théorème de Fubini. On peut alors intégrer d'abord en x mais en vain, car on ne connaît pas de primitive de $\sin \frac{1}{x}$, *a fortiori* de $\sin \frac{y}{x}$.

2) Le domaine D est défini par : $x \leq y \leq 2x$ et $x \in [1, 2]$ qui devient après changement de variables : $1 \leq v \leq 2$ et $u \in [1, 2]$. Donc l'image de D est : $\Delta = [1, 2] \times [1, 2]$.

Le jacobien de la transformation est :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\Delta} \sin v |u| du dv = \int_1^2 u du \times \int_1^2 \sin v dv \\
 &= \frac{3}{2} (\cos 1 - \cos 2).
 \end{aligned}$$



Exercice 0.10 Critère de convergence dans $\mathbb{R}^2$

1) Montrer que, si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $a > 0$, $\iint_{r \geq a} \frac{dx dy}{r^\alpha}$ converge si $\alpha > 2$, diverge sinon.

2) En déduire le critère de convergence de $\iint_{r \leq a} \frac{dx dy}{r^\alpha}$.

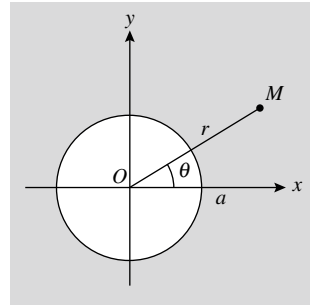
1) Posons $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$. Le jacobien de la transformation vaut :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$I = \iint_{r \geq a} \frac{dx dy}{r^\alpha} = \int_0^{2\pi} \left(\int_a^{+\infty} \frac{r dr}{r^\alpha} \right) d\theta = 2\pi \int_a^{+\infty} \frac{dr}{r^{\alpha-1}} \quad \text{qui}$$

converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ soit $\alpha > 2$.

$$2) \quad I = \iint_{r \leq a} \frac{dx dy}{r^\alpha} = 2\pi \int_0^a \frac{dr}{r^{\alpha-1}} \quad \text{qui converge si et seulement si } \alpha < 2.$$

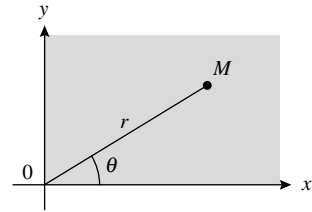


Exercice 0.11

Calculer $I = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ et de $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx$ pour $a > 0$.

Remarquons d'abord que la fonction est sommable car elle est continue en 0, et, à l'infini, on peut écrire : $e^{-r^2} \leq \frac{1}{r^3}$ (voir exercice 0.10).

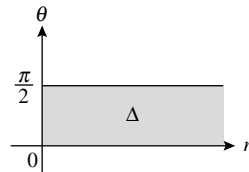


Puisque le domaine est un « pavé » et que la fonction est le produit d'une fonction de x par une fonction de y , on a :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \times \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

Posons : $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$. Alors, le jacobien vaut :

$$J = r \text{ et le domaine devient : } \Delta = \mathbb{R}^+ \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$



$$\text{D'où : } I = \iint_{\Delta} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \times \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Donc, } I = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{et, en posant : } x = u\sqrt{a} \quad \int_0^{+\infty} e^{-au^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{et}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}.$$

Exercice 0.12

Calculer $I = \iint_{D(a)} f(x)g(y)dx dy$ avec $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x)$,

$g(y) = ye^{-y^2/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_*^+}(y)$ et $D(a) = \{(x, y) / xy < a\}$ avec $a > 0$, en faisant le changement de variables suivant : $x = \frac{t}{u}$ et $y = u$.

$D(a)$ est le domaine hachuré mais, compte tenu des valeurs de f et de g , on intègre en fait sur $D'(a) = \{(x, y) / xy < a, |x| < 1, y > 0\}$ (en grisé) et fg est sommable sur $D(a)$.

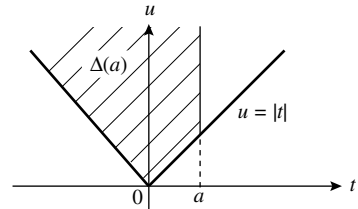
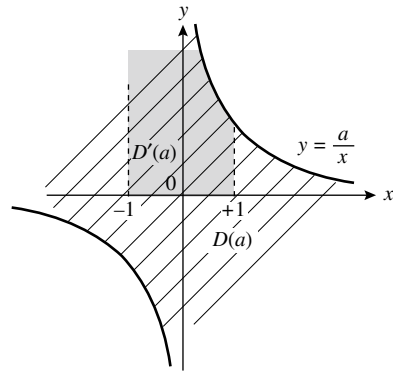
Le jacobien de la transformation est :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{u} & -\frac{t}{u^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{u}$$

et l'image de $D'(a)$ est :

$$\Delta(a) = \left\{ (t, u) / t < a, \left| \frac{t}{u} \right| < 1, u > 0 \right\}$$

soit : $\Delta(a) = \{(t, u) / |t| < u, t < a\}$.



$$\text{Alors, } I(a) = \iint_{D'(a)} \frac{ye^{-y^2/2}}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx dy = \int_{-\infty}^a \left(\int_{|t|}^{+\infty} \frac{ue^{-u^2/2}}{\pi\sqrt{u^2-t^2}} du \right) dt$$

On intègre d'abord en u , sinon il faudrait couper le domaine en deux sous-domaines et l'on pose : $v^2 = u^2 - t^2$. D'où $v dv = u du$ et

$$I(a) = \int_{-\infty}^a e^{-t^2/2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-v^2/2}}{\pi} dv \right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-t^2/2} dt$$

$$\text{en utilisant } \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$I(a)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Exercices d'entraînement

0.13 Les majorations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$1) \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx \right| \leq \left| \int_0^2 f(x) dx \right|$$

$$2) \left| \int_0^{1/2} f(x) dx - \int_{1/2}^1 f(x) dx \right| \leq \left| \int_0^{1/2} f(x) dx \right| - \left| \int_{1/2}^1 f(x) dx \right|$$

$$3) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b \max_{x \in [a,b]} f(x) dx$$

0.14 Étudier la sommabilité des fonctions f suivantes sur les intervalles précisés et calculer les intégrales qui convergent (notées I).

$$1) (t^3 + t + 1)e^{-2t} \text{ sur } [1, +\infty[\quad 2) \frac{1}{\operatorname{ch} t} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$3) (t-1)^{-1/3} \text{ sur } I_1 = [1, 2[\text{ et } I_2 = [2, +\infty[\quad 4) \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \text{ sur } [1, +\infty[$$

$$5) \frac{t}{(1+t^2)^2} \text{ sur } [0, +\infty[\quad 6) \frac{1}{(1+t^2)^2} \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$7) \frac{\cos t}{t} \text{ sur }]0, 1] \quad 8) \frac{\ln t}{(1+t)^2} \text{ sur } [1, +\infty[$$

0.15 Les fonctions suivantes sont-elles sommables sur les intervalles considérés ?

$$1) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{(1-t)^{3/2}} \text{ sur } [0, 1[\quad 2) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t^{3/2}} \text{ sur }]0, 1]$$

$$3) \frac{e^{\sin t}}{t} \text{ sur }]0, 1] \text{ puis } [1, +\infty[\quad 4) \arctan \frac{1}{t} \text{ sur }]0, 1] \text{ et } [1, +\infty[$$

$$5) \sin \frac{1}{t} \text{ sur }]0, 1] \text{ et } [1, +\infty[\quad 6) \frac{|\ln t|^\beta}{t^\alpha} \text{ sur }]1, +\infty[\text{ et }]0, 1]$$

0.16 Montrer que $t^n e^{-\pi t^2}$ est sommable sur $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\pi t^2} dt$. Calculer I_n sachant que $I_0 = 1$.

0.17 Étudier la convergence et la convergence en valeur principale des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t} \quad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2} \quad I_3 = \int_{-1}^1 \frac{t+2}{t(t+3)} dt$$

0.18 Calculer les intégrales multiples suivantes (calcul direct)

$$I_1 = \iint_D dx dy \text{ avec } D = \{(x,y) / 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y > 1\}$$

$$I_2 = \iint_D \frac{y}{x^2} dx dy \text{ avec } D = \{(x,y) / x^2 \leq y \leq 4x, x \leq 1\}$$

$$I_3 = \iint_D x dx dy \text{ avec } D = \{(x,y) / 0 < x < 2, -1 < y < 1, 0 < x + y < 1\}$$

$$I_4 = \int_0^2 \left(\int_{3y}^6 e^{x^2} dx \right) dy$$

$$I_5 = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2y)}. \text{ Pour } I_5, \text{ intégrer 2 fois : d'abord en } x, \text{ puis}$$

$$\text{d'abord en } y. \text{ En déduire la valeur de } J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$$

$$I_6 = \iiint_D dx dy dz \text{ avec } D = \{(x,y,z) / x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 - y^2\}$$

0.19 Calculer les intégrales multiples suivantes en faisant le changement de variables indiqué.

$$I_1 = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-(x+y)} (x+y)^n dx dy \text{ en posant : } x = u \text{ et } y = v - u.$$

$$I_2 = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-(u^2+v^2)} \cos(t(u^2+v^2)) du dv. \text{ Poser } \begin{cases} u = \sqrt{\omega} \cos \theta \\ v = \sqrt{\omega} \sin \theta \end{cases}$$

$$I_3 = \iint_D \frac{x-y}{1+x+y} dx dy \text{ où } D = \{(x,y) / 0 \leq y \leq x, y \leq 1-x\}$$

$$\text{Poser : } x - y = u, x + y = v.$$

0.20 Critère de convergence dans $\mathbb{R}^3$

1) Montrer que, si $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $a > 0$, $\iiint_{r \geq a} \frac{dx dy dz}{r^\alpha}$ converge si $\alpha > 3$, diverge sinon.

2) En déduire le critère de convergence de $\iiint_{r \leq a} \frac{dx dy dz}{r^\alpha}$.

Réponses

0.13 1) Faux : l'inégalité est du type $|a - b| \leq |a + b|$ qui est fausse (il suffit de prendre $a = 3$ et $b = -5$). La majoration correcte est :

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx \right| \leq \left| \int_0^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^2 f(x) dx \right| \leq \int_0^2 |f(x)| dx$$

2) Faux : l'inégalité est du type $|a - b| \leq |a| - |b|$ qui est fausse (il suffit de prendre $a = 3$ et $b = -5$). La majoration correcte est :

$$\left| \int_0^{1/2} f(x) dx - \int_{1/2}^1 f(x) dx \right| \leq \left| \int_0^{1/2} f(x) dx \right| + \left| \int_{1/2}^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx$$

3) Faux : il suffit de prendre $f(x) = x - 1$ sur $[0,1]$, alors $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| = \frac{1}{2}$ et

$\int_0^1 \max_{x \in [0,1]} f(x) dx = 0$. La majoration correcte est :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b \max_{x \in [a,b]} |f(x)| dx = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot (b - a)$$

0.14 1) f est intégrable ($e^{-t} \leq \frac{1}{t^5}$ si t grand). Écrire la primitive sous la forme : $P(t)e^{-2t}$ où $P(t)$ est un polynôme de degré 3 dont on détermine les coefficients en dérivant et en identifiant (on a : $P'(t) - 2P(t) = t^3 + t + 1 \forall t$). On obtient :
 $I = -P(1)e^{-2} = \frac{29}{8}e^{-2}$.

2) f est intégrable (utiliser $e^{|t|} > t^2$ si t grand) et $I = \pi$ en posant $u = e^t$.

3) f est intégrable sur I_1 (et $I = \frac{3}{2}$) mais pas sur I_2 .

4) f est intégrable (comparer à $\frac{1}{t^\alpha}$). Poser $t = chu$, alors, $I = \frac{\pi}{2}$.

5) Poser $u = 1 + t^2$, $I = \frac{1}{2}$.

6) Poser $t = \tan \theta$, $I = \frac{\pi}{4}$.

7) $f \sim \frac{1}{t}$ en 0 et n'est donc pas intégrable.

8) f est intégrable ($0 < f(t) \leq \frac{1}{t^{2-\alpha}} \forall \alpha > 0$ quand t est grand, prendre $\alpha = 1/2$). En intégrant par parties, on a : $I = \ln 2$.

0.15 1) Oui : $f(t) \sim \frac{\pi}{2\sqrt{1-t}}$ quand t est voisin de 1, continue en 0.

2) Non : $f(t) \sim \frac{1}{t^{3/2}}$ en 0.

3) Non sommable du tout : la fonction se comporte comme $\frac{1}{t}$ en 0 et, à l'infini, est supérieure à $\frac{e^{-1}}{t}$ (utiliser $-1 \leq \sin t \leq 1$)

4) Oui sur $]0,1]$ (intégrer par parties), non sur $[1,+\infty[$

(utiliser : $\lim_{X \rightarrow +\infty} X \arctan \frac{1}{X} = 1$).

5) Oui sur $]0,1]$, non sur $[1,+\infty[$ (poser $t = \frac{1}{u}$ dans l'intégrale).

6) Sur $[1,+\infty[$, poser $u = \ln t$. Alors, $I = \int_0^{+\infty} u^\beta e^{(1-\alpha)u} du$ qui converge si $\alpha > 1$ et $\beta > -1$ et

sur $]0,1]$, poser $t = \frac{1}{u}$, alors $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^\beta u}{u^{2-\alpha}} du$ qui converge si $\alpha < 1$ et $\beta > -1$ et si $\alpha = 1$,

poser $u = \ln t$: la fonction à intégrer devient u^β qui est sommable en $+\infty$ si $\beta < -1$, et en 0 si $\beta > -1$.

$$0.16 \quad \left| t^n e^{-\pi t^2} \right| = \left| t^n e^{-\frac{\pi}{2} t^2} \right| e^{-\frac{\pi}{2} t^2} \leq M e^{-\frac{\pi}{2} t^2} \text{ qui est sommable sur } \mathbb{R}.$$

$$I_n = \frac{n-1}{2\pi} I_{n-2} \quad \text{et} \quad I_1 = 0 \Rightarrow I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2\pi)^p}, \quad I_{2p+1} = 0.$$

$$0.17 \quad I_1 \text{ ne converge pas mais converge en valeur principale, } VP \int_{-1}^1 \frac{dt}{t} = 0.$$

$$\text{Pour } I_2, \text{ pas de convergence du tout (} VP \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-2 + \frac{2}{\varepsilon} \right) \text{)}.$$

$$\text{Pour } I_3, \text{ on a seulement : } VP \int_{-1}^1 \frac{(t+2)}{t(t+3)} dt = \frac{\ln 2}{3}.$$

$$0.18 \quad I_1 = \frac{1}{2} \text{ (aire de } D \text{)}; \quad I_2 = \frac{47}{6} \text{ (intégrer en } y \text{ d'abord)}; \quad I_3 = \frac{7}{6} \text{ (couper le domaine en deux)}$$

$$; \quad I_4 = \frac{e^{36}-1}{6} \text{ (permuter l'ordre d'intégration)};$$

$$I_5 = \frac{\pi^2}{2} \text{ (intégrer en } x \text{ d'abord, puis } t = \sqrt{y} \text{)} \text{ et si l'on intègre en } y \text{ d'abord,}$$

$$I_5 = 2J \text{ d'où } J = \frac{\pi^2}{4}; \quad I_6 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \text{ (intégrer en } z \text{ d'abord puis en } (x,y) \text{ sur l'intérieur de l'ellipse : } 3y^2 + x^2 \leq 1 \text{)}.$$

$$0.19 \quad I_1 = (n+1)! = \Gamma(n+2); \quad I_2 = \frac{\pi}{4(1+t^2)}; \quad I_3 = \frac{2\ln 2 - 1}{8}.$$

$$0.20 \quad 1) \text{ Passer en coordonnées sphériques : } \begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad |J| = r^2 \cos \theta, \quad I = 4\pi \int_a^\infty \frac{dr}{r^{\alpha-2}}.$$

$$2) \alpha < 3.$$

Chapitre 1

Espaces L^1 , L^2 et convergences

RAPPELS

- $L^1(I)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions sommables sur l'intervalle I , borné ou non. Il est muni de la norme $\|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt$ et $\|f\|_1 = 0$ implique $f = 0$ presque partout (en abrégé *pp*).
- $L^2(I)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions dont le carré du module est sommable sur I . Il est muni de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}$, associée au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt.$$

- **Inégalité de Schwarz** dans $L^2(I)$:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad (\text{R1.1})$$

c'est-à-dire

$$\left| \int_I f(t) \overline{g(t)} dt \right| \leq \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_I |g(t)|^2 dt}$$

- Si $I = [a, b]$ est borné, $L^2(I) \subset L^1(I)$ et

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \sup_{t \in I} |f(t)|. \quad (\text{R1.2})$$

- **Convergence** d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions vers f lorsque n tend vers $+\infty$:
 - ponctuelle : $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t)$ pour chaque t .
 - presque partout : $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t)$ pour presque tout t .
 - uniforme sur I : $\sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Convergence dans $L^1(I)$ ou $L^2(I)$: $\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ avec la norme appropriée.
 Pour $L^2(I)$, on dit aussi convergence en moyenne quadratique ou au sens de l'énergie.
- Propriétés :
 - Conv. uniforme $\Rightarrow$ conv. ponctuelle $\Rightarrow$ conv. presque partout.
 - Si une suite (f_n) converge uniformément vers f sur I :
 - si les (f_n) sont continues, alors f est continue. (R1.3)
 - $\int_I f_n$ tend vers $\int_I f$.
 - Si une suite (f_n) converge ponctuellement vers f :
 - si la suite des (f'_n) converge uniformément vers g , alors $g = f'$. (R1.4)
 - Pour $I = [a, b]$ borné, on a, d'après (R1.2) :

$$\text{conv. uniforme} \Rightarrow \text{conv. dans } L^2(I) \Rightarrow \text{conv. dans } L^1(I). \quad (\text{R1.5})$$

Exercice 1.1 Exemples de fonctions de L^1 ou L^2

Pour chacune des fonctions suivantes, trouver des intervalles sur lesquels f appartient à L^1 ou L^2 ou aux deux.

$$1) f(t) = \frac{1}{(t+1)\sqrt{t^2-1}} \quad 2) f(t) = \sin \frac{1}{t^2} \quad 3) f(t) = (1+t^2)e^{1/t}$$

Pour chaque fonction, on utilise la comparaison avec les intégrales de référence $\int \frac{dt}{t^\alpha}$ et

$\int \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ (cf. R0.1 et R0.2) et on rappelle que $f \in L^p(I)$ si $\int_I |f(t)|^p dt$ a une valeur finie,

ici $p = 1$ ou 2 . D'autre part, on ne spécifiera pas les intervalles fermés bornés sur lesquels f est continue et $f \in L^1(I) \cap L^2(I)$.

1) f est définie sur $\mathbb{R} \setminus [-1, +1]$.

À l'infini, $|f(t)| \sim \frac{1}{t^2}$ donc sommable.

Au voisinage de -1^- , $|f(t)| \sim \frac{1}{\sqrt{2}|t+1|^{3/2}}$ non sommable.

En 1^+ , $|f(t)| \sim \frac{1}{2\sqrt{2}|t-1|^{1/2}}$ sommable.

Donc, $f \in L^1(-\infty, -1-a) \cup L^1(1, +\infty) \forall a > 0$.

Pour l'appartenance de f à L^2 , on étudie la sommabilité de f^2 :

À l'infini, $f^2(t) = \frac{1}{(t+1)^2(t^2-1)} \sim \frac{1}{t^4}$ qui est sommable.

Mais $f^2(t) \sim \frac{1}{2|t+1|^3}$ en -1^- et $f^2(t) \sim \frac{1}{8(t-1)}$ en 1^+ qui sont non sommables.

Donc, $f \in L^2(-\infty, -1-a) \cup L^2(1+a, +\infty) \forall a > 0$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire, donc $f \in L^p(\mathbb{R})$ équivaut à $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ ($p = 1, 2$).

En posant $t = \frac{1}{\sqrt{u}}$, on a : $\int_0^{+\infty} \left| \sin \frac{1}{t^2} \right| dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{|\sin u|}{u\sqrt{u}} du$ qui converge (cf. exercice 0.4).

De même, $\int_0^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{t^2} \right)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u\sqrt{u}} du$ qui converge car la fonction que l'on intègre

tend vers 0 quand u tend vers 0 et est majorée à l'infini par $\frac{1}{u^{3/2}}$ qui est sommable. Donc,

$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

3) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$. À l'infini, $|f(t)| \sim t^2$ qui est non sommable. Quand

$t \rightarrow 0^-$, $\frac{1}{t} \rightarrow -\infty$, et $f(t) \rightarrow 0$ mais, quand $t \rightarrow 0^+$, $|f(t)| \sim e^{1/t} > \frac{1}{t}$ qui est non sommable.

Donc $f \in L^1(-a, 0) \forall a > 0$, et comme $f^2(t) = e^{2/t}(1+t^2)^2$, on a aussi : $f \in L^2(-a, 0) \forall a > 0$.

Exercice 1.2

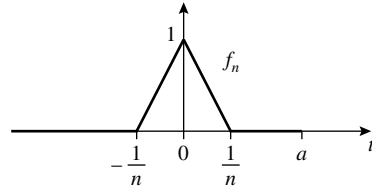
Soit $g(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ et 0 sinon.

1) Faire le graphe de $f_n(t) = g(nt)$. Étudier les convergences ponctuelle, uniforme sur $\mathbb{R}$, et en moyenne quadratique de la suite $\{f_n\}$.

2) Même question pour $f_n(t) = g\left(\frac{t}{n}\right)$.

3) Même question pour $f_n(t) = g(t-n)$.

$$1) \quad f_n(t) = \begin{cases} nt+1 & \text{si } -1 \leq nt \leq 0 \\ 1-nt & \text{si } 0 \leq nt \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Donc f_n n'est non nulle que sur $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$.

La suite converge ponctuellement vers $f(t) = 0$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$. En effet, pour tout t non nul, il existe N tel que, $\forall n \geq N, f_n(t) = 0$: il suffit de prendre $N > \frac{1}{|t|}$. Les f_n étant conti-

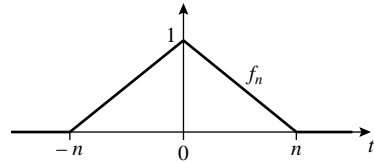
nues et f discontinue, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ (cf. R1.3). Par contre, sur tout intervalle I du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, -a]$ où $a > 0$, on a la convergence uniforme car $\sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| = f_n(a) = 0$ pour n assez grand.

Si la suite converge en moyenne quadratique, la limite est nécessairement f , c'est-à-dire 0 presque partout. Alors, puisque f et $f_n \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f_n - f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(2 \int_0^{1/n} (1-nt)^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3n}} \text{ et } \|f_n - f\|_2 \text{ tend vers } 0$$

quand n tend vers l'infini. La suite converge donc dans $L^2(\mathbb{R})$ vers 0.

$$2) \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{t}{n} + 1 & \text{si } -1 \leq \frac{t}{n} \leq 0 \\ 1 - \frac{t}{n} & \text{si } 0 \leq \frac{t}{n} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



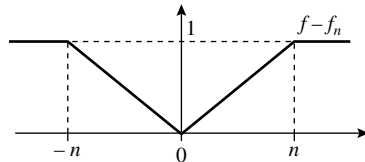
La suite converge ponctuellement vers $f(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$: en effet, $f_n(0) = 1$ et, pour tout t non nul, il existe N tel que, $\forall n \geq N, f_n(t) = 1 - \frac{|t|}{n}$ (il suffit de prendre $N > |t|$). Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 1.$$

La convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ si $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0$.

Or, $f_n(t) - f(t) = f_n(t) - 1$ et $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = 1$.

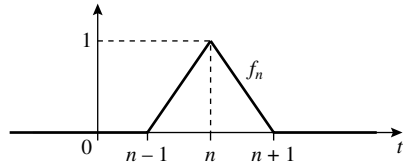
Donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.



Mais, sur $I = [-a, a]$, $\sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| = \frac{a}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et il y a convergence uniforme sur I .

La convergence en moyenne quadratique ne s'étudie pas, car $f \notin L^2(\mathbb{R})$.

$$3) f_n(t) = \begin{cases} t-n+1 & \text{si } -1 \leq t-n \leq 0 \\ n+1-t & \text{si } 0 \leq t-n \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



La limite ponctuelle de la suite est la fonction f identiquement nulle : en effet, pour chaque t fixé et n assez grand (soit $n > t + 1$), $f_n(t) = 0$.

Mais, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = 1$, ne tend donc pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

On constate que la convergence est uniforme sur $]-\infty, a]$ quel que soit a fini car, si n est assez grand, f_n est nulle sur cet intervalle.

Pour la convergence en moyenne quadratique, f et $f_n \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t-n) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u) du$$

expression indépendante de n , finie et non nulle. Donc $\|f_n - f\|_2$ ne tend pas vers 0 et il n'y a pas convergence en moyenne quadratique des f_n vers f .

Exercice 1.3

Soient les suites de signaux $f_n(t) = \sqrt{t + \frac{1}{n}}$ et $g_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ où $t \in [0, 1]$.

Examiner les convergences ponctuelle, uniforme sur $[0, 1]$, et dans $L^2(0, 1)$ des suites f_n et g_n .

1) Pour t fixé, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) = \sqrt{t}$, et f_n et $f \in L^2(0, 1)$.

$$|f_n(t) - f(t)| = \left| \sqrt{t + \frac{1}{n}} - \sqrt{t} \right| = \frac{1/n}{\sqrt{t+1/n} + \sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall t \in [0, 1], \text{ majoration obtenue en multipliant par la quantité conjuguée puis en utilisant } \sqrt{t + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Donc

$$0 \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et la suite converge uniformément vers } f \text{ sur } [0, 1].$$

en utilisant l'inégalité ci-dessus, d'où la convergence de la suite vers f dans $L^2(0, 1)$.

2) $g_n(0) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sqrt{n} \ln(1+t/n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{t/\sqrt{n}} = 1$ si $t \neq 0$ en utilisant $\ln(1+u) \sim u$ si u est petit. Donc, la suite converge ponctuellement vers la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = 1$.

Pour la convergence uniforme, comme $1 + \frac{t}{n}$ croît avec t , on a :

$$\sup_{t \in [0,1]} |g_n(t) - g(t)| = \sup_{t \in [0,1]} \left| \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{\sqrt{n}} - 1 \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} - 1 = g_n(1) - 1.$$

$$\sup_{t \in [0,1]} |g_n(t) - g(t)| \text{ tend vers } 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty \text{ puisque } g_n(1) \text{ tend vers } 1.$$

Donc la suite converge uniformément sur $[0,1]$ vers g .

Pour la convergence dans $L^2(0,1)$, on a, puisque g et $g_n \in L^2(0,1)$:

$$0 \leq \|g_n - g\|_2^2 = \int_0^1 |g_n(t) - g(t)|^2 dt \leq \left(\sup_{t \in [0,1]} |g_n(t) - g(t)| \right)^2 \text{ d'où, quand } n \text{ tend vers l'infini,}$$

$\|g_n - g\|_2 \rightarrow 0$ et la suite converge dans $L^2(0,1)$ vers g . (cf. R1.5)

Exercice 1.4

Soit la suite de fonctions $f_n(t) = n^\alpha e^{-n^2(t-2)^2}$.

1) La suite converge-t-elle ponctuellement, uniformément sur $\mathbb{R}$, et dans $L^2(\mathbb{R})$?

$$\text{On utilisera } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

2) Pour quelles valeurs de α a-t-on : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$?

1) $f_n(2) = n^\alpha$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(2)$ vaut 1 si $\alpha = 0$, 0 si $\alpha < 0$ et n'est pas définie si $\alpha > 0$, et,

pour $t \neq 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0 \quad \forall \alpha$. Ainsi, la suite ne converge ponctuellement sur $\mathbb{R}$ que si

$\alpha \leq 0$. La limite ponctuelle vaut 0 si $\alpha < 0$, et 0 sauf en 2 où elle est égale à 1 si $\alpha = 0$.

Mais, $\forall \alpha$, la suite converge vers 0 presque partout.

Étudions la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ quand $\alpha \leq 0$:

$$f_n(t) - f(t) = f_n(t) \text{ sauf si } t = 2 \text{ et } \alpha = 0, \text{ car alors } f_n(2) - f(2) = 0.$$

Pour évaluer $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)|$, on dérive donc f_n :

$$f'_n(t) = -2n^{\alpha+2}(t-2)e^{-n^2(t-2)^2} \text{ s'annule pour } t = 2, \lim_{|t| \rightarrow \infty} f_n(t) = 0,$$

et alors $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = f_n(2) = n^\alpha$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini seulement si

$\alpha < 0$. D'où la convergence uniforme pour $\alpha < 0$.

Pour la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$, $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ et $f = 0$ presque partout :

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} n^{2\alpha} e^{-2n^2(t-2)^2} dt = n^{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2n^2 u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2n^2}} n^{2\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{2\alpha-1}$$

et l'expression tend vers 0 si $\alpha < \frac{1}{2}$.

2) On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ presque partout quel que soit α et $\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = 0$ alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n^\alpha e^{-n^2(t-2)^2} dt = n^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{n^2}} n^\alpha = \sqrt{\pi} n^{\alpha-1} \text{ qui ne tend vers 0 que si } \alpha < 1.$$

On n'a donc l'égalité que si $\alpha < 1$.

Exercice 1.5

Soit la suite de fonctions $f_n(t) = \frac{1}{n^p} \sqrt{n^2 - t^2} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)$. Examiner les convergences uniforme et au sens de l'énergie de la suite pour $p = 2$ et $p = 1$.

Si $p = 2$, $f_n \in L^2(\mathbb{R})$, $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{t^2}{n^2}} \mathbb{1}_{[-n,n]}(t) = 0$

$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = f_n(0) = \frac{1}{n}$ tend vers 0 quand n tend

vers l'infini et il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

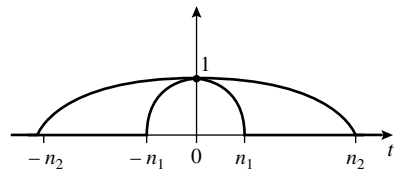
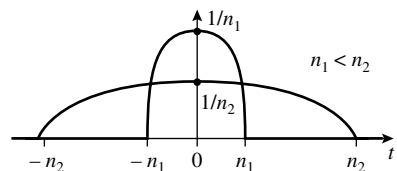
$$\|f_n - f\|_2^2 = \frac{1}{n^4} \int_{-n}^n (n^2 - t^2) dt = \frac{4}{3n}$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et la suite converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers 0.

Si $p = 1$, $f_n(t) = \sqrt{1 - \frac{t^2}{n^2}}$ sur $[-n, n]$ et

$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 1$ partout.

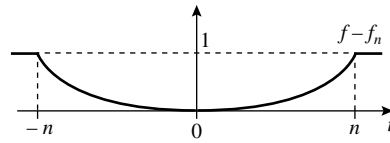
$$|f_n(t) - f(t)| = \begin{cases} 1 & \text{sur }]-\infty, -n[\cup]n, +\infty[\\ 1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{n^2}} & \text{sur } [-n, n] \end{cases}$$



Donc, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = 1$ et la suite ne

converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

La limite f n'étant pas dans $L^2(\mathbb{R})$, il n'y a pas de convergence au sens de l'énergie.



Exercice 1.6

Soit la suite de fonctions définies par : $f_n(t) = (\sin t)^n \mathbb{1}_{[0, \pi]}(t)$, $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Quelle est la limite ponctuelle f de cette suite ?
- 2) Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?
- 3) Y a-t-il convergence en moyenne quadratique? (Indication : on peut calculer l'intégrale par récurrence et utiliser la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ valable si n grand.)

1) $f_n(\pi/2) = 1$, et $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ si $t \neq \frac{\pi}{2}$, car $|\sin t| < 1$, donc f est nulle sauf en $\pi/2$ où elle vaut 1 : elle est donc nulle presque partout.

2) La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car les f_n sont continues mais pas f (cf. R1.3).

3) $\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^\pi (\sin t)^{2n} dt = I_n$. En écrivant $I_n = \int_0^\pi \sin t (\sin t)^{2n-1} dt$ et en intégrant par parties, on obtient : $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$. Soit $I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 2} I_0$ avec $I_0 = \pi$ et donc

$$I_n = \frac{\pi (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Avec l'approximation de $n!$, on a : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. La suite converge donc en moyenne quadratique vers 0.

Remarque. On peut aussi montrer que I_n tend vers 0 ainsi : d'abord, $I_n = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n} dt$ puisque $\sin(\pi - u) = \sin u$ et on découpe l'intervalle :

$$I_n = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} (\sin t)^{2n} dt + \int_{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \right) \leq 2 \left[\left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right)^{2n} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) + \varepsilon \right]$$

en majorant $\sin t$ par $k = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < 1$ dans la première intégrale et par 1 dans la seconde

et la quantité $k^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \varepsilon$ est aussi petite que l'on veut car $k^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On a :

$\forall \varepsilon, 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \leq 2\varepsilon$ avec ε aussi petit que l'on veut.

Donc $I_n \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini.

Exercices d'entraînement

1.7 Pour chacune des fonctions f suivantes, trouver des intervalles sur lesquels f appartient à L^1 ou à L^2 ou aux deux.

1) $\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$

2) $\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

3) $\arctan \frac{1}{t}$

4) $|t|^\alpha e^{\beta t}$

1.8 Étudier les convergences uniforme et en moyenne quadratique des suites f_n :

1) $\frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$

2) $n^2 \sin \pi n t \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(t)$

3) $\frac{1-e^{-n^2t^2}}{t}, 0 \text{ en } 0$

4) $\arctan \frac{1}{1+nt}, 0 \text{ en } -\frac{1}{n}$

5) $\frac{t}{\pi} \mathbb{I}_{\left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]}(t).$

1.9 Soit la suite de signaux $f_n(t) = t e^{-nt^2}$.

1) Examiner les convergences ponctuelle et uniforme sur $\mathbb{R}$.

2) A-t-on : $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) = \frac{d}{dt} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right]$?

1.10 On suppose que les suites $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ convergent dans $L^2(I)$ vers f et g respectivement, pour tout intervalle I .

A-t-on $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n + g_n = f + g$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n g_n = fg$ dans $L^2(I)$

Réponses

1.7 1) Domaine de définition : $I =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. f étant impaire et f^2 paire, on raisonne sur $]1, +\infty[$. Au voisinage de 1, $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$ et à l'infini, $f(t) \sim \frac{1}{t^2}$ d'où $f \in L^1(I)$ mais $f \notin L^2(I)$.

2) Domaine de définition : $]1, \infty[$. À l'infini, $|f(t)| \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ non sommable et, en 1, si l'on

pose $t = 1 + x$, $\int_1^{1+\varepsilon} \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt \sim \int_0^\varepsilon \ln \frac{x}{2} dx$ qui converge.

Donc, $f \in L^1(1, a) \forall a$ borné. On a de même, $f \in L^2(1, a)$.

3) Le domaine de définition est $\mathbb{R}^*$ et, f étant impaire, on raisonne sur $\mathbb{R}^+$. $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \frac{\pi}{2}$

et, à l'infini, $f(t) \sim \frac{1}{t}$ non sommable. On a donc seulement $f \in L^1(-a, a) \forall a$ fini. Par

contre, à l'infini, $f^2(t) \sim \frac{1}{t^2}$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$.

4)

	$\alpha < -1$	$\alpha > -1$	$\alpha < -1/2$	$\alpha > -1/2$
$\beta > 0$		$L^1(\mathbb{R}^-)$		$L^2(\mathbb{R}^-)$
$\beta < 0$		$L^1(\mathbb{R}^+)$		$L^2(\mathbb{R}^+)$
$\beta = 0 (a > 0)$	$L^1(a, +\infty)$ $L^1(-\infty, -a)$	$L^1(-a, a)$	$L^2(a, +\infty)$ $L^2(-\infty, -a)$	$L^2(-a, a)$

1.8 1) $f_n \rightarrow 0$ sauf en 0 où il n'y a pas de limite. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. En posant $u = nt$, $\|f_n - f\|_2 = c\sqrt{n}$ avec c constante non nulle, donc pas de convergence dans $L^2(\mathbb{R})$.

2) D'abord, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ car $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \rightarrow \{0\}$ et $f_n(0) = 0$, et $f_n \in L^2(\mathbb{R})$.

Mais la convergence ne peut être uniforme puisque

$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n^2$. Pour la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)|^2 dt = n^4 \int_{-1/n}^{+1/n} \sin^2 \pi nt dt = n^3 \quad (\text{en linéarisant}).$$

Donc, la suite ne converge pas dans $L^2(\mathbb{R})$: on verra qu'elle converge au sens des distributions.

3) $f(t) = \frac{1}{t}$ et 0 en 0. f_n continues et f discontinue impliquent : pas de

convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, ni dans $L^2(\mathbb{R})$ d'ailleurs car $f \notin L^2(\mathbb{R})$.

4) f_n est discontinue, $f_n(0) = \frac{\pi}{4}$, f est nulle sauf en 0 où elle vaut $\frac{\pi}{4}$.

$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = \frac{\pi}{2}$ donc pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

$$f_n(t) \sim \frac{1}{nt} \Rightarrow f_n \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\arctan \frac{1}{1+nt} \right)^2 dt = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\arctan \frac{1}{u} \right)^2 du = \frac{c}{n} \text{ et } c \neq 0.$$

d'où la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$ vers 0 presque partout.

5) $f_n(0) = 0$ et, si $t \neq 0$ et n assez grand (tel que $\frac{\pi}{n} < t$), $f_n(t) = 0$. Donc, la limite f est nulle

et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ car $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0.

$$\|f_n - f\|_2^2 = 2 \int_0^{\pi/n} \left(\frac{t}{\pi} \right)^2 dt = \frac{2\pi}{3n^3} \text{ et la suite converge vers 0 dans } L^2(\mathbb{R}).$$

1.9 1) $f_n(0) = 0$, et $f_n(t) \rightarrow 0$ si $t \neq 0$, donc la limite ponctuelle f est nulle partout.

La convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$: En effet, $f_n - f = f_n$ a pour dérivée $f'_n(t) = e^{-nt^2}(1 - 2nt^2)$, fonction paire qui s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ et en $-\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Donc, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2n}}$ puisque la fonction tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

2) $g_n(t) = f'_n(t) = e^{-nt^2}(1 - 2nt^2)$ et $g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = 0$ si $t \neq 0$, 1 sinon.

La convergence n'est pas uniforme puisque la limite est discontinue alors que les g_n sont continues. De ce fait, on n'a pas : $g(t) = f'(t)$ (cf. R1.4).

1.10 Vrai pour la somme, faux pour le produit.

$$\|f_n + g_n - (f + g)\| \leq \|f_n - f\| + \|g_n - g\| \text{ et } f + g \in L^2(\mathbb{R}).$$

$f \in L^2(I)$ et $g \in L^2(I) \Rightarrow fg \in L^1(I)$ d'après l'inégalité de Schwarz. Par exemple, si $f(t) = \frac{1}{t^{1/4}}$ et $g = f$, alors, $f \in L^2(0,1)$ et $g \in L^2(0,1)$. Mais $fg \notin L^2(0,1)$.

On a : $fg \in L^1(I)$.

La convergence a lieu dans $L^1(I)$ car :

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leq \|f_n\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|g\|_2 \|f_n - f\|_2.$$

Chapitre 2

Orthogonalité, projections dans $L^2(I)$

RAPPELS

- Produit scalaire dans $L^2(I)$: $\langle f, g \rangle = \int_I f(t) \overline{g(t)} dt$.
Propriétés : – linéarité : $\langle \alpha f + \beta h, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle h, g \rangle$
– $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$, donc $\langle f, \alpha g \rangle = \overline{\alpha} \langle f, g \rangle$
– $\langle f, f \rangle \geq 0$ et $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ dans $L^2(I)$
- Norme associée au produit scalaire : $\|f\| = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$
 - Deux fonctions f et g sont orthogonales si leur produit scalaire est nul. Alors,
 $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ (**Pythagore**).
- La projection orthogonale $\tilde{f}$ d'une fonction f de $L^2(I)$ sur un sous-espace vectoriel fermé F engendré par la famille de fonctions orthogonales $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est égale à :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{k=n} c_k \varphi_k(t) \quad \text{où} \quad c_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2}. \quad (\text{R2.1})$$

C'est la meilleure approximation de f par une fonction de F .

C'est, parmi toutes les fonctions g de F , celle qui rend minimum la quantité $\|f - g\|^2$.

Puisque $f - \tilde{f}$ est orthogonal à $\tilde{f}$, l'erreur d'approximation vaut :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 = \|f\|^2 - \|\tilde{f}\|^2 \quad \text{avec} \quad \|\tilde{f}\|^2 = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{|\langle f, \varphi_k \rangle|^2}{\|\varphi_k\|^2}. \quad (\text{R2.2})$$

- Exemples de bases :

– base orthogonale dans $L^2(0, T)$:

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \dots, \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right), \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right), \dots \right\} \quad (\text{R2.3})$$

– base orthonormée dans $L^2(-1, +1)$: **les polynômes de Legendre**

$$P_n(t) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2 - 1)^n) \quad (\text{R2.4})$$

Exercice 2.1 Rappels : projections dans $\mathbb{R}^3$

Soient f_1, f_2, f_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $f_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$

$f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On rappelle que le produit scalaire de deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ de com-

posantes u_i et v_i dans la base canonique vaut : $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$.

1) Montrer que f_1, f_2, f_3 sont orthogonaux deux à deux et normés.

2) Soient F l'espace engendré par f_2 et f_3 , $F^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 / v \perp u \forall u \in F\}$ son orthogonal. Décrire succinctement ces espaces.

3) Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Quelles sont les projections u_F de u sur F et $u_{F^\perp}$ sur $F^\perp$?

Vérifier la relation de Pythagore.

1) En appliquant la définition, on obtient : $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$, 0 sinon, et $\|f_i\| = 1 \forall i = 1 \text{ à } 3$.

2) $F = \{v \in \mathbb{R}^3 / v = \alpha f_2 + \beta f_3\}$ soit $v = \begin{pmatrix} \alpha/\sqrt{2} \\ \beta \\ -\alpha/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Et, si x, y, z sont les composantes de v , l'équation $x + z = 0$ définit F . C'est l'équation d'un plan. $F^\perp$ est la droite engendrée par f_1 : c'est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent : $v = \alpha f_1$, et si les composantes d'un tel vecteur sont x, y, z , alors on a : $x = z, y = 0$, équations qui définissent la droite $F^\perp$.

3) D'après (R2.1), u_F est définie par :

$$u_F = \langle u, f_2 \rangle f_2 + \langle u, f_3 \rangle f_3 = -\frac{2}{\sqrt{2}} f_2 + 2 f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_{F^\perp} = \langle u, f_1 \rangle f_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et la}$$

relation de Pythagore est vérifiée puisque $u_F \perp u_{F^\perp}$.

En effet, $\|u_F\|^2 + \|u_{F^\perp}\|^2 = 6 + 8 = \|u\|^2 = 14$.

Exercice 2.2 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

On considère l'espace vectoriel $L^2(-1, 1)$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$$

- 1) a) Construire une suite de polynômes p_i 2 à 2 orthogonaux avec $i = 0, 1, 2$ de sorte que le degré de p_i soit i et que le coefficient du terme de plus haut degré soit égal à 1. On a donc $p_0(x) = 1$. Calculer p_1 , puis p_2 .
 b) Expliciter les polynômes P_i proportionnels aux p_i et de norme égale à 1. Vérifier que ces polynômes sont ceux de Legendre définis par (R2.4).
 c) Généralisation : connaissant $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$, calculer p_n par la formule :

$$p_n(x) = x^n + \sum_{j=0}^{j=n-1} \alpha_{n,j} p_j(x)$$

- 2) Déterminer la meilleure approximation au sens de la norme de $L^2(-1, 1)$ de la fonction $f(x) = e^x$ par une fonction polynomiale de degré n . Si on note f_n cette approximation, on a, dans la base orthonormée précédente et d'après (R2.1) :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i P_i(x) \quad \text{avec} \quad a_i = \langle f, P_i \rangle$$

- a) Calculer a_i pour $i = 0, 1, 2$. En déduire les approximations f_0, f_1, f_2 de l'exponentielle successivement par des polynômes de degré 0, 1 puis 2 dans $L^2(-1, 1)$.

- b)** Calculer $\|f - f_n\|^2$ en fonction des a_i et de $\|f\|^2$. En déduire, pour chaque approximation, l'erreur relative $\|f - f_n\|^2 / \|f\|^2$.
- c)** Faire 3 figures avec, sur chacune, le graphe de $y = e^x$ et respectivement les graphes de $y = f_0(x)$, $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$.
- 3)** Faire de même avec $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ en prenant des polynômes de Legendre de degrés ≤ 5 .

1) a) On pose $p_1(x) = x + a$ et $p_2(x) = x^2 + bx + c$ et on détermine les constantes par $\langle p_0, p_1 \rangle = 0$, $\langle p_0, p_2 \rangle = 0$ et $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$.

On obtient (sachant que, pour g impaire et sommable sur $[-\alpha, \alpha]$, $\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x) dx = 0$) :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 1 \cdot (x + a) dx &= 0 & \iff & 2a = 0 \\ \int_{-1}^1 1 \cdot (x^2 + bx + c) dx &= 0 & \iff & \frac{2}{3} + 0 + 2c = 0 \\ \int_{-1}^1 x \cdot (x^2 + bx + c) dx &= 0 & \iff & \frac{2}{3}b = 0. \end{aligned}$$

On a donc : $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

Ces 3 fonctions polynômes forment une base orthogonale de l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

b) Les polynômes P_i sont définis par : $P_i(x) = \frac{p_i(x)}{\|p_i\|}$, avec $\|p_i\|^2 = \langle p_i, p_i \rangle$:

$$\begin{aligned} \|p_0\|^2 &= \int_{-1}^1 1 dx = 2 \\ \|p_1\|^2 &= \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \\ \|p_2\|^2 &= \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

d'où : $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, $P_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$

c) Les n conditions $\langle p_n, p_k \rangle = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ s'écrivent :

$$\langle x^n, p_k \rangle + \alpha_{n,k} \langle p_k, p_k \rangle = 0$$

car $\langle p_j, p_k \rangle = 0$ pour $j \neq k$ et on a : $\alpha_{n,k} = -\frac{\langle x^n, p_k \rangle}{\|p_k\|^2}$ d'où p_n .

2) a) Calculons les $a_i = \langle e^x, P_i \rangle$ et les f_i :

$$a_0 = \int_{-1}^1 e^x \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^1 - e^{-1})$$

$$a_1 = \int_{-1}^1 e^x \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = 2e^{-1} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$a_2 = \int_{-1}^1 e^x \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(\frac{2}{3} e - \frac{14}{3} e^{-1} \right)$$

$$f_0(x) = a_0 P_0(x) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = sh(1) \approx 1.1752$$

$$f_1(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}x \approx 1.1752 + 1.10364x$$

$$f_2(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) = sh(1) + 3e^{-1}x + (e - 7e^{-1}) \frac{15}{4} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \\ \approx 0.99629 + 1.10364x + 0.53672 x^2$$

Si on utilise la base des p_i qui est orthogonale mais pas normée, on a alors

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\langle e^x, p_i \rangle}{\|p_i\|^2} p_i(x)$$

ce qui évite d'avoir des racines carrées dans les calculs.

b) L'erreur $\|f - f_n\|^2$ correspond en traitement du signal soit à l'énergie soit à la puissance. On a :

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|^2 &= \left\langle f - \sum_{i=0}^{i=n} a_i P_i, f - \sum_{i=0}^{i=n} a_i P_i \right\rangle \\ &= \|f\|^2 - \left\langle f, \sum_{i=0}^{i=n} a_i P_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=0}^{i=n} a_i P_i, f \right\rangle + \left\langle \sum_{i=0}^{i=n} a_i P_i, \sum_{i=0}^{i=n} a_i P_i \right\rangle \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=0}^{i=n} a_i \langle f, P_i \rangle + \sum_{i=0}^{i=n} a_i^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{i=n} a_i^2 \end{aligned}$$

On retrouve (R2.2) : $\|f\|^2 = \|f - f_n\|^2 + \|f_n\|^2$. On calcule donc :

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^1 (e^x)^2 dx = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = sh2 = 3.62686$$

$$a_0^2 = \frac{1}{2} (e^1 - e^{-1})^2 = \frac{1}{2} (e^2 - 2 + e^{-2}) = ch2 - 1 \sim 2.76220$$

$$a_1^2 = 4e^{-2} \frac{3}{2} = 6e^{-2} \sim 0.81201$$

$$a_2^2 = \frac{45}{8} \left(\frac{2}{3} e - \frac{14}{3} e^{-1} \right)^2 = \frac{5}{2} (e^2 - 14 + 49e^{-2}) \sim 0.05121$$

$$\|f - f_0\|^2 = sh2 - (ch2 - 1) \sim 0.86$$

$$\|f - f_1\|^2 = \|f\|^2 - a_0^2 - a_1^2 \sim 5.27 \times 10^{-2}$$

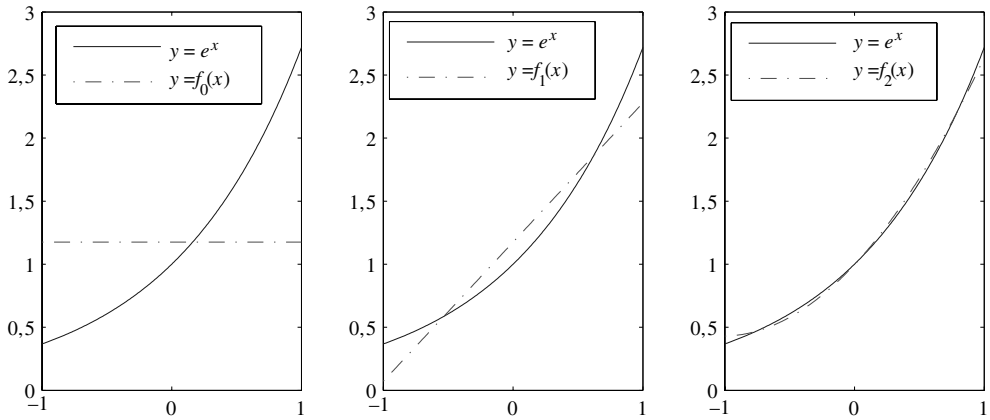
$$\|f - f_2\|^2 = \|f\|^2 - a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 \sim 1.44 \times 10^{-3}$$

Les erreurs relatives sont donc :

$$\frac{\|f - f_0\|^2}{\|f\|^2} \sim 0.24, \quad \frac{\|f - f_1\|^2}{\|f\|^2} \sim 0.015, \quad \frac{\|f - f_2\|^2}{\|f\|^2} \sim 0.0004$$

L'erreur relative en norme L^2 est dans le dernier cas $\frac{\|f - f_2\|}{\|f\|} = \sqrt{4 \times 10^{-4}} \sim 2\%$.

c) Graphes



3) a) D'après (R2.4), P_n est de degré n , P_{2k} est pair et P_{2k+1} est impair.

Comme $a_i = \langle f, P_i \rangle = \int_{-1}^1 f(x) P_i(x) dx$ et que f est impaire, on a :

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 2 \int_0^1 \operatorname{sgn}(x) P_i(x) dx = 2 \int_0^1 P_i(x) dx & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

On n'a donc besoin que des P_i pour $i = 1, 3, 5$.

Avec (R2.4), on a :

$$P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad P_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}} \frac{5x^3 - 3x}{2}, \quad P_5(x) = \sqrt{\frac{11}{2}} \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}$$

$$a_1 = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 x dx = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{7}{2}} \int_0^1 (5x^3 - 3x) dx = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$a_5 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{11}{2}} \int_0^1 (63x^5 - 70x^3 + 15x) dx = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{11}{2}}$$

$$f_0(x) = a_0 P_0(x) = 0, \quad f_1(x) = f_0(x) + a_1 P_1(x) = \frac{3}{2}x, \quad f_2(x) = f_1(x)$$

$$f_3(x) = f_2(x) + a_3 P_3(x) = f_2(x) - \frac{1}{4} \frac{7}{2} \frac{5x^3 - 3x}{2} = \frac{1}{16} (-35x^3 + 45x),$$

$$f_4(x) = f_3(x)$$

$$f_5(x) = f_4(x) + a_5 P_5(x) = f_4(x) + \frac{11}{16} \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}$$

$$= \frac{21(33x^5 - 50x^3 + 25x)}{128}$$

b) Les calculs sont les mêmes qu'à la question 2) :

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dx = 2$$

$$a_1^2 = \frac{3}{2}, \quad a_3^2 = \frac{7}{32}, \quad a_5^2 = \frac{11}{128}$$

$$\|f - f_1\|^2 = 2 - 1.5 = 0.5$$

$$\|f - f_3\|^2 = 2 - a_1^2 - a_3^2 \sim 0.281$$

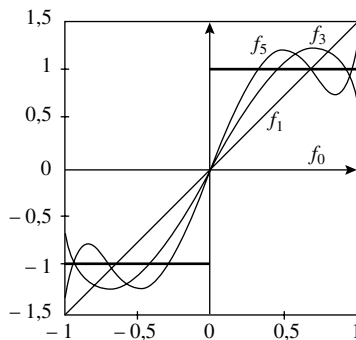
$$\|f - f_5\|^2 = 2 - a_1^2 - a_3^2 - a_5^2 \sim 0.195$$

Les erreurs relatives sont donc :

$$\frac{\|f - f_1\|^2}{\|f\|^2} \sim 0.25, \quad \frac{\|f - f_3\|^2}{\|f\|^2} \sim 0.14, \quad \frac{\|f - f_5\|^2}{\|f\|^2} \sim 0.098$$

L'erreur relative en norme L^2 est dans le dernier cas $\frac{\|f - f_5\|}{\|f\|} \sim 0.31 \sim 30\%$. On notera que les erreurs sont plus grandes qu'à la question précédente : cela est dû à la discontinuité de la fonction.

c)



Exercice 2.3 Polynômes de Tchebychev de première espèce

1) Dans $L^2(-1, +1)$, on considère $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Montrer que φ définit un produit scalaire sur $L^2(-1, +1)$.

2) Soit $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$. Montrer que T_n est un polynôme de degré n .

3) Vérifier que la famille des T_n est orthogonale pour le produit scalaire défini ci-dessus. Est-elle orthonormée ?

4) Quelle est la meilleure approximation de $f(t) = \operatorname{sgn}(t) \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$ au sens des moindres carrés dans $L^2(-1, +1)$ muni du produit scalaire φ , par des polynômes de degré ≤ 5 ? Comparer à l'exercice 2.2.

1) $\varphi(f, f) \geq 0$, et $\varphi(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$ presque partout, c'est-à-dire 0 dans $L^2(-1, +1)$. D'autre part, φ est bilinéaire et symétrique en raison des propriétés de l'intégrale.

Donc φ définit un produit scalaire sur $L^2(-1, +1)$.

2) Posons $\theta = \arccos t$ où $t \in (-1, +1)$ d'où $\theta \in (0, \pi)$ et $T_n(t) = \cos(n\theta)$.

On a donc $t = \cos \theta$, $\sin \theta = \sqrt{1-t^2}$ et $T_n(t) = \operatorname{Re}(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ soit, avec la formule de Moivre, $T_n(t) = \operatorname{Re}(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \operatorname{Re}(t + i\sqrt{1-t^2})^n$.

Puis, avec la formule du binôme, $T_n(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k t^{n-k} i^k (1-t^2)^{k/2}$.

Donc $T_n(t) = t^n - C_n^2 t^{n-2} (1-t^2) + C_n^4 t^{n-4} (1-t^2)^2 - \dots$

C'est un polynôme de degré $\leq n$ comme somme finie de tels polynômes, et le coefficient de t^n vaut : $1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots + C_n^m = 2^{n-1}$ (m désignant n ou $n-1$ selon la parité de n). Cette relation résulte des développements de $(1+1)^n$ et de $(1-1)^n$ par la formule du binôme. Donc, T_n est un polynôme de degré n exactement. Ainsi :

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, & T_1(t) &= t, & T_2(t) &= 2t^2 - 1, & T_3(t) &= 4t^3 - 3t, \\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1, & T_5(t) &= 16t^5 - 20t^3 + 5t, \text{ etc.} \end{aligned}$$

3) $\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta$ car $d\theta = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

D'où : $\langle T_n, T_m \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta] d\theta$.

Si $n \neq m$, $\langle T_n, T_m \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+m)\theta}{n+m} + \frac{\sin(n-m)\theta}{n-m} \right]_0^\pi = 0$.

Mais, si $n = m$, $\|T_n\|^2 = \langle T_n, T_n \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi [1 + \cos 2n\theta] d\theta = \frac{\pi}{2}$ si $n \neq 0$ et π si $n = 0$. La famille est orthogonale mais non orthonormée.

4) Notons f_n l'approximation de f :

c'est la projection de f sur l'espace vectoriel engendré par la famille orthonormée $\tilde{T}_k = \frac{T_k}{\|T_k\|}$

$$\text{pour } k = 0 \text{ à } n \text{ et } f_n(t) = \sum_{k=0}^n \langle f, \tilde{T}_k \rangle \tilde{T}_k(t) = \frac{1}{\|T_k\|^2} \sum_{k=0}^n \langle f, T_k \rangle T_k(t).$$

$$\text{Posons : } \alpha_k = \frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|^2}.$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\|T_k\|^2} \int_{-1}^1 \frac{f(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\|T_k\|^2} \int_0^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos k\theta d\theta \quad \text{si } k \text{ est impair et } \alpha_k = 0$$

$$\text{si } k \text{ est pair, soit : } \alpha_{2p+1} = \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)}.$$

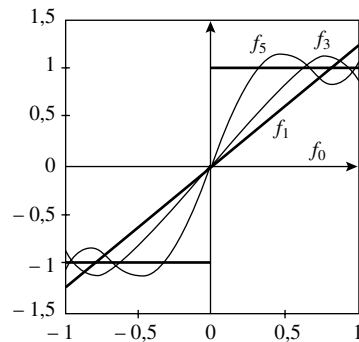
D'où :

$$f_0(t) = 0$$

$$f_1(t) = \alpha_1 T_1(t) = \frac{4}{\pi} t = f_2(t)$$

$$\begin{aligned} f_3(t) &= f_1(t) + \alpha_3 T_3(t) \\ &= -\frac{16}{3\pi} t^3 + \frac{8}{\pi} t = f_4(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5(t) &= f_4(t) + \alpha_5 T_5(t) \\ &= \frac{192t^5 - 320t^3 + 180t}{15\pi} \end{aligned}$$



Parmi tous les polynômes P quelconques de degré ≤ 5 , c'est f_5 qui rend minimum la quantité $\int_{-1}^1 \frac{(f(t) - P(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Exercice 2.4

Soit $E = \{f / f \text{ et } f' \in L^2(-1, 1), \text{ à valeurs dans } \mathbb{C}\}$ et

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} dt + \int_{-1}^1 f'(t) \overline{g'(t)} dt.$$

- 1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E . On le notera : $\langle f, g \rangle_E$.
- 2) Soit $f_k(t) = e^{i\pi kt}$. Calculer $\|f_k\|_E$ et $\langle f_k, f_p \rangle_E$ pour $p \neq k$; comparer à $\|f_k\|_2$ et $\langle f_k, f_p \rangle_{L^2(-1,1)}$.
- 3) Déterminer trois polynômes P_0, P_1, P_2 de degrés respectifs 0, 1 et 2, ortho-normés pour ce produit scalaire.

1) $\varphi(f, f) = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 \geq 0$, et $\varphi(f, f) = 0 \Rightarrow \|f\|_2 = 0$, c'est-à-dire $f = 0$ dans $L^2(-1, +1)$.

D'autre part, φ est linéaire en f en raison des propriétés de l'intégrale, et $\varphi(f, g) = \overline{\varphi(g, f)}$. Donc φ définit un produit scalaire sur E et $\|f\|_E = (\varphi(f, f))^{1/2}$.

$$2) \|f_k\|_E = \left(\int_{-1}^1 |e^{i\pi kt}|^2 dt + \int_{-1}^1 |i\pi k e^{i\pi kt}|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{2 + 2\pi^2 k^2} \text{ alors que}$$

$$\|f_k\|_2 = \left(\int_{-1}^1 |e^{i\pi kt}|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Et, si $k \neq p$,

$$\langle f_k, f_p \rangle_2 = \int_{-1}^1 e^{i\pi(k-p)t} dt = \left[\frac{e^{i\pi(k-p)t}}{i\pi(k-p)} \right]_{-1}^1 = \frac{2\sin(\pi(k-p))}{\pi(k-p)} = 0,$$

$$\langle f_k, f_p \rangle_E = \int_{-1}^1 e^{i\pi(k-p)t} dt + \pi^2 kp \int_{-1}^1 e^{i\pi(k-p)t} dt = 0 \text{ également.}$$

Les fonctions sont donc orthogonales pour les deux produits scalaires, mais de norme différente.

3) On part de $Q_0(t) = 1$ et $P_0(t) = \frac{Q_0(t)}{\|Q_0\|_E}$ de sorte que P_0 est bien de norme 1. Puis,

$$Q_1(t) = t - \alpha_0 P_0(t) \text{ où } \alpha_0 \text{ est déterminé par } \langle Q_1, P_0 \rangle_E = 0 \text{ et } P_1(t) = \frac{Q_1(t)}{\|Q_1\|_E}, \text{ et}$$

$$Q_2(t) = t^2 - \beta_1 P_1(t) - \beta_0 P_0(t), \text{ avec } \langle Q_2, P_0 \rangle_E = \langle Q_2, P_1 \rangle_E = 0 \text{ et } P_2(t) = \frac{Q_2(t)}{\|Q_2\|_E}.$$

Les calculs donnent :

$$\|Q_0\|_E = \sqrt{\int_{-1}^1 dt} = \sqrt{2}, \quad P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle Q_1, P_0 \rangle_E = \langle t, P_0 \rangle_E - \alpha_0 \|P_0\|_E^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 t dt + \int_{-1}^1 0 dt - \alpha_0 = \alpha_0 \text{ d'où } \alpha_0 = 0.$$

$$\|Q_1\|_E = \left(\int_{-1}^1 t^2 dt + \int_{-1}^1 1 dt \right)^{1/2} = \left(\frac{8}{3} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \boxed{P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{8}} t.}$$

$$\langle Q_2, P_0 \rangle_E = \langle t^2, P_0 \rangle_E - \beta_1 \langle P_1, P_0 \rangle_E - \beta_0 \langle P_0, P_0 \rangle_E = \frac{\sqrt{2}}{3} - \beta_0 = 0.$$

$$\langle Q_2, P_1 \rangle_E = \langle t^2, P_1 \rangle_E - \beta_1 \langle P_1, P_1 \rangle_E - \beta_0 \langle P_0, P_1 \rangle_E = -\beta_1 = 0. \quad \text{D'où} \quad Q_2(t) = t^2 - \frac{1}{3} \quad \text{et}$$

$$\|Q_2\|_E = \left(\int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dt + \int_{-1}^1 4t^2 dt \right)^{1/2} = \frac{8}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^{1/2}$$

$$\text{et} \quad \boxed{P_2(t) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{2}} (3t^2 - 1).}$$

Exercice 2.5

Soit $g(t) = \mathbb{1}_{]0,1[}(t)$ et $g_k(t) = g(t - k)$ pour k dans $\mathbb{Z}$.

1) Montrer que les fonctions g_k sont orthonormées pour le produit scalaire réel usuel de $L^2(\mathbb{R})$.

2) Quelle est la meilleure approximation $\tilde{f}$ d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ par une fonction de l'espace engendré par $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$?

$$1) \quad \langle g_k, g_p \rangle = \int_0^1 g_k(t) g_p(t) dt = \int_0^1 \mathbb{1}_{]k, k+1[}(t) \mathbb{1}_{]p, p+1[}(t) dt.$$

Cette intégrale est nulle si $k \neq p$ car $]k, k+1[\cap]p, p+1[= \emptyset$. En revanche, si $p = k$, $\|g_k\| = \left(\int_k^{k+1} dt \right)^{1/2} = 1$. Les g_k sont donc orthonormées pour le produit scalaire réel usuel de $L^2(\mathbb{R})$.

2) $\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \langle f, g_k \rangle g_k(t)$ où $\langle f, g_k \rangle = \int_k^{k+1} f(t) dt$ est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $(k, k+1)$. Sur chaque intervalle $]k, k+1[$, $\tilde{f}$ est constante et vaut $\int_k^{k+1} f(t) dt$.

Exercices d'entraînement

2.6 Par un changement de variables, déduire des polynômes orthonormés de Legendre les polynômes orthonormés dans $L^2(a, b)$.

Expliciter les trois premiers polynômes orthonormés dans $L^2(0, 1)$.

- 2.7** Soient $g(x) = \sup(0, 1 - |x|)$ et $g_k(x) = g(x - k)$. Les fonctions g_k sont-elles orthonormées pour le produit scalaire réel usuel de $L^2(\mathbb{R})$?
- 2.8** L'expression $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f'(t)g'(t)dt$ définit-elle un produit scalaire sur $L^2(-1, +1)$?
- 2.9** Soient $E = L^2(-\pi, \pi)$ et $f(t) = \cos t \mathbb{1}_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}(t)$. Quelle est la meilleure approximation φ de f dans l'espace W_m engendré par les $2m + 1$ premiers vecteurs de la base trigonométrique complexe de E ?
- 2.10** Soit $f(t) = e^t$, où $t \in (0, 1)$.
Quelle est la meilleure approximation φ de f par des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 dans $L^2(0, 1)$? Comparer au développement de Taylor limité à l'ordre 2.
- 2.11** Trouver a, b, c dans $\mathbb{R}$ tels que $\int_{-1}^{+1} (x^3 - a - bx - cx^2)^2 dx$ soit minimum.

Réponses

- 2.6** $\int_{-1}^1 P_n(t)P_m(t)dt = \frac{2}{b-a} \int_a^b P_n(g(x))P_m(g(x))dx$.
En posant $t = (2x - (b + a)) / (b - a) = g(x)$ et si on note P_n les polynômes de Legendre orthonormés sur $(-1, +1)$ et P_n^* les polynômes orthonormés sur (a, b) , on a :
- $$P_n^*(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} P_n\left(\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right). \text{ Alors, si } a = 0 \text{ et } b = 1 : P_0^*(x) = 1,$$
- $$P_1^*(x) = \sqrt{3}(2x-1), \quad P_2^*(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$
- 2.7** Non, $\|g_k\| = \frac{2}{3} \langle g_k, g_{k+2} \rangle = 0$, mais
- $$\langle g_k, g_{k+1} \rangle = \int_k^{k+1} g(x-k)g(x-k-1)dx = \int_0^1 (1-t)t dt = \frac{1}{6}.$$
- 2.8** Non, $\varphi(f, f) = 0 \Rightarrow f = \text{constante presque partout}$, non nécessairement nulle presque partout.
- 2.9** Les vecteurs orthonormés sont $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ pour $-m \leq n \leq m$ et $\varphi(t) = \sum_{-m}^{+m} c_n e_n(t)$
où $c_n = \langle f, e_n \rangle$. On obtient : $c_n = \frac{-i(n + (-i)^{n+1})}{\sqrt{2\pi}(n^2 - 1)}$ si $n \neq 1$ et $n \neq -1$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{i}{2} \right)$
et $c_{-1} = \bar{c}_1$. Il conviendra de distinguer les cas suivants : $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$,
 $n = 4k + 3$.

2.10 Les polynômes orthonormés dans $L^2(0,1)$ sont ceux de l'exercice 2.6.

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^2 \langle f, P_i^* \rangle P_i^*(t) = 3(13e - 35) + 4(147 - 54e)t + 30(7e - 19)t^2$$

$$= 1,013 + 0,851t + 0,839t^2 \text{ et Taylor : } \psi(t) = 1 + t + t^2/2.$$

2.11 Le polynôme de degré 2, $\tilde{P}$, qui réalise le minimum de l'expression est la projection de x^3 sur l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 . On se place dans $L^2(-1,1)$ et

$$\tilde{P}(x) = \sum_{i=0}^2 \langle x^3, P_i \rangle P_i(x) \text{ où les } P_i \text{ sont les polynômes de Legendre. On obtient :}$$

$$\tilde{P}(x) = \frac{3}{5}x \text{ et } a = c = 0, \quad b = \frac{3}{5}.$$

Chapitre 3

Séries de Fourier

RAPPELS

- Soit f une fonction de l'espace $L^2(0, T)$.
Dans la base orthogonale $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ on a

$$f(x) \stackrel{pp}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x) \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} \quad \text{et} \quad \langle f, g \rangle = \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx$$

- Soit f une fonction périodique de période T , on note S_f sa série de Fourier.

– Dans la base orthogonale $\{1, \cos(\frac{2\pi x}{T}), \sin(\frac{2\pi x}{T}), \dots, \cos(\frac{n2\pi x}{T}), \sin(\frac{n2\pi x}{T}), \dots\}$

$$\begin{aligned} S_f(x) = & a_0 + a_1 \cos(\frac{2\pi x}{T}) + b_1 \sin(\frac{2\pi x}{T}) + \dots \\ & + a_n \cos(\frac{n2\pi x}{T}) + b_n \sin(\frac{n2\pi x}{T}) + \dots \end{aligned}$$

$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$	$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\frac{n2\pi x}{T}) dx$
--------------------------------------	--

$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\frac{n2\pi x}{T}) dx$
--

soit en utilisant la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\boxed{S_f(x) = a_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))} \quad (\text{R3.1})$$

Pour tout α réel $\int_0^T f(x) dx = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x) dx$.

Si f est paire, les b_n sont nuls, S_f est une série de cosinus.

Si f est impaire, les a_n sont nuls, S_f est une série de sinus.

– Dans la base orthogonale $\exp(in\omega x)$, avec $n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{S_f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(in\omega x)} \quad \text{et} \quad \boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \exp(-\frac{in2\pi x}{T}) dx.} \quad (\text{R3.2})$$

$$\boxed{c_0 = a_0, \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^* \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.} \quad (\text{R3.3})$$

Dans les deux bases, on a $\boxed{S_f(x) \stackrel{pp}{=} f(x)}$

- **Th. de Dirichlet** Pour f de classe C^1 par morceaux, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S_f(x) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)) \quad (\text{R3.4})$$

Pour f continue sur $\mathbb{R}$, S_f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

- **Th. de dérivation** Pour f de classe C^1 par morceaux, continue sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant terme à terme celle de f et elle converge dans $L^2(0, T)$.
- **Identité de Parseval** (énergie du signal et des harmoniques) :

$$\|f\|_{L^2(0, T)}^2 = T \left(a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \quad (\text{R3.5})$$

$$= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{c_n} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (\text{R3.6})$$

Exercice 3.1

1) Développer en série de Fourier les fonctions suivantes et préciser si la série est égale à la fonction correspondante.

a) $f(t) = t^2$ si $t \in [0, \pi]$, f paire, de période 2π .

b) $g(t) = t$ si $t \in]-\pi, \pi[$, de période 2π .

c) $h(t) = t$ si $t \in]-1, 1[$, de période 2.

d) $K(t) = t$ si $t \in]0, 2\pi[$, de période 2π .

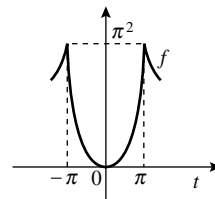
2) Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

1) a) f , étant paire, admet un développement en cosinus.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} t^2 \cos kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos kt dt$$



d'où, en intégrant par parties, $a_k = -\frac{4}{\pi k} \int_0^{\pi} t \sin kt dt = \frac{4}{k^2} \cos k\pi = \frac{4}{k^2} (-1)^k$.

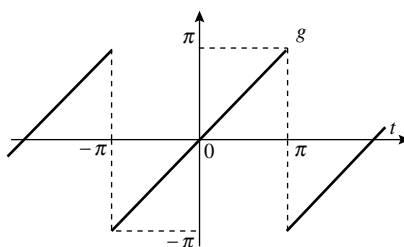
La série de Fourier de f est $S_f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt$ et, puisque f est continue et C^1

par morceaux (R3.4), $S_f(t) = f(t) \forall t \in \mathbb{R}$.

b) On a : $g(t) = \frac{1}{2} f'(t)$ pour $t \neq (2p+1)\pi$.

Comme f est continue et C^1 par morceaux, la série de Fourier de g s'obtient en dérivant terme à terme celle de f :

$$S_g(t) = \frac{1}{2} S_f'(t)$$



$$S_g(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt. \text{ Mais, } S_g \text{ n'est pas égale à } g \text{ partout.}$$

$$S_g(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pour } t \neq (2p+1)\pi \\ -\frac{\pi + \pi}{2} = 0 & \text{pour } t = (2p+1)\pi \end{cases} \quad (\text{R3.4})$$

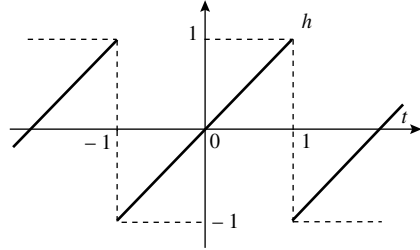
Donc S_g n'est pas égale à g partout, sauf si l'on impose : $g((2p+1)\pi) = 0$.

c) h est reliée à g par la relation $h(t) = \frac{1}{\pi} g(\pi t)$ d'où $S_h(t) = \frac{1}{\pi} S_g(\pi t)$ soit

$$S_h(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k\pi t$$

et, comme précédemment,

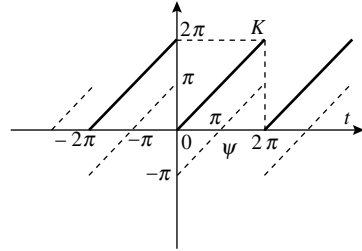
$$S_h(t) = \begin{cases} h(t) & \text{si } t \neq 2p+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



d) Si $\psi(t) = K(t) - \pi$, alors $\psi(t) = g(t - \pi)$ et $K(t) = g(t - \pi) + \pi$.

Donc $S_K(t) = S_g(t - \pi) + \pi$ soit

$$\begin{aligned} S_K(t) &= \pi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(k(t - \pi)) \\ &= \pi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (-1)^k}{k} \sin kt \end{aligned}$$



$$S_K(t) = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} \quad \text{et} \quad S_k(t) = \begin{cases} K(t) & \text{si } t \neq 2p\pi \\ \pi & \text{si } t = 2p\pi \end{cases}$$

Pour avoir $S_K = K$ partout, il aurait fallu définir K en $2p\pi$ par $K(2p\pi) = \pi$.

2) Les sommes S_1 , S_2 , S_3 s'obtiennent en prenant des valeurs particulières de t .

S_1 s'obtient avec f et $t = \pi$:

$$S_f(\pi) = f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos k\pi \Rightarrow 4S_1 = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

S_2 s'obtient avec f et $t = 0$:

$$S_f(0) = f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4S_2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

S_3 s'obtient avec g et $t = \frac{\pi}{2}$ (ou bien avec h et $t = \frac{1}{2}$) :

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

et, puisque $\sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 4k+1 \\ -1 & \text{si } k = 4k+3 \\ 0 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$, la série ci-dessus est bien $S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots \Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}.$$

S_4 s'obtient à partir de la relation de Parseval (R3.5) appliquée à f :

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = 2\pi \left[a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

$$\text{soit } \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = 2 \frac{\pi^5}{5} = 2\pi \left[\frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \right] \Rightarrow S_4 = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} \right) \text{ et } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}.$$

On peut retrouver S_1 avec la relation de Parseval appliquée à g , h , ou K .

Exercice 3.2 Phénomène de Gibbs

On note $S_n(t) = h_0(t) + h_1(t) + \dots + h_n(t)$ la somme des $(n+1)$ premiers harmoniques.

1) Tracer les graphes de S_1 , S_3 , S_{15} et S_{40} pour les fonctions f et K de l'exercice 3.1, à l'aide d'une calculatrice. Que constate-t-on ?

2) On s'intéresse à la fonction K et à $S_n(t) = \pi - 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k}$.

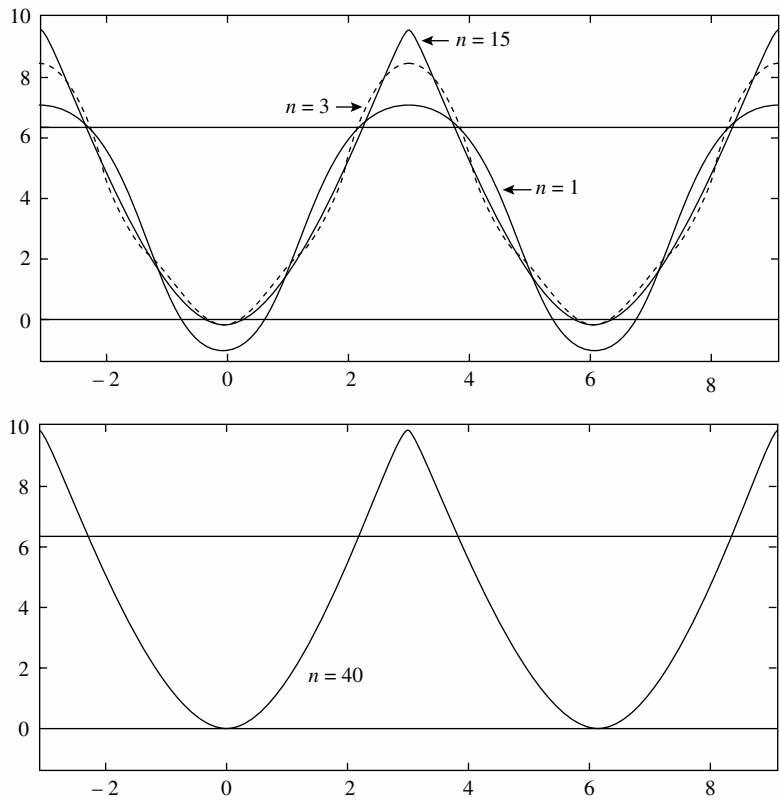
a) Calculer $S'_n(t)$ en utilisant la relation :

$$\cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \cos \left(\frac{n+1}{2} \theta \right) \frac{\sin n \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right)}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$$

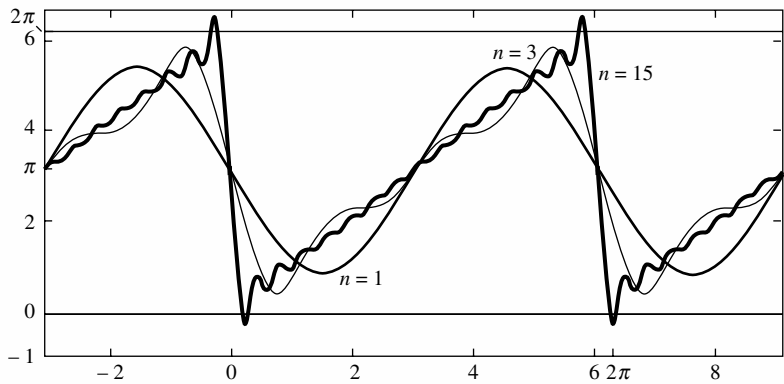
b) Quelle est la plus petite valeur positive de t correspondant à un extremum de S_n ? Quelle est la valeur m_n de cet extremum ?

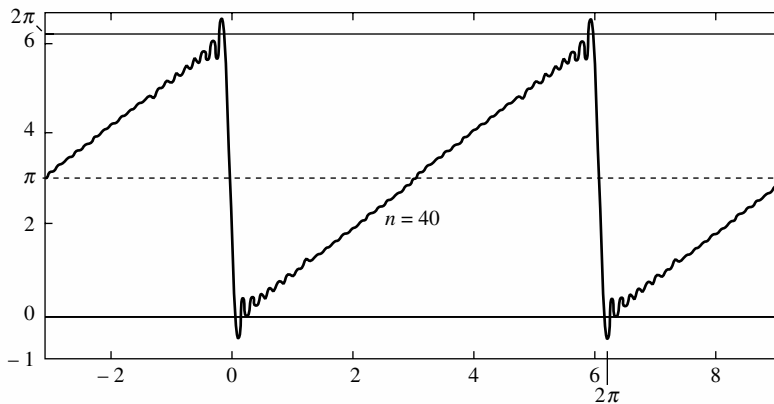
c) Quelle est la limite de m_n quand n tend vers $+\infty$?

1) Graphes des $S_n(t)$ pour $f(t) = t^2$ sur $[0,\pi]$, paire, de période 2π .



Graphes des $S_n(t)$ pour $K(t) = t$ sur $]0, 2\pi[$, de période 2π .





Dans le cas de f , qui est continue, $S_n(t)$ converge bien vers $f(t)$ pour tout t et, d'ailleurs, la convergence est uniforme.

Mais, pour K qui est discontinue, $S_n(t)$ converge vers $K(t)$ seulement pour $t \neq 2p\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$) et $S_n(2p\pi) = \pi$, alors que $K(2p\pi)$ n'a pas été définie. On constate la présence d'oscillations au voisinage de chaque discontinuité, mais l'amplitude de ces oscillations semble se stabiliser.

$$2) \quad a) \quad S'_n(t) = -2 \sum_{k=1}^n \cos kt = -2 \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \frac{\sin n \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = 1 - \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin \frac{t}{2}}.$$

$$b) \quad S'_n(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin n \frac{t}{2} = 0 \quad \text{avec} \quad \sin \frac{t}{2} \neq 0 \quad \text{ce qui exclut} \\ t = 0 \text{ et } t = 2\pi.$$

$$\sin n \frac{t}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{2\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{n+1} + \frac{2k\pi}{n+1}.$$

La plus petite valeur positive de t qui annule la dérivée est : $\alpha_n = \frac{\pi}{n+1}$.

et, d'après le graphe, S_n a un minimum en α_n : $m_n = S_n(\alpha_n)$.

Par ailleurs, on peut écrire que $S_n(t) = \pi + \int_0^t S'_n(u) du$ puisque $S_n(0) = \pi$,

$$\text{d'où :} \quad S_n(t) = \pi + t - \int_0^t \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin \frac{u}{2}} du$$

et

$$m_n = \pi + \frac{\pi}{n+1} - \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin \frac{u}{2}} du.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \pi - \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n \text{ où } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin \frac{u}{2}} du.$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{\sin \frac{u}{2}} du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx \\ &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sin((2n+1)x) \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right] dx \right] \\ &= 2 \left[\int_0^{\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)\pi} \frac{\sin v}{v} dv + \int_0^{\frac{\pi}{2n+2}} \varphi_n(x) dx \right] \end{aligned}$$

où $|\varphi_n(x)| \leq \left| \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right|$ et la fonction $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ est continue, bornée au voisinage de 0, tendant vers 0 quand x tend vers 0 (comme on le constate avec un développement limité).

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2n+2}} \varphi_n(x) dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} dv \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \pi - 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} dv = -0,562281450.$$

(On montre que $\int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} dv = 1,851937052$.)

Exercice 3.3

Soit la fonction f de période $2a$, définie sur $[-a, a]$ par :

$$f(t) = A P_{2b}(t) \text{ avec } b < a.$$

- 1) Tracer le graphe de f et calculer sa série de Fourier. Étudier la convergence de cette série.
- 2) En déduire le développement en série de Fourier de la fonction g définie par :

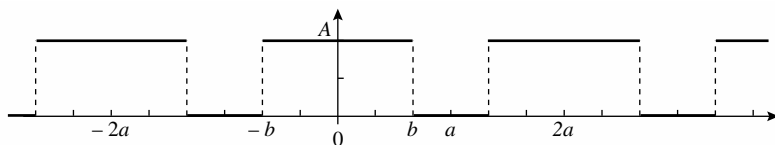
$$g(t) = f(t-b) - \frac{A}{2}.$$

Tracer le graphe de g .

- 3) Préciser les coefficients de la série de Fourier de g dans le cas $b = \frac{a}{2}$. Justifier le résultat.

Calculer l'énergie E de g sur une période. Combien faut-il prendre d'harmoniques pour que le signal $h_0(t) + h_1(t) + \dots + h_n(t)$, où h_p est le $p^{\text{ième}}$ harmonique, ait une énergie au moins égale à 95 % de E ?

- 1) La fonction f est paire donc sa série de Fourier est une série de cosinus.



La valeur moyenne est $a_0 = A \times \frac{b}{a}$ et on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2a} \int_{-a}^a f(t) \cos n\omega t \, dt && \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{2a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-b}^b A \cos \frac{n\pi t}{a} \, dt = \frac{2A}{n\pi} \sin \frac{n\pi b}{a}. \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est

$$S_f(t) = A \left(\frac{b}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{a} \cos \frac{n\pi t}{a} \right).$$

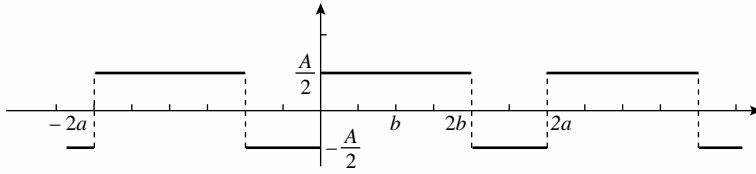
La fonction f étant C^1 par morceaux, sa série de Fourier converge, et elle converge presque partout vers la fonction f . Plus précisément, en tout point $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier converge vers la demi-somme des limites à droite et à gauche de f en t (notées $f(t^+)$ et $f(t^-)$).

Donc : $\forall t \neq \pm b + k2a$, où $k \in \mathbb{Z}$, $S_f(t) = f(t)$ (c'est-à-dire 0 ou A),

$$\forall t_k = \pm b + k2a, \text{ où } k \in \mathbb{Z}, S_f(t_k) = \frac{A}{2}.$$

- 2) Le graphe de g est obtenu en translatant celui de f de b horizontalement et de $-\frac{A}{2}$ verticalement. Sa série de Fourier est :

$$\begin{aligned} S_g(t) &= S_f(t-b) - \frac{A}{2} \\ &= A \left(\frac{b}{a} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{a} \cos \frac{n\pi(t-b)}{a}. \end{aligned}$$



3) Si $b = \frac{a}{2}$, alors la fonction g est impaire et

$$\sin \frac{n\pi b}{a} = \sin n \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}.$$

Comme, pour tout α réel, on a :

$$\cos\left(\alpha - k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \sin \alpha,$$

on obtient :

$$S_g(t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi t}{a}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ b_{2k} &= 0 \quad \text{si } k \in \mathbb{N}^* \\ b_{2k+1} &= \frac{2A}{\pi} \times \frac{1}{2k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

La série de Fourier de g est une série de sinus, ce qui est normal, car pour $b = \frac{a}{2}$, g est impaire.

Dans ce cas, $h_0(t) = a_0 = 0$, et le $p^{\text{ième}}$ harmonique est $h_p(t) = b_p \sin \frac{p\pi t}{a}$.

Si on note E_p l'énergie du $p^{\text{ième}}$ harmonique, l'identité de Parseval implique que :

$$E = Ta_0^2 + \sum_1^{\infty} E_p.$$

Or l'énergie du $p^{\text{ième}}$ harmonique sur une période $[-a, a]$ est :

$$E_p = \int_{-a}^a \left(b_p \sin \frac{p\pi t}{a} \right)^2 dt = \frac{2a}{2} b_p^2.$$

On a : $E_{2k} = 0$ et $E_{2k+1} = a \frac{4A^2}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

$$\text{Or : } E = \int_{-a}^a |g(t)|^2 dt = 2a \left(\frac{A}{2} \right)^2 = \frac{aA^2}{2}.$$

Donc :

$$E_{2k+1} = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2} E.$$

Pour que la somme $h_0 + \dots + h_{2k+1}$ ait une énergie au moins égale à 95 % de E , il faut et il suffit que :

$$\frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \geq \frac{95}{100}$$

c'est-à-dire :

$$s_{k+1} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} \geq \frac{95}{100} \times \frac{\pi^2}{8} = 1,172 \, 01\dots$$

on a : $s_1 = 1$, $s_2 = 1,111\dots$, $s_3 = 1,151 \, 1\dots$, $s_4 = 1,171 \, 5\dots$, $s_5 = 1,183 \, 9\dots$

On a donc $s_5 \geq \frac{95}{100} \times \frac{\pi^2}{8}$ ce qui correspond à $k = 4$.

Donc, dans ce cas, il faut sommer la valeur moyenne (qui est nulle) et les 9 premiers harmoniques pour obtenir un signal $\tilde{g}$ approchant le signal initial g et tel que

$$\|g - \tilde{g}\|_2^2 \leq 5\% E = 5\% \|g\|_2^2.$$

Dans ce cas, comme la série converge lentement (les coefficients sont en $\frac{1}{n}$), il faut un grand nombre d'harmoniques. Il en faut moins si la série converge plus vite (cf. exercice 3.7).

Exercice 3.4

Soient g et h deux fonctions périodiques de période 2π définies par :

$$g(t) = e^{at} \quad \text{si } t \in [0, \pi] \text{ et } g \text{ paire}$$

$$h(t) = e^{at} \quad \text{si } t \in]0, \pi[\text{ et } h \text{ impaire avec } a > 0.$$

1) Calculer la série de Fourier S_g de g .

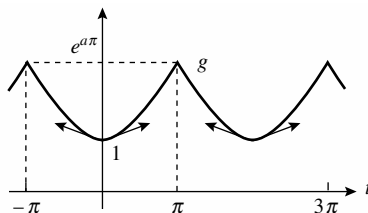
2) En déduire celle de h . Quelle valeur faut-il donner à $h(k\pi)$ pour obtenir l'égalité de h et de sa série ?

1) La fonction g étant paire, sa série de Fourier est une série de cosinus.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{at} dt = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi}$$

en utilisant la parité de g .

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{at} \cos nt dt.$$



En intégrant deux fois par parties, il vient :

$$a_n = \frac{2a}{\pi n^2} [e^{a\pi}(-1)^n - 1] - \frac{a^2}{n^2} a_n \quad (\text{avec } \cos n\pi = (-1)^n)$$

$$\text{d'où : } \boxed{a_n = \frac{2a}{\pi(a^2 + n^2)} [e^{a\pi}(-1)^n - 1]} .$$

La fonction g étant continue et C^1 par morceaux, S_g est égale à g sur $\mathbb{R}$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

$$\text{On a : } \boxed{g(t) = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{a\pi}(-1)^n - 1}{a^2 + n^2} \cos nt} .$$

2) h se déduit de g par dérivation.

Précisément, on a :

$$h(t) = \frac{1}{a} g'(t) \quad \text{pour } t \neq k\pi.$$

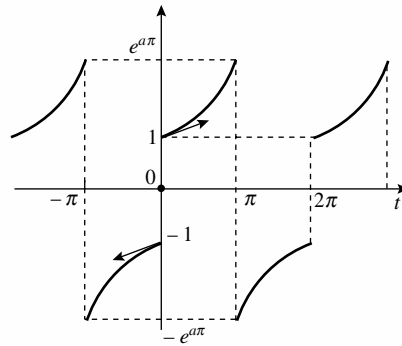
Puisque g est continue, de classe C^1 par morceaux et que g'' existe si $t \neq k\pi$ ($g''(t) = a^2 g(t)$ si $t \neq k\pi$), on obtient :

$$g'(t) = -\frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[e^{a\pi}(-1)^n - 1]}{a^2 + n^2} \sin nt$$

égalité vraie pour $t \neq k\pi$ et

$$\boxed{h(t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[e^{a\pi}(-1)^n - 1]}{a^2 + n^2} \sin nt} \quad \text{où } t \neq k\pi.$$

En fait, l'égalité est vraie pour $t = k\pi$ si l'on pose $h(k\pi) = 0$.



Exercice 3.5

Pour toute fonction f , on définit

$$\text{sa partie positive } f^+ \text{ par : } f^+(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f(t) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\text{sa partie négative } f^- \text{ par : } f^-(t) = \begin{cases} -f(t) & \text{si } f(t) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a donc : $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$ et $|f(t)| = f^+(t) + f^-(t)$.

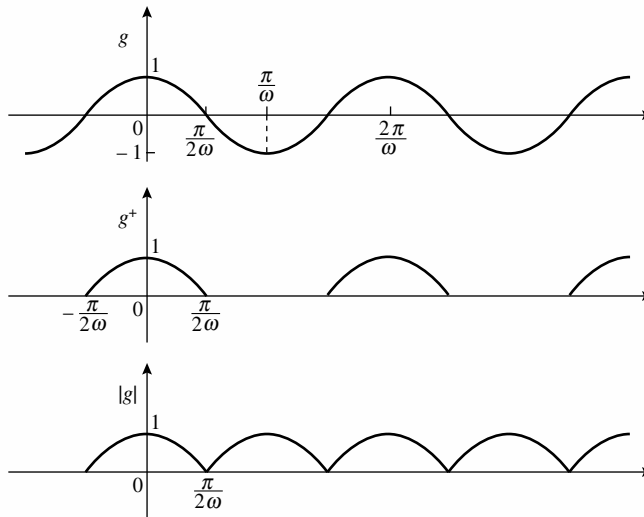
1) Calculer les coefficients de Fourier a_n^+ et b_n^+ du signal g^+ quand

$$g(t) = \cos \omega t, \quad \omega \in \mathbb{R}_*^+.$$

2) Dédurre de ce qui précède et des coefficients a_n et b_n de g , les coefficients $\tilde{a}_n$ et $\tilde{b}_n$ de $|g|$.

Vérifier que les coefficients de rang impair sont tous nuls. Pourquoi ?

1) g est une fonction paire, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et il en est de même de g^+ .



Les coefficients de Fourier b_n^+ sont nuls et

$$a_0^+ = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} g^+(t) dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/(2\omega)} \cos \omega t dt = \frac{1}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n^+ &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} g^+(t) \cos \omega n t dt = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\pi/(2\omega)} \cos \omega t \cos \omega n t dt \\ &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/(2\omega)} [\cos(\omega(1+n)t) + \cos(\omega(1-n)t)] dt. \end{aligned}$$

$$\text{Si } n \neq 1, \quad a_n^+ = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left((1-n)\frac{\pi}{2}\right)}{1-n} \right\}$$

$$\text{Or,} \quad \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2p \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p+1 \end{cases}$$

d'où :

$$\boxed{\begin{cases} a_{2p+1}^+ = 0 & (p \neq 0) \\ a_{2p}^+ = \frac{2(-1)^p}{\pi(1-4p^2)} & (p \neq 0) \end{cases}}$$

Il reste à calculer a_1^+ :

$$a_1^+ = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/(2\omega)} [1 + \cos 2\omega t] dt = \frac{\omega}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2\omega} + 0 \right\} = \frac{1}{2}.$$

2) On remarque que $|g| = g^+ + g^- = 2g^+ - g$.

$|g|$ étant paire, ses coefficients $\tilde{b}_n$ sont nuls et $\tilde{a}_n = 2a_n^+ - a_n$ si l'on considère que $g, g^+, |g|$ ont même période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Les coefficients a_n et b_n de g sont nuls sauf a_1 qui vaut 1 puisque :

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + a_2 \cos \left(\frac{2\pi}{T} 2t \right) + \dots \\ &= a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \dots \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} \tilde{a}_0 = 2a_0^+ - a_0 = \frac{2}{\pi} \\ \tilde{a}_1 = 2a_1^+ - a_1 = 1 - 1 = 0 \\ \tilde{a}_{2p+1} = 2a_{2p+1}^+ - a_{2p+1} = 0 & (p \neq 0) \\ \tilde{a}_{2p} = 2a_{2p}^+ - a_{2p} = \frac{4(-1)^p}{\pi(1-4p^2)} & (p > 0) \end{cases}$$

La série de Fourier de $|g|$ s'écrit, avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$S_{|g|}(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(1-4p^2)} \cos 2p\omega t. \quad (1)$$

Mais, en réalité, la période de $|\cos \omega t|$ est $\frac{\pi}{\omega}$ et la série de Fourier s'écrit :

$$S_{|g|}(t) = a_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \cos 2\omega k t. \quad (2)$$

On constate que les termes en $\cos(2k+1)\omega t$ sont absents dans (2), donc $\tilde{a}_{2k+1} = 0$ et

$$a_k^* = \tilde{a}_{2k}.$$

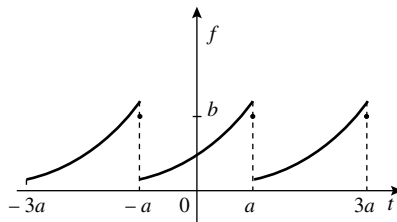
Exercice 3.6

Soit f un signal périodique, de période $2a$, défini par $f(t) = e^t$ sur $] -a, a[$, $a > 0$, $f(a) = b$.

- 1) Tracer le graphe de f sur $[-3a, 3a]$.
- 2) Calculer la série de Fourier S de f .
- 3) Étudier la convergence de la série vers f . Comment faut-il choisir b pour qu'il y ait convergence ponctuelle pour tout t ?
- 4) Quelle est la somme des séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

1)



- 2) Comme f n'est ni paire, ni impaire, on calcule les coefficients de Fourier complexes α_n , on en déduira a_n et b_n par : $\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ pour $n \geq 1$.

On note $\omega = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^t dt = \frac{\text{sh } a}{a} = a_0$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^t e^{-i\omega n t} dt = \frac{\text{sh } a}{a} \frac{e^{-in\pi}}{1 - in\omega} = \frac{\text{sh } a}{a} \frac{(-1)^n}{1 - in\omega}$$

d'où :

$$\alpha_n = \frac{\text{sh } a}{a} \frac{(-1)^n (1 + in\omega)}{1 + (n\omega)^2} = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

$$S(t) = \frac{\text{sh } a}{a} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1 + (n\omega)^2} (\cos n\omega t - n\omega \sin n\omega t) \right].$$

3) En tout point où f est continue, la série de Fourier converge ponctuellement vers f . En un point de discontinuité, la série converge vers la demi-somme des limites.

On a : $S(t) = f(t) \quad \forall t \neq a(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}$

et $S(a) = \frac{1}{2}(f(a^+) + f(a^-)) = \text{ch } a$.

Pour qu'il y ait convergence ponctuelle pour tout t , il faut que $b = \text{cha}$.

4) Il suffit de prendre $\omega = 1$ donc $a = \pi$ et de donner à t une valeur telle que $\sin nt = 0$ et $\cos nt = 1 \quad \forall n$, soit $t = 0$. On obtient alors d'après 3) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\text{sh} \pi} - 1 \right).$$

Pour calculer la deuxième série, on cherche t tel que $\sin nt = 0$ et $\cos nt = (-1)^n$, soit $t = \pi$. Avec $a = \pi$, on a d'après 3) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\text{th} \pi} - 1 \right).$$

Cette deuxième série étant à termes positifs, on peut essayer de la calculer en utilisant Parseval, d'où :

$$\text{sh } 2\pi = 2\pi \left(\frac{\text{sh} \pi}{\pi} \right)^2 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right).$$

Comme $\text{sh } 2\pi = 2 \text{sh} \pi \text{ch} \pi$, on retrouve le résultat précédent.

Exercices d'entraînement

3.7 Soit f un signal de période T , défini sur $[0, T[$ par $f(t) = at(T - t)$ avec $a > 0$.

1) Montrer que f est paire.

2) Calculer sa série de Fourier. Quelle est la nature de la convergence de cette série vers f ?

3) Calculer l'énergie E de f sur une période.

Calculer l'énergie de $h_0(t) = a_0$ et de $h_1(t) = a_1 \cos \frac{2\pi t}{T}$.

En déduire l'énergie de $a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi t}{T}$ en fonction de E .

3.8 Développer en série de Fourier les fonctions suivantes :

1) $f_1(t) = \cos^2 t$ en tant que fonction de période 2π puis π .

2) $f_2(t) = \sin^3 t$

3) $f_3(t) = \sin^3 t$ si $t \in [0, \pi]$, paire

4) $f_\lambda(t) = \cos \lambda t$ si $t \in [-\pi, \pi]$, $T = 2\pi$, $\lambda \notin \mathbb{Z}$
(tracer les graphes pour $\lambda = 1/4$, $\lambda = 5/2$ par exemple).

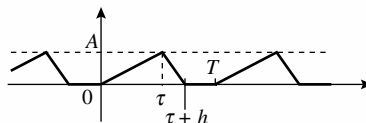
5) $g_\lambda(t) = \cos \lambda t$ si $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $T = \pi$, $\lambda \notin 2\mathbb{Z}$

Retrouver le résultat de 3).

6) Pour $t \neq n\pi$, établir les formules : $\cotan t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n \geq 1} \frac{1}{t^2 - n^2 \pi^2}$

et $\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{t^2 - n^2 \pi^2}$.

3.9 Déterminer la série de Fourier complexe du signal f dont le graphe est ci-contre.



Qu'obtient-on si $\tau = T - h$? Quelle est alors

la limite de la série quand h tend vers 0 ? Retrouver le résultat de l'exercice 3.1.

3.10 Calculer les coefficients de Fourier de la fonction de période 2π définie sur $[-\pi, \pi]$ par $\cos t \mathbb{1}_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}(t)$. Comparer à l'exercice 2.9.

Réponses

3.7 1) Si $t \in]0, T[$, $-t \in]-T, 0[$, $T-t \in]0, T[$ et, f périodique implique

$$f(-t) = f(T-t) = a(T-t)[T-(T-t)] = a(T-t)t = f(t)$$

f paire sur $] -T, T[$ donc partout.

2) $S_f(t) = a \frac{T^2}{6} - 4a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \omega^2} \cos n\omega t$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et la convergence vers f est uniforme.

$$3) \|f\|_2^2 = \frac{a^2 T^5}{30} = E, \quad \|h_0\|_2^2 = \frac{a^2 T^5}{36} = E \times 0,833,$$

$$\|h_1\|_2^2 = \frac{8}{(2\pi)^4} a^2 T^5 = E \times 0,154, \quad \|h_0 + h_1\|_2^2 = 0,987 \cdot E.$$

3.8 1) f_1 paire, $T = 2\pi \Rightarrow S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$

$$T = \pi \Rightarrow S_f(t) = \tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos 2nt.$$

$$\text{Or } \cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0 \text{ sinon.}$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{a}_1 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{a}_n = 0 \text{ sinon.}$$

2) f_2 est impaire, $T = 2\pi$, $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$.

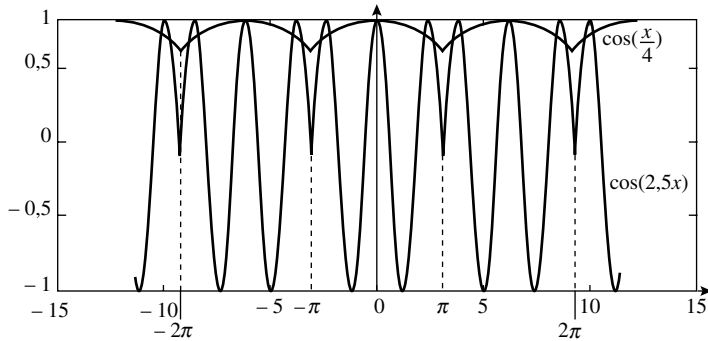
$$S_f(t) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin nt, \quad b_1 = \frac{3}{4}, \quad b_3 = -\frac{1}{4}, \quad b_n = 0 \text{ sinon.}$$

3) f_3 est de période π , $S_f(t) = \sum_{n \geq 1} a_n \cos 2nt$, $a_0 = \frac{4}{3\pi}$,

$$a_n = \frac{24}{\pi} \frac{1}{(1-4n^2)(9-4n^2)}.$$

4) f_λ est paire, $S_{f,\lambda}(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nt$, $\lambda \notin \mathbb{Z}$.

$$a_0 = \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda \pi}, \quad a_n = \frac{(-1)^n \sin \lambda \pi}{\pi} \frac{2\lambda}{\lambda^2 - n^2}.$$



5) $g_\lambda(t) = f_{\lambda/2}(2t)$, $S_{g,\lambda}(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos 2nt$, $\lambda \notin 2\mathbb{Z}$.

$$a_0 = \frac{\sin \lambda \frac{\pi}{2}}{\lambda \frac{\pi}{2}}, \quad a_n = (-1)^n \frac{\sin \lambda \frac{\pi}{2}}{\pi} \frac{4\lambda}{\lambda^2 - 4n^2}$$

$$\sin^3 t = \cos^3 \left(\frac{\pi}{2} - t \right), \quad t \in (0, \pi), \quad \frac{\pi}{2} - t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad T = \pi$$

$$\cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t \Rightarrow S_{\sin^3, t}(t) = S_{\cos^3 \left(\frac{\pi}{2} - t \right)}(t) = \frac{3}{4} S_{g,1}(t) + \frac{1}{4} S_{g,3}(t).$$

6) $S_f(\pi) = f_\lambda(\pi)$ puis $t = \lambda\pi$ donne la première formule.

$S_f(0) = f_\lambda(0)$ puis $t = \lambda\pi$ donne la deuxième formule.

3.9
$$S_f(t) = \frac{A}{2} \frac{\tau + h}{T} - AT \sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} \left[\frac{1}{\tau} - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \right) e^{-2i\pi n \frac{\tau}{T}} + \frac{1}{h} e^{-2i\pi n \frac{\tau+h}{T}} \right] e^{2i\pi n \frac{t}{T}}.$$

Si $\tau = T - h$, $S_f(t) = \frac{A}{2} - AT^2 \sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} \frac{1}{(T-h)h} \left(1 - e^{-2i\pi n \frac{h}{T}} \right) e^{2i\pi n \frac{t}{T}}, \quad \forall t.$

Si de plus, $h \rightarrow 0$, $S_f(t) = \frac{A}{2} \left(1 + \sum_{n \neq 0} \frac{i}{\pi n} e^{2i\pi n \frac{t}{T}} \right) \forall t \neq kT, k \in \mathbb{Z}$

(f est alors discontinue en $t = kT$).

On retrouve $S_k(t)$ de 3.1 avec $A = T = 2\pi$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3.10} \quad a_0 &= \frac{1}{2\pi}, & a_1 &= \frac{1}{4}, & b_1 &= \frac{1}{2\pi}, \\
 a_{4k} &= \frac{-1}{\pi((4k)^2 - 1)}, & b_{4k} &= \frac{4k}{\pi((4k)^2 - 1)}, \\
 a_{4k+1} &= 0, & b_{4k+1} &= \frac{1}{\pi(4k+2)}, \\
 a_{4k+2} &= \frac{1}{\pi((4k+2)^2 - 1)}, & b_{4k+2} &= \frac{4k+2}{\pi((4k+2)^2 - 1)}, \\
 a_{4k+3} &= 0, & b_{4k+3} &= \frac{1}{\pi(4k+2)}.
 \end{aligned}$$

Les coefficients complexes sont $\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{c_n}{\sqrt{2}\pi}$ où les c_n sont définis à l'exercice 2.9.

Chapitre 4

Intégrales à paramètre, convolution

RAPPELS

- **Théorème de convergence dominée de Lebesgue**

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur I telle que

- la suite $\{f_n\}$ converge presque partout vers f sur I ,
- il existe une fonction g sommable sur I telle que

$$\forall n \in N, \forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{avec} \quad \int_I g(x) dx \text{ finie}$$

alors f est sommable sur I et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$$

Le théorème est encore vrai pour une famille de fonctions dépendant d'un paramètre continu λ . Sous les mêmes hypothèses

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f_\lambda(x) dx = \int_I \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(x) dx} \quad (\text{R4.1})$$

- **Intégrale à paramètre**

$$F(t) = \int_I f(x, t) dx$$

- **Continuité et dérivabilité de $F(t)$**

- **Théorème dans le cas où $I = [a, b]$ est fermé borné**

- 1) si $f(x, t)$ est définie et continue sur $[a, b] \times [c, d]$,

alors la fonction $F(t)$ est définie et continue sur $]c, d[$

- 2) si la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ est définie et continue sur $[a, b] \times]c, d[$

alors la fonction $F(t)$ est continûment dérivable sur $]c, d[$ et sa dérivée est

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx. \quad (\text{R4.2})$$

- **Théorème dans le cas où I est non borné ou bien f est non bornée**

- 1) si $f(x, t)$ est définie et continue sur $I \times [c, d]$,

et si il existe $g(x)$ sommable sur I telle que

$$\forall x \in I, \forall t \in [c, d] \quad |f(x, t)| \leq g(x) \quad \text{avec } 0 \leq \int_I g(x) dx < +\infty$$

alors la fonction $F(t)$ est continue sur $]c, d[$.

- 2) si de plus la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ est définie et continue sur $I \times]c, d[$,

et si il existe $h(x)$ sommable sur I telle que

$$\forall x \in I, \forall t \in [c, d] \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq h(x) \quad \text{avec } 0 \leq \int_I h(x) dx < +\infty$$

alors la fonction $F(t)$ est continûment dérivable sur $]c, d[$ et sa dérivée est

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx. \quad (\text{R4.3})$$

- **Produit de convolution** de 2 fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y)dy \quad (\text{R4.4})$$

- Une **fonction causale** s'écrit $Y(x)f(x)$ avec $Y(x)$ la fonction échelon (ou de Heaviside) qui vaut 1 sur $\mathbb{R}^+$ et 0 ailleurs.

- Le **produit de convolution** de 2 fonctions causales est **causal** et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f * g)(x) = Y(x) \int_0^x f(x-y)g(y)dy \quad (\text{R4.5})$$

- Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est continue et bornée.

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \quad g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R}) \quad (\text{R4.6})$$

Exercice 4.1

- 1) Soit $f_n(t) = \frac{1}{1+|t|^{2+1/n}}$, $n \geq 0$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$ en utilisant le théorème de convergence dominée.
- 2) Soit $g_n(t) = n f_n(nt)$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} g_n(t) dt$, pour $a > 0$.

1) Le théorème de convergence dominée impose de trouver une fonction h sommable ici sur $\mathbb{R}$, indépendante de n , telle que : $|f_n(t)| \leq h(t)$, $\forall t$.

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

On a : $\frac{1}{1+|t|^{2+1/n}} \leq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, mais la fonction égale à 1 partout n'est pas sommable sur

$\mathbb{R}$. Par ailleurs, $\frac{1}{1+|t|^{2+1/n}} \leq \frac{1}{1+t^2}$ si $|t| \geq 1$ car alors $t^2 \leq t^{2+1/n}$. On prend donc, pour

majorer f_n sur $\mathbb{R}$, la fonction h telle que : $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ \frac{1}{1+t^2} & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$ et h est alors sommable

sur $\mathbb{R}$.

Et, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^2}$, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$.

2) $\int_{-a}^{+a} g_n(t) dt = \int_{-a}^{+a} n f_n(nt) dt = \int_{-na}^{+na} f_n(u) du$ en posant : $u = nt$.

On peut aussi écrire : $\int_{-a}^{+a} g_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u) \mathbb{I}_{[-na, na]}(u) du$.

Et, puisque $|f_n(u)| \mathbb{I}_{[-na, na]}(u) \leq |f_n(u)| \leq h(u)$ d'après la question 1), et que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) \mathbb{I}_{[-na, na]}(u) = \frac{1}{1+u^2}$, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} g_n(t) dt = \pi$.

Exercice 4.2

1) Quelle est la limite ponctuelle de la suite définie par : $f_n(t) = n^2 t e^{-nt}$?

2) Comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$. Conclure.

3) Comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$ pour $a > 0$. Conclure.

1) Soit $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$. Alors, $f(t)$ vaut 0 si $t \geq 0$ car $f(0) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nt} = 0$ si $t > 0$ et $+\infty$ si $t < 0$. Donc f n'est pas définie si $t < 0$. La suite ne converge ponctuellement que sur $\mathbb{R}^+$.

2) $\int_0^{+\infty} n^2 t e^{-nt} dt = \left[-(nt+1)e^{-nt} \right]_0^{+\infty} = 1$. Donc, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$ alors que $\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$. Le théorème de convergence dominée ne peut s'appliquer, sinon on aurait constaté l'égalité. Il n'existe donc pas de fonction g sommable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $|f_n(t)| \leq g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$.

3) $\int_a^{+\infty} n^2 t e^{-nt} dt = \left[-(nt+1)e^{-nt} \right]_a^{+\infty} = (na+1)e^{-na}$.

Ici, on a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n(t) dt = 0 = \int_a^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$.

Sur $(a, +\infty)$, le théorème de convergence dominée s'applique : en effet, lorsque n est assez grand, donc nt aussi, on peut écrire $|n^2 t e^{-nt}| \leq \frac{1}{t^2}$ puisque alors $e^{-nt} \leq \frac{1}{(nt)^\alpha} \quad \forall \alpha > 0$ et la fonction majorante est sommable sur $(a, +\infty)$, $\forall a > 0$.

Exercice 4.3

1) Soit $F(x) = \int_0^\infty f(t, x) dt$ où $f(t, x) = \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}$. Pour quelles valeurs de x la fonction F est-elle définie ?

2) Montrer que F est continue et dérivable sur son domaine de définition. Calculer la valeur de F' , en déduire celle de F .

1) Quand t est voisin de $+\infty$, $\frac{e^{-t}}{t}$ est sommable alors que $\frac{e^{-tx}}{t}$ ne l'est que si $x > 0$. Pour t voisin de 0, $\frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} \sim \frac{1-t-(1-tx)}{t} = x-1$, valeur finie. Donc, F est définie pour $x > 0$.

2) f est continue pour $t \geq 0$ et $x > 0$ et pour chaque $x > 0$, il existe $\alpha > 0$ et A tels que $0 < \alpha \leq x \leq A$. Alors :

Pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t, x)| \leq M(x) = \max_{t \in [0, 1]} |f(t, x)|$, et, pour tout $x \in [\alpha, A]$,

$|f(t, x)| \leq M_{\alpha, A} = \max_{x \in [\alpha, A]} M(x)$, quantité constante finie.

Pour tout $t > 1$, $\frac{1}{t} < 1 \Rightarrow |f(t, x)| < |e^{-t} - e^{-xt}| \leq e^{-t} + e^{-\alpha t}$.

On a donc : $|f(t, x)| \leq g(t) = \begin{cases} M_{\alpha, A} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t} + e^{-\alpha t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$.

Comme g est sommable sur $[0, +\infty[$, F est continue sur tout intervalle $[\alpha, A]$, soit pour tout $x > 0$.

Par ailleurs, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| = e^{-tx} \leq e^{-\alpha t} \quad \forall x \geq \alpha$, et, pour $t \geq 0$, cette fonction est sommable.

Alors, d'après (R4.3), F est dérivable et $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$, d'où $F(x) = \ln x + C$. Mais,

puisque $f(t, 1) = 0$, on a, en particulier, $F(1) = C = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$. D'où $\boxed{F(x) = \ln x}$.

Exercice 4.4

Calculer les produits de convolution suivants :

$$\sin t * P_{2a}(t) \quad \text{et} \quad \cos t * P_{2a}(t).$$

Soient f et g les fonctions obtenues. Vérifier que f est impaire, que g est paire et qu'elles sont toutes les deux indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Expliciter leur dérivées f' et g' .

Le produit de convolution étant commutatif, il peut être calculé de deux façons :

$$\text{— soit } f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u P_{2a}(t-u) du$$

$$= \int_{t-a}^{t+a} \sin u du = [-\cos u]_{t-a}^{t+a} = -\cos(t+a) + \cos(t-a).$$

$$- \text{ soit } f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2a}(u) \sin(t-u) du$$

$$= \int_{-a}^a \sin(t-u) du = [+ \cos(t-u)]_{-a}^a = \cos(t-a) - \cos(t+a).$$

Dans les deux cas, on obtient la même expression qui peut encore s'écrire :

$$\boxed{f(t) = 2 \sin a \sin t} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le produit de convolution $\sin t * P_{2a}(t)$ est donc impair et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme la fonction sinus.

De même, on obtient :

$$\boxed{g(t) = 2 \sin a \cos t} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La fonction g est paire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On remarque que :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \sin a \cos t = g(t) \\ g'(t) &= -2 \sin a \sin t = -f(t). \end{aligned}$$

Exercice 4.5

Soient f et g deux fonctions et soit $h = f * g$, leur produit de convolution.

- 1) Montrer que si f et g ont même parité, alors $f * g$ est paire et que si f et g ont des parités opposées, $f * g$ est impaire.
- 2) Montrer que si f (ou g) est translatée de a , alors $f * g$ est translatée de a .
- 3) Montrer que si f et g sont nulles respectivement hors de $[a, b]$ et hors de $[c, d]$, alors $f * g$ est nulle hors de $[a+c, b+d]$. Vérifier en particulier que si f et g sont causales (nulles sur $\mathbb{R}^-$), alors $f * g$ est aussi une fonction causale dont on donnera l'expression.

- 1) Pour connaître la parité de h , il faut comparer $h(-t)$ et $h(t)$. Or :

$$h(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(-t-u)du.$$

- a) Si f et g ont même parité, alors $f(u)g(-t-u) = f(-u)g(t+u)$ et donc :

$$h(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-u)g(t+u)du.$$

Le changement de variable $v = -u$ donne $dv = -du$ et :

$$h(-t) = \int_{+\infty}^{-\infty} f(v)g(t-v)(-dv) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(t-v)dv.$$

Comme la variable d'intégration est une variable muette, cette dernière intégrale est égale à $h(t)$. Donc $h(-t) = h(t)$, la fonction h est paire.

b) Si f et g ont des parités opposées, alors $f(u)g(-t-u) = -f(-u)g(t+u)$ et il s'ensuit que $h(-t) = -h(t)$, h est alors impaire.

2) D'après la définition, le produit de convolution de la translatée de a de la fonction f par la fonction g est :

$$k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-a)g(t-u)du.$$

Le changement de variable $v = u - a$ donne $dv = du$ et

$$\begin{aligned} k(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(t-(v+a))dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g((t-a)-v)dv \\ &= h(t-a). \end{aligned}$$

Comme le produit de convolution est commutatif, le même résultat est obtenu si g est translatée à la place de f .

3) Il faut montrer que $h(t) = 0$ pour $t < a + c$ et pour $t > b + d$. D'après la définition :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du,$$

il est donc clair que si le produit $f(u)g(t-u)$ est nul pour toutes les valeurs de $u \in]-\infty, +\infty[$, alors $h(t)$ est nul.

Pour comprendre ce qui se passe selon la valeur de t considérée, il est commode de représenter sur un axe les valeurs prises par la variable u et les intervalles sur lesquels $f(u)$ (ou $g(t-u)$) est nulle.

Or si $u \notin [a, b]$, alors $f(u) = 0$

et si $t-u \notin [c, d]$, alors $g(t-u) = 0$.

Si u n'est pas dans $[a, b]$ ou si u n'est pas dans $[t-d, t-c]$, alors le produit $f(u)g(t-u)$ est nul.

Si les segments $[a, b]$ et $[t-d, t-c]$ sont disjoints, alors, pour toute valeur de u , le produit $f(u)g(t-u)$ est nul. Ce sera le cas soit si $b < t-d$, soit si $t-c < a$, c'est-à-dire pour $t < a + c$ ou pour $t > b + d$.

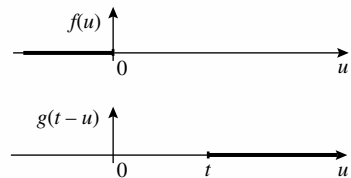
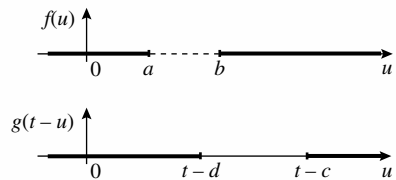
Donc pour $t \notin [a + c, b + d]$, $h(t)$ est nul.

Pour les valeurs de $t \in [a + c, b + d]$, il faut calculer $h(t)$ en appliquant la définition.

Dans le cas où f et g sont causales, alors $a = c = 0$ et b et d sont infinis, donc $h(t)$ est nulle si $t < a + c = 0$.

La fonction h est causale et définie par :

$$h(t) = \begin{cases} \int_0^t f(u)g(t-u)du & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$



Exercice 4.6

Soient a et b , deux réels positifs. Calculer les produits de convolution suivants, notés h_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) :

1) $P_{2a} * P_{2b}$

2) $Y(t) \exp(-at) * Y(t) \exp(-bt)$

3) $P_{2a}(t-a) * Y(t) \exp(-bt)$

4) $P_{2a}(t-a) * \exp(-bt)$

5) $\Delta_1 * P_1$

On distinguera si nécessaire les cas $a < b$, $b < a$ et $a = b$.

Tracer les graphes des fonctions h_i et vérifier que « le produit de convolution régularise ».

1) D'après l'exercice précédent, il est clair que h_1 est une fonction paire, nulle hors de $[-(a+b), a+b]$. Il reste à calculer h_1 pour $t \in [0, a+b]$.

Par définition :

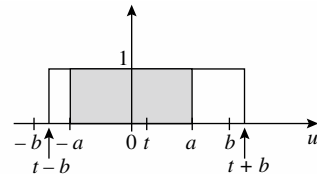
$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2a}(u) P_{2b}(t-u) du = \int_{-a}^a P_{2b}(t-u) du.$$

Or $P_{2b}(t-u) = 1$ si et seulement si $-b \leq t-u \leq b$, soit $t-b \leq u \leq t+b$.

Si $t \in [0, a+b]$ et en supposant par exemple que $0 \leq a \leq b$, alors deux cas se présentent :

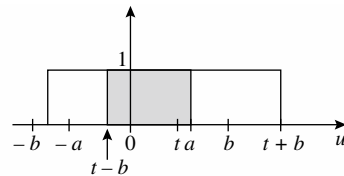
– soit $\{0 \leq t \text{ et } t-b \leq -a\} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq b-a$

alors $h_1(t) = \int_{-a}^a 1 dt = 2a$;



– soit $-a \leq t-b \leq a \Leftrightarrow b-a \leq t \leq a+b$

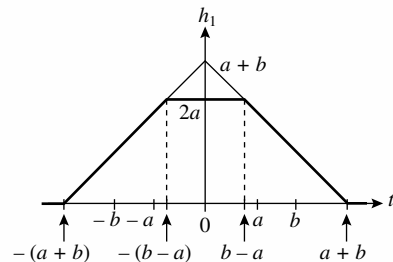
alors $h_1(t) = \int_{t-b}^a 1 dt = a+b-t$.



Comme h_1 est paire et nulle pour $t \geq a+b$, on obtient pour $0 < a \leq b$:

$$h_1(t) = \begin{cases} 2a & \text{pour } |t| \leq b-a \\ a+b-|t| & \text{pour } b-a \leq |t| \leq a+b \\ 0 & \text{pour } |t| > a+b \end{cases}$$

La fonction $h_1(t)$ est continue alors que les fonctions porte sont discontinues.



Si $0 < b \leq a$, on obtient un résultat similaire, il suffit de permuter le rôle de a et de b .

Dans tous les cas, pour a et b réels positifs, on obtient :

$$h_1(t) = \begin{cases} 2 \min(a, b) & \text{pour } |t| \leq |b - a| \\ a + b - |t| & \text{pour } |b - a| \leq |t| \leq a + b \\ 0 & \text{pour } |t| > a + b \end{cases}$$

Si $a = b$, alors :

$$h_1(t) = \begin{cases} 2a - |t| & \text{pour } |t| \leq 2a \\ 0 & \text{pour } |t| > 2a \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$P_{2a} * P_{2a} = 2a \Delta_{2a}.$$

2) Le produit de convolution de deux fonctions causales est une fonction causale. Il suffit de calculer h_2 pour $t \geq 0$ et l'on a :

$$h_2(t) = \int_0^t e^{-au} e^{-b(t-u)} du = e^{-bt} \int_0^t e^{(b-a)u} du.$$

Si l'on suppose que $b \neq a$, alors :

$$h_2(t) = e^{-bt} \frac{e^{(b-a)t} - 1}{b - a}.$$

Pour $b \neq a$, on a :

$$h_2(t) = Y(t) \frac{\exp(-at) - \exp(-bt)}{b - a}.$$

Si $b = a$, le calcul précédent n'est plus valable, et on a :

$$h_2(t) = e^{-at} \int_0^t e^0 du = te^{-at} \text{ pour } t \geq 0.$$

Donc, pour $b = a$, on a :

$$h_2(t) = Y(t) t \exp(-at).$$

L'expression $Y(t) t \exp(-at)$ est la limite de l'expression précédente lorsque b tend vers a .

En effet, en posant $b = a + \varepsilon$ et en faisant tendre ε vers 0, on obtient :

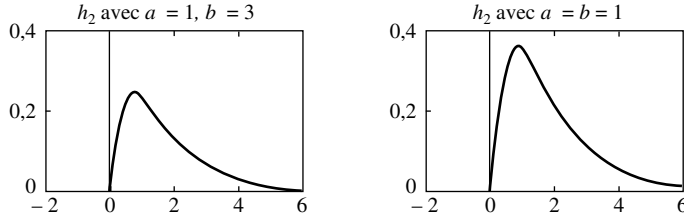
$$Y(t) \frac{\exp(-at) - \exp(-bt)}{b - a} = Y(t) \frac{\exp(-at)[1 - \exp(-\varepsilon t)]}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} Y(t) \exp(-at) \left(\frac{\varepsilon t}{\varepsilon} \right)$$

donc :

$$\lim_{b \rightarrow a} Y(t) \frac{\exp(-at) - \exp(-bt)}{b - a} = Y(t) t \exp(-at).$$

On aurait pu aussi remarquer que la dérivée de la fonction $\exp(-at)$ par rapport à la variable a est $-t \exp(-at)$. En comparant avec la définition de la dérivée en a , on obtient :

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{\exp(-bt) - \exp(-at)}{b - a} = -t \exp(-at).$$



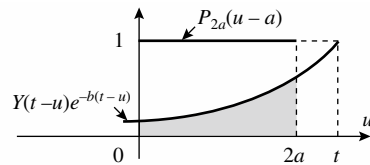
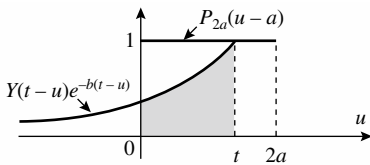
3) La fonction $P_{2a}(t-a)$ est causale car elle est définie par :

$$P_{2a}(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{si } -a \leq t-a \leq a \quad \text{soit } 0 \leq t \leq 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le produit de convolution $P_{2a}(t-a) * Y(t) \exp(-bt)$ est donc causal.

Pour $t \geq 0$,

$$h_3(t) = \int_0^t P_{2a}(u-a) e^{-b(t-u)} du.$$



Pour $0 \leq t \leq 2a$,

$$h_3(t) = \int_0^t e^{-b(t-u)} du = \left[\frac{e^{-b(t-u)}}{-b} \right]_0^t = \frac{1 - e^{-bt}}{b}.$$

Pour $2a \leq t$,

$$h_3(t) = \int_0^{2a} e^{-b(t-u)} du = \frac{e^{-b(t-2a)} - e^{-bt}}{-b}.$$

En conclusion :

$$h_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{b} [1 - \exp(-bt)] & \text{pour } 0 \leq t \leq 2a \\ \frac{1}{b} [\exp(2ab) - 1] \exp(-bt) & \text{pour } 2a \leq t \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}.$$

La fonction h_3 est continue. Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 2a\}$.

4) Calculons $P_{2a}(t-a) * \exp(-bt)$. Ici le résultat n'est plus causal.

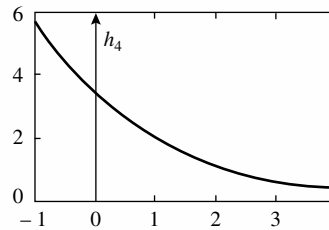
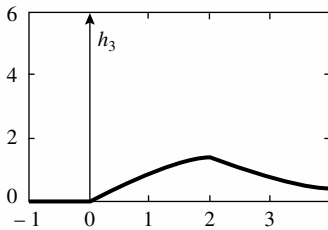
$$h_4(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2a}(t-u-a) \exp(-bu) du.$$

$$\text{Or } P_{2a}(t-u-a) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -a \leq t-u-a \leq a \Leftrightarrow t-2a \leq u \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{donc } h_4(t) = \int_{t-2a}^t \exp(-bu) du = \left(-\frac{1}{b}\right) [\exp(-bt) - \exp(-b(t-2a))]]$$

$$h_4(t) = \frac{1}{b} [\exp(2ab) - 1] \exp(-bt) .$$

Cette fonction h_4 est indéfiniment dérivable, tout comme l'exponentielle.

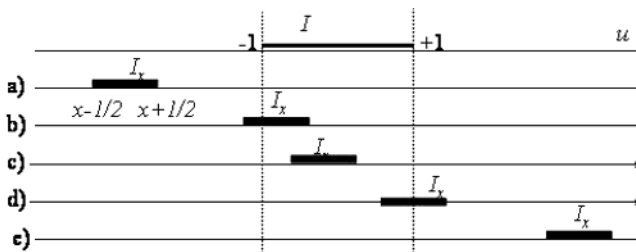


5) D'après l'index, pour $x \in [-1, 1]$, $\Delta_1(x) = 1 - |x|$ et sinon $\Delta_1(x) = 0$. On a

$$h_5(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1(u) P_1(x-u) du$$

Les 2 fonctions sont à support borné. Le support de Δ_1 est $I = [-1, 1]$. Connaissant x , le support de la porte $P_1(x-u)$ est l'ensemble des u tels que $-1/2 \leq x-u \leq 1/2$, c'est-à-dire $I_x = [x-1/2, x+1/2]$. Il faut déterminer l'intersection de ces 2 supports selon les valeurs de x :

- I_x est à l'extérieur, à gauche de I si $x+1/2 < -1$, c'est-à-dire pour $x < -3/2$
- I_x intersecte I à gauche si $x-1/2 \leq -1 \leq x+1/2$, c'est-à-dire pour $-3/2 \leq x \leq -1/2$
- I_x est à l'intérieur de I si $-1 < x-1/2 < x+1/2 < 1$, c'est-à-dire pour $-1/2 < x < 1/2$
- I_x intersecte I à droite si $x-1/2 \leq 1 \leq x+1/2$, c'est-à-dire pour $1/2 \leq x \leq 3/2$
- I_x est à l'extérieur, à droite de I si $1 < x-1/2$, c'est-à-dire pour $3/2 < x$



Comme Δ_1 et P_1 sont paires, on sait que h_5 est aussi paire (cf. exercice 4.5). Il suffit de la calculer pour x positif, ce qui exclut les cas a) et b).

Le cas c) correspond à $-1/2 < x < 1/2$. Si $0 \leq x < 1/2$ alors

$$h_5(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} (1-|u|) du$$

Pour ne plus avoir de valeur absolue dans l'intégrale, comme la valeur absolue $|u|$ s'annule pour $u = 0$, on écrit

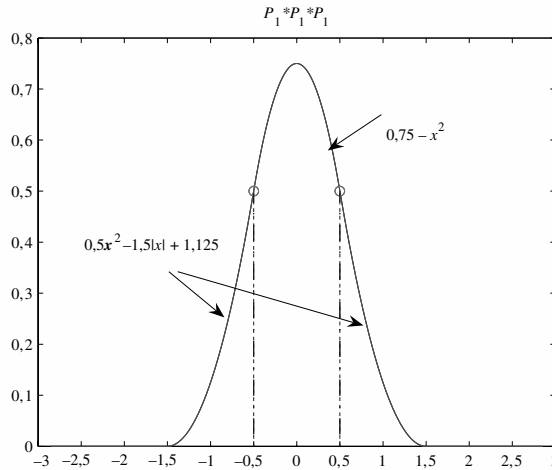
$$\begin{aligned} h_5(x) &= \int_{x-\frac{1}{2}}^0 (1+u)du + \int_0^{x+\frac{1}{2}} (1-u)du = \left[u + \frac{u^2}{2} \right]_{x-\frac{1}{2}}^0 + \left[u - \frac{u^2}{2} \right]_0^{x+\frac{1}{2}} \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - x^2 \end{aligned}$$

Pour le cas d) on a $1/2 \leq x \leq 3/2$. donc

$$\begin{aligned} h_5(x) &= \int_{x-\frac{1}{2}}^1 (1-u)du = \left[u - \frac{u^2}{2} \right]_{x-\frac{1}{2}}^1 \\ &= 1 - x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{8} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Dans le cas e) on a $3/2 < x$, les supports étant disjoints, on a $h_5(x) = 0$.

On peut remarquer que P_1 est discontinue, mais que $\Delta_1 = P_1 * P_1$ est continue, et constater sur le graphe de $h_5(x) = P_1 * P_1 * P_1$, que h_5 est de classe C^1 . Le produit de convolution régularise : voir l'exercice 4.7.



Exercice 4.7

- 1) Soit la fonction $h = f * g$ où f appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et où g est une fonction de $C^1(\mathbb{R})$, bornée sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa dérivée.

Montrer que h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $h' = f * g'$.

2) En déduire que si f est dans $L^1(\mathbb{R})$, si g est dans $C^k(\mathbb{R})$ et si les fonctions $g^{(p)}$ pour $p = 0, \dots, k$ sont bornées, alors h est définie et h est au moins de classe C^k (et ceci même si f n'est même pas continue). On dit que le « produit de convolution régularise ».

3) Calculer les produits de convolution suivants :

$$\cos t * P_{2a}(t) \quad \text{et} \quad Y(t) \cos t * P_{2a}(t).$$

Soient h_1 et h_2 les deux fonctions obtenues.

Montrer que h_1 est une fonction de classe C^∞ .

Tracer les graphes de h_1 et de h_2 .

Vérifier que h_2 n'est pas dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et expliquer pourquoi la formule du 1) n'est pas utilisable.

1) Le produit de convolution est une fonction définie par une intégrale :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du.$$

Si f est dans $L^1(\mathbb{R})$ et g continue bornée, l'intégrale ci-dessus est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En supposant que l'on puisse dériver sous le signe d'intégration, on obtiendrait :

$$h'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g'(t-u)du.$$

Pour justifier la formule ci-dessus, il faut vérifier que les hypothèses de (R4.3). Comme la fonction g' est bornée sur $\mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$|f(u)g'(t-u)| \leq |f(u)| \max_{u \in \mathbb{R}} |g'(u)| = M|f(u)|$$

et comme f est sommable sur $\mathbb{R}$, le théorème s'applique et :

$$h'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g'(t-u)du = (f * g')(t).$$

2) Faisons une démonstration par récurrence.

Si $k = 1$, on vient de voir que $h \in C^1(\mathbb{R})$ et $h' = f * g'$. Supposons que, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C^k(\mathbb{R})$ avec $g^{(i)}$ bornée $\forall i = 0, \dots, k$, alors $h \in C^k(\mathbb{R})$ et $h^{(k)} = f * g^{(k)}$.

Montrons alors que, si, de plus, $g \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ avec $g^{(k+1)}$ bornée, alors $h \in C^{k+1}(\mathbb{R})$ et $h^{(k+1)} = f * g^{(k+1)}$.

Il suffit pour cela d'appliquer au produit de convolution $h^{(k)} = f * g^{(k)}$ le résultat de la première question.

Puisque $g^{(k+1)}$ existe et est bornée, il s'ensuit que $h^{(k+1)} = f * g^{(k+1)}$.

Donc la propriété est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3) Puisque $\cos t$ est de classe C^∞ et bornée ainsi que toutes ses dérivées, la fonction h_1 doit être de classe C^∞ , d'après ce qui précède.

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u P_{2a}(t-u) du = [\sin u]_{t-a}^{t+a} = \sin(t+a) - \sin(t-a)$$

$$\boxed{h_1(t) = 2 \sin a \cos t}.$$

Comme prévu, h_1 appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ et en utilisant les résultats de l'exercice 4.4, on peut vérifier la validité de la formule établie à la deuxième question.

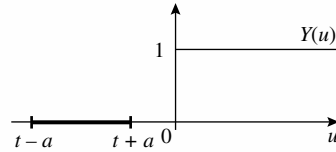
Le calcul de h_2 est plus complexe :

$$h_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(u) \cos u P_{2a}(t-u) du = \int_{t-a}^{t+a} Y(u) \cos u du.$$

Selon les valeurs de t , trois cas se présentent :

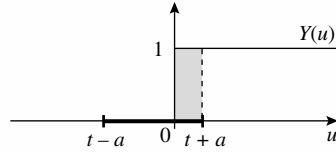
- pour $t \leq -a \Leftrightarrow t+a \leq 0$

$$h_2(t) = 0;$$



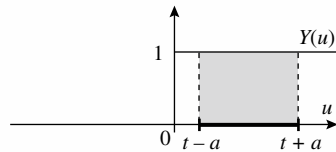
- pour $-a \leq t \leq a \Leftrightarrow t-a \leq 0 \leq t+a$

$$h_2(t) = \int_0^{t+a} \cos u du = \sin(t+a);$$



- pour $a \leq t \Leftrightarrow 0 \leq t-a$

$$h_2(t) = \int_{t-a}^{t+a} \cos u du = \sin(t+a) - \sin(t-a).$$



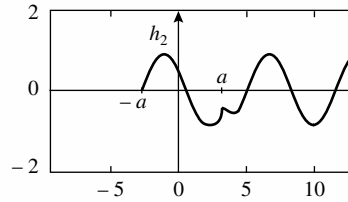
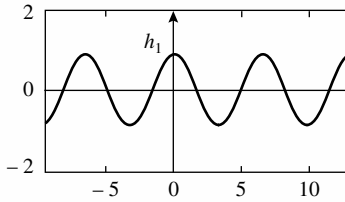
La fonction h_2 est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable pour $t \neq \pm a$. La formule de dérivation de la première question n'est pas applicable car $Y(t) \cos t$ n'est pas dérivable ni même continue en 0.

Pour $t \neq 0$, $(Y(t) \cos t)' = -Y(t) \sin t$ mais le produit de convolution h_3 de cette fonction avec la fonction porte n'est pas égal à la dérivée de h_2 car on a :

$$h_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < -a \\ \cos(t+a) - 1 & \text{pour } -a < t < a \\ \cos(t+a) - \cos(t-a) & \text{pour } a < t \end{cases}$$

$$\text{Or } h_2'(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < -a \\ \cos(t+a) & \text{pour } -a < t < a \\ \cos(t+a) - \cos(t-a) & \text{pour } a < t \end{cases}$$

La formule de dérivation du 1) n'est absolument pas applicable dans ce cas.



Exercice 4.8

Un système linéaire du premier ordre est caractérisé par une équation différentielle du premier ordre liant les signaux d'entrée e et de sortie s :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad as'(t) + bs(t) = e(t), \quad (\text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels}). \quad (E)$$

(Par exemple en électricité les circuits RL et LC.)

- 1) Expliciter le signal de sortie s correspondant à un état initial α , $s(0^+) = \alpha$. Montrer que, pour $\alpha = 0$, c'est le produit de convolution de l'entrée e par une fonction h à déterminer.
- 2) On suppose maintenant que le signal d'entrée est la fonction échelon Y . Calculer la sortie correspondante s sachant que $s(0^+) = 0$. La fonction s est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^*$?

1) La résolution d'une équation linéaire non homogène comporte les étapes suivantes.

a) Résolution de l'équation linéaire homogène associée

$$as'_0(t) + bs_0(t) = 0 \quad (E_H)$$

Donc $s_0(t) = \exp\left(-\frac{b}{a}t\right)$ est solution de (E_H) ainsi que toutes les fonctions $Cs_0(t)$ où C est une constante.

b) Recherche d'une solution particulière de l'équation (E) .

Dans des cas particuliers, on peut trouver une solution d'après l'expression du 2^e membre. Dans le cas général, la méthode de la variation de la constante consiste à remplacer $s(t)$ par

$$K(t)s_0(t) \text{ dans } (E), \text{ d'où } K'(t) = \frac{e(t)}{as_0(t)}.$$

On obtient une solution particulière en prenant par exemple la primitive de K' qui s'annule en 0, d'où :

$$s_p(t) = K(t)s_0(t) = \int_0^t \frac{e(u)}{a} \frac{s_0(t)}{s_0(u)} du.$$

c) Expression de la solution générale de (E) :

$$s(t) = Cs_0(t) + s_p(t).$$

d) Détermination de la constante C connaissant l'état initial $s(0) = \alpha$.

Comme ici $s_0(0) = 1$ et $s_p(0) = 0$, on obtient donc $C = \alpha$ et $s(t) = \alpha s_0(t) + s_p(t)$

$$s(t) = \alpha \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) + \int_0^t \frac{e(u)}{a} \exp\left(-\frac{b}{a}(t-u)\right) du.$$

Si $\alpha = 0$, on remarque que la sortie s est le produit de convolution de deux fonctions causales e et h :

$$s = e * h \quad \text{où} \quad h(t) = \frac{Y(t)}{a} \exp\left(-\frac{b}{a}t\right).$$

2) Pour $e = Y$, la sortie s s'appelle la réponse indicielle :

$$s(t) = \int_0^t \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{b}{a}(t-u)\right) du = \frac{1}{b} \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) \right] \text{ pour } t > 0.$$

Donc
$$s(t) = \frac{Y(t)}{b} \left[1 - \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) \right].$$

Cette fonction n'est pas dérivable en $t = 0$, mais, sur $\mathbb{R}^*$, on a :

$$s'(t) = \frac{Y(t)}{a} \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) = h(t).$$

La dérivée de la réponse indicielle est la fonction h qui est aussi appelée réponse impulsionnelle (cf. exercice 10.4).

Exercices d'entraînement

4.9 Peut-on utiliser le théorème de convergence dominée pour calculer la limite l des intégrales I_n suivantes quand n tend vers $+\infty$?

1) $\int_0^1 (1 - e^{-t^2/n}) dt$

2) $\int_0^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{t}{n}\right) e^{-t/n} dt$

3) $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ avec $x > 0$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} n^3 t^2 e^{-n^2 t^2} dt$

Indication

Si on ne trouve pas de fonction g sommable telle que $|f_n(t)| \leq g(t)$, on compare

$\lim I_n$ et $\int \lim f_n(t) dt$.

4.10 Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t} dt$. Expliciter $f(x)$ en utilisant $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$. Montrer que f est dérivable pour $x \neq 0$ mais que, cependant, on ne peut dériver sous le signe $\int$.

4.11 Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t, x) dt$ avec $f(t, x) = e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)}$.

1) Montrer que F existe, est paire et continue.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que F' est solution de l'équation différentielle $F'(x) + 2F(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_*^+$ (poser $t = \frac{x}{u}$). En déduire F .

4.12 Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2 + x^2)}{1+t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que F existe et est continue $\forall x \in \mathbb{R}$, dérivable pour $x \neq 0$.

2) Calculer explicitement $F'(x)$. En déduire $F(x)$. Déterminer la constante d'intégration à l'aide de $F(0)$.

4.13 Soient $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$.

1) En utilisant $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$, montrer que $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. En déduire $\Phi(0)$.

2) Soit $F(\theta) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\Phi(\theta x) dx$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer F' , en déduire F .

3) Calculer $G(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\Phi(\theta x) dx$.

4.14 Soient les fonctions $f(t) = \exp(-|t|)$ et $g(t) = \sin t$.

Les produits de convolution $f * f$, $f * g$, $g * g$ sont-ils définis ? Dans ce cas, préciser leurs propriétés et les calculer.

4.15 Soit la fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$. Calculer $f * f$ sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \sqrt{\pi}.$$

4.16 Calculer $f * f$ pour $f(t) = Y(t) \sin t$.

4.17 Soit $f(t) = t$ et $g(t) = P_{2a}(t)$.

Calculer les produits de convolution h_1 , h_2 , h_3 suivants :

$$f * g \qquad f(t) * g(t-a) \qquad t P_{2a}(t-a) * P_{2a}(t-a).$$

- 4.18** Vérifier que le produit de convolution de deux densités de probabilité sur $\mathbb{R}^+$ est aussi une densité de probabilité : c'est-à-dire que si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R}^+)$, positives ou nulles et telles que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt = 1,$$

alors $h = f * g$ a les mêmes propriétés.

- 4.9** 1) Oui, $|f_n(t)| \leq 1$, $l = 0$.

2) Non, $I_n = 2 - \frac{3}{e} = \lim I_n$ avec $u = \frac{t}{n}$ et $\int_0^{+\infty} \lim f_n(t) \mathbb{1}_{[0, n]}(t) dt = 0$.

3) Oui, $|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{n-1}$, $l = \Gamma(x)$ car $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t}$.

4) Non, $\lim I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \neq \int \lim f_n(t) dt = 0$.

4.10 $f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donc $f'(x) = 0$ pour $x \neq 0$,

mais $f'(x) \neq \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt = \int_0^{\infty} \cos tx dt$ qui diverge.

- 4.11** 1) f est continue pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. $|f(t, x)| \leq e^{-t^2}$ sommable. D'où F existe et est continue.

2) Pour $0 < \alpha \leq |x| \leq A$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq g(t) = \begin{cases} 2Ae^{-t^2}/t^2 & \text{pour } t \geq 1 \\ 2Ae^{-\alpha^2/t^2}/t^2 & \text{pour } 0 < t < 1 \end{cases}$ sommable

(poser $t = \frac{1}{u}$ sur $]0, 1[$). On peut dériver sur $\mathbb{R}^*$ et $F'(x) = -2F(x)$ si $x > 0$.

D'où $F(x) = Ce^{-2x}$ avec $C = F(0) = \sqrt{\pi}/2$ et, puisque f est paire, $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$.

- 4.12** 1) $0 \leq |x| \leq A \Rightarrow t^2 \leq t^2 + x^2 \leq t^2 + A^2$

et $|f(t, x)| \leq g(t)$ sommable où $g(t) = \max \left\{ \frac{|\ln t^2|}{1+t^2}, \frac{|\ln(t^2 + A^2)|}{1+t^2} \right\} \Rightarrow F$ continue.

$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \frac{2A}{(t^2 + \alpha^2)(1+t^2)}$ sommable pour $0 < \alpha \leq |x| \leq A$

donc F dérivable si $x \neq 0$.

2) Pour $x > 0$, $F'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2 + x^2} \right] dt = \frac{\pi}{1+x}$,

$F(x) = \pi \ln(1+x) + C$ si $x > 0$.

F paire implique : $F(x) = \pi \ln(1+|x|) + C$ et $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

$$4.13 \quad 1) \quad \Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t) dt = \int_x^{+\infty} \varphi(-u) du = \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du, \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

$$2) \quad F'(\theta) = \frac{1}{2\pi(\theta^2 + 1)}, \quad F(\theta) = \frac{1}{2\pi} \arctan \theta + C \quad \text{et} \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} F(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{4}.$$

$$3) \quad G(\theta) = F(\theta) + F(-\theta) = \frac{1}{2}.$$

4.14 La fonction f est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et continue bornée, g est dans $C^\infty(\mathbb{R})$, bornée ainsi que toutes ses dérivées, mais ni dans $L^1(\mathbb{R})$ ni dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc $f * g$ est dans $C^\infty(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$, $f * f$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et bornée (cf. (R4.6) et exercice 4.7). Mais $g * g$ n'est pas définie.

Comme f est paire et g impaire, $f * f$ est paire et $f * g$ impaire.

$$(f * f)(t) = (1 + |t|) \exp(-|t|)$$

$$(f * g)(t) = \sin t \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|u|) \cos u du - \cos t \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|u|) \sin u du.$$

En utilisant la parité des fonctions à intégrer :

$$(f * g)(t) = 2 \sin t \int_0^{+\infty} \exp(-u) \cos u du = \sin t.$$

4.15 En utilisant la relation :

$$u^2 + (t-u)^2 = 2u^2 - 2ut + t^2 = 2\left(u - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{2},$$

$$\text{on obtient } (f * f)(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right).$$

$$4.16 \quad (f * f)(t) = \frac{1}{2} Y(t)(\sin t - t \cos t).$$

$$4.17 \quad h_1(t) = (f * g)(t) = 2at;$$

$$h_2(t) = h_1(t-a) = 2a(t-a);$$

$$h_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0 \quad \text{ou} \quad t \geq 4a \\ \frac{t^2}{2} & \text{pour } 0 \leq t \leq 2a \\ \frac{(4a-t)t}{2} & \text{pour } 2a \leq t \leq 4a \end{cases}.$$

4.18 h est dans $L^1(\mathbb{R}^+)$, de plus $h(t) \geq 0$.

$$\int_0^{+\infty} h(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(u) g(t-u) du \right) dt = \iint_D f(u) g(t-u) du.$$

En posant $x = u$ et $y = t - u$, on a $t = x + y$ et $u = x$, d'où $\frac{D(t,u)}{D(x,y)} = -1$.

Et $D = \{(t,u) / 0 \leq u \leq t\}$ d'où $\Delta = \{(x,y) / 0 \leq x \leq x+y\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\int_0^{+\infty} h(t) dt = \iint_{\Delta} f(x) g(x) dx dy = \int_0^{+\infty} f(x) dx \int_0^{+\infty} g(y) dy = 1.$$

Chapitre 5

Transformation de Fourier

RAPPELS

- La transformée de Fourier de f est notée $F(f)$ ou $\hat{f}$

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R}) \quad \boxed{F(f)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx} \quad (\text{R5.1})$$

- La transformée de Fourier inverse de g est notée $F^{-1}(g)$ ou $\tilde{\mathcal{F}}(g)$ ou $\check{g}$

$$\boxed{F^{-1}(g)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{+2i\pi\nu x} dx} \quad (\text{R5.2})$$

- Pour f et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\boxed{F^{-1}F(f)(x) \stackrel{pp}{=} \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(f)(x) \stackrel{pp}{=} f(x)} \quad (\text{R5.3})$$

- Si f est continue sur $\mathbb{R}$, on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad F^{-1}F(f)(x) = f(x)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(\nu) e^{+2i\pi\nu x} d\nu = f(x)} \quad (\text{R5.4})$$

- Si f est bornée et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)(\nu) e^{+2i\pi\nu x} d\nu = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)) \quad (\text{R5.5})$$

- Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $F(f) \in L^2(\mathbb{R})$.

On a aussi l'**identité de Parseval** : $\|f\|_2 = \|F(f)\|_2$, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)(\nu)|^2 d\nu \quad (\text{R5.6})$$

- f et $F(f)$ ont même parité.
- Si f est réelle et paire, $F(f)$ est réelle et paire.
- Si f est réelle et impaire, $F(f)$ est imaginaire pure et impaire.
- **Symétrie hermitienne** : $F^{-1}(f(x)) = F(f(-x))$.
Donc si f est paire, $F^{-1}(f) = F(f)$.
- **Translation en temps**

$$F(f(x-a))(\nu) = e^{-2i\pi\nu a} F(f(x))(\nu) \quad (\text{R5.7})$$

- **Translation en fréquence**

$$F(e^{-2i\pi x a} f(x))(\nu) = F(f)(\nu + a) \quad (\text{R5.8})$$

- **Changement d'échelle**

$$F(f(ax))(\nu) = \frac{1}{|a|} F(f(x))\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad (\text{R5.9})$$

- **Transformée de Fourier des dérivées**

Si $f, f', f'' \dots, f^{(n-1)}$ sont **continues** sur $\mathbb{R}$ et toutes dans $L^1(\mathbb{R})$ ainsi que $f^{(n)}$:

$$F(f^{(n)})(\nu) = (2i\pi\nu)^n F(f)(\nu) \quad (\text{R5.10})$$

- **Dérivation de la transformée de Fourier**

Si f et $x^n f$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$

$$\frac{d^n F(f)(\nu)}{d\nu^n} = (-2i\pi)^n F(x^n f)(\nu) \quad (\text{R5.11})$$

- **Transformée de Fourier et convolution**

$$\boxed{F(f * g) = F(f)F(g)} \quad \boxed{F(fg) = F(f) * F(g)} \quad (\text{R5.12})$$

- **Transformée de Fourier des fonctions usuelles**

Les fonctions ci-dessous étant toutes paires, si $g = F(f)$ alors $F(g) \stackrel{pp}{=} f$ (et l'égalité a lieu sur $\mathbb{R}$ quand elles sont continues)

$$P_a(x) = \mathbb{1}_{[-a/2, a/2]}(x) \quad \Leftrightarrow \quad a \operatorname{sinc}(a\nu) = a \frac{\sin(\pi\nu a)}{\pi\nu a} \quad (\text{R5.13})$$

$$\Delta_a(x) = (1 - |x/a|) \mathbb{1}_{[-a, a]}(x) \quad \Leftrightarrow \quad a \left(\frac{\sin(\pi\nu a)}{\pi\nu a} \right)^2 \quad (\text{R5.14})$$

$$\exp(-a|x|) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} \quad (\text{R5.15})$$

$$\exp(-ax^2) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2\nu^2}{a}\right) \quad (\text{R5.16})$$

- **Intercorrélation** de deux fonctions f et g

$$K_{f,g}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u+\tau) \overline{f(u)} du = \overline{K_{g,f}(-\tau)} \quad (\text{R5.17})$$

- **Autocorrélation** de f

$$\boxed{K_f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+\tau) \overline{f(u)} du} \quad (\text{R5.18})$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } \forall \tau \in \mathbb{R} \quad |K_f(\tau)| \leq K_f(0) = \|f\|_2^2$$

Si f est un signal réel, K est une fonction paire et si $\tilde{f}$ est la fonction retournée définie par $\tilde{f}(t) = f(-t)$, K est le produit de convolution $K = f * \tilde{f}$.

- Le **spectre d'amplitude** et le **spectre de phase** d'un signal f sont respectivement le module et l'argument de sa transformée de Fourier $F(f)(\nu)$.

$$\text{L'énergie est } \|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)(\nu)|^2 d\nu.$$

La **densité spectrale d'énergie** de f est $|F(f)(\nu)|^2$.

- **Théorème de Wiener-Kinchine** Si f est un signal réel, la transformée de Fourier de l'autocorrélation de f est égale à la densité spectrale d'énergie de f :

$$\boxed{F(K_f)(\nu) = |F(f)(\nu)|^2}$$

Exercice 5.1

1) Soient f une fonction sommable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Montrer que :

a) Si f est paire, $\hat{f}(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi\nu t) dt$

b) Si f est impaire, $\hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\nu t) dt$

2) Utiliser ce résultat pour retrouver les transformées de Fourier des fonctions P_a et Δ_a , $a > 0$ (cf. index pour la définition de ces fonctions).

3) Calculer l'intégrale $I(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cos(\omega x) dx$.

1) a) On sait que, si g est sommable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 0 \quad \text{si } g \text{ est impaire}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} g(t) dt \quad \text{si } g \text{ est paire}$$

Comme $e^{-2i\pi\nu t} = \cos(2\pi\nu t) - i \sin(2\pi\nu t)$, et si f est paire, $f(t) \cos(2\pi\nu t)$ est paire et $f(t) \sin(2\pi\nu t)$ impaire. Donc

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi\nu t) dt$$

b) Si f est impaire, on a $f(t) \cos(2\pi\nu t)$ impaire et $f(t) \sin(2\pi\nu t)$ paire, d'où le résultat demandé.

Ces formules sont valables même si f est à valeurs complexes.

2) Les fonctions P_a et Δ_a sont paires et à valeurs réelles. On a donc :

$$F(P_a)(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} P_a(t) \cos(2\pi\nu t) dt = 2 \int_0^{a/2} \cos(2\pi\nu t) dt = 2 \left[\frac{\sin(2\pi\nu t)}{2\pi\nu} \right]_0^{a/2},$$

d'où :

$$F(P_a)(\nu) = \frac{\sin(\pi a \nu)}{\pi \nu}$$

$$F(\Delta_a)(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} \Delta_a(t) \cos(2\pi\nu t) dt = 2 \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) \cos(2\pi\nu t) dt.$$

On intègre par parties en posant $U = 1 - \frac{t}{a}$ et $dV = \cos(2\pi\nu t) dt$, soit $dU = -\frac{1}{a}dt$ et $V = \frac{\sin(2\pi\nu t)}{2\pi\nu}$. Il vient :

$$\int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) \cos(2\pi\nu t) dt = \left[\left(1 - \frac{t}{a}\right) \frac{\sin(2\pi\nu t)}{2\pi\nu} \right]_0^a + \frac{1}{2a\pi\nu} \int_0^a \sin(2\pi\nu t) dt.$$

Le premier terme du second membre est nul. Le deuxième terme est $\frac{1}{2a\pi\nu} \left[-\frac{\cos(2\pi\nu t)}{2\pi\nu} \right]_0^a$, soit $\frac{1 - \cos(2\pi a\nu)}{4a\pi^2\nu^2}$, ou encore $\frac{\sin^2(\pi a\nu)}{2a\pi^2\nu^2}$.

Par conséquent :

$$F(\Delta_a)(\nu) = \frac{\sin^2(\pi a\nu)}{a\pi^2\nu^2}.$$

3) L'intégrale $I(\omega)$ est une intégrale du type considéré à la question 1) a). On peut par exemple écrire $I(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cos\left(2\pi \frac{\omega}{2} \frac{x}{\pi}\right) dx$. En posant $\frac{x}{\pi} = t$, on a alors

$$I(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2} \cos\left(2\pi \frac{\omega}{2} t\right) dt = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2} \cos\left(2\pi \frac{\omega}{2} t\right) dt,$$

soit $I(\omega) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2}\right)\left(\frac{\omega}{2}\right)$, d'après la question 1) a).

La transformée de Fourier inverse de $\frac{\sin^2(\pi\nu)}{\pi^2\nu^2}$ est, d'après la deuxième question (cas où $a = 1$), $\Delta_1(t)$. En intervertissant les rôles des variables t et ν , on en déduit que la transformée de Fourier inverse de $\frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2}$ est $\Delta_1(\nu)$, donc que sa transformée de Fourier directe est $\Delta_1(-\nu)$, égale à $\Delta_1(\nu)$ puisque Δ_1 est paire. On a donc :

$$I(\omega) = \frac{\pi}{2} \Delta_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{|\omega|}{2}\right) \mathbb{1}_{[-1,1]}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

soit $I(\omega) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{|\omega|}{2}\right)$ si $|\omega| < 2$ et $I(\omega) = 0$ si $|\omega| \geq 2$.

Exercice 5.2

On considère le signal défini pour $a > 0$ par $f_a(t) = Y(t)e^{-at}$ et les signaux g_a et h_a tels que :

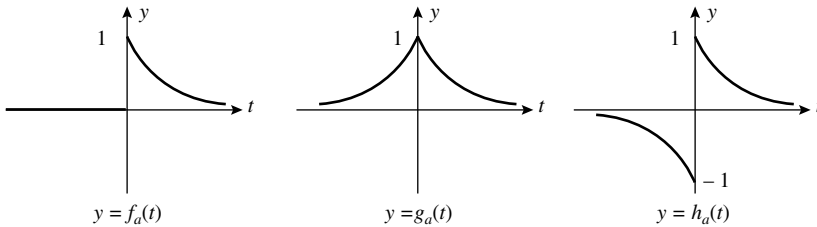
$$g_a(t) = f_a(t) + f_a(-t) \quad \text{et} \quad h_a(t) = f_a(t) - f_a(-t).$$

- 1) Tracer les graphes de f_a , g_a , h_a et calculer leur transformée de Fourier.
 2) En déduire la valeur des intégrales :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \omega x}{1+x^2} dx.$$

- 3) Quelles sont les limites ponctuelle et presque partout de g_a et $F(g_a)$ quand a tend vers 0 ? A-t-on : $\lim_{a \rightarrow 0} F(g_a) = F(\lim_{a \rightarrow 0} g_a)$?
 4) Mêmes questions pour h_a .

1)



$$F(f_a)(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) e^{-at} e^{-2i\pi vt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2i\pi v)t} dt = \left[\frac{e^{-(a+2i\pi v)t}}{-(a+2i\pi v)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+2i\pi v}.$$

$$\text{D'autre part, } F(f_a(-t))(v) = F(f_a)(-v) = \frac{1}{a-2i\pi v}.$$

$$\text{Donc, } F(g_a)(v) = \frac{1}{a+2i\pi v} + \frac{1}{a-2i\pi v} = \boxed{\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 v^2}}$$

$$\text{et } F(h_a)(v) = \frac{1}{a+2i\pi v} - \frac{1}{a-2i\pi v} = \boxed{\frac{-4i\pi v}{a^2 + 4\pi^2 v^2}}$$

- 2) Comme $F(g_a)$ est dans L^1 , que $g_a(t) = e^{-a|t|}$ presque partout et que $e^{-a|t|}$ est continue,

$$\bar{F}(F(g_a))(t) = e^{-a|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{R5.4})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(g_a)(v) e^{-2i\pi vt} dv = 2 \int_0^{\infty} F(g_a)(v) \cos(2\pi vt) dv$$

car $F(g_a)$ est paire.

$$\text{Donc } \int_0^{\infty} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 v^2} \cos(2\pi vt) dv = \frac{1}{2} e^{-a|t|} \quad \text{et si } \omega = 2\pi t, a = 2\pi \text{ et } x = v :$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\omega|}}.$$

Si h_a appartient à $L^1 \cap L^2$, par contre $F(h_a)$ n'appartient qu'à L^2 et on a $\overline{F}(F(h_a))(t) = h_a(t)$ presque partout (R5.3). Et, comme $F(h_a)$ est impaire on a comme à l'exercice 5.1 :

$$\overline{F}(F(h_a))(t) = 2i \int_0^\infty F(h_a)(v) \sin 2\pi vt \, dv = \varepsilon e^{-a|t|} \quad \text{presque partout et où } \varepsilon = \operatorname{sgn}(t)$$

d'où, en posant $\omega = 2\pi t$, $a = 2\pi$ et $v = x$:

$$\int_0^\infty \frac{x \sin \omega x}{1+x^2} dx = \varepsilon \frac{\pi}{2} e^{-|\omega|} \quad \text{pour } \omega \neq 0, \text{ et } \varepsilon = \operatorname{sgn}(\omega).$$

3) $\lim_{a \rightarrow 0} g_a(t) = 1$ si $t \neq 0$, $g_a(0) = 2 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} g_a(0) = 2$. Donc g_a converge presque partout vers 1 qui n'est ni dans $L^1(\mathbb{R})$, ni dans $L^2(\mathbb{R})$, et n'a donc pas de transformée de Fourier au sens des fonctions.

Par ailleurs, $\lim_{a \rightarrow 0} F(g_a)(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \neq 0 \\ +\infty & \text{si } v = 0 \end{cases}$.

Donc, $F(g_a)$ converge vers 0 presque partout.

On n'a donc pas $\lim_{a \rightarrow \infty} F(g_a) = F(\lim_{a \rightarrow \infty} g_a)$ car $0 \neq F(1)$.

Par contre, au sens des distributions, on verra que l'égalité est vraie car $\lim_{a \rightarrow 0} F(g_a) = \delta = F(\lim_{a \rightarrow 0} g_a) = F([1])$.

4) $\lim_{a \rightarrow 0} h_a(t) = \operatorname{sgn}(t)$ si $t \neq 0$ et $\lim_{a \rightarrow 0} h_a(0) = 0$.

Mais la limite de h_a n'est ni dans $L^1(\mathbb{R})$, ni dans $L^2(\mathbb{R})$ et n'a donc pas de transformée de Fourier.

$$\lim_{a \rightarrow 0} F(h_a)(v) = \frac{1}{i\pi v} \quad \text{si } v \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow 0} F(h_a)(0) = 0.$$

Cette limite n'est ni dans $L^1(\mathbb{R})$, ni dans $L^2(\mathbb{R})$. On verra que, au sens des distributions,

$$\lim_{a \rightarrow 0} F(h_a) = F(\lim_{a \rightarrow 0} h_a) = F([\operatorname{sgn}(t)]) = \frac{1}{i\pi} Pf \frac{1}{v}.$$

Exercice 5.3

- 1) Quelles sont les propriétés de $F(P_a)$?
- 2) Soit $f(t) = \mathbb{I}_{[0,a]}(t)$. Comparer les spectres d'amplitude et de phase de P_a et f .
- 3) Calculer les intégrales $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2} du$ et $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin u}{u} du$.

1)
$$F(P_a)(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu a)}{\pi\nu} \quad (\text{cf. exercice 5.1}).$$

Puisque P_a est bornée, continue par morceaux et à support borné, $F(P_a)$ est de classe C^∞ (cf. R5.11). Comme P_a appartient à $L^2(\mathbb{R})$ il en est de même de $F(P_a)$ (cf. R5.6). Enfin $F(P_a)$ est réelle et paire comme P_a .

2) Comme $f(t) = P_a\left(t - \frac{a}{2}\right)$, avec la formule du retard (R5.7), on a :

$$F(f)(\nu) = e^{-i\pi a} \frac{\sin(\pi \nu a)}{\pi \nu}.$$

Donc, P_a et f ont même spectre d'amplitude : $\left| \frac{\sin(\pi \nu a)}{\pi \nu} \right|$ et cette propriété est vérifiée par tous les signaux translatés, le spectre de phase de P_a est nul et celui de f vaut $-\pi a$.

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$ représente, à une constante près, l'énergie de P_1 et d'après (R5.6), $\|P_1\|_2 = \|F(P_1)\|_2$ soit :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |P_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(P_1)(\nu)|^2 d\nu$$

soit :

$$\int_{-1/2}^{1/2} dt = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi \nu)}{\pi^2 \nu^2} d\nu$$

et, en posant $u = \pi \nu$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \pi.$$

Par ailleurs, si $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\bar{F}(F(g)) = g$, égalité dans $L^2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire presque partout. En tout point où g est continue, d'après (R5.4) on a

$$g(t) = \bar{F}(F(g))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(g)(\nu) e^{2i\pi \nu t} d\nu.$$

Ici, $P_a \in L^2(\mathbb{R})$, donc si $t \neq a$ et $t \neq -a$,

$$P_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi a \nu)}{\pi \nu} e^{2i\pi \nu t} d\nu.$$

En particulier :

$$P_a(0) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi a \nu)}{\pi \nu} d\nu \text{ et, en posant } \pi \nu = u,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi u}{u} du = \pi.$$

On peut aussi calculer la première intégrale grâce à $\overline{F}F(\Delta_B)$ et (R5.4) :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \overline{F}\left(\frac{\sin^2 u}{u^2}\right)(0), \quad \overline{F}\left(\frac{\sin^2(\pi \nu B)}{B \pi^2 \nu^2}\right)(t) = \Delta_B(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

car Δ_B est continue sur $\mathbb{R}$. D'où, avec $B = \frac{1}{\pi}$:

$$\overline{F}\left(\frac{\sin^2 \nu}{\nu^2}\right)(t) = \pi \Delta_{1/\pi}(t) \Rightarrow I = \pi \Delta_{1/\pi}(0) = \pi.$$

Exercice 5.4

Soit le signal gaussien f défini par $f(t) = e^{-\pi t^2}$.

1) Calculer f' en fonction de f et en appliquant la transformée de Fourier à l'identité obtenue, montrer que cette transformée de Fourier vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.

2) Intégrer cette équation et en déduire que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \nu^2} d\nu = 1$.

3) En déduire la transformée de Fourier de e^{-at^2} et la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt$ pour $a > 0$.

4) En déduire la transformée de Fourier de

$$f_{\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{avec } \sigma > 0$$

et montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\sigma}(t) dt = 1$

1) $f'(t) = -2\pi t f(t)$.

En appliquant la transformée de Fourier à cette relation, puisque $t f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, on obtient :

$$F(f')(v) = -2\pi F(tf)(v)$$

et, avec les relations (R5.10) et (R5.11) :

$$2i\pi \nu F(f)(v) = -\frac{2\pi}{-2i\pi} [F(f)(v)]'$$

on obtient : $[F(f)(v)]' = -2\pi \nu F(f)(v)$

d'où, si $\hat{f} = F(f)$,

$$\boxed{\frac{d\hat{f}}{dv}(v) + 2\pi \nu \hat{f}(v) = 0}.$$

2) En intégrant cette équation différentielle à variables séparables, on obtient :
 $\hat{f}(v) = Ke^{-\pi v^2}$.

Or, puisque $f \in L^1 \cap L^2$ et $\hat{f} \in L^2$, on a (R5.6) : $\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$ soit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(v)|^2 dv$$

c'est-à-dire : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t^2} dt = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi^2 v^2} dv$ d'où $K^2 = 1$.

Or, $F(f)(0) = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = K \Rightarrow K > 0 \Rightarrow K = 1$ et

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{F(e^{-\pi t^2})(v) = e^{-\pi v^2}}.$$

3) $e^{-at^2} = e^{-\pi \left(\sqrt{\frac{a}{\pi}} t\right)^2} = f(kt)$ où $k = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$.

Et, en utilisant la formule de changement d'échelle :

$$F(f(kt))(v) = \frac{1}{|k|} F(f)\left(\frac{v}{k}\right).$$

On obtient : $F(e^{-at^2})(v) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} v\right)^2} \Rightarrow \boxed{F(e^{-at^2})(v) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 \frac{v^2}{a}}}$

et $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = F(e^{-at^2})(0) \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$.

4) Il suffit de remplacer dans la relation ci-dessus a par $\frac{1}{2\sigma^2}$, on obtient

$$F(e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}})(v) = \sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-2\pi^2\sigma^2 v^2}$$

d'où, grâce à la linéarité, et si $\sigma > 0$

$$F(f_\sigma)(v) = F\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right)(v) = e^{-2\pi^2\sigma^2 v^2}$$

Quelle que soit f , on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = F(f)(0)$, et comme $F(f_\sigma)(0) = e^0 = 1$, la fonction gaussienne f_σ vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\sigma(t) dt = 1$ (c'est une densité de probabilité).

Exercice 5.5

Utiliser la transformée de Fourier pour calculer le produit de convolution

$h = f_a * f_b$ (avec a et b constantes positives) pour :

$$1) f_a(t) = a \sin c(at) = a \frac{\sin(\pi at)}{\pi at},$$

$$2) f_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$$

1) On a $F(f_a * f_b) = F(f_a)F(f_b)$ d'après (R5.12).

La fonction sinus cardinal est la transformée de Fourier de la fonction porte P_a . Or pour des f fonctions paires on a $F^{-1}(f) = F(f)$, donc $F(f_a) = F^{-1}(f_a) \stackrel{pp}{=} P_a$ et

$$F(f_a * f_b) \stackrel{pp}{=} P_a P_b \stackrel{pp}{=} P_c \quad \text{avec } c = \min(a, b)$$

puisque le produit de deux fonctions portes est une fonction porte dont le support est l'intersection des supports.

Comme $P_c \stackrel{pp}{=} F(f_c)$, on obtient

$$F(f_a * f_b) \stackrel{pp}{=} F(f_c) \quad \text{avec } c = \min(a, b)$$

En utilisant la transformation de Fourier inverse on obtient :

$$f_a * f_b \stackrel{pp}{=} f_c \quad \text{avec } c = \min(a, b)$$

La fonction sinus cardinal est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier donc l'égalité a lieu partout.

2) De la même façon, on a $F(f_a * f_b) = F(f_a)F(f_b)$ d'après (R5.12). Or, d'après l'exercice 5.4, on a

$$F\left(\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)(\nu) = e^{-2\pi^2 a^2 \nu^2}$$

donc

$$F(f_a * f_b)(\nu) = e^{-2\pi^2 a^2 \nu^2} e^{-2\pi^2 b^2 \nu^2} = e^{-2\pi^2 c^2 \nu^2} \quad \text{avec } c^2 = a^2 + b^2$$

On obtient $F(f_a * f_b) = F(f_c)$ et en utilisant la transformation de Fourier inverse

$$f_a * f_b \stackrel{pp}{=} f_c \quad \text{avec } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

La continuité de la fonction gaussienne entraîne l'égalité sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5.6

À l'aide de la transformée de Fourier, déterminer la solution de l'équation intégrale en la fonction inconnue f continue et sommable sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-a(t-u)^2) du = \exp(-t^2), \quad (E)$$

où a est un nombre réel donné, avec $a > 1$.

Le premier membre de l'équation (E) est le produit de convolution de f par la fonction $g_a(t) = \exp(-at^2)$. L'équation (E) s'écrit donc : $g_a * f = g_1$.

Comme f est sommable par hypothèse, elle admet une transformée de Fourier $\hat{f}$.

D'autre part (cf. R5.16), la transformée de Fourier de g_a est $\hat{g}_a(v) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2 v^2}{a}\right)$, et

donc celle de g_1 est $\hat{g}_1(v) = \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 v^2)$.

En prenant les transformées de Fourier des deux membres de (E), sachant que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit (ordinaire) des transformées de Fourier de chacun des facteurs (R5.12), on obtient l'équation :

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2 v^2}{a}\right) \hat{f}(v) = \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 v^2) \quad (\hat{E})$$

d'où : $\hat{f}(v) = \sqrt{a} \exp\left[-\pi^2 v^2 \left(1 - \frac{1}{a}\right)\right] = \sqrt{a} \exp\left(-\frac{\pi^2 v^2 (a-1)}{a}\right)$.

Posons $k = \frac{a}{a-1}$. La transformée de Fourier inverse de $\sqrt{\frac{\pi}{k}} \exp\left(-\frac{\pi^2 v^2}{k}\right)$ est g_k . Comme

$\hat{f}(v) = \sqrt{\frac{ak}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{k}} \exp\left(-\frac{\pi^2 v^2}{k}\right)$, on en déduit que :

$$f(t) = \sqrt{\frac{ak}{\pi}} \exp(-kt^2) = \frac{a}{\sqrt{\pi(a-1)}} \exp\left(-\frac{at^2}{a-1}\right).$$

Exercice 5.7

Soit f la fonction définie par $f(t) = \frac{\sin(\pi at)}{\pi t}$ avec $a > 0$.

- 1) En utilisant la transformée de Fourier de f , évaluer $\|f\|_2^2$ puis calculer $(f * f)(\theta)$ et préciser pour quelles valeurs de θ ce produit de convolution s'annule.
- 2) Pour quelles valeurs de θ la fonction $f(t - \theta)$ est-elle orthogonale à la fonction $f(t)$ pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$? Vérifier que ces valeurs de θ sont dénombrables et de la forme $\theta_n = nC$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$ et C constante. Soient $g_n(t) = f(t - nC)$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Vérifier que les fonctions g_n sont orthogonales deux à deux.

1) D'après (R5.13), on voit que $f = F(P_a)$.

Comme P_a appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et que la transformée de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$, on a (R5.6) $\|f\|_2^2 = \|P_a\|_2^2$.

Or $\|P_a\|_2^2 = \int_{-a/2}^{+a/2} 1^2 dt = a$, donc $\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin(\pi a t)}{\pi t} \right|^2 dt = a$.

De plus, $f * f = F(P_a) * F(P_a)$ donc en prenant la transformée de Fourier inverse,

$$\overline{F}(f * f) = \overline{F}(F(P_a) * F(P_a)) = \overline{F}(F(P_a)) \cdot \overline{F}(F(P_a)) = P_a \cdot P_a.$$

Or $P_a^2 = P_a$ (car $P_a(t) = 0$ ou 1), donc $f * f = F(P_a)$, mais comme $f = F(P_a)$ on en déduit que, au sens de $L^2(\mathbb{R})$ et donc presque partout :

$$f * f = f.$$

Comme f est continue, $f * f$ aussi car le produit de convolution régularise. Donc l'égalité est vraie partout et, pour tout θ , on a :

$$(f * f)(\theta) = f(\theta) = \frac{\sin(\pi a \theta)}{\pi \theta}.$$

Cette fonction s'annule pour $\sin(\pi a \theta) = 0$ et $\theta \neq 0$, donc pour :

$$\theta = \frac{n}{a} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}^*.$$

2) L'orthogonalité entre $f(t - \theta)$ et $f(t)$, fonctions de t , s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \theta) f(t) dt = 0.$$

Comme f est paire, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta - t) f(t) dt = 0$ c'est-à-dire $(f * f)(\theta) = 0$. Donc, d'après

1), il faut que $\theta = \frac{n}{a}$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$. Il y a donc une infinité dénombrable de fonctions ortho-

gonales à $g_0(t) = f(t)$ qui sont $g_n(t) = f\left(t - \frac{n}{a}\right)$ c'est-à-dire : $g_n(t) = a \frac{\sin(\pi a t - \pi n)}{\pi a t - \pi n}$.

Vérifions que, pour tout $n \neq p$, g_n est orthogonale à g_p . On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) g_p(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t - \frac{n}{a}\right) f\left(t - \frac{p}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(u - \frac{n-p}{a}\right) f(u) du = 0$$

qui est bien nul si $n - p \in \mathbb{Z}^*$, donc si $n \neq p$.

Comme l'énergie est invariante par translation, on a $\|g_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 = a$, donc les fonctions

$\frac{1}{\sqrt{a}} g_n$ sont orthonormées. Ces fonctions-là sont précisément celles qui interviennent dans

le théorème d'échantillonnage de Shannan comme base du sous-espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support borné.

Exercice 5.8

Calculer la fonction d'intercorrélation h de deux fonctions exponentielles causales f et g avec $f(t) = Y(t)e^{-at}$ et $g(t) = Y(t)e^{-bt}$, a et b réels positifs.

En déduire l'autocorrélation de f et l'énergie de f , (c'est-à-dire $\|f\|^2$).

Les fonctions sont à valeurs réelles et on a :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(u) e^{-au} \cdot Y(u+t) e^{-b(u+t)} du.$$

Si $t \geq 0$, alors :

$$h(t) = e^{-bt} \int_0^{+\infty} e^{-(a+b)u} du = e^{-bt} \frac{1}{a+b}.$$

Si $t \leq 0$, alors :

$$h(t) = e^{-bt} \int_{-t}^{+\infty} e^{-(a+b)u} du = e^{-bt} \frac{e^{+(a+b)t}}{a+b} = \frac{e^{+at}}{a+b}.$$

donc :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{e^{-bt}}{a+b} & \text{si } t \geq 0 \\ \frac{e^{at}}{a+b} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

Cette fonction h est maximale pour $t = 0$, cela signifie que $f(u)$ et $g(u+t)$ ont une ressemblance maximale pour $t = 0$.

L'autocorrélation K_f de f est une fonction paire :

$$K_f(t) = \frac{e^{-a|t|}}{2a}.$$

Comme $K_f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|^2 du$, on en déduit que l'énergie de f est $\frac{1}{2a}$.

Exercice 5.9

On considère le signal gaussien $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.

- 1) Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \sqrt{\pi}$, calculer l'énergie de ce signal.
- 2) Calculer la transformée de Fourier de f . En déduire le spectre d'amplitude, le spectre de phase du signal f et la densité spectrale d'énergie de f .
- 3) Montrer que, pour un signal g réel et pair, l'autocorrélation K_g est le produit de convolution $g * g$.
- 4) Déduire de ce qui précède l'autocorrélation K_f du signal gaussien.

1) L'énergie d'un signal f est le carré de sa norme dans $L^2(\mathbb{R})$ donc :

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}.$$

Donc :

$$E_f = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

2) D'après (R5.16) ou d'après l'exercice 5.4, on a :

$$F[\exp(-at^2)](v) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2 v^2}{a}\right).$$

On en déduit :

$$F(f)(v) = \exp(-2\pi^2 v^2).$$

Comme f est réelle et paire, $F(f)$ est aussi réelle et paire et, par conséquent, son spectre de phase, qui est l'argument, est nul, et son spectre d'amplitude est égal à $|F(f)(v)| = F(f)(v)$ car $F(f)$ est positive.

La densité spectrale d'énergie est le carré du module de la transformée de Fourier donc ici :

$$|F(f)(v)|^2 = \exp(-4\pi^2 v^2).$$

$$3) K_g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t+\tau)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)g(u-\tau)du \text{ en posant } u = t + \tau.$$

Or : $g(u-\tau) = g(\tau-u)$ puisque g est paire, donc : $K_g(t) = (g * g)(\tau)$.

4) Le calcul direct de l'autocorrélation K_g , c'est-à-dire de $f * f$ est faisable (cf. exercice 4.15) mais fastidieux. Il est plus facile de passer par la transformée de Fourier car on sait que $F(f * f) = Ff \cdot Ff$ et donc :

$$F(K_f) = (Ff)^2$$

(on retrouve le fait que la transformée de Fourier de l'autocorrélation de f est la densité spectrale d'énergie).

On a donc :

$$F(K_f)(v) = \exp(-4\pi^2 v^2).$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse on obtient :

$$K_f(\tau) = \overline{F}(\exp(-4\pi^2 v^2)).$$

Et, en utilisant la formule vue au 2) avec $a = \frac{1}{4}$, il s'ensuit que :

$$K_f(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4}\right).$$

On vérifie que $K_f(0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = E_f$ (en effet, $K_f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{f(t)}dt = \|f\|_2^2$).

Exercice 5.10 Convergence vers une gaussienne

1) Soit g une fonction positive et paire telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1 \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx = \sigma^2 \quad (1)$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 en zéro

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

démontrer que le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $F(g)(\nu)$ est

$$F(g)(\nu) = 1 - 2\pi^2\sigma^2\nu^2 + \nu^2\varepsilon(\nu) \quad \text{avec } \varepsilon(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0$$

2) Soit $h_1 = g$, $h_2 = g * g$, $h_3 = g * g * g$, etc. Expliciter $F(h_n)(\nu)$ en fonction de $F(g)(\nu)$.

Chercher la limite de $F(h_n)\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire que, quelle que soit la fonction g vérifiant (1) la suite de fonctions h_n tend vers une gaussienne h

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

1) Le développement à l'ordre 2 en zéro de $G(\nu) = F(g)(\nu)$ est

$$G(\nu) = G(0) + G'(0)\nu + \frac{1}{2}G''(0)\nu^2 + \nu^2\varepsilon(\nu)$$

avec $G^{(n)}(\nu) = (-2i\pi)^n F(x^n g(x))(\nu)$ (R5.11). D'où $G^{(n)}(0) = (-2i\pi)^n F(x^n g(x))(0)$.

Or $F(x^n g(x))(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n g(x) dx$ et donc d'après (1)

$$G(0) = 1 \quad \text{et} \quad G''(0) = (-2i\pi)^2 m^2 = -4\pi^2 m^2.$$

Enfin, $G'(0) = (-2i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx$, comme g est paire, $xg(x)$ est impaire et $G'(0) = 0$.

Ce qui prouve la formule.

2) D'après (R.5.12) on a $F(h_n) = (F(g))^n$.

Pour ν fixé et n tendant vers $+\infty$, $\frac{\nu}{\sqrt{n}}$ tend vers 0, et $F(g)(0) = 1$, donc $\left(F(g)\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$ est de la forme 1^∞ , ce qui est une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, on passe en logarithme puis on utilise le développement à l'ordre 2 en zéro de $F(g)\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$.

On a

$$\ln\left(F(h_n)\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)\right) = n \ln\left(F(g)\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Comme $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et que $F(g)\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right) = 1 - 2\pi^2\sigma^2\frac{\nu^2}{n} + \frac{\nu^2}{n}\varepsilon\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$, en posant

$u = -2\pi^2\sigma^2\frac{\nu^2}{n} + \frac{\nu^2}{n}\varepsilon\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$ on obtient

$$\ln\left(F(h_n)\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n\left(-2\pi^2\sigma^2\frac{\nu^2}{n} + \frac{\nu^2}{n}\varepsilon\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)\right) = -2\pi^2\sigma^2\nu^2 + \nu^2\varepsilon\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)$$

Comme $\varepsilon\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a

$$\ln\left(F(h_n)\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2\pi^2\sigma^2\nu^2$$

C'est-à-dire

$$F(h_n)\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}$$

Or la transformée de Fourier inverse de $e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}$ est $h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ d'après l'exercice 5.4 (cf. en probabilité, théorème Limite central).

Exercice 5.11

Les fonctions considérées sont à valeurs réelles et de carré sommable. On note :

- K_f la fonction d'autocorrélation de f
- $K_{f,g}$ la fonction d'intercorrrelation de f et g .

1) Montrer que $K_{f,g}$ vérifie pour tout τ

$$K_{f,g}(\tau) = K_{g,f}(-\tau)$$

En déduire K_{f-g} à l'aide de K_f , K_g et K_{fg} .

2) On pose : $g(t) = f(t - a)$. Montrer que

$$K_f = K_g.$$

C'est-à-dire qu'une fonction et sa translatée ont même fonction d'autocorrélation.

Calculer $K_{f,g}$ en fonction de K_f .

Pour quelle valeur de τ cette fonction d'intercorrrelation est maximale et que vaut ce maximum ?

3) **Application** : Soit P_L la fonction porte de largeur L et h définie par :

$$h(t) = P_L(t - a) - P_L(t - b)$$

Calculer K_h en fonction de K_{P_L} .

Sachant que $K_{P_L} = L\Delta_L$ (cf. exercices 5.9 et 4.6), calculer K_h .

Application numérique : $L = 1$, $a = 3/2$ et $b = 1/2$.

Faire le graphe de h et celui de K_h .

1) En faisant le changement de variable $v = u + \tau$ avec $dv = du$ on obtient

$$K_{f,g}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u + \tau) \overline{f(u)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) \overline{f(v - \tau)} dv = \overline{K_{g,f}(-\tau)}$$

Mais comme les fonctions sont à valeurs réelles, on a $K_{f,g}(\tau) = K_{g,f}(-\tau)$ et K_f est paire. Par définition l'autocorrélation de la fonction réelle $f - g$ est l'intégrale de

$$(f - g)(u + \tau)(f - g)(u) \\ = f(u + \tau)f(u) - f(u + \tau)g(u) - g(u + \tau)f(u) + g(u + \tau)g(u)$$

Donc

$$K_{f-g}(\tau) = K_f(\tau) - K_{f,g}(-\tau) - K_{f,g}(\tau) + K_g(\tau)$$

2) En faisant le changement de variable $v = u + \tau$ avec $dv = du$ on a

$$K_g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u - a + \tau)f(u - a) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v + \tau)f(v) dv = K_f(\tau).$$

La fonction d'intercorrrelation $K_{f,g}$ est :

$$K_{f,g}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u - a + \tau)f(u) du = K_f(\tau - a)$$

On sait que $|K_f(\tau)| \leq K_f(0) = \|f\|_2^2$, donc l'intercorrrelation d'une fonction avec la fonction translatée de a est maximale pour $\tau = a$ (Cette propriété peut servir à évaluer la distance d'un obstacle dans le cas d'une onde radar).

3) Si $f(t) = P_L(t - a)$ et $g(t) = P_L(t - b)$, d'après 5.16) : $K_f = K_g = K_{P_L}$.

D'autre part, $g(t) = P_L(t - a - (b - a)) = f(t - (b - a))$. D'où :

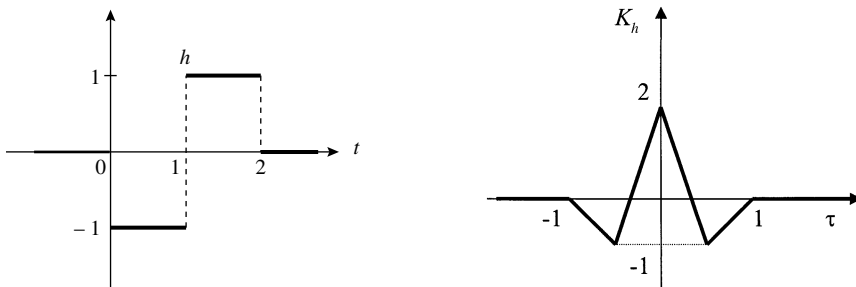
$$K_{f,g}(\tau) = K_f(\tau - (b - a))$$

D'après 1), la fonction d'autocorrélation K_h de h est donc

$$K_h(\tau) = 2K_{P_L}(\tau) - K_{P_L}(-\tau - (b - a)) - K_{P_L}(\tau - (b - a)) \\ = 2K_{P_L}(\tau) - K_{P_L}(\tau + (b - a)) - K_{P_L}(\tau - (b - a))$$

car K_{P_L} est paire.

La fonction $K_h(\tau)$ est linéaire par morceaux. En calculant K_h en -1 , 0 et 1 , on obtient le graphe de K_h .



Exercices d'entraînement

5.12 Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1) $\frac{1}{1+t^2}$ 2) $\frac{1}{2-2t+t^2}$ 3) $\frac{t}{(1+t^2)^2}$ 4) $\pi t e^{-\pi t^2}$

5) $\sin \pi t e^{-\pi t^2}$.

5.13 Calculer les transformées de Fourier des fonctions $t e^{-at^2}$ et $t^2 e^{-a|t|}$.

5.14 Utiliser la relation de Parseval pour calculer l'énergie E du signal

$$f(t) = 16 \frac{\sin 4\pi t}{4\pi t}.$$

5.15 Calculer $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3u}{u} \cdot \frac{\sin(t-u)}{t-u} du$.

5.16 Calculer la fonction d'autocorrélation temporelle K_f du signal $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

Réponses

5.12 1) $\pi e^{-2\pi|v|}$ 2) $\pi e^{-2i\pi v} e^{-2\pi|v|}$ 3) $-i\pi^2 v e^{-2\pi|v|}$ 4) $-i\pi v e^{-\pi v^2}$

5) $-i \operatorname{sh} \pi v \cdot e^{-\pi\left(v^2 + \frac{1}{4}\right)}$.

5.13 $F(t e^{-at^2})(v) = -\frac{i\pi v}{a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 v^2}{a}}$, $F(t^2 e^{-a|t|})(v) = \frac{4a(a^2 - 12\pi^2 v^2)}{(a^2 + 4\pi^2 v^2)^3}$.

5.14 $E = 64$.

5.15 $f(t) = \pi \frac{\sin t}{t}$.

5.16 $K_f(\tau) = \frac{2\pi}{\tau^2 + 4}$.

Chapitre 6

Transformation de Laplace

RAPPELS

- La transformée de Laplace de f est notée $L(f)$

$$L(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad \text{avec } p \in \mathbb{C} \quad (\text{R6.1})$$

Si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, et à croissance au plus exponentielle à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe A et M et α tels que

$$\forall t \geq A \geq 0, |f(t)| < M \exp(\alpha t)$$

alors $L(f)(p)$ est définie pour $\operatorname{Re}(p) > \alpha$.

- $L(f)(p)$ est continue pour p réel avec $p > \alpha$ et vérifie $\lim_{p \rightarrow +\infty} L(f)(p) = 0$.
- **L'abscisse de convergence** de la transformée de Laplace de f est la petite valeur de α telle que $L(f)(p)$ soit définie pour tout p vérifiant $\operatorname{Re}(p) > \alpha$.
- **La transformation de Laplace** est une **application linéaire** :

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda L(f) + \mu L(g) \quad (\text{R6.2})$$

- Si f et g ont même transformée de Laplace alors f et g sont égales presque partout sur $[0, +\infty[$. Elles sont égales partout sur $[0, +\infty[$ si elles sont continues.

- **Formule du retard**

$$\forall a > 0, \quad \boxed{L(f(t-a))(p) = e^{-ap} L(f(t))(p)} \quad (\text{R6.3})$$

- **Produit par une exponentielle**

$$\boxed{L(e^{at} f(t))(p) = L(f)(p-a)} \quad (\text{R6.4})$$

- **Changement d'échelle**

$$\forall a > 0, \quad \boxed{L(f(at))(p) = \frac{1}{a} L(f(t))\left(\frac{p}{a}\right)} \quad (\text{R6.5})$$

- **Transformée de Laplace des dérivées**

Si $f, f', f'' \dots, f^{(n)}$ sont **continues** sur $\mathbb{R}^+$ et toutes à croissance au plus exponentielle à l'infini, alors :

$$\boxed{L(f^{(n)})(p) = p^n L(f)(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)} \quad (\text{R6.6})$$

- **Dérivation de la transformée de Laplace.**

$$\boxed{\frac{d^n L(f)(p)}{dp^n} = (-1)^n L(t^n f(t))(p)} \quad (\text{R6.7})$$

- **Transformée de Laplace et convolution**

$$\boxed{L(f * g) = L(f)L(g)} \quad (\text{R6.8})$$

- **Théorème de la valeur initiale**

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow +\infty} pL(f)(p) = f(0^+)} \quad (\text{R6.9})$$

- **Théorème de la valeur finale**

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow 0^+} pL(f)(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)} \quad (\text{R6.10})$$

• Transformée de Laplace des fonctions usuelles

$$L(Y(t))(p) = \frac{1}{p} \quad (Re(p) > 0)$$

$$L(Y(t)\exp(at))(p) = \frac{1}{p-a} \quad (Re(p-a) > 0)$$

$$L(Y(t)\cos(\omega t))(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (Re(p) > 0)$$

$$L(Y(t)\sin(\omega t))(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (Re(p) > 0)$$

$$L(Y(t)t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (Re(p) > 0)$$

Exercice 6.1

Calculer la transformée de Laplace des fonctions f suivantes. Préciser l'abscisse de convergence.

1) $\sin\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)$ si $t > \frac{3\pi}{4}$, 0 sinon 2) $Y(t)\sin\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)$

3) $\sin\left(\frac{t}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ si $t > \frac{3\pi}{4}$, 0 sinon 4) $Y(t)e^t \sin\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)$

5) $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{I}_{[a, a+\varepsilon]}(t)$ où $a > 0$. Calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} L(f_\varepsilon)(p)$.

6) Transformée de Laplace d'une fonction périodique sur $\mathbb{R}^+$

Soit f la fonction causale de période T construite à partir de la fonction f_0 définie

sur $[0, T]$, nulle ailleurs. Montrer que $L(f)(p) = \frac{L(f_0)(p)}{1 - e^{-pT}}$ pour $Re(p) > 0$.

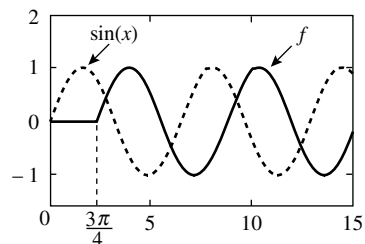
1) $f(t) = Y\left(t - \frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)$

f s'obtient à partir de $Y(t)\sin t$ par translation de $\frac{3\pi}{4}$.

Alors, avec (R6.3),

$$L(f)(p) = e^{-\frac{3\pi}{4}p} L(Y(t)\sin t)(p) = e^{-\frac{3\pi}{4}p} \frac{1}{p^2 + 1}$$

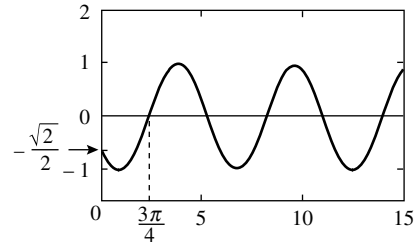
pour $p > 0$.



2) Ici f n'est pas la translatée de $Y(t)\sin t$.
On développe :

$$f(t) = Y(t) \frac{-1}{\sqrt{2}} (\sin t + \cos t)$$

d'où $L(f)(p) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{1+p}{p^2+1}$ pour $p > 0$.



3) f est la translatée de $Y(t)\sin \frac{t}{3}$ de $\frac{3\pi}{4}$, alors, avec (R6.3)

$$L(f)(p) = e^{-\frac{3\pi}{4}p} L\left(Y(t)\sin \frac{t}{3}\right)(p) = e^{-\frac{3\pi}{4}p} \frac{3}{9p^2+1} \quad (p > 0).$$

4) Avec 2) et (R6.4) : $L(f)(p) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{p}{(p-1)^2+1}$ où $p > 1$.

5) $L(f_\varepsilon)(p) = \int_a^{a+\varepsilon} \frac{e^{-pt}}{\varepsilon} dt = e^{-ap} \frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} L(f_\varepsilon)(p) = e^{-ap}$ avec p quelconque.

Mais $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(t) = 0$ si $t \neq a$ et n'est pas définie en a .

Donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} L(f_\varepsilon) \neq L\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon\right)$. On verra que, au sens des distributions, on a l'égalité car

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon = \delta_a \text{ et que } L(\delta_a)(p) = e^{-ap}.$$

$$6) \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X e^{-pt} f(t) dt.$$

Pour tout X fixé, il existe un n unique tel que $nT < X < (n+1)T$. D'où :

$$\int_0^X e^{-pt} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-pt} f(t) dt + \int_{nT}^X e^{-pt} f(t) dt.$$

Puisque f est périodique de période T et que $f = f_0$ sur $[0, T]$:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^T e^{-p(t+kT)} f(t) dt = e^{-pkT} L(f_0)(p)$$

$$\begin{aligned} \int_0^X e^{-pt} f(t) dt &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-pkT} L(f_0)(p) + \int_{nT}^X e^{-pt} f(t) dt \\ &= \frac{1 - (e^{-pT})^n}{1 - e^{-pT}} L(f_0)(p) + \int_{nT}^X e^{-pt} f(t) dt \end{aligned}$$

(car $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$). Et pour $\operatorname{Re}(p) > 0$:

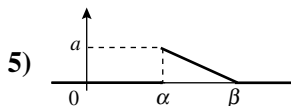
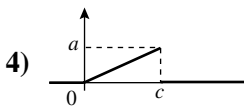
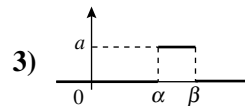
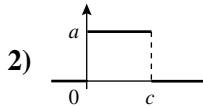
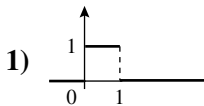
$$\left| \int_{nT}^X e^{-pt} f(t) dt \right| \leq e^{-\operatorname{Re}(p)nT} \int_{nT}^X |f(t)| dt \leq e^{-\operatorname{Re}(p)nT} \int_{nT}^{(n+1)T} |f(t)| dt$$

c'est-à-dire : $\left| \int_{nT}^X e^{-pt} f(t) dt \right| \leq e^{-\operatorname{Re}(p)nT} \int_0^T |f(t)| dt$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On a donc :

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X e^{-pt} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (e^{-pT})^n}{1 - e^{-pT}} L(f_0)(p) = \frac{L(f_0)(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Exercice 6.2

Calculer la transformée de Laplace des fonctions f_i dont les graphes suivent, à partir de la première. Préciser l'abscisse de convergence.



Toutes ces transformées de Laplace existent et sont continues pour tout p car on intègre une fonction continue sur un intervalle borné. Donc, dans ce qui suit, $L(f_i)(0) = \lim_{p \rightarrow 0} L(f_i)(p)$.

1) $L(f_1)(p) = \int_0^1 e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-p}}{p}$ si $p \neq 0$, 1 sinon.

2) $f_2(t) = a f_1\left(\frac{t}{c}\right)$ d'où en utilisant la formule d'homothétie avec $k = \frac{1}{c}$:

$$L(f_2)(p) = ac L(f_1)(cp) = \frac{a(1 - e^{-cp})}{p} \text{ si } p \neq 0, ac \text{ sinon.}$$

3) $f_3(t) = f_2(t - \alpha)$ avec $c = \beta - \alpha$ et avec (R6.3) :

$$L(f_3)(p) = e^{-\alpha p} L(f_2)(p) = e^{-\alpha p} \frac{a(1 - e^{-(\beta - \alpha)p})}{p} = \frac{a}{p} (e^{-\alpha p} - e^{-\beta p}) \text{ si } p \neq 0, a(\beta - \alpha) \text{ sinon.}$$

4) $f_4(t) = \frac{t}{c} f_2(t)$ d'où, avec la formule $L(tf)(p) = -[L(f)(p)]'$:

$$L(f_4)(p) = -\frac{1}{c} [L(f_2)(p)]' = \frac{a}{c} \frac{1 - (1 + cp)e^{-cp}}{p^2} \text{ si } p \neq 0, \frac{ac}{2} \text{ sinon.}$$

5) $f_5(t) = -f_4(t - \alpha) + f_3(t)$ avec $c = \beta - \alpha$.

$$L(f_5)(p) = -e^{-\alpha p} L(f_4)(p) + L(f_3)(p) = \frac{ae^{-\alpha p}}{(\beta - \alpha)p^2} (e^{-(\beta - \alpha)p} + (\beta - \alpha)p - 1)$$

si $p \neq 0$, $\frac{a}{2}(\beta - \alpha)$ sinon.

Exercice 6.3

On considère une fonction f ayant une transformée de Laplace.

1) Montrer que $L\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p) = \int_p^{+\infty} L(f)(u) du$ si $\frac{f(t)}{t}$ est sommable en 0.

Indication : poser $f(t) = tg(t)$ et calculer $L(f)$.

2) En déduire $L\left(\frac{Y(t)\sin t}{t}\right)(p)$, $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

3) Montrer que $L\left(\int_0^t f(s) ds\right)(p) = \frac{1}{p} L(f)(p)$ pour $Re(p) > \max(0, \alpha)$ avec α abscisse de convergence de $L(f)$.

1) $f(t) = tg(t) \Rightarrow L(f)(p) = -[L(g)(p)]'$. Posons $G = L(g)$. On a donc : $G'(p) = -L(f)(p)$, et en intégrant,

$$G(p) - G(A) = -\int_A^p L(f)(u) du \text{ avec } \lim_{A \rightarrow +\infty} G(A) = 0 \text{ (cf. rappels), d'où :}$$

$$G(p) = \int_p^{+\infty} L(f)(u) du.$$

2) $g(t) = \frac{Y(t)\sin t}{t}$ tend vers 1 quand t tend vers 0^+ donc g est sommable en 0 et

$$L\left(\frac{Y(t)\sin t}{t}\right)(p) = \int_p^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2} - \arctan p = \arctan \frac{1}{p} \text{ avec } p > 0.$$

Alors,

$$L\left(\frac{Y(t)\sin t}{t}\right)(p) = \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{t} dt = \arctan \frac{1}{p}}$$

et, $L(g)$ étant continue en 0, $\lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{t} dt = \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$.

3) On a avec les conditions sur p et en utilisant le théorème de Fubini :

$$L\left(\int_0^t f(s)ds\right)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t f(u)du\right) dt = \int_0^\infty f(u) \left(\int_u^\infty e^{-pt} dt\right) du$$

On obtient

$$L\left(\int_0^t f(s)ds\right)(p) = \int_0^\infty f(u) \frac{e^{-pu}}{p} du = \frac{1}{p} L(f)(p)$$

Exercice 6.4

Soit $J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta) d\theta$, fonction de Bessel d'ordre 0 où $t \geq 0$.

1) Montrer que J_0 est solution de l'équation différentielle :

$$tJ_0''(t) + J_0'(t) + tJ_0(t) = 0.$$

Préciser $J_0(0)$ et $J_0'(0)$.

2) Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle en supposant J_0 nulle pour $t < 0$ et calculer $L(J_0)$.

3) En déduire $L(J_0 * J_0)$ puis $J_0 * J_0$.

1) Puisque l'on intègre une fonction continue et dérivable par rapport à t sur un intervalle borné, $[0, \pi]$ on peut dériver sous le signe somme.

$$J_0'(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \sin(t \sin \theta) d\theta, \quad J_0''(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos(t \sin \theta) d\theta$$

$$J_0(t) + J_0''(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \cos(t \sin \theta) d\theta = -\frac{1}{t} J_0'(t) \text{ en intégrant } J_0' \text{ par parties, d'où le}$$

résultat. De plus, $J_0(0) = 1$ et $J_0'(0) = 0$.

2) On applique les formules (R6.6) et (R6.7) et on pose $F = L(J_0)$.

$$\text{Alors : } L(J_0'')(p) = p^2 F(p) - pJ_0(0) - J_0'(0) = p^2 F(p) - p$$

$$L(tJ_0')(p) = -[p^2 F(p) - p]' = 1 - 2pF(p) - p^2 F'(p)$$

$$L(J_0')(p) = pF(p) - 1,$$

$$L(tJ_0)(p) = -F'(p).$$

$$\text{D'où : } -(1 + p^2)F'(p) - pF(p) = 0$$

$$\text{et } F(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}} \text{ après intégration de l'équation différentielle.}$$

La constante C est déterminée par le théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = J_0(0) = 1. \text{ D'où } C = 1 \text{ et } \boxed{L(J_0)(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}}.$$

$$3) \quad L(J_0 * J_0)(p) = [L(J_0)(p)]^2 = \frac{1}{p^2 + 1} = L(Y(t) \sin t)(p) \text{ et donc}$$

$$(J_0 * J_0)(t) = Y(t) \sin t \quad \forall t \geq 0 \text{ car } J_0 * J_0 \text{ est continue.}$$

Exercice 6.5

Pour chacune des fonctions ϕ suivantes, déterminer f telle que $L(f) = \phi$.

$$1) \quad \frac{1}{(p+2)(p-1)} \quad 2) \quad \ln \frac{p^2 + a^2}{p^2} \quad 3) \quad \frac{p^2 + 7}{(p^2 + 1)^2}$$

$$1) \quad \phi(p) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2} \right) \text{ après décomposition en éléments simples. Donc,}$$

$$f(t) = \frac{1}{3} (e^t - e^{-2t}) Y(t).$$

On peut aussi traiter le problème par la convolution :

$$\phi(p) = L(e^{-2t} Y(t))(p) \cdot L(e^t Y(t))(p) = L(e^{-2t} Y(t) * e^t Y(t))(p).$$

2) Le problème n'étant pas facile à traiter directement, on calcule ϕ' .

$$\phi'(p) = 2 \left(\frac{p}{p^2 + a^2} - \frac{1}{p} \right) \text{ et on a d'une part } \phi' = L(2(\cos at - 1)Y(t)) \text{ et, d'autre part,}$$

$$\phi' = [L(f)]' = -L(tf(t)). \text{ D'où } f(t) = \frac{2(1 - \cos at)}{t} Y(t).$$

$$3) \text{ Sachant que } L(Y(t) \sin t)(p) = \frac{1}{p^2 + 1}, \quad L(Y(t) \cos t)(p) = \frac{p}{p^2 + 1},$$

$$L(Y(t)t \sin t)(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} \text{ et } L(Y(t)t \cos t)(p) = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}, \text{ on cherche une décomposi-}$$

tion de ϕ de la forme :

$$\phi(p) = a \frac{1}{p^2 + 1} + b \frac{p}{p^2 + 1} + c \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} + d \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}$$

d'où en identifiant : $a = 4$, $b = c = 0$, $d = -3$, et

$$\phi(p) = \frac{4}{p^2 + 1} - 3 \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}, \text{ ce qui donne } f(t) = (4 \sin t - 3t \cos t) Y(t).$$

La décomposition en éléments simples conduit au même résultat.

Exercice 6.6

1) Soit $f(t) = Y(t)\sqrt{t}$. Calculer $f * f$ puis $L(f * f)$ et enfin $L(f)$.

En déduire $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, valeur de la fonction gamma en $\frac{3}{2}$.

2) Soit $g(t) = \sin \sqrt{t}$. Montrer que g est la solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

3) Appliquer la transformation de Laplace à cette équation.

En déduire $L(\sin \sqrt{t})$.

$$1) (f * f)(t) = \int_0^t \sqrt{x(t-x)} dx = \int_0^t \sqrt{\frac{t^2}{4} - \left(x - \frac{t}{2}\right)^2} dx = \frac{t}{2} \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{t} - 1\right)^2} dx.$$

$$\text{En posant } \frac{2x}{t} - 1 = \cos \theta, \text{ on obtient } (f * f)(t) = \frac{t^2}{4} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi t^2}{8}.$$

$$\text{D'où } L(f * f)(p) = \frac{\pi}{4p^3} = (L(f)(p))^2 \text{ et } L(f)(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}.$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ et } L(f)(p) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-pt} dt \text{ donc } \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = L(f)(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$2) g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cos \sqrt{t} \text{ et } g''(t) = -\frac{1}{4t\sqrt{t}} \cos \sqrt{t} - \frac{1}{4t} \sin \sqrt{t} \text{ impliquent}$$

$4tg''(t) + 2g'(t) + g(t) = 0$ avec $g(0) = 0$, $g'(0)$ non définie mais g' sommable au voisinage de 0.

3) On note $L(g) = \varphi$. $L(g')$ existe et vaut $L(g') = p\varphi(p)$, $L(g'')$ existe et vaut $L(g'')(p) = -2p\varphi(p) - p^2\varphi'(p)$ compte tenu de la condition initiale en g .

On obtient : $-4p^2\varphi'(p) + (1 - 6p)\varphi(p) = 0$, équation différentielle dont la solution est :

$$\varphi(p) = K \frac{e^{-1/(4p)}}{p^{3/2}}.$$

On détermine la constante K en remarquant que : $\sin \sqrt{t} \sim \sqrt{t}$ en 0 et, qu'en vertu du théorème de la valeur initiale, $L(\sin \sqrt{t})(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} L(\sqrt{t})(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}$.

$$\text{D'où : } K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ et } \boxed{L(\sin \sqrt{t})(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{-1/(4p)}}{p^{3/2}}}.$$

Exercice 6.7 Équation différentielle : trois résolutions

On considère l'équation différentielle :

$$y''(t) - a^2 y(t) = Y(t)e^{-at} \text{ avec } a > 0. \quad (1)$$

- 1) Résoudre (1) à l'aide de la transformée de Laplace.
 - 2) Faire de même avec la transformée de Fourier.
 - 3) Déterminer l'ensemble des solutions de (1) par la méthode classique.
- Comment retrouver les solutions obtenues précédemment ?

1) Si l'on pose $L(y) = \varphi$, $y(0^+) = \alpha$, $y'(0^+) = \beta$,

alors : $L(y'')(p) = p^2 \varphi(p) - \alpha p - \beta$ et

$$\text{et : } p^2 \varphi - \alpha p - \beta - a^2 \varphi = \frac{1}{p+a}$$

$$\text{d'où : } \varphi(p) = \alpha \frac{p}{p^2 - a^2} + \beta \frac{1}{p^2 - a^2} + \frac{1}{(p^2 - a^2)(p+a)},$$

$$\text{soit : } \varphi(p) = \alpha \frac{p}{p^2 - a^2} + \beta \frac{1}{p^2 - a^2} + \frac{1}{2a} \frac{1}{p^2 - a^2} - \frac{1}{2a} \frac{1}{(p+a)^2}.$$

On obtient donc :

$$y_L(t) = Y(t) \left(\alpha \operatorname{ch} at + \left(\frac{\beta}{a} + \frac{1}{2a^2} \right) \operatorname{sh} at - \frac{1}{2a} t e^{-at} \right).$$

2) Avec la transformée de Fourier, en posant $F(y) = \hat{y}$, on a :

$$-(a^2 + 4\pi^2 v^2) \hat{y}(v) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-2i\pi vt} dt = \frac{1}{a + 2i\pi v}$$

$$\text{soit : } \hat{y}(v) = \frac{-1}{(a + 2i\pi v)(a^2 + 4\pi^2 v^2)} = -\frac{1}{2a(a^2 + 4\pi^2 v^2)} - \frac{1}{2a(a + 2i\pi v)^2}$$

et par la transformation inverse :

$$y_F(t) = -\frac{1}{4a^2} e^{-a|t|} - \frac{1}{2a} Y(t) t e^{-at} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3) Pour résoudre une équation différentielle classique, on se place sur des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, où toutes les fonctions qui interviennent sont définies et continues. La fonction au second membre de l'équation étant discontinue en 0, on résout (1) successivement sur $\mathbb{R}^-$ puis sur $\mathbb{R}^+$. Sur $\mathbb{R}^-$, $y''(t) - a^2 y(t) = 0$, et on recherche des solutions sous la forme e^{rt} .

Alors $r^2 - a^2 = 0$ et $y_-(t) = Ce^{at} + De^{-at}$ pour t dans $\mathbb{R}^-$.

Sur $\mathbb{R}^+$, la solution générale de (1) est la somme de la solution générale de l'équation homogène, $Ae^{at} + Be^{-at}$, et d'une solution particulière de (1) que l'on cherche sous la forme $\mu t e^{-at}$ car le deuxième membre est en e^{-at} et que $-a$ est racine de l'équation caractéristique. Par

identification, on obtient $\mu = -\frac{1}{2a}$ et $y_+(t) = Ae^{at} + Be^{-at} - \frac{1}{2a}te^{-at}$. D'où une infinité de solutions de la forme :

$$y_c(t) = \begin{cases} Ce^{at} + De^{-at} & \text{si } t < 0 \\ Ae^{at} + Be^{-at} - \frac{1}{2a}te^{-at} & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre (1), signifie implicitement que, parmi les solutions définies en (2), on ne retient que celles qui sont nulles sur $\mathbb{R}^-$.

Donc en choisissant dans (2), $C = D = 0$, $A = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{a} + \frac{1}{2a^2}\right)$ et $B = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\beta}{a} - \frac{1}{2a^2}\right)$,

pour assurer $y(0^+) = \alpha$, $y'(0^+) = \beta$, on trouve $y_c = y_L$.

Résoudre une équation différentielle par la transformée de Laplace revient en fait à résoudre cette équation uniquement sur $\mathbb{R}_*^+$, ou encore à tronquer toutes les fonctions qui interviennent, y compris le second membre, en les multipliant par $Y(t)$.

Chercher une solution de (1) par la transformée de Fourier suppose que y , y' , et y'' sont sommables sur $\mathbb{R}$ ou de carré sommable et, pour pouvoir utiliser (R5.10) pour y' et y'' , que y et y' sont continues sur $\mathbb{R}$.

Dans (2), la sommabilité de y sur $\mathbb{R}$ impose $A = 0$, $D = 0$. La continuité en 0 de y et y' impose de plus : $A + B = C + D$ et $a(A - B) - \frac{1}{2a} = a(C - D)$ soit $B = C = -\frac{1}{4a^2}$.

$$\text{D'où } y_c(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4a^2}e^{at} & \text{si } t < 0 \\ -\frac{1}{4a^2}e^{-at} - \frac{1}{2a}te^{-at} & \text{si } t > 0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } y_c = y_F.$$

D'une manière générale, résoudre une équation différentielle d'ordre n par la transformée de Fourier revient à chercher parmi les solutions classiques sur des intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i = 0, \dots, p$, avec $a_0 = -\infty$ et $a_p = +\infty$, celles qui sont sommables et de classe $C^{n-1}(\mathbb{R})$, donc pour l'ordre 2, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.8

Résoudre par la transformée de Laplace l'équation intégral-différentielle suivante :

$$tf''(t) + 2 \int_0^t f(u) \sin(t-u) du = \sin t \quad \text{pour } t > 0 \text{ avec } f(0) = 1.$$

Notons $\varphi = L(f)$, f étant supposée nulle pour $t < 0$.

L'équation s'écrit : $tf'(t) + 2(f * Y \sin)(t) = Y(t) \sin t$.

Alors, comme :

$$L(tf')(p) = -[L(f')(p)]' = -[p\varphi(p) - 1]' = -\varphi(p) - p\varphi'(p) \text{ et}$$

$L(h * g) = L(h)L(g)$, on obtient :

$(1 - p^2)\varphi(p) - p(p^2 + 1)\varphi'(p) = 1$, équation différentielle linéaire d'ordre 1. La solution générale de l'équation homogène vaut $\varphi_0(p) = \frac{Kp}{p^2 + 1}$ et la solution particulière, trouvée

par la méthode de variation de la constante, $\varphi_1(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$. D'où $\varphi(p) = \frac{Kp}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}$, la constante K étant déterminée par le théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p\varphi(p) = f(0) = 1 = K. \text{ Alors } \varphi(p) = \frac{p+1}{p^2+1} \text{ et } \boxed{f(t) = (\cos t + \sin t)Y(t)}.$$

Exercices d'entraînement

- 6.9** Calculer la transformée de Laplace, si elle existe, des fonctions causales f suivantes :

1) $(t-3)^2 e^{-2t}$

2) $\sin^2 \omega t$

3) $t^2 e^{-4t}$

4) $\frac{\cos t}{t}$

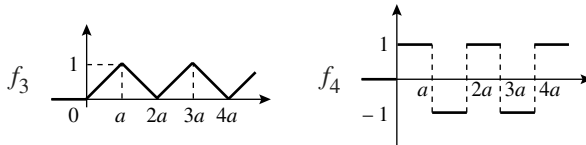
5) $\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$

6) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin t x}{1+x^2} dx.$

Déduire la valeur de cette dernière intégrale.

- 6.10** Calculer la transformée de Laplace des fonctions causales périodiques suivantes :

$$f_1(t) = |\sin t|Y(t) \quad f_2(t) = \begin{cases} \sin t & \text{sur } [0, \pi] \\ 0 & \text{sur } [\pi, 2\pi] \end{cases} \text{ et de période } 2\pi.$$



- 6.11** Évaluer les intégrales suivantes en les considérant comme des valeurs particulières de transformées de Laplace.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t \cos t e^{-3t} dt \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-\lambda t}}{t} dt \quad \text{où } \lambda > 0.$$

- 6.12** 1) Soit $f(t) = \frac{Y(t)}{\sqrt{t}}$. Calculer $f * f$ puis $L(f * f)$ et en déduire la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t}} dt \text{ et de } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \text{ Retrouver le résultat de l'exercice 6.6, en écrivant}$$

$$\text{que } f(t) = (2Y(t)\sqrt{t})'.$$

- 2) Soient $f(t) = Y(t)e^{-t}$ et $g(t) = \mathbb{I}_{[0,1]}(t)$. Calculer $L(f * g)$. En déduire $f * g$.

- 6.13** Trouver les originales f des transformées de Laplace φ suivantes :

1) $\frac{p}{p^2 + 2a\omega p + \omega^2}$

2) $\frac{p^3 - 17p^2 + 75p - 133}{(p^2 + 4)(p - 5)^3}.$

6.14 Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace les équations différentielles suivantes :

1) $f''(t) - 2f'(t) + f(t) = Y(t)e^t(1 + t^2)$ avec $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{43e}{12}$.

2) $(t-1)f''(t) + (5-4t)f'(t) - 4f(t) = 0$ avec $f(0) = 3$, $f'(0) = 12$ et f continue sur $\mathbb{R}_*$.

3) $\begin{cases} f'(t) - f(t) - 3g(t) = t \\ g'(t) - f(t) + g(t) = 0 \end{cases}$ pour $t > 0$ avec $f(0) = 0$, $g(0) = 0$.

4) $\int_0^t f'(x)e^{-t+x}dx + e^{-t} = 1$ pour $t > 0$ avec $f(0) = 4$.

Réponses

6.9 1) Attention, f n'est pas la translatée de $t^2Y(t)$. On développe $(t-3)^2$,
 $L((t-3)^2)(p) = \frac{9p^2 - 6p + 2}{p^3}$ et $L(f)(p) = L((t-3)^2)(p-2) = \frac{9p^2 + 30p + 26}{(p+2)^3}$ pour $p > 0$.

2) On linéarise et $L(f)(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4\omega^2} \right)$ pour $p > 0$.

3) $L(f)(p) = [L(e^{-4t})(p)]'' = \left[\frac{1}{p+4} \right]'' = \frac{2}{(p+4)^3}$ pour $p > -4$.

4) $L(f)$ n'existe pas : $\frac{\cos t}{t}$ n'est pas intégrable en 0.

5) Utiliser l'exercice 6.3.

$$L(f)(p) = \frac{1}{p} L\left(\frac{\sin x}{x}\right)(p) = \frac{1}{p} \arctan \frac{1}{p}.$$

6) Écrire la définition et permuter l'ordre d'intégration.

$$L(f)(p) = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} L(\sin tx)(p) dx = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)(p^2+x^2)} dx$$

et après décomposition en éléments simples, $L(f)(p) = \frac{\pi}{2(p+1)}$

et $f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin tx}{1+x^2} dx = Y(t) \frac{\pi}{2} e^{-t}$ pour $t > 0$.

6.10 On utilise l'exercice 6.1 : $L(f_i)(p) = \frac{L(f_0)(p)}{1 - e^{-pt}}$ avec $\operatorname{Re}(p) > 0$.

$$1) T = \pi, \quad L(f_0)(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{1 + p^2}, \quad L(f_1)(p) = \frac{\coth p \frac{\pi}{2}}{1 + p^2}.$$

$$2) T = 2\pi, \quad L(f_0)(p) = \frac{1 + e^{-\pi p}}{1 + p^2}, \quad L(f_2)(p) = \frac{1}{(1 + p^2)(1 - e^{-\pi p})}.$$

$$3) T = 2a, \quad L(f_0)(p) = \frac{(1 + e^{-ap})^2}{ap^2} \quad (\text{voir exercice 6.2, cas 4) et 5)),$$

$$L(f_3)(p) = \frac{(1 - e^{-ap})^2}{ap^2(1 - e^{-2ap})} = \frac{1}{ap^2} \operatorname{th} \frac{ap}{2}.$$

$$4) f_4(t) = af_3'(t), \text{ d'où : } L(f_4)(p) = apL(f_3)(p) - af_3(0) = \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{ap}{2}.$$

$$6.11 \quad I_1 = L(t \cos t)(3) = -[L(\cos t)(p)]'_{p=3} = \frac{8}{100}.$$

$$I_2 = L\left(\frac{e^{-t} - e^{-\lambda t}}{t}\right)(0) = \int_0^\infty L(e^{-t} - e^{-\lambda t})(x) dx = \ln \lambda. \quad (\text{Cf. exercice 6.3.})$$

$$6.12 \quad 1) (f * f)(t) = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{x(t-x)}} = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{t} - 1\right)^2}} = \pi Y(t) \text{ en posant } \frac{2x}{t} - 1 = u.$$

$$\text{D'où } L(f * f)(p) = \frac{\pi}{p} = (L(f)(p))^2 \text{ et } L(f)(p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} = \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t}} dt,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = L(f)(1) = \sqrt{\pi}.$$

$$2) L(f * g)(p) = L(f)(p)L(g)(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p(p+1)} = (1 - e^{-p})\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \text{ d'où par l'application inverse, } (f * g)(t) = Y(t)(1 - e^{-t}) - Y(t-1)(1 - e^{-(t-1)}) \text{ soit}$$

$$(f * g) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{sur } [0, 1] \\ e^{-t}(e-1) & \text{si } t \geq 1 \end{cases}, \quad 0 \text{ sinon. (Cf. exercice 4.6.)}$$

$$6.13 \quad 1) \text{ si } |a| < 1, p^2 + 2ap\omega + \omega^2 = (p + a\omega)^2 + \sigma^2 \text{ où } \sigma^2 = \omega^2(1 - a^2),$$

$$L^{-1}\left(\frac{p}{(p + a\omega)^2 + \sigma^2}\right)(t) = Y(t)e^{-a\omega t} \left[\cos \sigma t - \frac{a\omega}{\sigma} \sin \sigma t \right].$$

$$\text{Si } |a| > 1, p^2 + 2ap\omega + \omega^2 = (p + a\omega)^2 - \sigma^2 \text{ où } \sigma^2 = \omega^2(a^2 - 1),$$

$$L^{-1}\left(\frac{p}{(p + a\omega)^2 - \sigma^2}\right)(t) = Y(t)e^{-a\omega t} \left[\operatorname{ch} \sigma t - \frac{a\omega}{\sigma} \operatorname{sh} \sigma t \right].$$

Si $|a| = 1$, $L^{-1}\left(\frac{p}{(p+a\omega)^2}\right)(t) = Y(t)e^{-\varepsilon\omega t}(1-\varepsilon\omega t)$ où $\varepsilon = \text{sgn}(a)$.

2) $\varphi(p) = \frac{1}{p^2+4} - \frac{2}{(p-5)^3}$, $f(t) = Y(t)\left[\frac{1}{2}\sin 2t - t^2e^{5t}\right]$.

6.14 1) Poser $f'(0) = \alpha$, α sera déterminé par la valeur de $f(1)$

$$f(t) = Y(t)e^t\left[3t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{12}t^4\right].$$

2) $f(t) = 3Y(t)e^{4t}$.

3) $f(t) = Y(t)\left[\frac{1}{4}\text{ch}2t + \frac{1}{8}\text{sh}2t - \frac{1}{4}(1+t)\right]$, $g(t) = Y(t)\left[\frac{1}{8}\text{sh}2t - \frac{1}{4}t\right]$.

4) $f(t) = Y(t)[t+4]$.

Chapitre 7

Introduction à la théorie des distributions

RAPPELS

- Une fonction est dans l'ensemble D des *fonctions test* si et seulement si :
 - elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$,
 - elle est nulle hors d'un segment (intervalle fermé et borné).
- Une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions test *converge dans D* vers $\varphi \in D$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si :
 - Il existe un segment K en dehors duquel toutes les fonctions φ_n ainsi que φ sont nulles.
 - φ_n converge uniformément vers φ sur K , et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n^{(p)}$ converge uniformément vers $\varphi^{(p)}$ sur K .

Nous noterons $\lim_{n \rightarrow +\infty}^D \varphi_n = \varphi$ ou $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} \varphi$.

- Une distribution T est une *forme linéaire continue* sur D , c'est-à-dire une application de D dans $\mathbb{R}$ qui est :
 - linéaire : $\forall \varphi, \psi \in D, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T(\varphi) + \mu T(\psi)$.
 - continue : si $\lim_{n \rightarrow +\infty}^D \varphi_n = \varphi$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$.

Au lieu de $T(\varphi)$, on utilise souvent les notations $\langle T, \varphi \rangle$, ou $\langle T(t), \varphi(t) \rangle$ lorsque le besoin de faire référence à une variable réelle t se fait sentir.

- Opérations sur les distributions :
 - somme : $\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$.
 - produit par $\lambda \in \mathbb{R}$: $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$.
 - produit par une fonction g de classe C^∞ : $\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$.
 - translation : $\langle T(t - t_0), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), \varphi(t + t_0) \rangle$.
 - changement d'échelle : $\langle T(at), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \rangle$, où $a \neq 0$.
- Une fonction intégrable sur tout segment est dite *localement sommable*.
- Si f est une fonction localement sommable, la *distribution régulière* associée à f est la distribution $[f]$ définie par

$$\forall \varphi \in D, \langle [f], \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt. \quad (\text{R7.1})$$

- Une distribution qui n'est pas régulière est dite *singulière*. Exemples courants :
 - distributions de Dirac : $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$. On note aussi δ_a par $\delta(t - a)$.
 - pseudo-fonction $\frac{1}{t}$: $\langle \text{Pf} \frac{1}{t}, \varphi(t) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right)$.
- Si g est de classe C^∞ ,

$$g(t)\delta_a = g(a)\delta_a \quad (\text{R7.2})$$

Exercice 7.1

Soit φ une fonction de D . Les fonctions suivantes sont-elles dans D ?

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \text{sint}, \quad \psi_2(t) = \text{sint} \varphi(t), \\ \psi_3(t) &= \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}, \quad \psi_4(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t}, \quad \psi_5(t) = \frac{\varphi(t)}{t}. \end{aligned}$$

- 1) $\psi_1(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas nulle hors d'un segment donc $\text{sint} \notin D$.
- 2) $\psi_2(t) = \text{sint} \varphi(t)$ est de classe C^∞ comme produit de fonctions de classe C^∞ . Comme φ est nulle hors d'un segment, $\text{sint} \varphi(t)$ aussi. Donc $\text{sint} \varphi(t) \in D$.
- 3) Comme φ est de classe C^∞ , les fonctions ψ_3 et ψ_4 peuvent être prolongées par continuité en 0. En effet :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi_3(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \varphi'(0) = \psi_3(0)$$

Note : Dans tous les exercices qui suivent, a, b et c désignent des nombres réels fixés.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi_4(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0) + \varphi(0) - \varphi(-t)}{t} = 2\varphi'(0) = \psi_4(0).$$

Comme φ , elles sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^*$, et on peut démontrer en utilisant les développements limités au voisinage de 0 qu'elles sont indéfiniment dérivables en 0.

Montrons, par exemple, que ψ_3 est dérivable en 0. Pour cela, d'après la définition de la dérivation, il faut étudier l'existence de la limite suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_3(t) - \psi_3(0)}{t - 0}.$$

Or $\frac{\psi_3(t) - \psi_3(0)}{t - 0} = \frac{\varphi(t) - \varphi(0) - t\varphi'(0)}{t^2}$, pour lever l'indétermination, on fait donc un développement limité à l'ordre 2 du numérateur.

Comme
$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + t^2\varepsilon(t),$$

le numérateur est égal à $\frac{t^2}{2}\varphi''(0) + t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 avec t .

Il s'ensuit que $\psi_3'(0)$ existe et vaut $\psi_3'(0) = \frac{1}{2}\varphi''(0)$.

De même, on pourrait montrer que ψ_3'' existe en 0, etc. Nous admettrons que ψ_3 est indéfiniment dérivable en 0 et qu'elle appartient donc à $C^\infty(\mathbb{R})$.

En utilisant la même démarche, on peut démontrer que ψ_4 est de classe C^∞ .

Pour que ces fonctions soient dans D , il reste à vérifier qu'elles sont nulles hors d'un segment. Pour t assez grand, $\varphi(t) = 0$ et $\varphi(-t) = 0$, donc $\psi_4(t)$ est nulle, par contre

$\psi_3(t) = -\frac{\varphi(0)}{t}$, ψ_3 ne sera pas nulle hors d'un segment sauf si $\varphi(0) = 0$. Donc :

$$\boxed{\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \notin D \text{ et } \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} \in D}.$$

4) $\psi_5(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ ne peut être prolongée par continuité en 0 que si $\varphi(0) = 0$ et alors elle est

dans D , mais en général $\varphi(0) \neq 0$, et $\boxed{\frac{\varphi(t)}{t} \notin D}$.

Exercice 7.2

Les applications suivantes de D dans $\mathbb{R}$ sont-elles des distributions ? (on se contentera de vérifier si elles sont définies sur D tout entier et linéaires, et l'on admettra alors leur continuité).

Si c'est le cas, préciser s'il s'agit ou non d'une distribution régulière, et, dans l'affirmative, donner une fonction localement sommable à laquelle cette distribution est associée.

- 1) $\langle T_1, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(t) dt.$
- 2) $\langle T_2, \varphi \rangle = \int_0^1 |\varphi(t)| dt.$
- 3) $\langle T_3, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} t^2 \varphi(t) dt.$
- 4) $\langle T_4, \varphi \rangle = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-1} dt.$
- 5) $\langle T_5, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n).$
- 6) $\langle T_6, \varphi \rangle = \varphi(0) + \varphi'(1).$

Les applications T_1, T_3, T_5 et T_6 sont des distributions, les applications T_2 et T_4 n'en sont pas.

1) T_1 est la distribution régulière associée à la fonction localement sommable f définie par $f(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$, $f(t) = 0$ sinon.

2) T_2 n'est pas linéaire. En effet, soit par exemple φ une fonction test à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$. On a donc $\langle T_2, \varphi \rangle = \int_0^1 |\varphi(t)| dt = \int_0^1 \varphi(t) dt > 0$. Si T_2 était linéaire, on aurait en particulier $\langle T_2, -\varphi \rangle = -\langle T_2, \varphi \rangle < 0$. Comme $\langle T_2, -\varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$, il y a contradiction.

3) T_3 est la distribution régulière associée à la fonction localement sommable $Y(t)t^2$.

4) Si φ est une fonction test telle que $\varphi(1) \neq 0$, $\frac{\varphi(t)}{t-1}$ est équivalente, lorsque $t \rightarrow 1+$, à $\frac{\varphi(1)}{t-1}$ qui n'est pas intégrable au voisinage de 1. Donc $\langle T_4, \varphi \rangle$ n'est pas défini dans ce cas.

5) Soit φ une fonction test. Comme φ est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, n > b, \varphi^{(n)}(n) = 0$. La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^{(n)}(n)$ ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls est donc bien définie. La linéarité de T_5 résulte immédiatement de la linéarité de la dérivation.

Donc T_5 est bien une distribution, mais $\langle T_5, \varphi \rangle$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'une intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$, donc T_5 est singulière.

De fait, on a $T_5(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \delta^{(n)}(t-n)$ (cf. chapitre 8).

6) T_6 est la distribution singulière $\delta - \delta'_1$ (cf. chapitre 8).

Exercice 7.3

1) Si S est une distribution paire (respectivement impaire), quelle relation lie $\langle S, \varphi(-t) \rangle$ et $\langle S, \varphi(t) \rangle$ quelle que soit φ de D ?

2) Montrer que le peigne de Dirac $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-an)$ est pair. En déduire que, si g est une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, alors gS est une distribution paire si g est paire (respectivement impaire si g est impaire).

3) Soit g définie par $g(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et par $g(0) = 1$.

On admettra que g est de classe C^∞ .

Soit $T_{a,b}(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-an-b)$ un échantillonnage de la fonction g .

Simplifier l'expression de $T_{a,b}$ pour les 4 valeurs suivantes de (a, b) :

$$(a,0), \quad (\pi,0), \quad (\pi/2,0), \quad (\pi,\pi/2).$$

1) Une distribution $S(t)$ est paire si $S(-t) = S(t)$.

Or par définition $\langle S(-t), \varphi(t) \rangle = \langle S(t), \varphi(-t) \rangle$. Donc :

- S est paire si $\langle S, \varphi(-t) \rangle = \langle S, \varphi(t) \rangle$
- S est impaire si $\langle S, \varphi(-t) \rangle = -\langle S, \varphi(t) \rangle$.

2) On a $\langle S(t), \varphi(t) \rangle = \langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-an), \varphi(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(an)$, par ailleurs

$$\langle S(-t), \varphi(t) \rangle = \langle S(t), \varphi(-t) \rangle = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \varphi(-ap) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(an)$$

en posant $n = -p$.

Donc le peigne de Dirac $S(t)$ est pair.

Pour étudier la parité de la distribution gS on calcule :

$$\langle g(t)S(t), \varphi(-t) \rangle = \langle S(t), g(t) \varphi(-t) \rangle.$$

Comme S est paire, on a : $\langle S(t), g(t) \varphi(-t) \rangle = \langle S(t), g(-t) \varphi(t) \rangle$.

Si g est paire, on obtient donc : $\langle g(t)S(t), \varphi(-t) \rangle = \langle g(t)S(t), \varphi(t) \rangle$, ce qui implique gS paire (respectivement gS impaire si g est impaire).

3) Comme $g(t)\delta(t - t_0) = g(t_0)\delta(t - t_0)$, on obtient pour $b = 0$:

$$T_{a,0}(t) = \delta(t) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{\sin an}{an} \right)^2 \delta(t - an) .$$

Pour $a = \pi$, on a

$$T_{\pi,0}(t) = \delta(t) .$$

Pour $a = \pi/2$, on a, si n est pair, $n = 2p$ et $\sin \frac{2p\pi}{2} = 0$, et on a, si n est impair, $n = 2p + 1$

et $\sin \frac{(2p+1)\pi}{2} = (-1)^p$, donc :

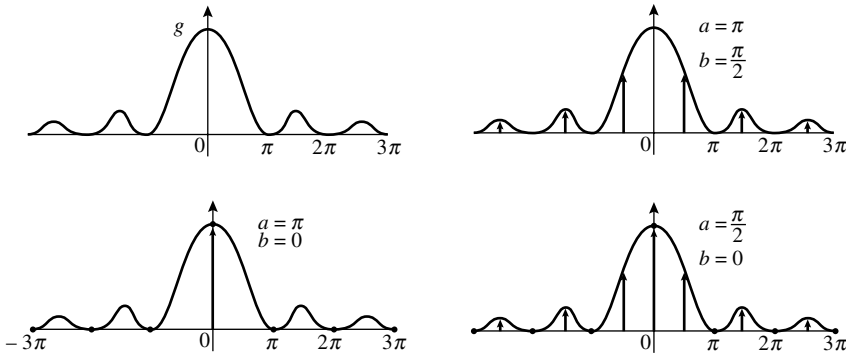
$$T_{\pi/2,0}(t) = \delta(t) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2} \right)^2 \delta(t - n\pi/2) = \delta(t) + \sum_{n \in 2\mathbb{Z}^*} + \sum_{n \in 2\mathbb{Z}+1}$$

d'où :

$$T_{\pi/2,0}(t) = \delta(t) + 0 + \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left(\frac{2}{(2p+1)\pi} \right)^2 \delta(t - (2p+1)\pi/2) .$$

Pour $a = \pi$ et $b = \pi/2$ on a :

$$T_{\pi,\pi/2}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{n\pi + \pi/2} \right)^2 \delta(t - \pi(n - 1/2)) = T_{\pi/2,0}(t) - \delta(t) .$$



Les expressions ci-dessus correspondent à différents échantillonnages de la fonction $\left(\frac{\sin t}{t} \right)^2$, certains ne donnent pas une bonne représentation de la fonction.

Exercice 7.4

1) La distribution appelée pseudo-fonction $\frac{1}{t}$, notée $Pf \frac{1}{t}$, est définie par :

$$\langle Pf \frac{1}{t}, \varphi \rangle = VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} \varphi(t) dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) dt \right) .$$

Montrer que l'on peut donner de cette distribution la définition suivante ne faisant pas intervenir de limite :

$$\langle Pf \frac{1}{t}, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

- 2) Vérifier que $t Pf \frac{1}{t}$ et $\sin t Pf \frac{1}{t}$ sont des distributions régulières mais que $\cos t Pf \frac{1}{t}$ est une distribution singulière comme $Pf \frac{1}{t}$.

- 1) En faisant le changement de variable $t = -s$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(-s)}{-s} (-ds) = - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-s)}{s} ds,$$

et donc $\langle Pf \frac{1}{t}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-t)}{t} dt \right).$

La fonction $\frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t}$ est définie et continue en $t = 0$ (cf. exercice 7.1), donc on peut passer à la limite et on a :

$$\langle Pf \frac{1}{t}, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

- 2) Vérifions que $\boxed{t Pf \frac{1}{t} = [1]}$, en effet :

$$\langle t Pf \frac{1}{t}, \varphi \rangle = \langle Pf \frac{1}{t}, t\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{t\varphi(t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{t} dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \langle 1, \varphi \rangle.$$

De même, on peut vérifier que $\sin t Pf \frac{1}{t} = \left[\frac{\sin t}{t} \right]$ car la fonction $\frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et par conséquent localement sommable.

Par contre, la fonction $\frac{\cos t}{t}$ n'est pas sommable au voisinage de 0 d'après le critère de

Riemann car $\frac{\cos t}{t} \sim \frac{1}{t}$. Il s'ensuit que $\cos t Pf \frac{1}{t}$ est une distribution singulière.

Exercices d'entraînement

- 7.5 1) Les fonctions suivantes sont-elles localement sommables ?

- 2) Sont-elles dans $L^1(\mathbb{R})$?

$$\exp(t), \exp(-|t|), at + b, \sin t, \frac{1}{1+t^2}, \frac{1}{t-a}, \frac{1}{\sqrt{|t|}}, \frac{\sin t}{t}, \frac{\cos t}{t}, \ln|t|.$$

7.6 Soit T une application de D dans $\mathbb{R}$:

$$T(\varphi) = \int_{-1}^1 (1-|t|)\varphi(t) dt + \int_1^{+\infty} \ln t \varphi(t) dt.$$

Montrer que T est une distribution régulière.

7.7 Montrer que l'application suivante de D dans $\mathbb{R}$ est une distribution :

$$T(\varphi) = \int_0^4 t^3 \varphi'(t) dt.$$

En faisant une intégration par partie, montrer que c'est la somme d'un Dirac et d'une distribution régulière.

7.8 En utilisant la définition du produit d'une distribution par une fonction de classe C^∞ , simplifier les distributions suivantes :

$$\sin(\pi t)\delta_1 \quad \sin(\pi t/4)\delta_1 \quad \left(\frac{\sin \pi t}{t}\right)\delta_0.$$

7.9 On définit les distributions singulières S_n par :

$$\langle S_n, \varphi \rangle = (-1)^{(n)} \varphi^{(n)}(0).$$

Vérifier que la distribution S_n a même parité que n .

(On verra que S_n désigne les dérivées successives de δ .)

7.10 Soit la distribution $T(t) = a\delta'(t) + b\delta(t-1)$. Calculer les produits :

- 1) $tT(t)$; 2) $t^2T(t)$; 3) $(t-1)T(t)$;
4) $t(t-1)T(t)$; 5) $t^2(t-1)T(t)$.

Réponses

7.5 1) Oui sauf $\frac{1}{t-a}$, $\frac{\cos t}{t}$.

2) Les seules sommables sur $\mathbb{R}$ sont $\exp(-|t|)$ et $\frac{1}{1+t^2}$.

7.6 Soit $f(t) = (1-|t|)P_2(t) + Y(t-1)\ln t$, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux donc localement sommable. On a :

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt \quad \text{donc } T = [f] \in D'.$$

7.7 $T(\varphi) = \left[t^3\varphi(t)\right]_0^4 - \int_0^4 3t^2\varphi(t) dt = 4^3\varphi(4) - 0 - \int_{-\infty}^{\infty} 3t^2\mathbb{1}_{[0,4]}(t)\varphi(t) dt$ donc T est la somme d'une distribution singulière et d'une distribution régulière :

$$T = 4^3\delta_4 - [3t^2\mathbb{1}_{[0,4]}(t)] = 4^3\delta(t-4) - [3t^2P_4(t-2)]$$

où P_4 est la fonction porte de largeur égale à 4.

7.8 $\sin(\pi t)\delta_1 = 0$, $\sin(\pi t/4)\delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1$, comme $\frac{\sin \pi t}{t} = \pi \frac{\sin \pi t}{\pi t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \pi$,

$$\left(\frac{\sin \pi t}{t}\right)\delta_0 = \pi \delta_0 \quad \left(\frac{\sin \pi t}{t}\right) \text{ est prolongeable par continuité en } t=0 \text{ par } \pi.$$

7.9 On a : $\frac{d^n}{dt^n}(\varphi(-t)) = (-1)^n \varphi^{(n)}(-t)$ donc :

$$\begin{aligned} \langle S_n(-t), \varphi(t) \rangle &= \langle S_n(t), \varphi(-t) \rangle = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}(\varphi(-t)) \Big|_{t=0} \\ &= (-1)^n (-1)^n \varphi^{(n)}(0) = (-1)^n \langle S_n(t), \varphi(t) \rangle, \end{aligned}$$

donc $S_n(-t) = (-1)^n S_n(t)$, et en particulier $S_0 = \delta$ est paire, $S_1 = \delta'$ impaire.

7.10 1) $-a\delta(t) + b\delta(t-1)$; 2) $b\delta(t-1)$; 3) $-a\delta(t) - a\delta'(t)$;
4) $a\delta(t)$; 5) 0.

Chapitre 8

Dérivation, convergence, convolution des distributions

RAPPELS

- Définition de la dérivée T' d'une distribution T :

$$\forall \varphi \in D, \langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad (\text{R8.1})$$

- Dérivées d'ordre supérieur :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varphi \in D, \langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle$$

En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varphi \in D, \langle \delta_a^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(a).$$

- Dérivation d'une distribution régulière $[f]$, lorsque f et f' sont localement sommables :

$$[f]' = [f'] + \sum_a (f(a^+) - f(a^-)) \delta_a \quad (\text{R8.2})$$

- Dérivation du produit d'une distribution T par une fonction g de classe C^∞ :

$$(gT)' = g'T + gT' \quad (\text{R8.3})$$

- Convergence des distributions :

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} T_\lambda = T \iff \forall \varphi \in D, \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \langle T_\lambda, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle} \quad (\text{R8.4})$$

- Convergence des dérivées :

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} T_\lambda = T \implies \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} T'_\lambda = T'} \quad (\text{R8.5})$$

- Produit de convolution de deux distributions S et T :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D \quad \langle S * T, \varphi \rangle &= \langle S(u), \langle T(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle \\ &= \langle T(u), \langle S(v), \varphi(u+v) \rangle \rangle = \langle T * S, \varphi \rangle \end{aligned}$$

(lorsque ces quantités ont un sens).

- Convolution avec des distributions de Dirac :

– Élément neutre : $\delta * T = T * \delta = T$.

– Translation : $\delta_a * T = \delta(t-a) * T(t) = T(t-a)$.

En particulier $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

- Dérivation d'un produit de convolution :

$$\boxed{(S * T)' = S' * T = S * T'}$$

En particulier $\delta' * T = T'$, et $\delta^{(n)} * T = T^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.1

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - t^2 \quad \text{pour } |t| \leq 1 \\ f(t) &= 0 \quad \text{pour } |t| > 1 \end{aligned}$$

Soit $T = [f]$ la distribution régulière associée, calculer de trois façons différentes T' , T'' , T''' en utilisant successivement (R8.1), (R8.2), et (R8.3).

- 1) Démonstration utilisant la définition (R8.1) et l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D, \quad \langle T', \varphi \rangle &= - \langle T, \varphi' \rangle = - \int_{-1}^1 (1 - t^2) \varphi'(t) dt \\ &= - \left[(1 - t^2) \varphi(t) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2t \varphi(t) dt \\ &= 0 + \langle -2t P_2(t), \varphi \rangle \end{aligned}$$

et donc :

$$T' = [-2tP_2(t)] .$$

De la même façon, on calcule T'' :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D, \langle T'', \varphi \rangle &= -\langle T', \varphi' \rangle = -\int_{-1}^1 -2t \varphi'(t) dt \\ &= [2t \varphi(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2 \varphi(t) dt \\ &= 2\varphi(1) + 2\varphi(-1) + \langle -2P_2, \varphi \rangle \end{aligned}$$

donc :

$$T'' = 2\delta_1 + 2\delta_{-1} - [2P_2(t)] .$$

Et de même :

$$\begin{aligned} \langle T''', \varphi \rangle &= -\langle T'', \varphi' \rangle = -2\varphi'(1) - 2\varphi'(-1) + \int_{-1}^1 2 \varphi'(t) dt \\ &= -2\varphi'(1) - 2\varphi'(-1) + 2\varphi(1) - 2\varphi(-1) \end{aligned}$$

donc :

$$T''' = 2\delta'_1 + 2\delta'_1 - 2\delta_{-1} + 2\delta_1 .$$

2) Démonstration utilisant (R8.2).

Pour $|t| < 1$ on a $f(t) = -2t, f''(t) = -2, f'''(t) = 0$.

Pour $|t| > 1$ $f'(t) = f''(t) = f'''(t) = 0$.

Comme $f(1) = f(-1) = 0$, la fonction f est continue et donc $T' = [f]' = [f']$ où f' est définie sur $\mathbb{R}^*$ c'est-à-dire presque partout. On retrouve $T' = [-2tP_2(t)]$.

La fonction f' est discontinue en $t = -1$ et en $t = 1$, les sauts sont :

$$f'(-1^+) - f'(-1^-) = -2(-1) - 0 = 2$$

$$f'(1^+) - f'(1^-) = 0 - (-2) = 2.$$

$$\text{Donc : } T'' = [f]'' = [-2tP_2(t)]' = -[2P_2(t)] + 2\delta_1 + 2\delta_{-1}$$

et de même

$$T''' = [f]''' = -[2P_2(t)]' + 2\delta'_1 + 2\delta'_{-1},$$

comme $[P_2(t)]' = \delta_{-1} - \delta_1$, on retrouve le résultat précédent

$$T''' = -2\delta_{-1} + 2\delta_1 + 2\delta'_{-1} + 2\delta'_1 .$$

3) La fonction $1 - t^2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc on peut appliquer (R8.3) à $T = (1 - t^2)[P_2(t)]$.

En utilisant la relation $[P_2(t)]' = \delta_{-1} - \delta_1$ on obtient :

$$T' = ((1 - t^2)[P_2(t)])' = (1 - t^2)'[P_2(t)] + (1 - t^2)(\delta_{-1} - \delta_1).$$

Et, comme $g(t)\delta_a = g(a)\delta_a$, on a : $(1 - t^2)\delta_{-1} = 0$ et $(1 - t^2)\delta_1 = 0$, donc :

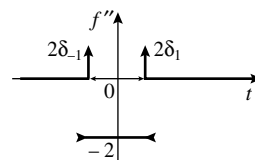
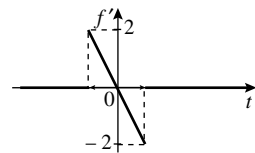
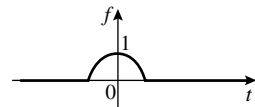
$$T' = -2t[P_2(t)].$$

De même $T'' = (-2t[P_2(t)])' = -2[P_2(t)] - 2t(\delta_{-1} - \delta_1)$

$$= -2[P_2(t)] + 2\delta_{-1} + 2\delta_1$$

et

$$T''' = -2[P_2(t)]' + 2\delta'_{-1} + 2\delta'_1 = -2(\delta_{-1} - \delta_1) + 2\delta'_{-1} + 2\delta'_1 .$$



Exercice 8.2

Calculer de trois façons différentes les dérivées première et seconde de la distribution régulière $T = [f]$ où $f(t) = Y(t)\sin t$: en utilisant successivement (R8.1), (R8.2) et (R8.3).

1) Démonstration utilisant la définition (R8.1) et l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in D, \langle T', \varphi \rangle &= -\langle T, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \sin t \varphi'(t) dt \\ &= -[\sin t \varphi(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \cos t \varphi(t) dt.\end{aligned}$$

Comme une fonction test est nulle à l'infini, cela donne :

$$\forall \varphi \in D, \langle T', \varphi \rangle = 0 + \int_0^{+\infty} \cos t \varphi(t) dt = \langle \cos t Y(t), \varphi \rangle$$

et donc

$$T' = [\cos t Y(t)].$$

De la même façon, on calcule T'' :

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in D, \langle T'', \varphi \rangle &= -\langle T', \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \cos t \varphi'(t) dt \\ &= -[\cos t \varphi(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} -\sin t \varphi(t) dt \\ &= 0 + \varphi(0) - \int_0^{+\infty} \sin t \varphi(t) dt = \langle \delta_0, \varphi \rangle + \langle -\sin t Y(t), \varphi \rangle\end{aligned}$$

donc

$$T'' = \delta_0 - [\sin t Y(t)] = \delta_0 - T.$$

$[\sin t Y(t)]$ est une des solutions de l'équation $T'' + T = \delta_0$.

2) Démonstration utilisant (R8.2). La fonction $f(t) = Y(t)\sin t$ est définie par :

$$\forall t > 0 \quad f(t) = \sin t \quad \text{donc} \quad f'(t) = \cos t \quad \text{et} \quad f''(t) = -\sin t,$$

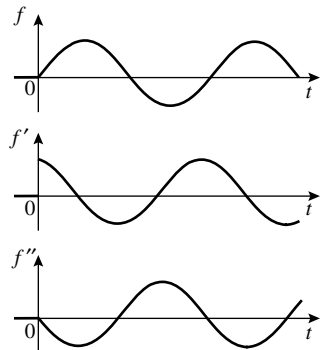
$$\forall t < 0 \quad f(t) = 0 \quad \text{donc} \quad f'(t) = 0 \quad \text{et} \quad f''(t) = 0.$$

La fonction $f(t) = Y(t)\sin t$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, et elle est aussi continue en $t = 0$ car $f(0^+) - f(0^-) = 0$, en effet $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\sin t$ tend vers 0 pour t tendant vers 0^+ . Donc d'après (R8.2), $[f]' = [f']$ où f' est définie sur $\mathbb{R}^*$ c'est-à-dire presque partout sur $\mathbb{R}$.

On retrouve $T' = [\cos t Y(t)]$.

Quant à la fonction f' , elle est discontinue en 0 et le saut est $f'(0^+) - f'(0^-) = +1$, on en déduit d'après (R8.2) que :

$$T'' = [f']' = [f''] + \delta_0 = [-\sin t Y(t)] + \delta_0.$$



3) Démonstration utilisant (R8.3).

La fonction $\sin t$ est de classe C^∞ , on peut donc écrire $T = \sin t[Y(t)]$ et comme on sait que $[Y(t)]' = \delta_0$, en appliquant (R8.3) et en utilisant la relation $g(t)\delta_a = g(a)\delta_a$ où g est une fonction de classe C^∞ , on obtient :

$$T' = (\sin t[Y(t)])' = \cos t[Y(t)] + \sin t\delta_0 = \cos t[Y(t)]$$

$$T'' = (\cos t[Y(t)])' = -\sin t[Y(t)] + \cos t\delta_0 = -\sin t[Y(t)] + \delta_0.$$

Exercice 8.3

1) Montrer que la fonction $t \mapsto \ln|t|$ est localement sommable et que

$$[\ln|t|]' = \text{Pf} \frac{1}{t}.$$

2) Soient a et b deux nombres réels non nuls, et $f_{a,b}$ la fonction définie par $f_{a,b}(t) = \ln|at|$ si $t > 0$ et $f_{a,b}(t) = \ln|bt|$ si $t < 0$.

a) Montrer que $f_{a,b}$ est localement sommable.

b) Calculer la dérivée de la distribution régulière $[f_{a,b}]$.

1) La fonction $t \mapsto \ln|t|$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Elle est donc intégrable sur tout segment ne contenant pas 0. D'autre part, $\lim_{t \rightarrow 0} |t|^{\frac{1}{2}} \ln|t| = 0$, donc au voisinage de 0, $|\ln|t|| = o(|t|^{-\frac{1}{2}})$ et $t \mapsto \ln|t|$ est donc intégrable au voisinage de 0. Cette fonction est donc localement sommable sur $\mathbb{R}$.

Soit φ une fonction test. On a :

$$\langle [\ln|t|]', \varphi(t) \rangle = - \langle \ln|t|, \varphi'(t) \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|t| \varphi'(t) dt.$$

On ne peut effectuer une intégration par parties sur $\mathbb{R}$, car $\ln|t|' = \frac{1}{t}$ qui n'est pas localement sommable en $t = 0$, mais on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|t| \varphi'(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln|t| \varphi'(t) dt \right).$$

Une intégration par parties sur chacun des intervalles $] -\infty, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, +\infty[$ donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|t| \varphi'(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\varphi(-\varepsilon) \ln \varepsilon - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt - \varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right),$$

$$\text{donc } \langle [\ln|t|]', \varphi(t) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] \ln \varepsilon + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right).$$

Par la formule des accroissements finis, il existe $\theta \in]-1, 1[$ tel que $\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = 2\varepsilon\varphi'(\theta\varepsilon)$, donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 2\varphi'(\theta\varepsilon)\varepsilon \ln \varepsilon = 2\varphi'(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varepsilon \ln \varepsilon = 0.$$

D'autre part, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right)$ n'est autre que $\langle \text{Pf} \frac{1}{t}, \varphi(t) \rangle$, d'où le résultat demandé.

2) a) On a $\ln|at| = \ln|t| + \ln|a|$ et $\ln|bt| = \ln|t| + \ln|b|$, donc $f_{a,b}(t) = \ln|t| + g_{a,b}(t)$, où $g_{a,b}$ est la fonction définie par $g_{a,b}(t) = \ln|a|$ si $t > 0$ et $g_{a,b}(t) = \ln|b|$ si $t < 0$. Cette fonction est localement sommable (fonction en escalier). Comme $t \mapsto \ln|t|$ est aussi localement sommable, $f_{a,b}$ est localement sommable.

b) On a $[f_{a,b}]' = [\ln|t|]' + [g_{a,b}]' = \text{Pf} \frac{1}{t} + [g_{a,b}]'$. D'autre part :

$$[g_{a,b}]' = \underbrace{[g'_{a,b}]}_0 + \underbrace{[g_{a,b}(0+) - g_{a,b}(0-)]}_{\ln|a| - \ln|b|} \delta = \ln \left| \frac{a}{b} \right| \delta.$$

On en déduit que $[f_{a,b}]' = \text{Pf} \frac{1}{t} + \ln \left| \frac{a}{b} \right| \delta$.

On peut remarquer que pour tout $t \neq 0$ on a $f'_{a,b}(t) = \frac{1}{t}$, mais que cela n'implique pas que $[f_{a,b}]' = \text{Pf} \frac{1}{t}$.

Exercice 8.4

1) Soit la fonction $f(t) = |\sin t|$ et soit f_0 la fonction égale à f sur $[0, \pi]$ et nulle ailleurs. Expliciter la fonction f à l'aide de f_0 et de translatées de f_0 . Tracer le graphe de f et expliciter ses dérivées première et seconde à l'aide de f_0, f'_0 et f''_0 . Tracer les graphes de f' et f'' .

2) Expliciter les dérivées première et seconde de la distribution $[f]$.

1) Si f est une fonction périodique de période T , en notant f_0 la fonction égale à f sur $[0, T]$ et nulle ailleurs, on peut écrire f sous la forme d'une somme infinie de translatées de f_0 :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0(t - nT).$$

La fonction $f(t) = |\sin t|$ est périodique de période π .

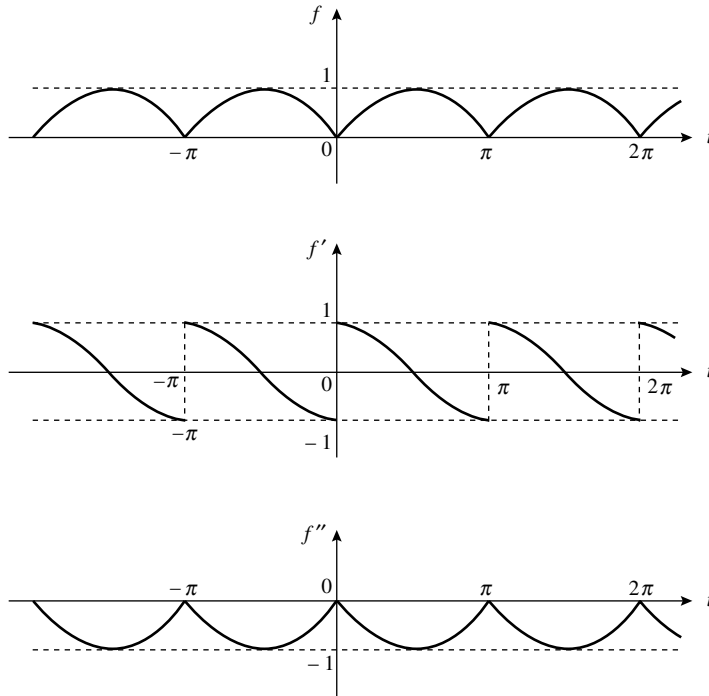
Pour $0 \leq t < \pi$, on a $f_0(t) = \sin t$ donc $f'_0(t) = \cos t$ et $f''_0(t) = -\sin t$.

On a donc
$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0(t - n\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin(t - n\pi) \mathbb{1}_{]0, \pi[}(t - n\pi).$$

Les dérivées successives sont définies pour $t \neq n\pi$ et sont aussi périodiques.

$$f'(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'_0(t - n\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos(t - n\pi) \mathbb{1}_{]0, \pi[}(t - n\pi)$$

$$f''(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f''_0(t - n\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\sin(t - n\pi) \mathbb{1}_{]0, \pi[}(t - n\pi) = -f(t) = -|\sin t|.$$



2) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on a $[f]' = [f']$ d'après (R8.2).

Par contre, la fonction f' a des sauts en $t = n\pi$.

En effet : $f'(0^+) - f'(0^-) = f'(0^+) - f'(\pi^-) = \cos 0 - \cos \pi = 2$

donc : $[f(t)]'' = [f''(t)] + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n\pi)$.

En conclusion :

$$[\sin t]' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos(t - n\pi) \mathbb{I}_{]0, \pi[}(t - n\pi)$$

$$[\sin t]'' = -[\sin t] + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n\pi).$$

Exercice 8.5 Changement d'échelle

1) Soit T une distribution quelconque, T' sa dérivée.

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ on a $(T(at))' = aT'(at)$.

2) Vérifier que $[Y(at)] = [Y(t)]$ si $a > 0$, et $[Y(at)] = [Y(-t)]$ si $a < 0$.

En déduire que $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) = \frac{1}{|a|} \delta_0$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$.

- 3) Calculer les dérivées des distributions régulières $S(t) = [Y(t)\cos t]$ et $S(\omega t) = [Y(\omega t)\cos \omega t]$, où ω est un nombre réel strictement positif, en utilisant (R8.2).

Recalculer la dérivée de $S(\omega t)$ en utilisant le résultat de la première question.

1) Pour tout $\varphi \in D$ on a $\langle (T(at))', \varphi(t) \rangle = - \langle T(at), \varphi'(t) \rangle$
 $= - \langle T(t), \frac{1}{|a|} \varphi' \left(\frac{t}{a} \right) \rangle.$

D'autre part, $\langle aT'(at), \varphi(t) \rangle = a \langle T'(at), \varphi(t) \rangle = a \langle T'(t), \frac{1}{|a|} \varphi \left(\frac{t}{a} \right) \rangle$
 $= -a \langle T(t), \left(\frac{1}{|a|} \varphi \left(\frac{t}{a} \right) \right)' \rangle.$ Comme $\left(\varphi \left(\frac{t}{a} \right) \right)' = \frac{1}{a} \varphi' \left(\frac{t}{a} \right)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle aT'(at), \varphi(t) \rangle &= -a \langle T(t), \frac{1}{|a|} \varphi' \left(\frac{t}{a} \right) \rangle \\ &= - \langle T(t), \frac{1}{|a|} \varphi' \left(\frac{t}{a} \right) \rangle = \langle (T(at))', \varphi(t) \rangle. \end{aligned}$$

2) Si $a > 0$,

$$\begin{aligned} Y(at) &= 1 & \text{si } t > 0, \\ Y(at) &= 0 & \text{si } t < 0, \end{aligned}$$

donc : $\langle [Y(at)], \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(at) \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \langle [Y(t)], \varphi(t) \rangle.$

Si $a < 0$,

$$\begin{aligned} Y(at) &= 1 & \text{si } at > 0 \Leftrightarrow t < 0, \\ Y(at) &= 0 & \text{si } at < 0 \Leftrightarrow t > 0, \end{aligned}$$

donc : $\langle [Y(at)], \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+0} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(-t) \varphi(t) dt = \langle [Y(-t)], \varphi(t) \rangle.$

On obtient les relations suivantes :

$$\boxed{[Y(at)] = [Y(t)] \text{ pour } a > 0 \text{ et } [Y(at)] = [Y(-t)] \text{ pour } a < 0}.$$

Comme $[Y(t)]' = \delta(t)$, d'après la première question, on a aussi :

$$\boxed{[Y(at)]' = a[Y]'(at) = a\delta(at)}$$

et, en particulier, $[Y(-t)]' = -\delta(-t).$

Comme la distribution de Dirac est paire on a : $\delta(-t) = \delta(t) = \delta_0.$

D'après les relations ci-dessus on a : $a\delta(at) = \delta_0$ pour $a > 0$ et $a\delta(at) = -\delta_0$ pour $a < 0.$

Donc :

$$\boxed{|a|\delta(at) = \delta(t) = \delta_0}.$$

3) En appliquant (R8.2) on obtient :

$$S'(t) = [-Y(t)\sin t] + (\cos 0^+ - 0)\delta(t) = [-Y(t)\sin t] + \delta(t),$$

$$(S(\omega t))' = [-\omega Y(\omega t)\sin \omega t] + (\cos(\omega 0^+) - 0)\delta(t) = -\omega [Y(\omega t)\sin \omega t] + \delta_0.$$

En utilisant la relation du 1) on obtient :

$$(S(\omega t))' = \omega S'(\omega t) = \omega [-Y(\omega t)\sin \omega t] + \omega \delta(\omega t).$$

On retrouve bien le résultat précédent puisque $\omega \delta(\omega t) = \delta(t) = \delta_0$.

Attention de ne pas croire que $\omega \delta(\omega t) = \omega \delta_0$!

Exercice 8.6

- 1) Soit g une fonction de classe C^∞ . En comparant les résultats obtenus en dérivant de deux façons différentes $g(t)\delta$, trouver l'expression simplifiée de $g(t)\delta'$. Application : calculer $\exp(at)\delta'$, $t\delta'$, $t^2\delta'$.
- 2) Généralisation : en utilisant la définition du produit d'une distribution par une fonction, expliciter $g(t)\delta^{(n)}$ à l'aide des $g^{(n)}(0)$, dérivées successives de g en 0 (calculer d'abord $g(t)\delta'$ et $g(t)\delta''$).

1) En utilisant (R8.2), on obtient :

$$(g(t)\delta)' = g(t)\delta' + g'(t)\delta = g(t)\delta' + g'(0)\delta. \quad (1)$$

Par ailleurs, on sait que $g(t)\delta = g(0)\delta$ et donc :

$$(g(t)\delta)' = (g(0)\delta)' = g(0)\delta'. \quad (2)$$

En comparant (1) et (2) on obtient la relation :

$$\boxed{g(t)\delta' = g(0)\delta' - g'(0)\delta}.$$

On en déduit :

$$\exp(at)\delta' = \delta' - a\delta, \quad t\delta' = -\delta, \quad t^2\delta' = 0.$$

2) En utilisant les définitions de la multiplication par une fonction de classe C^∞ et de la dérivation on obtient :

$$\forall \varphi \in D, \quad \langle g\delta', \varphi \rangle = \langle \delta', g\varphi \rangle = -\langle \delta, (g\varphi)' \rangle.$$

Or :

$$(g\varphi)' = g'\varphi + g\varphi',$$

$$\text{donc : } -\langle \delta, (g\varphi)' \rangle = -g'(0)\varphi(0) - g(0)\varphi'(0) = \langle -g'(0)\delta + g(0)\delta', \varphi \rangle$$

par conséquent :

$$\boxed{g(t)\delta' = g(0)\delta' - g'(0)\delta}.$$

De même, sachant que $(g\varphi)'' = g''\varphi + 2g'\varphi' + g\varphi''$, et que, quelle que soit φ on a :

$$\langle g\delta'', \varphi \rangle = \langle \delta'', g\varphi \rangle = (-1)^2 \langle \delta, (g\varphi)'' \rangle = g(0)\varphi''(0) + 2g'(0)\varphi'(0) + g''(0)\varphi(0)$$

on obtient :

$$\boxed{g(t)\delta'' = g(0)\delta'' - 2g'(0)\delta' + g''(0)\delta}.$$

Plus généralement, en utilisant la formule de Leibnitz :

$$\frac{d^n}{dt^n}(g\varphi) = g^{(n)}\varphi + C_n^1 g^{(n-1)}\varphi' + C_n^2 g^{(n-2)}\varphi'' + \dots + g\varphi^{(n)}$$

et : $\forall \varphi \in D, \langle g\delta^{(n)}, \varphi \rangle = \langle \delta^{(n)}, g\varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta, (g\varphi)^{(n)} \rangle$

on a :

$$\langle g\delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \sum_{p=0}^n C_n^p g^{(p)}(0) \varphi^{(n-p)}(0) = \sum_{p=0}^n (-1)^{2n+p} C_n^p \langle g^{(p)}(0) \delta^{(n-p)}, \varphi \rangle$$

d'où :

$$g(t)\delta^{(n)} = \sum_{p=0}^n (-1)^p C_n^p g^{(p)}(0) \delta^{(n-p)}.$$

Exercice 8.7

- 1) Sachant que l'équation $tT = 0$, où T est une distribution inconnue, a une infinité de solutions, de la forme $T = A\delta$, où A est une constante arbitraire, trouver toutes les solutions de l'équation ci-dessous :

$$tT = [\sin t].$$

- 2) Peut-on dire que $\left[\frac{\cos t}{t} \right]$ est solution de l'équation $tT = [\cos t]$?

Donner toutes les solutions de cette équation.

- 3) Peut-on dire que $\frac{\delta}{t}$ est solution de l'équation $tT = \delta$?

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, trouver une solution particulière, puis toutes les solutions de l'équation.

- 4) Soit $a \neq b$. Dédurre de ce qui précède les solutions des équations :

a) $(t-a)T = 0$, b) $(t-b)T = \delta_a$, c) $(t-a)(t-b)T = 0$.

- 5) Sachant que les solutions de l'équation $t^2T = 0$ sont les distributions de la forme $T = A\delta + B\delta'$, où A et B sont des constantes arbitraires, trouver toutes les solutions de l'équation $(t-a)^2T = 0$.

1) D'une façon générale, les solutions d'une équation linéaire non homogène (avec second membre) sont la somme d'une solution particulière de l'équation non homogène et de la solution générale de l'équation homogène (sans second membre). Vérifions-le dans le cas particulier considéré.

Soit S une distribution connue, on cherche T telle que : $tT = S$.

Si on connaît une solution particulière T_0 alors : $tT_0 = S$.

En faisant la différence des deux équations, on obtient $t(T - T_0) = 0$, et donc la différence entre la solution générale et la solution particulière vérifie l'équation homogène. Donc $T - T_0 = A\delta$ d'où :

$$T = T_0 + A\delta.$$

Il est facile de vérifier que $\left[\frac{\sin t}{t}\right]$ est une solution, donc toutes les solutions sont de la

forme :

$$T = \left[\frac{\sin t}{t}\right] + A\delta.$$

2) La fonction $\frac{\cos t}{t}$ n'est pas localement sommable au voisinage de 0, donc elle ne peut définir une distribution régulière. Par contre, il est facile de vérifier que $\cos t \operatorname{Pf} \frac{1}{t}$ est solu-

tion de l'équation, et donc

$$T = \cos t \operatorname{Pf} \frac{1}{t} + A\delta.$$

3) L'écriture $\frac{\delta}{t}$ n'a pas de sens car la fonction $\frac{1}{t}$ n'est pas définie en 0 et *a fortiori* elle n'est pas de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Cependant dans l'exercice précédent on a vu que $t\delta' = -\delta$, donc l'équation $tT = \delta$ a une solution particulière $T_0 = -\delta'$, et toutes les solutions sont de la forme $T = -\delta' + A\delta$.

4) a) Une translation de $-a$ donne $(t - a + a)T(t + a) = tT(t + a) = 0$. Cette dernière équation a pour solution $T(t + a) = A\delta(t)$. Après une translation de a des deux membres, on obtient $T(t) = A\delta(t - a)$ qui peut aussi s'écrire :

$$T = A\delta_a.$$

b) Puisque $a \neq b$, $\frac{\delta_a}{t-b} = \frac{\delta_a}{a-b}$ est solution. Toutes les solutions sont donc de la forme :

$$T = \frac{\delta_a}{a-b} + A\delta_b.$$

c) Soit $S = (t - b)T$, alors $(t - a)(t - b)T = 0 \Leftrightarrow (t - a)S = 0$ et donc $S = C\delta_a$ où C est une constante arbitraire.

Il faut donc résoudre maintenant l'équation $(t - b)T = C\delta_a$.

Comme $a \neq b$, il y a une solution particulière $T_0 = C \frac{\delta_a}{t-b} = C \frac{\delta_a}{a-b}$.

La solution générale est $T = T_0 + B\delta_b = A\delta_a + B\delta_b$ où A et B sont deux constantes arbitraires.

5) Comme précédemment, en translatant de $-a$ on obtient :

$$(t - a + a)^2 T(t + a) = t^2 T(t + a) = 0.$$

Cette équation a pour solution $T(t + a) = A\delta(t) + B\delta'(t)$. Après une translation de a des deux membres, on obtient :

$$T(t) = A\delta(t - a) + B\delta'(t - a), \text{ qui peut aussi s'écrire : } \boxed{T = A\delta_a + B\delta'_a}.$$

Exercice 8.8

1) Montrer que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$, la quantité :

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt - \frac{2}{\varepsilon} \varphi(0)$$

tend vers une limite finie, que l'on déterminera, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

2) En déduire que la limite au sens des distributions, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, des distributions :

$$T_{\varepsilon}(t) = \left[\frac{Y(-t - \varepsilon) + Y(t - \varepsilon)}{t^2} \right] - \frac{2}{\varepsilon} \delta(t)$$

n'est autre que $-\left(\text{Pf} \frac{1}{t}\right)'$.

Cette limite est par définition la pseudo-fonction $\text{Pf} \frac{1}{t^2}$.

1) Calculons les intégrales par parties, en posant $U = \varphi(t)$ et $dV = \frac{dt}{t^2}$. On a alors $dU =$

$\varphi'(t)dt$ et $V = -\frac{1}{t}$ et il vient :

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \varphi(t) \right]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(t)}{t} dt = \frac{1}{\varepsilon} \varphi(-\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(t)}{t} dt,$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \varphi(t) \right]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t} dt = \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t} dt,$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt - \frac{2}{\varepsilon} \varphi(0) = \frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon) - 2\varphi(0)}{\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t} dt.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, la quantité $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t} dt$ tend vers une limite finie, qui n'est

autre que $\left\langle \text{Pf} \frac{1}{t}, \varphi'(t) \right\rangle$. D'autre part, la formule des accroissements finis permet d'écrire :

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon), \quad \varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon)$$

et donc :
$$\frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon) - 2\varphi(0)}{\varepsilon} = o(1),$$

donc cette quantité tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Il s'ensuit que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt - \frac{2}{\varepsilon} \varphi(0) \right) = \left\langle Pf \frac{1}{t}, \varphi'(t) \right\rangle.$$

2) On a, pour toute fonction test $\varphi \in D$:

$$\begin{aligned} \langle T_\varepsilon(t), \varphi(t) \rangle &= \left\langle \left[\frac{Y(-t-\varepsilon) + Y(t-\varepsilon)}{t^2} \right] - \frac{2}{\varepsilon} \delta(t), \varphi(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \left[\frac{Y(-t-\varepsilon)}{t^2} \right], \varphi(t) \right\rangle + \left\langle \left[\frac{Y(t-\varepsilon)}{t^2} \right], \varphi(t) \right\rangle - \frac{2}{\varepsilon} \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y(-t-\varepsilon)\varphi(t)}{t^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y(t-\varepsilon)\varphi(t)}{t^2} dt - \frac{2}{\varepsilon} \varphi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt - \frac{2}{\varepsilon} \varphi(0). \end{aligned}$$

Cette quantité tendant, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, vers :

$$\left\langle Pf \frac{1}{t}, \varphi'(t) \right\rangle = \left\langle -\left(Pf \frac{1}{t} \right)', \varphi(t) \right\rangle,$$

on en déduit que :
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} T_\varepsilon(t) = -\left(Pf \frac{1}{t} \right)'.$$

Exercice 8.9

Soit Ci la fonction appelée cosinus intégral, définie sur $\mathbb{R}^*$, paire, et telle que, pour $t < 0$, on ait :

$$Ci(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\cos(\theta)}{\theta} d\theta.$$

- 1) Calculer la dérivée de la fonction Ci pour $t < 0$ et pour $t > 0$.
- 2) Montrer que Ci est sommable sur tout segment. Soit $[Ci]$ la distribution régulière associée. Montrer que sa dérivée est $[Ci(t)]' = \cos t Pf \frac{1}{t}$.

1) Pour $t < 0$, on dérive une intégrale par rapport à sa borne supérieure, et donc :

$$\frac{d}{dt} \text{Ci}(t) = \frac{\cos t}{t}.$$

Par ailleurs, on sait que la dérivée d'une fonction paire est impaire, donc :

$$\text{pour } t > 0, \quad \frac{d}{dt} \text{Ci}(t) = -\left(\frac{d}{dt} \text{Ci}\right)(-t) = -\frac{\cos(-t)}{-t} = \frac{\cos t}{t}.$$

On a donc pour tout t de $\mathbb{R}^*$: $\frac{d}{dt} \text{Ci}(t) = \frac{\cos t}{t}$.

2) Comme Ci est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, elle y est continue donc sommable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^*$. Il reste à montrer que Ci est sommable au voisinage de 0, et, comme Ci est paire, il suffit de montrer l'existence de $\int_{-\varepsilon}^0 \text{Ci}(t) dt$ pour un nombre $\varepsilon > 0$. On peut donc chercher à préciser le comportement de $\text{Ci}(t)$ au voisinage de 0 pour $t < 0$. On peut écrire pour $t < 0$:

$$\text{Ci}(t) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} \frac{\cos \theta}{\theta} d\theta + \int_{-\pi/2}^t \frac{\cos \theta}{\theta} d\theta = \text{Ci}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \int_{-\pi/2}^t \frac{\cos \theta}{\theta} d\theta. \quad (1)$$

Puisqu'une fonction constante est sommable sur $[-\varepsilon, 0]$, il reste à montrer que la fonction définie par la dernière intégrale est aussi sommable sur $[-\varepsilon, 0]$. Or pour $-\pi/2 < -\varepsilon$, comme $-\varepsilon < t < 0$, et que $-\pi/2 < \theta < t$,

$$\text{on a : } 0 < \cos \theta < 1, \text{ donc : } \int_{-\pi/2}^t \frac{1}{\theta} d\theta < \int_{-\pi/2}^t \frac{\cos \theta}{\theta} d\theta < 0,$$

$$\text{ou encore : } \ln|t| - \ln \frac{\pi}{2} < \int_{-\pi/2}^t \frac{\cos \theta}{\theta} d\theta < 0. \quad (2)$$

On sait que la fonction $\ln|t|$ est sommable sur $[-\varepsilon, 0]$ ainsi que toute fonction constante. La fonction $\int_{-\pi/2}^t \frac{\cos \theta}{\theta} d\theta$ est négative et minorée par une fonction sommable sur $[-\varepsilon, 0]$, par conséquent elle est aussi sommable sur $[\varepsilon, 0]$.

Donc $\text{Ci}(t)$ n'est pas définie en 0, mais elle est sommable au voisinage de 0 et même sur tout segment de $\mathbb{R}$: elle définit bien une distribution régulière.

Sa dérivée $[\text{Ci}]'$ est définie par :

$$\langle [\text{Ci}]', \varphi \rangle = - \langle [\text{Ci}], \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Ci}(t) \varphi'(t) dt$$

ou plutôt, puisque $\text{Ci}(t)$ n'est pas définie en 0, par :

$$\langle [\text{Ci}]', \varphi \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \text{Ci}(t) \varphi'(t) dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \text{Ci}(t) \varphi'(t) dt \right).$$

En intégrant par parties, et en utilisant la parité de Ci et le fait que φ est nulle hors d'un segment, on obtient :

$$\langle [\text{Ci}]', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \text{Ci}(\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \text{Ci}(t) \varphi'(t) dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \text{Ci}(t) \varphi'(t) dt \right).$$

D'après la définition de la dérivée, on a vu (cf. exercice 7.1) que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))}{\varepsilon} = 2\varphi'(0).$$

Par ailleurs, en utilisant les relations (1) et (2) on obtient :

$$\ln|t| - \ln \frac{\pi}{2} < \text{Ci}(t) - \text{Ci}\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \quad \text{pour } -\pi/2 < t < 0.$$

On en déduit : $\varepsilon \ln|\varepsilon| - \varepsilon \ln \frac{\pi}{2} + \varepsilon \text{Ci}\left(\frac{\pi}{2}\right) < \varepsilon \text{Ci}(\varepsilon) < \varepsilon \text{Ci}\left(\frac{\pi}{2}\right),$

et donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \text{Ci}(\varepsilon) = 0$. Par conséquent $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))}{\varepsilon} \varepsilon \text{Ci}(\varepsilon) = 0$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \langle [\text{Ci}]', \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \text{Ci}'(t) \varphi(t) dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \text{Ci}'(t) \varphi(t) dt \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\cos t}{t} \varphi(t) dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \varphi(t) dt \right) \\ &= \langle Pf \frac{1}{t}, \cos t \varphi(t) \rangle = \langle \cos t Pf \frac{1}{t}, \varphi(t) \rangle. \end{aligned}$$

Exercice 8.10

Étudier la convergence pour n tendant vers $+\infty$ des distributions régulières associées aux fonctions f_n localement sommables, suivantes :

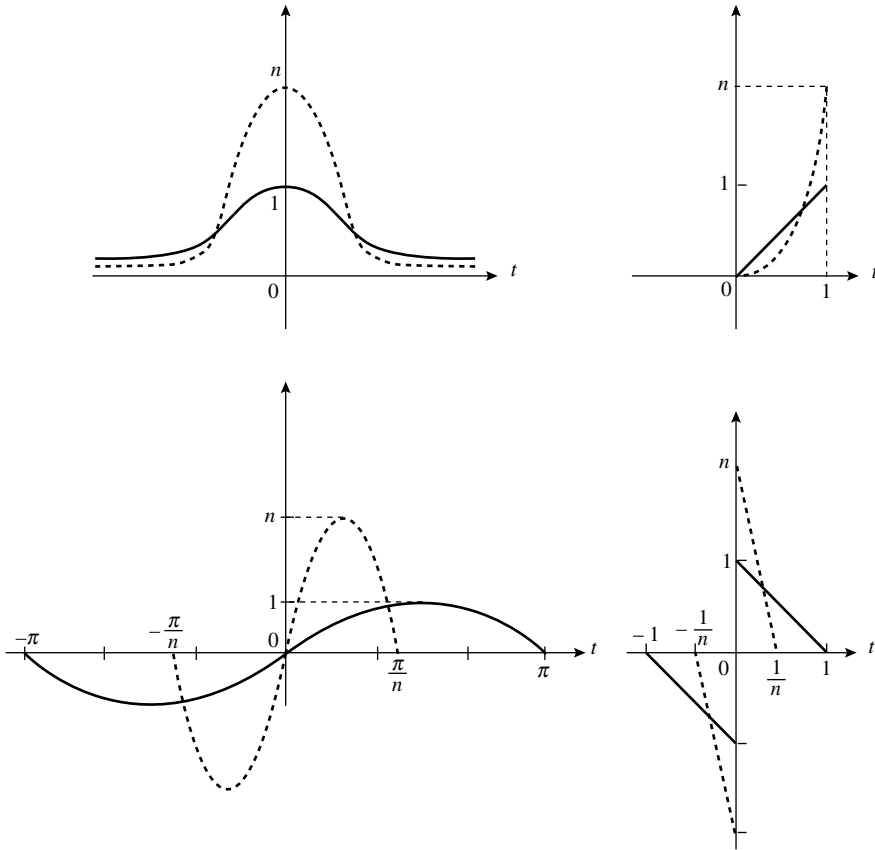
1) $\frac{n}{1+n^2 t^2}$

2) $nt^n \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$

3) $n^2 \sin nt \mathbb{1}_{\left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]}(t)$

4) $n^2 (1-|nt|) \text{sgn} t \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(t)$

(on tracera auparavant les graphes de ces fonctions).



1) On utilise le changement de variable $u = nt$, on a donc :

$$\forall \varphi \in D \quad \left\langle \frac{n}{1+n^2 t^2}, \varphi(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2 t^2} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \varphi\left(\frac{u}{n}\right) du.$$

Pour prouver que la limite de cette intégrale impropre est égale à l'intégrale de la limite, on utilise le théorème de convergence dominée.

Comme toute fonction test est bornée, la fonction sous l'intégrale est bornée par la fonction sommable $\frac{M}{1+u^2}$, et, en appliquant le théorème, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \varphi\left(\frac{u}{n}\right) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} \varphi(0) du$$

et comme $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du = [\arctan u]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$, on en déduit que :

$$\forall \varphi \in D \quad \left\langle \frac{n}{1+n^2 t^2}, \varphi(t) \right\rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi \varphi(0) = \pi \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

on a donc :

$$\boxed{\frac{n}{1+n^2 t^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} \pi \delta_0}.$$

2) On utilise une intégration par parties :

$$\langle nt^n \mathbb{I}_{[0,1]}(t), \varphi(t) \rangle = \int_0^1 nt^n \varphi(t) dt = \left[\frac{nt^{n+1}}{n+1} \varphi(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{nt^{n+1}}{n+1} \varphi'(t) dt = \frac{n}{n+1} \varphi(1) - J_n.$$

L'intégrale J_n tend vers 0 d'après le théorème de convergence dominée. En effet, sur $[0,1]$,

on a $|t^{n+1}| \leq 1$ et donc $\left| \frac{n}{n+1} t^{n+1} \varphi'(t) \right| \leq M$ puisque toute fonction test est bornée.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et comme, sur $[0,1]$ la quantité t^{n+1} converge vers 0

presque partout, on en déduit que J_n tend vers 0.

Donc : $\forall \varphi \in D \quad \langle nt^n \mathbb{I}_{[0,1]}(t), \varphi(t) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(1) = \langle \delta_1, \varphi \rangle$

c'est-à-dire :

$$nt^n \mathbb{I}_{[0,1]}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} \delta_1.$$

3) D'après l'allure des graphes des fonctions, on peut penser que la suite tend au sens des distributions vers $k\delta'_0$.

Première méthode : pour faire intervenir φ' , on fait une intégration par parties. On a :

$$\langle f_n(t), \varphi(t) \rangle = \langle n^2 \sin nt \mathbb{I}_{\left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]}(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} n^2 \sin nt \varphi(t) dt.$$

On obtient : $\langle f_n(t), \varphi(t) \rangle = \left[-n \cos nt \varphi(t) \right]_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} - \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} -n \cos nt \varphi'(t) dt.$

On a : $\left[-n \cos nt \varphi(t) \right]_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} = n \left(\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{\pi}{n}\right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi \varphi'(0)$

car, en posant $\varepsilon = \pi/n$, d'après la définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0) + \varphi(0) - \varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varphi'(0)}{2} = \varphi'(0). \quad (1)$$

Par ailleurs, en utilisant le théorème de convergence dominée :

$$\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} n \cos nt \varphi'(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos u \varphi'\left(\frac{u}{n}\right) du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u \varphi'(0) du = 0 \cdot \varphi'(0).$$

Donc :

$$[n^2 \sin nt \mathbb{I}_{\left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]}(t)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} -2\pi \delta'_0.$$

Seconde méthode : on peut utiliser l'imparité des fonctions f_n :

$$\langle f_n(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_n(t) \varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} f_n(t) \varphi(t) dt.$$

On a $\int_{-\infty}^0 f_n(t) \varphi(t) dt = \int_{\infty}^0 -f_n(-u) \varphi(-u) du$ et comme f_n est impaire et qu'une variable d'intégration est muette, on obtient :

$$\langle f_n(t), \varphi(t) \rangle = \int_0^{+\infty} f_n(t) (\varphi(t) - \varphi(-t)) dt$$

d'où, en posant $u = nt$:

$$\langle f_n(t), \varphi(t) \rangle = \int_0^{\pi} n \sin u \left(\varphi\left(\frac{u}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{u}{n}\right) \right) du.$$

Si $|u| \leq \pi$, alors $\varepsilon = \frac{u}{n}$ tend vers 0 et donc d'après la définition de la dérivée (1) :

$$2u \sin u \frac{n}{2u} \left(\varphi\left(\frac{u}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{u}{n}\right) \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2u \sin u \varphi'(0).$$

Comme :
$$\int_0^{\pi} 2u \sin u du = [-2u \cos u]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \cos u du = 2\pi + 0$$

on en déduit :

$$\langle n^2 \sin nt \mathbb{I}_{\left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]}(t), \varphi(t) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\pi \varphi'(0) = -2\pi < \delta', \varphi >$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{[n^2 \sin nt \mathbb{I}_{\left[-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]}(t)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} -2\pi \delta'_0}.$$

4) On peut utiliser, comme dans l'exercice précédent, l'imparité des fonctions f_n :

$$\langle f_n(t), \varphi(t) \rangle = \int_0^{+\infty} f_n(t) (\varphi(t) - \varphi(-t)) dt$$

$$\begin{aligned} \langle f_n(t), \varphi(t) \rangle &= \int_0^{1/n} n^2 (1-nt) (\varphi(t) - \varphi(-t)) dt \\ &= \int_0^1 n(1-u) \left(\varphi\left(\frac{u}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{u}{n}\right) \right) du. \end{aligned}$$

D'après la définition de la dérivée (1) et le théorème de convergence dominée on a :

$$\langle f_n(t), \varphi(t) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow 0} 2\varphi'(0) \int_0^1 (1-u) u du = \frac{1}{3} \varphi'(0)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{[n^2 (1-|nt|) \operatorname{sgn} t \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(t)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D'} -\frac{1}{3} \delta'(t)}.$$

Exercice 8.11

- 1) Vérifier que la fonction
- u
- définie par :

$$u(x) = \sqrt{1-x^2} \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$$

est sommable.

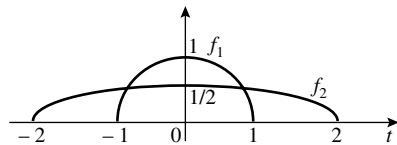
- 2) Expliciter les fonctions suivantes pour
- $n > 1$
- puis tracer leurs graphes :

$$f_n(t) = \frac{1}{n} u\left(\frac{t}{n}\right) \quad g_n(t) = u\left(\frac{t}{n}\right) \quad h_n(t) = n u(nt)$$

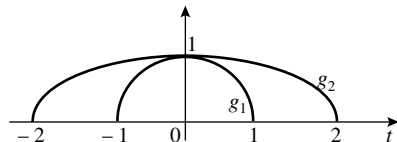
- 3) Étudier la convergence pour
- n
- tendant vers
- $+\infty$
- des trois suites de distributions régulières correspondantes.

- 1) Comme la fonction
- u
- est définie et continue sur
- $\mathbb{R}$
- et nulle hors du segment
- $[-1, 1]$
- , elle est sommable sur
- $\mathbb{R}$
- .

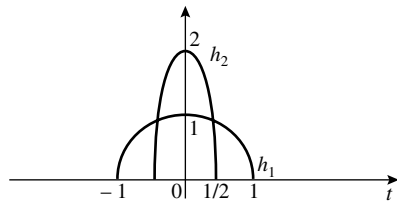
$$2) \text{ On a } f_n(t) = \frac{\sqrt{n^2 - t^2}}{n^2} \mathbb{I}_{[-n, n]}(t)$$



$$g_n(t) = \frac{\sqrt{n^2 - t^2}}{n} \mathbb{I}_{[-n, n]}(t)$$



$$h_n(t) = n \sqrt{1 - n^2 t^2} \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(t)$$



- 3) Comme $|f_n(t)| = \left| \frac{\sqrt{n^2 - t^2}}{n^2} \mathbb{I}_{[-n, n]}(t) \right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, les fonctions f_n convergent uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$, dans ce cas les distributions régulières $[f_n]$ convergent vers la distribution nulle. En effet, soit $[-A, A]$ un segment en dehors duquel φ est nulle :

$$|\langle f_n(t), \varphi(t) \rangle| = \left| \int_{-n}^n \frac{\sqrt{n^2 - t^2}}{n^2} \varphi(t) dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_{-A}^A |\varphi(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\sqrt{n^2 - t^2}}{n^2} \mathbb{I}_{[-n, n]}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} 0}.$$

Par contre ici, $g_n(t) = \frac{\sqrt{n^2 - t^2}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, les fonctions g_n ne convergent pas uniformément vers 1 sur $\mathbb{R}$, mais comme elles convergent uniformément vers 1 sur tout intervalle borné (cf. exercice 1.5), les distributions régulières $[g_n]$ convergent vers la distribution constante et égale à 1. On peut d'ailleurs le vérifier directement en utilisant le théorème de convergence dominée :

$$\langle g_n(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-A}^A \frac{\sqrt{n^2 - t^2}}{n} \varphi(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{-A}^A \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt,$$

et donc :

$$\boxed{\frac{\sqrt{n^2 - t^2}}{n} \mathbb{I}_{[-n, n]}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} 1}.$$

Pour montrer que les fonctions h_n tendent au sens des distributions vers un Dirac en 0, on peut procéder comme dans l'exercice 8.10, 1) et utiliser le changement de variable $y = nt$, on a alors :

$$\forall \varphi \in D \quad \langle h_n(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} n u(nt) \varphi(t) dt = \int_{-1}^1 u(x) \varphi\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

Comme $|x| \leq 1$, et que les fonctions tests sont continues, lorsque n tend vers $+\infty$ on obtient :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \varphi\left(\frac{x}{n}\right) dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi(0) \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

et comme :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

on en déduit que :

$$\forall \varphi \in D \quad \langle h_n(t), \varphi(t) \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2} \varphi(0) = \frac{\pi}{2} \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Donc :

$$\boxed{n \sqrt{1 - n^2 t^2} \mathbb{I}_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} \frac{\pi}{2} \delta_0}.$$

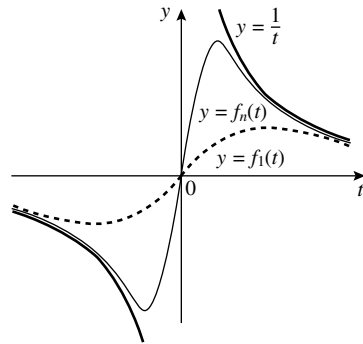
Exercice 8.12

- 1) Montrer que les fonctions f_n suivantes sont localement sommables :

$$f_n(t) = \frac{1 - \exp(-n^2 t^2)}{t}.$$

- 2) Étudier la limite T lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite de distributions régulières associées. (On peut soit montrer directement que $T = Pf \frac{1}{t}$ en utilisant l'exercice 7.4, soit chercher d'abord la limite de $t[f_n]$ et utiliser l'exercice 8.7.)

1) Les fonctions f_n ne sont pas définies en 0, mais un développement limité à l'ordre 1 au moins, au voisinage de 0, permet de lever l'indétermination, et montre qu'on peut prolonger f_n par continuité par 0 en 0. Les fonctions f_n étant continues sur $\mathbb{R}$, elles sont localement sommables.



- 2) a) **Première méthode** : utilisons le fait que f_n est impaire, on a donc :

$$\begin{aligned} \langle f_n(t), \varphi(t) \rangle &= \int_0^{+\infty} f_n(t) (\varphi(t) - \varphi(-t)) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \exp(-n^2 t^2)}{t} (\varphi(t) - \varphi(-t)) dt. \end{aligned}$$

La fonction $\frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t}$ est définie continue sur $\mathbb{R}$, nulle hors de $[-A, A]$ (cf. exercice 7.1),

et comme $\exp(-n^2 t^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on en déduit que :

$$\int_0^A \frac{\exp(-n^2 t^2)}{t} (\varphi(t) - \varphi(-t)) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

$$\text{Donc : } \langle f_n(t), \varphi(t) \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} (\varphi(t) - \varphi(-t)) dt = \langle Pf \frac{1}{t}, \varphi(t) \rangle$$

en utilisant l'exercice 7.4. On a donc : $\boxed{\left[\frac{1 - \exp(-n^2 t^2)}{t} \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} Pf \frac{1}{t}}$.

- b) **Seconde méthode** : étudions d'abord la limite de $[tf_n(t)]$, on a :

$$\langle tf_n(t), \varphi(t) \rangle = \langle 1 - \exp(-n^2 t^2), \varphi(t) \rangle = \int_{-A}^A (1 - \exp(-n^2 t^2)) \varphi(t) dt.$$

Comme $\exp(-n^2 t^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on en déduit que $[tf_n(t)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} 1$;

en effet : $\langle tf_n(t), \varphi(t) \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{-A}^A \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \langle 1, \varphi \rangle$.

D'après (R8.4), la limite T de $[f_n(t)]$ doit donc vérifier $tT = 1$. On a vu que les solutions de cette équation sont $T = Pf \frac{1}{t} + a\delta$, avec a réel (cf. exercice 8.7).

Comme $[f_n]$ est impaire, sa limite doit être impaire aussi, or la distribution de Dirac en 0 est

paire, donc : $\boxed{T = Pf \frac{1}{t}}$.

Exercice 8.13

Pour tout entier positif n , soit la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = n^3 t \exp(-n^2 t^2)$$

et soit $[f_n]$ la distribution régulière associée. Montrer que la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de cette suite de distributions est $A\delta'$, où A est une constante à déterminer.

(On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \sqrt{\pi}$.)

Pour toute fonction test φ , on a :

$$\langle [f_n], \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} n^3 t \exp(-n^2 t^2) \varphi(t) dt.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\langle [f_n], \varphi \rangle = \left[-\frac{n}{2} \exp(-n^2 t^2) \varphi(t) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{n}{2} \exp(-n^2 t^2) \varphi'(t) dt.$$

Comme $\varphi(t)$ est nulle à l'infini, le terme entre crochets est nul. On a :

$$\langle [f_n], \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2} \exp(-n^2 t^2) \varphi'(t) dt = \langle [F_n], \varphi' \rangle = -\langle [F_n]', \varphi \rangle$$

avec $[F_n] = \left[\frac{n}{2} \exp(-n^2 t^2) \right]$.

Donc $[f_n]$ est l'opposé de la dérivée de $[F_n]$.

On calcule donc la limite des distributions $[F_n]$. Si $\varphi \in D$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(t) \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2} \exp(-n^2 t^2) \varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \varphi\left(\frac{u}{n}\right) du \end{aligned}$$

Quand $n \mapsto +\infty$, $\varphi\left(\frac{u}{n}\right) \mapsto \varphi(0)$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle [F_n], \varphi \rangle = \varphi(0) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varphi(0), \quad \forall \varphi \in D.$$

Donc $[F_n] \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{2} \delta$.

Comme $[f_n] = -[F_n]'$ et avec (R8.5), on en déduit que :

$$\boxed{[f_n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \delta'}.$$

Exercice 8.14

1) Soit T une distribution causale et Y la fonction échelon.

Montrer que $[Y] * T$ est une primitive de T , c'est-à-dire que la dérivée de $[Y] * T$ au sens des distributions est T .

2) On pose
$$S(t) = \left(\sum_{n \geq 0} \delta(t-n) \right) * \left(\sum_{n \geq 0} \delta(t-n) \right).$$

Effectuer ce produit de convolution.

3) Calculer une primitive de S .

1) Pour dériver un produit de convolution au sens des distributions, il suffit de dériver l'un des facteurs, donc :

$$([Y] * T)' = [Y] * T' = [Y]' * T = \delta * T = T$$

car δ est l'élément neutre pour le produit de convolution.

2) Le produit de convolution des distributions causales étant associatif et commutatif, on a :

$$S(t) = \left(\sum_{p \geq 0} \delta(t-p) \right) * \left(\sum_{q \geq 0} \delta(t-q) \right) = \sum_{\substack{p \geq 0 \\ q \geq 0}} \delta(t-p) * \delta(t-q).$$

Or : $\delta(t-p) * \delta(t-q) = \delta(t-(p+q))$ (cf. rappels). Donc :

$$S(t) = \sum_{\substack{p \geq 0 \\ q \geq 0}} \delta(t-(p+q)) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p+q=n} \delta(t-(p+q)) \right) = \sum_{n \geq 0} (n+1) \delta(t-n)$$

car il y a $n+1$ façons d'obtenir n à l'aide de la somme de deux entiers p et q .

3) D'après la question 1), une primitive de $S(t)$ est $[Y(t)] * S(t)$. Or :

$$\begin{aligned} [Y(t)] * S(t) &= [Y(t)] * \sum_{n \geq 0} (n+1) \delta(t-n) = \sum_{n \geq 0} (n+1) \delta(t-n) * [Y(t)] \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+1) [Y(t-n)] = \left[\sum_{n \geq 0} (n+1) Y(t-n) \right]. \end{aligned}$$

C'est la distribution régulière associée à la fonction $f(t) = \sum_{n \geq 0} (n+1) Y(t-n)$, qui est la fonction en escalier nulle pour $t < 0$ et qui est définie pour $t \in [n, n+1[$, n entier positif ou nul, par :

$$f(t) = \sum_{k=0}^n (k+1) = \sum_{p=1}^{n+1} p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Exercices d'entraînement

8.15 1) Calculer les dérivées des distributions suivantes en utilisant (R8.1) puis (R8.2) :

a) $[Y(t-a)]$, b) $[\operatorname{sgn} t]$,

c) $[E(t)]$ où $E(t) = n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leq t < n+1$.

2) Calculer les dérivées des distributions suivantes en utilisant (R8.2) puis (R8.3) :

$[|t|] = t[\operatorname{sgn} t]$, $\operatorname{sht}[Y(t-a)]$, $[|\operatorname{sht} t|]$, $[|\operatorname{cht} t|]$.

8.16 Montrer que l'application T de D dans $\mathbb{R}$ suivante, est une distribution régulière associée à une fonction f que l'on précisera.

$$T(\varphi) = \int_{-1/2}^1 \cos \pi t \varphi(t) dt + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

Calculer T' , dérivée de T , de deux façons différentes :

a) en utilisant la définition,

b) en utilisant le théorème relatif aux distributions régulières.

Vérifier que T' comporte une partie régulière et une partie singulière.

Calculer T'' .

8.17 Tracer le graphe de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{pour } |x| \leq 1 \\ 2-|x| & \text{pour } 1 < |x| \leq 2. \\ 0 & \text{pour } |x| > 2 \end{cases}$$

Soit T_f la distribution régulière associée à f . Calculer les dérivées successives de T_f jusqu'à l'ordre 3 et les représenter graphiquement.

8.18 Calculer $S = \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T$ pour les distributions régulières T_i suivantes :

$$T_1 = [Y(t)\sin \omega t] \quad T_2 = [Y(t)\cos \omega t] \quad T_3 = \left[Y(t) \frac{\sin \omega t}{t} \right]$$

8.19 1) Calculer les dérivées des distributions régulières suivantes :

$$T_1 = [Y(\omega t - \pi)] \quad T_2 = [Y(\omega(t - \pi))]$$

2) Montrer que si f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, alors pour tout réel ω on a :

$$[f(\omega t)]' = \omega [f'(\omega t)] + (f(a^+) - f(a^-))\delta_{a/\omega}.$$

8.20 Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la distribution régulière $T = [\text{sh}t]$ (on distinguera les cas n pair et n impair).

8.21 Trouver toutes les distributions T solutions des équations suivantes :

$$1) t^n T = \delta \quad 2) tT = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta_n$$

8.22 Pour tout entier n strictement positif, soient f_n et g_n les fonctions définies par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0 \\ t^{1/n} & \text{pour } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{pour } 1 \leq t \end{cases} \quad g_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0 \\ \frac{1}{nt^{(n-1)/n}} & \text{pour } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{pour } 1 \leq t \end{cases}$$

Graphes des fonctions f_n et g_n . Préciser les limites des suites $[f_n]$ et $[g_n]$.

8.23 Quelle est la limite au sens des distributions de la suite $\{f_n\}$ avec :

$$f_n(t) = Y(t)n^2 t \exp(-nt) ?$$

8.24 Soit $f(t) = Y(t)\ln t$, où $Y(t)$ est la fonction échelon.

1) Vérifier que f est localement sommable. Vérifier que cette fonction est dérivable presque partout. La fonction f' est-elle localement sommable ? Peut-on définir $[f]'$ en utilisant (R8.2) ?

2) Montrer que la distribution régulière $T = [Y(t)\ln t]$ peut être définie comme la limite quand ε tend vers 0 de la suite de distributions régulières :

$$T_\varepsilon = [Y(t - \varepsilon)\ln t].$$

Calculer T'_ε . En déduire T' .

3) Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon (\delta(t) - \delta(t - \varepsilon)) = 0$. En déduire que l'on a aussi :

$$T' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \ln \varepsilon \delta(t) + \left[\frac{Y(t - \varepsilon)}{t} \right] \right\}$$

Cette distribution, appelée pseudo-fonction $\frac{Y(t)}{t}$, est notée $Pf \frac{Y(t)}{t}$

8.25 Soit $f(t) = \frac{Y(t)}{\sqrt{t}}$, où $Y(t)$ est la fonction échelon.

1) Vérifier que f est localement sommable. Montrer que sa dérivée f' qui est définie sur $\mathbb{R}^*$, n'est pas localement sommable.

2) On note T_ε la distribution régulière associée à $f_\varepsilon(t) = \frac{Y(t-\varepsilon)}{\sqrt{t}}$. Calculer la distribution dérivée T'_ε .

3) Vérifier que T_ε tend vers $[f]$ quand ε tend vers 0. En déduire l'expression de la distribution dérivée de $[f]$ qui est notée $Pf \frac{Y(t)}{t^{3/2}}$.

4) Généralisation : soit T est une distribution régulière associée à une fonction f , nulle sur $]-\infty, 0[$. Si la dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}^*$ et non sommable au voisinage de 0, montrer que T' peut être définie comme limite de distributions.

8.26 1) En partant de la définition du produit de convolution, calculer les produits de convolution suivants :

$$\delta_a * \delta_b', \quad Y(t) * \delta_b', \quad \delta_a * 1.$$

2) Vérifier que si a tend vers $+\infty$, alors $\delta_a \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} 0$.

Y-a-t-il égalité entre : $\lim_{a \rightarrow +\infty} (\delta_a * 1)$ et $(\lim_{a \rightarrow +\infty} \delta_a) * 1$?

8.27 En utilisant les propriétés du produit de convolution, vérifier que :

$$\begin{aligned} (\delta' - a\delta) * Y(t) \exp(-at) &= \delta \\ (\delta'' + 2a\delta' + a^2\delta) * Y(t)t \exp(-at) &= \delta. \end{aligned}$$

En déduire que si T est une distribution vérifiant

$(\delta'' + 2a\delta' + a^2\delta) * T = S$ où S est une distribution connue alors :

$$T = Y(t) t \exp(-at) * S.$$

8.28 1) Vérifier que $\exp(at)\delta'' = \delta'' - 2a\delta' + a^2\delta$.

2) Déterminer une fonction f nulle pour $t < 0$ telle que :

$$\exp(at)\delta'' * [f] = \delta.$$

3) Même question pour l'équation $\exp(at)\delta'' * [f] = [Y(t)\sin t]$.

8.29 Soit T_f une distribution régulière associée à une fonction f nulle sur $]-\infty, a[$, et deux fois continuellement dérivable sur $]a, +\infty[$. Montrer que l'équation de convolution dans D' $(\delta'' - 3\delta' + 2\delta) * T_f = \alpha\delta + \beta\delta'$ est équivalente au système d'équations :

$$f'' - 3f' + 2f = 0 \text{ sur }]a, +\infty[, \text{ avec } f(a^+) = \beta \text{ et } f'(a^+) = \alpha + 3\beta.$$

Réponses

8.15 1) $\delta_a, 2\delta, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$

2) $[[t]]' = [\operatorname{sgn} t] + 2\delta = [\operatorname{sgn} t], \quad (\operatorname{sh} t[Y(t-a)])' = \operatorname{cht}[Y(t-a)] + \operatorname{sha}\delta_a,$
 $[[\operatorname{sh} t]]' = \operatorname{cht}[\operatorname{sgn} t], \quad [[\operatorname{cht} t]]' = |\operatorname{sh} t| + 2\delta.$

8.16 $T(t) = [\cos \pi \mathbb{I}_{[1/2, 1]}(t) + Y(t-1)]$

$T'(t) = [-\pi \sin \pi \mathbb{I}_{[1/2, 1]}(t)] + 2\delta(t-1)$

$T''(t) = [-\pi^2 \cos \pi \mathbb{I}_{[1/2, 1]}(t)] + \delta(t+1/2) + 2\delta'(t-1)$

8.17 La fonction f est paire et on a :

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$ x \leq 1$	$2 - x^2$	$-2x$	-2
$1 \leq x \leq 2$	$2 - x$	-1	0
$ x > 2$	0	0	0

Comme f est continue, elle n'a pas de saut et $T'_f = T_{f'}$. Par contre, f' a des sauts et on a :

$T''_f = T_{f''} + \delta_{-2} + \delta_{-1} + \delta_1 + \delta_2.$

8.18 $S_1 = \omega \delta, S_2 = \delta', S_3 = 2Y(t) \frac{\sin \omega t - \omega t \cos \omega t}{t^3} + \omega \delta'.$

8.19 $T'_1 = \omega \delta(\omega t - \pi) = \delta_{\pi/\omega}, \quad T'_2 = \omega \delta(\omega(t - \pi)) = \delta_\pi.$

8.20 $T' = [\operatorname{cht} \operatorname{sgn} t], \quad T'' = T + 2\delta,$

Pour $k \geq 1$: $T^{(2k+1)} = T' + 2 \sum_{p=0}^{k-1} \delta^{(2p+1)}, \quad T^{(2k)} = T + 2 \sum_{p=0}^{k-1} \delta^{(2p)}.$

8.21 1) En utilisant les exercices 8.5 et 8.6 on montre que :

$T = \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)} + \sum_{p=0}^{n-1} a_p \delta^{(p)}$ où les a_p sont des constantes arbitraires.

2) On a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta_n = S + \delta_0$ avec $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} (-1)^n \delta_n.$

L'équation $tT = S$ a pour solution particulière $T_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^n}{n} \delta_n.$

L'équation $tT = \delta_0$ a pour solution particulière $T_0 = -\delta'_0$ (cf. exercice 8.5).

Donc, en notant A une constante arbitraire, on a $tT = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta_n = S + \delta_0 \Leftrightarrow$

$T = T_1 + T_0 + A\delta_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^n}{n} \delta_n - \delta'_0 + A\delta_0.$

- 8.22** La fonction f_n est continue, dérivable pour $t \neq 0$ et $t \neq 1$, et la dérivée f'_n est presque partout égale à g_n . Comme $[f_n]$ tend vers $Y(t)$, $[g_n] = [f'_n]$ tend vers $\delta(t)$ (cf. (R8.5)).
- 8.23** Les fonctions f_n sont continues, positives, nulles pour $t = 0$ et pour t tendant vers $+\infty$. Comme $f'_n(t) = Y(t)n^2(1 - nt)\exp(-nt)$, le maximum est atteint pour $t = 1/n$, et il vaut n/e . Pour t fixé strictement positif, $f_n(t)$ tend vers 0 pour n tendant vers $+\infty$, car l'exponentielle impose sa limite au polynôme n^2 . Donc la suite $\{f_n\}$ converge ponctuellement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. On fait le changement de variable $u = nt$ dans :

$$\langle f_n(t), \varphi(t) \rangle = \int_0^{+\infty} n^2 t \exp(-nt) \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} u \exp(-u) \varphi\left(\frac{u}{n}\right) du.$$

Comme φ est continue et bornée, (R4.3) permet de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f_n] = \delta(t) \int_0^{+\infty} u \exp(-u) du = \delta(t).$$

- 8.24** 1) NON aux deux questions posées.

2) $T'_\varepsilon(t) = \left[\frac{Y(t - \varepsilon)}{t} \right] + \ln \varepsilon \delta(t - \varepsilon)$ et $T' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} T'_\varepsilon$.

3) On a : $\langle \ln \varepsilon (\delta(t) - \delta(t - \varepsilon)), \varphi(t) \rangle = \ln \varepsilon (\varphi(0) - \varphi(\varepsilon))$.

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\varphi(0) - \varphi(\varepsilon) = \varepsilon \varphi'(\theta \varepsilon) \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

Comme $\varepsilon \ln \varepsilon$ tend vers 0 quand ε tend vers 0, et comme φ' reste borné, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \ln \varepsilon (\delta(t) - \delta(t - \varepsilon)), \varphi(t) \rangle = 0.$$

Donc : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon (\delta(t) - \delta(t - \varepsilon)) = 0$

$$\begin{aligned} T' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \ln \varepsilon \delta(t - \varepsilon) + \frac{Y(t - \varepsilon)}{t} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \ln \varepsilon (\delta(t - \varepsilon) - \delta(t)) + \ln \varepsilon \delta(t) + \frac{Y(t - \varepsilon)}{t} \right\} \end{aligned}$$

d'où : $T' = [Y(t) \ln t]' = Pf\left(\frac{Y(t)}{t}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \ln \varepsilon \delta(t) + \frac{Y(t - \varepsilon)}{t} \right\},$

c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in D, \quad \langle T', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \ln \varepsilon \varphi(0) + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right\}.$$

- 8.25** 1) Dans $\mathbb{R}^*$ $f'(t) = \frac{Y(t)}{t^{3/2}}$, pas sommable au voisinage de 0, donc elle ne peut définir une distribution régulière. Par contre f est localement sommable, mais non sommable à $+\infty$. Comment est alors définie $[f]'$?

2) $T'_\varepsilon = \frac{d}{dt} \left[\frac{Y(t - \varepsilon)}{t^{1/2}} \right] = \frac{\delta(t - \varepsilon)}{t^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{Y(t - \varepsilon)}{t^{3/2}} = \frac{\delta(t - \varepsilon)}{\varepsilon^{1/2}} - \frac{Y(t - \varepsilon)}{2t^{3/2}}.$

3) $\langle T'_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_\varepsilon^A \frac{\varphi(t)}{t^{1/2}} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^A \frac{\varphi(t)}{t^{1/2}} dt = \langle f, \varphi \rangle$, donc $[f] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T'_\varepsilon$.

D'après (R8.5) on a $[f]' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T'_\varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\langle [f]', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle T'_\varepsilon, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^{1/2}} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{2t^{3/2}} dt \right) = \langle Pf\left(\frac{Y(t)}{t^{3/2}}\right), \varphi(t) \rangle.$$

4) On peut définir T comme la limite de $T_\varepsilon = [Y(t - \varepsilon)f(t)]$. D'après (R8.5) T' est la limite de $T'_\varepsilon = f(\varepsilon)\delta(t - \varepsilon) + [Y(t - \varepsilon)f'(t)]$.

8.26 1) $\delta_a * \delta'_b = \delta'_{a+b}$, $Y(t) * \delta'_b = \delta_b$, $\delta_a * 1 = 1$.

2) $\lim_{a \rightarrow +\infty} (\delta_a * 1) = 1$ et $(\lim_{a \rightarrow +\infty} \delta_a) * 1 = 0$.

8.27 Comme le produit de convolution est commutatif :

$$Y(t)t \exp(-at) * (\delta'' + 2a\delta' + a^2\delta) = \delta.$$

Donc : $Y(t)t \exp(-at) * (\delta'' + 2a\delta' + a^2\delta) * T = T = Y(t)t \exp(-at) * S$.

8.28 2) $f(t) = Y(t)t \exp(at)$.

3) $f(t) = \frac{Y(t)}{(a^2 + 1)^2} \left((-2a + (a^2 + 1)t) \exp(at) + 2a \cos t + (a^2 - 1) \sin t \right).$

8.29 $T_f = [f]$, $\delta' * T_f = [f]' = [f'] + f(a^+)\delta$,

$\delta'' * T_f = [f]'' = [f''] + f'(a^+)\delta + f(a^+)\delta'$, d'où :

$[f]'' - 3f' + 2f + f'(a^+)\delta + f(a^+)\delta' - 3f(a^+)\delta = \alpha\delta + \beta\delta'$.

D'où le résultat en identifiant les parties régulières et singulières.

Chapitre 9

Transformées de Fourier et de Laplace des distributions. Transformée en z des signaux numériques

RAPPELS

I. Transformation de Fourier

- Une fonction f est à *décroissance rapide* si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^p f^{(k)}(t) = 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions à décroissance rapide.
- Une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions à décroissance rapide *converge dans $\mathcal{S}$* vers $\varphi \in \mathcal{S}$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ la suite des fonctions $t \mapsto t^p \varphi_n^{(k)}(t)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $t \mapsto t^p \varphi^{(k)}(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{S}}\varphi_n = \varphi$ ou

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{S}} \varphi.$$

- Une distribution tempérée T est une application de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ qui est :
 - linéaire : $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T(\varphi) + \mu T(\psi)$.
 - continue : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = \varphi$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$.

On a $D \subset \mathcal{S}$ et une distribution tempérée est une distribution.

- Si T est une distribution tempérée, sa transformée de Fourier $\hat{T} = F(T)$ est la distribution (tempérée) définie par

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{S}, \langle F(T), \varphi \rangle = \langle T, F(\varphi) \rangle} \quad (\text{R9.1})$$

De même la transformée de Fourier inverse $\check{T} = \bar{F}(T)$ de T est définie par

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{S}, \langle \bar{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \bar{F}(\varphi) \rangle} \text{ et l'on a } \boxed{\bar{F}(F(T)) = F(\bar{F}(T)) = T}.$$

- Transformées de Fourier usuelles :

– Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ ou $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $F([f]) = [F(f)]$.

– Distributions de Dirac :

$$F(\delta) = [1], \quad F(\delta(t - a)) = [\exp(-2i\pi a\nu)], \quad F(\delta^{(m)}) = [(2i\pi\nu)^m].$$

– Echelon unité : $F([Y(t)]) = \frac{1}{2}\delta(\nu) + \frac{1}{2i\pi}\text{Pf}\frac{1}{\nu}$.

– Par réciprocity de Fourier :

$$F([1]) = \delta(\nu), \quad F([\exp(2i\pi\nu_0 t)]) = \delta(\nu - \nu_0), \quad F([t^m]) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^m \delta^{(m)}(\nu),$$

$$F\left(\text{Pf}\frac{1}{t}\right) = i\pi[2Y(\nu) - 1] = i\pi[\text{sgn}(\nu)].$$

– Peigne de Dirac $\sqcup\sqcup : F(\sqcup\sqcup(t)) = \sqcup\sqcup(\nu)$.

- Si $T = T_0 * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\nu - \frac{n}{\theta})$ avec T_0 à support de longueur θ

$$\boxed{F(T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(\nu - \frac{n}{\theta}) \quad \text{avec } c_n = \frac{1}{\theta} F(T_0)(\frac{n}{\theta})} \quad (\text{R9.2})$$

- Transformée de Fourier d'un produit de convolution :

S'il existe un segment K tel que pour toute fonction test $\varphi \in D$ nulle sur K on ait $\langle T, \varphi \rangle = 0$, on dit que T est à *support compact*. Alors $F(T)$ est la distribution régulière associée à la fonction $C^\infty \nu \mapsto \langle T(t), \exp(-2i\pi\nu t) \rangle$, pour toute distribution tempérée S le produit de convolution $T * S$ est défini et l'on a

$$\boxed{F(T * S) = F(T)F(S)} \quad (\text{R9.3})$$

- Transformée de Fourier d'un produit :

Si $g \in \mathcal{S}$ ou est une fonction C^∞ telle que $F([g])$ soit à support compact, alors pour toute distribution tempérée T , gT est tempérée et

$$\boxed{F(gT) = F([g]) * F(T)} \quad (\text{R9.4})$$

- Formulaire succinct :

$$- F(T^{(m)}) = (2i\pi\nu)^m \hat{T}(\nu).$$

$$- F(T(t-a)) = \exp(-2i\pi a\nu) \hat{T}(\nu).$$

$$- F(t^m T(t)) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^m \hat{T}^{(m)}(\nu).$$

$$- \text{changement d'échelle : } F(T(at)) = \frac{1}{|a|} \hat{T}\left(\frac{\nu}{a}\right), a \neq 0.$$

II. Transformation de Laplace

- Distributions causales : une distribution T est dite *causale* si et seulement si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction test $\varphi \in D$ nulle sur $[0, +\infty[$.
- Soit T une distribution causale telle qu'il existe $p_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(-p_0 t)T(t)$ soit tempérée. Alors la transformée de Laplace de T est la fonction

$$\boxed{L(T) : p \mapsto L(T)(p) = \langle T(t), \exp(-pt) \rangle} \quad (\text{R9.5})$$

Elle est définie pour tout $p > p_0$.

- Si f est une fonction causale admettant une transformée de Laplace $L(f)$, alors $L([f]) = L(f)$.
- Transformée de Laplace d'un produit de convolution :
Le produit de convolution de deux distributions causales est toujours défini. Si T et S sont deux distributions causales admettant des transformées de Laplace, alors

$$\boxed{L(T * S) = L(T)L(S)}.$$

- Formulaire succinct :

$$- L(T(t-a))(p) = e^{-ap} L(T)(p).$$

$$- L(T^{(m)})(p) = p^m L(T)(p).$$

$$- L(\delta)(p) = 1. \text{ On en déduit que } L(\delta_a)(p) = e^{-ap} \text{ et } L(\delta^{(m)})(p) = p^m.$$

- *Remarque importante* : lorsque l'on connaît une solution particulière T_0 de l'équation en la distribution inconnue T suivante : (1) $gT = U$, où g est une fonction C^∞ et U une distribution donnée, les solutions de (1) sont de la forme $T = T_0 + S$, où S est solution de l'équation « homogène » (2) $gT = 0$.

On utilisera souvent ce résultat dans le cas où $g(t) = t^k$, les solutions de (2) étant dans ce cas les distributions de la forme $S = a_0\delta + a_1\delta' + \dots + a_{k-1}\delta^{(k-1)}$, où les a_i sont des constantes arbitraires.

III. Transformation en z

- Un *signal numérique* est une application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. Si $f(n) = 0$ pour tout $n < 0$, le signal numérique f est dit *causal*.
- La transformée en z d'un signal numérique f est la fonction $\mathcal{T}_z(f)$ de la variable complexe :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_z(f) : z \mapsto \mathcal{T}_z(f)(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) z^{-n} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f(n) z^{-n} + \lim_{N' \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N'}^{-1} f(n) z^{-n} \end{aligned}$$

définie lorsque ces deux limites existent. Les résultats sur les séries de Laurent montrent que :

- soit le domaine de définition de $\mathcal{T}_z(f)$ est vide.
- soit $\mathcal{T}_z(f)$ est définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.
- soit il existe r et R , avec $0 \leq r \leq R \leq +\infty$, tels que $\mathcal{T}_z(f)(z)$ soit définie pour $r < |z| < R$, et non définie pour $|z| < r$ et $|z| > R$. Sur les cercles $|z| = r$ et $|z| = R$, $\mathcal{T}_z(f)(z)$ peut être définie en certains points, non définie en d'autres. L'ensemble $C(r, R) = \{z \in \mathbb{C} / r < |z| < R\}$ est la *couronne (ouverte) de convergence* de $\mathcal{T}_z(f)$.
- $\mathcal{T}_z(f)$ est définie en 0 si et seulement si $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, on a $r = 0$ et, si $R > 0$, $\mathcal{T}_z(f)$ est définie sur le disque $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$, non définie pour $|z| > R$.
- si f est causal, alors $R = +\infty$, et si r est fini, la couronne de convergence de $\mathcal{T}_z(f)$ est $C(r, +\infty)$, soit $\{z \in \mathbb{C} / |z| > r\}$.
- Formulaire succinct :

Soit f un signal numérique, $\mathcal{T}_z(f)$ sa transformée en z supposée définie pour $r < |z| < R$.

- $\mathcal{T}_z(f(n - n_0))(z) = \frac{\mathcal{T}_z(f)(z)}{z^{n_0}}$, pour $r < |z| < R$.
- $\mathcal{T}_z(a^n f(n))(z) = \mathcal{T}_z(f)\left(\frac{z}{a}\right)$, pour $ar < |z| < aR$.
- $\mathcal{T}_z(nf(n))(z) = -z\mathcal{T}_z(f)'(z)$, pour $r < |z| < R$.
- $\mathcal{T}_z(f(-n))(z) = \mathcal{T}_z(f)\left(\frac{1}{z}\right)$, pour $\frac{1}{R} < |z| < \frac{1}{r}$.
- Si f est causal, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{T}_z(f)(x) = f(0)$. Si de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \ell$, $\mathcal{T}_z(f)$ est définie en tout z tel que $|z| > 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1+} (x - 1)\mathcal{T}_z(f)(x) = \ell$.

– Soit $f * g$ le signal numérique défini par $(f * g)(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k)$, où f et g sont deux signaux numériques causaux, de transformées en z supposées toutes deux définies pour $|z| > r$.

Alors pour tout z tel que $|z| > r$ on a $\boxed{T_z(f * g)(z) = T_z(f)(z)T_z(g)(z)}$.

Exercice 9.1

■ Calculer la transformée de Fourier de la distribution tempérée régulière $[\cos^2 2\pi \omega t]$.

Première méthode :

On a :
$$\cos^2 2\pi \omega t = \frac{1 + \cos 4\pi \omega t}{2},$$

$$\cos 4\pi \omega t = \frac{1}{2}(\exp(4i\pi \omega t) + \exp(-4i\pi \omega t)),$$

$$F([\cos 4\pi \omega t])(v) = \frac{1}{2}(\delta(v-2\omega) + \delta(v+2\omega)), \quad F([1])(v) = \delta(v),$$

donc :
$$F([\cos^2 2\pi \omega t])(v) = \frac{1}{4}(2\delta(v) + \delta(v-2\omega) + \delta(v+2\omega)).$$

Seconde méthode :

On a :
$$F([\cos 2\pi \omega t])(v) = \frac{1}{2}(\delta(v-\omega) + \delta(v+\omega)).$$

Comme : $\cos^2 2\pi \omega t = \cos 2\pi \omega t \cdot \cos 2\pi \omega t$, on a (R9.4) :

$$\begin{aligned} F([\cos^2 2\pi \omega t])(v) &= F([\cos 2\pi \omega t])(v) * F([\cos 2\pi \omega t])(v) \\ &= \frac{1}{4}(\delta(v-\omega) + \delta(v+\omega)) * (\delta(v-\omega) + \delta(v+\omega)) \\ &= \frac{1}{4}(\delta(v-\omega) * \delta(v-\omega) + 2\delta(v+\omega) * \delta(v-\omega) + \delta(v+\omega) * \delta(v+\omega)). \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $\delta(v-\alpha) * \delta(v-\beta) = \delta(v-(\alpha+\beta))$, valable pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on retrouve bien :

$$F([\cos^2 2\pi \omega t])(v) = \frac{1}{4}(2\delta(v) + \delta(v-2\omega) + \delta(v+2\omega)).$$

Exercice 9.2

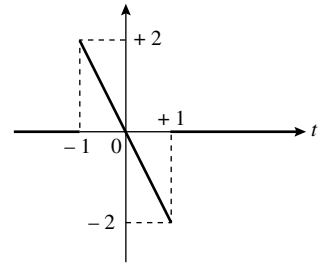
■ Soit f la fonction nulle pour $|t| \geq 1$ et telle que $f(t) = 1 - t^2$ pour $|t| < 1$.

- 1) Calculer $[f]', [f]'', [f]'''$.
- 2) En déduire la transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction f .

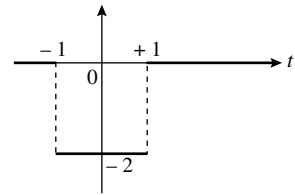
1) Comme f est continue, on a $[f]' = [f']$, avec

$$f'(t) = 0 \quad \text{pour } |t| > 1$$

et $f'(t) = -2t$ pour $|t| < 1$.



On a alors : $[f(t)]'' = [f''(t)] + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1)$, avec
 $f''(t) = 0$ pour $|t| > 1$ et $f''(t) = -2$ pour $|t| < 1$.



En dérivant à nouveau, on obtient :

$$\begin{aligned} [f(t)]''' &= [f'''(t)] - 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 2\delta'(t+1) + 2\delta'(t-1) \\ &= -2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 2\delta'(t+1) + 2\delta'(t-1), \end{aligned}$$

puisque $f'''(t) = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$.

$$\begin{aligned} 2) \text{ On a } F([f]''')(v) &= (2i\pi v)^3 F([f])(v) \\ &= -2[\exp(2i\pi v)] + 2[\exp(-2i\pi v)] + 2[2i\pi v \exp(2i\pi v)] \\ &\quad + 2[2i\pi v \exp(-2i\pi v)], \end{aligned}$$

ce qui, réduit et simplifié, donne : $-8i\pi^3 v^3 F([f])(v) = -4i \sin(2\pi v) + 8i\pi v \cos(2\pi v)$.

Mais, comme f est sommable, $F([f]) = F(f)$: c'est une distribution régulière, égale à la transformée de Fourier de f au sens des fonctions, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On a donc, si $v \neq 0$, $\hat{f}(v) = \frac{\sin(2\pi v) - 2\pi v \cos(2\pi v)}{2\pi^3 v^3}$ et on peut la prolonger par continuité en 0.

Exercice 9.3

Soit $f(t)$ la fonction périodique de période $2a$, définie pour $|t| \leq a$ par $f(t) = |t|$.

- 1) Calculer $[f]''$.
- 2) Calculer les transformées de Fourier de $[f]''$ puis de $[f]$.
- 3) En déduire le développement en série de Fourier de f .

1) Comme f est continue (cf. graphe), on a $[f]' = [f']$, où f' est périodique de période $2a$, et $f'(t) = \text{sgn}(t)$ pour $0 < |t| < a$.

La dérivée seconde de f au sens des fonctions est donc nulle presque partout, et, comme le saut de f' vaut $+2$ en $0, 2a, -2a, \dots, 2ka$ ($k \in \mathbb{Z}$) et -2 en $a, -a, 3a, -3a, \dots, (2k+1)a$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a :

$$[f(t)]'' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2\delta(t-2ka) - 2\delta(t-(2k+1)a)),$$

et, comme

$$\delta(t - (2k+1)a) = \delta(t-a) * \delta(t-2ka) \quad \text{et} \quad \delta(t-2ka) = \delta(t) * \delta(t-2ka) :$$

$$[f(t)]'' = 2(\delta(t) - \delta(t-a)) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t-2ka).$$

2) On a respectivement $F(\delta(t))(v) = [1]$, $F(\delta(t-a))(v) = [\exp(-2i\pi av)]$ et

$$F\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t-2ka)\right)(v) = \frac{1}{2a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(v - \frac{k}{2a}\right). \quad \text{Donc :}$$

$$\begin{aligned} F([f]'')(v) &= \frac{1 - \exp(-2i\pi av)}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(v - \frac{k}{2a}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1 - \exp(-2i\pi av)}{a} \delta\left(v - \frac{k}{2a}\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1 - \exp\left(-2i\pi a \frac{k}{2a}\right)}{a} \delta\left(v - \frac{k}{2a}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1 - \exp(-ik\pi)}{a} \delta\left(v - \frac{k}{2a}\right), \end{aligned}$$

puisque l'on sait que le produit d'un Dirac par une fonction C^∞ est égal à son produit par la valeur de la fonction au point où il est situé (R7.2). Comme d'autre part $\exp(-ik\pi) = (-1)^k$, on a $1 - \exp(-ik\pi) = 0$ si k est pair, et $1 - \exp(-ik\pi) = 2$ si k est impair. On a donc :

$$F([f]'')(v) = \frac{2}{a} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta\left(v - \frac{2q+1}{2a}\right).$$

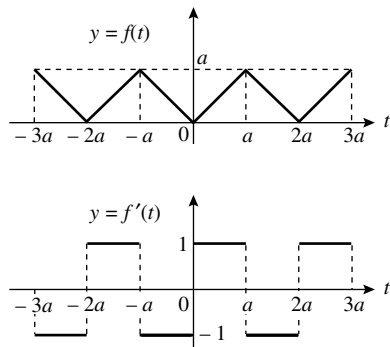
Comme $F([f]'')(v) = (2i\pi v)^2 F([f])(v) = -4\pi^2 v^2 F([f])(v)$, il vient :

$$F([f])(v) = -\frac{1}{2a\pi^2 v^2} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta\left(v - \frac{2q+1}{2a}\right) + A\delta'(v) + B\delta(v),$$

car l'égalité $-4\pi^2 v^2 T(v) = S(v)$ implique que $T(v) = -\frac{1}{4\pi^2 v^2} S(v) + R(v)$, où $R(v)$

est solution de l'équation $-4\pi^2 v^2 R(v) = 0$, équivalente à $v^2 R(v) = 0$, dont on sait que la solution générale est $R(v) = A\delta'(v) + B\delta(v)$, où A et B sont des constantes arbitraires.

Comme $[f]$ est paire, il en est de même de sa transformée de Fourier, ce qui implique, puisque $\delta'(v)$ est impaire, que $A = 0$ (on pourrait aussi utiliser (R9.2) : la transformée de



Fourier d'une distribution périodique est un peigne de Dirac modulé, et ne saurait donc contenir de terme en $\delta'(v)$. D'autre part, le coefficient B de $\delta(v)$ dans la transformée de Fourier de $[f(t)]$ est égal (R9.2) à $\frac{1}{2a} F(T_0)(0)$, où T_0 est la restriction de $[f(t)]$ à $[0, 2a]$.

On a :

$$\frac{1}{2a} F(T_0)(0) = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} f(t) \exp(-2i\pi 0t) dt = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} f(t) dt = \frac{1}{2a} a^2 = \frac{a}{2} = B.$$

Donc :

$$\begin{aligned} F([f])(v) &= \frac{a}{2} \delta(v) - \frac{1}{2a\pi^2 v^2} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta\left(v - \frac{2q+1}{2a}\right) \\ &= \frac{a}{2} \delta(v) - \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2a\pi^2 v^2} \delta\left(v - \frac{2q+1}{2a}\right) \\ &= \frac{a}{2} \delta(v) - \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2a\pi^2 \left(\frac{2q+1}{2a}\right)^2} \delta\left(v - \frac{2q+1}{2a}\right) \\ &= \frac{a}{2} \delta(v) - \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{2a}{\pi^2 (2q+1)^2} \delta\left(v - \frac{2q+1}{2a}\right), \end{aligned}$$

soit :

$$F([f])(v) = \frac{a}{2} \delta(v) - \frac{2a}{\pi^2} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2q+1)^2} \delta\left(v - \frac{2q+1}{2a}\right).$$

3) En prenant la transformée de Fourier inverse des deux membres, on obtient la série de Fourier complexe de $f(t)$:

$$f(t) = \frac{a}{2} - \frac{2a}{\pi^2} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2q+1)^2} \exp \frac{(2q+1)i\pi t}{a},$$

d'où l'on déduit aisément la série de Fourier réelle :

$$f(t) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{q \geq 0} \frac{1}{(2q+1)^2} \cos \frac{(2q+1)\pi t}{a}.$$

Exercice 9.4

On considère la fonction $f_a(t) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-a(t-n)^2)$, où a est un nombre réel positif.

1) Vérifier que $f_a(t)$ est périodique de période 1.

2) Déterminer la transformée de Fourier $\hat{f}_a(v)$ de la distribution régulière $[f_a(t)]$ associée à $f_a(t)$.

3) Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} \hat{f}_a(v)$ et en déduire $\lim_{a \rightarrow +\infty} [f_a(t)]$.

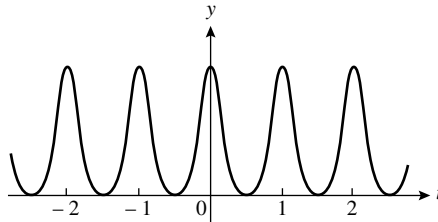
1) On a :

$$f_a(t+1) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-a(t+1-n)^2) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-a(t-(n-1))^2).$$

En faisant le changement d'indice $p = n - 1$ dans cette dernière somme, on obtient :

$$f_a(t+1) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-a(t-(n-1))^2) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \exp(-a(t-p)^2) = f_a(t),$$

donc $f_a(t)$ est périodique de période 1.



2) On peut écrire :

$$\begin{aligned} [f_a(t)] &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\exp(-a(t-n)^2)] = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} ([\exp(-at^2)] * \delta(t-n)) \\ &= \left[\sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-at^2) \right] * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t-n) = \left[\sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-at^2) \right] * \sqcup\sqcup(t). \end{aligned}$$

Par conséquent (R9.3) $F([f_a(t)]) = F\left(\sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp(-at^2)\right) \cdot F(\sqcup\sqcup(t))$ soit :

$$\hat{f}_a(v) = \exp\left(-\frac{\pi^2 v^2}{a}\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(v) = \exp\left(-\frac{\pi^2 v^2}{a}\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(v-n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{a}\right) \delta(v-n).$$

3) Lorsque $a \rightarrow +\infty$, $\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{a}\right)$ tend vers 1 pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \hat{f}_a(v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(v-n) = \sqcup\sqcup(v).$$

En prenant les transformées de Fourier inverses, on obtient :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} [f_a(t)] = \sqcup\sqcup(t).$$

Exercice 9.5

Soit $T(t)$ une distribution vérifiant l'équation $(t^2 - 3t + 2)T(t) = 0$.

- 1) Montrer que si $\varphi(t)$ est une fonction test nulle sur $[a, b]$, où $a < 1 < 2 < b$, la fonction $\psi(t)$ définie par $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t^2 - 3t + 2} = \frac{\varphi(t)}{(t-1)(t-2)}$ pour $t \notin \{1, 2\}$, et $\psi(1) = \psi(2) = 0$, est aussi une fonction test nulle sur $[a, b]$.
- 2) Montrer que T est nulle en dehors du segment $[a, b]$. En déduire que la transformée de Fourier $\hat{T}(v)$ de $T(t)$ est une fonction C^∞ .
- 3) Déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par $\hat{T}(v)$ et en déduire $\hat{T}(v)$ puis $T(t)$.

1) La fonction $\psi(t)$ est nulle, donc C^∞ , sur $]a, b[$ et également C^∞ sur $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ comme rapport de fonctions C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc cette fonction est C^∞ sur $]a, b[\cup]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[= \mathbb{R}$. D'autre part, lorsque $\varphi(t) = 0$, il en est de même pour $\psi(t)$, et donc $\psi(t)$ est, comme $\varphi(t)$, nulle en dehors d'un segment et nulle sur $[a, b]$. Il s'ensuit que $\psi(t)$ est une fonction test, nulle sur $[a, b]$.

2) On a l'égalité $\varphi(t) = (t^2 - 3t + 2)\psi(t)$. Par conséquent :

$$\langle T(t), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), (t^2 - 3t + 2)\psi(t) \rangle = \langle (t^2 - 3t + 2)T(t), \psi(t) \rangle = \langle 0, \psi(t) \rangle = 0.$$

On en déduit que T est nulle en dehors du segment $[a, b]$. La transformée de Fourier $\hat{T}(v)$ de $T(t)$ est donc une fonction C^∞ .

3) Les transformées de Fourier de $[1]$, $[t]$ et $[t^2]$ étant respectivement $\delta(v)$, $\frac{\delta'(v)}{-2i\pi}$ et

$$\frac{\delta''(v)}{(-2i\pi)^2}, \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} F([t^2 - 3t + 2])(v) &= \frac{1}{(-2i\pi)^2} \delta''(v) - \frac{3}{-2i\pi} \delta'(v) + 2\delta(v) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \delta''(v) + \frac{3}{2i\pi} \delta'(v) + 2\delta(v) \end{aligned}$$

et $F((t^2 - 3t + 2)T(t)) = F([t^2 - 3t + 2]) * F(T(t)) = 0$, ce qui donne l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants :

$$\left(-\frac{1}{4\pi^2} \delta''(v) + \frac{3}{2i\pi} \delta'(v) + 2\delta(v) \right) * \hat{T}(v) = -\frac{1}{4\pi^2} \hat{T}''(v) + \frac{3}{2i\pi} \hat{T}'(v) + 2\hat{T}(v) = 0.$$

Le polynôme caractéristique de cette équation est :

$P(r) = -\frac{1}{4\pi^2}(r^2 - 6i\pi r - 8\pi^2)$, dont les racines sont $2i\pi$ et $4i\pi$. La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$\hat{T}(v) = A \exp(2i\pi v) + B \exp(4i\pi v)$$

et l'on a donc :

$$T(t) = A\delta(t-1) + B\delta(t-2).$$

Exercice 9.6

- 1) Déterminer la transformée de Fourier de la distribution régulière $[\sin \pi t]$.
- 2) En utilisant l'égalité $\pi t \left[\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right] = [\sin \pi t]$, en déduire la transformée de Fourier de $\left[\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right]$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

1) On a l'égalité $\sin \pi t = \frac{1}{2i}(\exp(i\pi t) - \exp(-i\pi t))$, et par conséquent

$$[\sin \pi t] = \frac{1}{2i}([\exp(i\pi t)] - [\exp(-i\pi t)]).$$

La transformée de Fourier de $[\exp 2i\pi at]$ étant $\delta(v - a)$, celle de $[\sin \pi t]$ est donc

$$\frac{1}{2i} \left(\delta\left(v - \frac{1}{2}\right) - \delta\left(v + \frac{1}{2}\right) \right).$$

2) On sait que la transformée de Fourier de $[-2i\pi t]$ est $\delta'(v)$. Soit $\hat{F}(v)$ la transformée de Fourier de $F(t) = \left[\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right]$. La transformée de Fourier de $\pi t \left[\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right]$ est alors

$$-\frac{1}{2i} \delta'(v) * \hat{F}(v) = -\frac{1}{2i} \hat{F}'(v) \text{ puisque la transformation de Fourier transforme le produit}$$

ordinaire en produit de convolution et que la convolution avec δ' est la dérivation. L'égalité

$$\pi t \left[\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right] = [\sin \pi t] \text{ donne donc par transformation de Fourier :}$$

$$-\frac{1}{2i} \hat{F}'(v) = \frac{1}{2i} \left(\delta\left(v - \frac{1}{2}\right) - \delta\left(v + \frac{1}{2}\right) \right),$$

$$\hat{F}'(v) = \delta\left(v + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(v - \frac{1}{2}\right) = [P_1]'(v),$$

où $P_1(v)$ est la fonction « porte », égale à 1 pour $|v| \leq \frac{1}{2}$ et nulle pour $|v| > \frac{1}{2}$.

On a donc $\hat{F}(v) = [P_1(v) + K]$, où K est une constante. Comme $P_1(v)$ est nulle en dehors d'un segment, la transformée de Fourier inverse de $[P_1(v)]$ est une distribution régulière $T(t)$.

La transformée de Fourier inverse de $[P_1(v) + K]$ est $T(t) + K\delta(t)$. Comme elle est égale à $F(t)$, donc régulière, on a nécessairement $K = 0$ et par conséquent $\hat{F}(v) = [P_1(v)]$. On en

déduit que $P_1(0) = 1 = \hat{F}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{\pi t} dt$, soit, en posant $\pi t = u$:

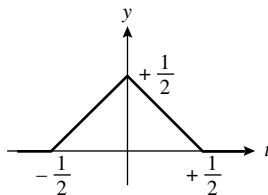
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi}.$$

Exercice 9.7

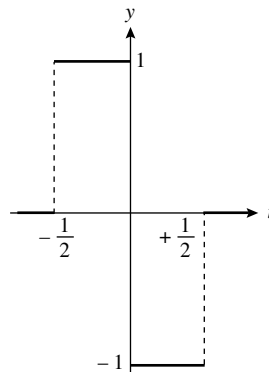
Soit $\Lambda(t)$ la fonction nulle pour $|t| \geq \frac{1}{2}$ et égale à $\frac{1}{2} - |t|$ pour $|t| < \frac{1}{2}$. On pourra vérifier que $\Lambda(t) = \frac{1}{2} \Delta_{1/2}(t)$ (cf. index).

- 1) Calculer la dérivée seconde de la distribution régulière $[\Lambda(t)]$. En déduire la transformée de Fourier $\hat{\Lambda}(v)$ de $\Lambda(t)$.
- 2) Déterminer la transformée de Fourier de la distribution régulière $[\Lambda(t)\sin 4k\pi t]$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Déterminer le développement en série de Fourier réelle de la fonction $f(t)$ périodique de période 1 qui coïncide avec $\Lambda(t)\sin 4k\pi t$ sur $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$.

1) Comme $\Lambda(t)$ est continue, on a $[\Lambda(t)]' = [\Lambda'(t)]$. D'autre part, la dérivée seconde $\Lambda''(t)$ de $\Lambda(t)$ au sens des fonctions est nulle.



$y = \Lambda(t)$



$y = \Lambda'(t)$

On a donc : $[\Lambda(t)]'' = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$, et par conséquent :

$$(2i\pi v)^2 \hat{\Lambda}(v) = \exp(i\pi v) - 2 + \exp(-i\pi v) = -2 + 2\cos \pi v \\ = -2(1 - \cos \pi v) = -4\sin^2 \frac{\pi v}{2},$$

ou encore :

$$\hat{\Lambda}(v) = \frac{\sin^2 \frac{\pi v}{2}}{\pi^2 v^2}.$$

2) On a $[\Lambda(t)\sin 4k\pi t] = \sin 4k\pi t \cdot [\Lambda(t)]$, dont la transformée de Fourier est le produit de convolution des transformées de Fourier de $[\sin 4k\pi t]$ et de $[\Lambda(t)]$. Comme la transformée de Fourier de $[\sin 4k\pi t]$ est $\frac{1}{2i}(\delta(v-2k) - \delta(v+2k))$ et celle de $[\Lambda(t)]$ est $[\hat{\Lambda}(v)]$, il vient :

$$F([\Lambda(t)\sin 4k\pi t])(v) = \frac{1}{2i}(\delta(v-2k) - \delta(v+2k)) * \left[\frac{\sin^2 \frac{\pi v}{2}}{\pi^2 v^2} \right] \\ = \frac{1}{2i} \left(\delta(v-2k) * \left[\frac{\sin^2 \frac{\pi v}{2}}{\pi^2 v^2} \right] - \delta(v+2k) * \left[\frac{\sin^2 \frac{\pi v}{2}}{\pi^2 v^2} \right] \right) \\ = \left[\frac{1}{2i} \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi(v-2k)}{2}}{\pi^2 (v-2k)^2} - \frac{\sin^2 \frac{\pi(v+2k)}{2}}{\pi^2 (v+2k)^2} \right) \right] \\ = \left[\frac{\sin^2 \frac{\pi v}{2}}{2i\pi^2} \left(\frac{1}{(v-2k)^2} - \frac{1}{(v+2k)^2} \right) \right] = \left[-\frac{4ikv \sin^2 \frac{\pi v}{2}}{\pi^2 (v^2 - 4k^2)^2} \right],$$

en utilisant les relations $\delta(t-a) * T(t) = T(t-a)$ et $\sin(\theta + k\pi) = (-1)^k \sin \theta$ pour k entier.

3) Notons $\varphi(t)$ la fonction $\Lambda(t)\sin 4k\pi t$. D'après (R9.2), la distribution régulière $[f]$ associée à la fonction f n'est autre que $[\varphi]^* \sqcup \sqcup$. Par suite :

$$F([f])(v) = F([\varphi])(v) \cdot F(\sqcup \sqcup)(v) = -\frac{4ikv \sin^2 \frac{\pi v}{2}}{\pi^2 (v^2 - 4k^2)^2} \cdot \sqcup \sqcup(v) \\ = -\frac{4ikv \sin^2 \frac{\pi v}{2}}{\pi^2 (v^2 - 4k^2)^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(v-n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\frac{4ikv \sin^2 \frac{\pi v}{2}}{\pi^2 (v^2 - 4k^2)^2} \delta(v-n)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\frac{4ikn \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{\pi^2 (n^2 - 4k^2)^2} \delta(v - n).$$

Pour $n = 2p$ pair avec $p \neq \pm k$, le coefficient est nul car le dénominateur est non nul et le sinus du numérateur est nul. Pour $n = \pm 2k$, on a une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, mais l'indétermination est facile à lever. Par exemple, pour $n = 2k$, posons $v = 2k + h$. On peut constater que $\sin^2 \frac{\pi(2k+h)}{2} = \sin^2 \frac{\pi h}{2}$ et donc que :

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi v}{2}}{(v^2 - 4k^2)^2} = \frac{\sin^2 \frac{\pi v}{2}}{(v-2k)^2 (v+2k)^2} = \frac{\sin^2 \frac{\pi h}{2}}{h^2 (4k+h)^2} = \frac{\sin^2 \frac{\pi h}{2}}{\left(\frac{\pi h}{2}\right)^2} \cdot \frac{\pi^2}{4(4k+h)^2}.$$

Cette quantité tend vers $\frac{\pi^2}{64k^2}$ lorsque $h \rightarrow 0$ et le coefficient de $\delta(v - 2k)$ est donc égal à $-\frac{4ik(2k)}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{64k^2} = -\frac{i}{8}$.

On montrerait de même que le coefficient de $\delta(v + 2k)$ est égal à $+\frac{i}{8}$.

Pour $n = 2p + 1$ impair, on a $\sin \frac{n\pi}{2} = \sin \frac{(2p+1)\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = (-1)^p$, et le coefficient de $\delta(v - (2p + 1))$ est $-\frac{4ik(2p+1)}{\pi^2 ((2p+1)^2 - 4k^2)^2}$. On a donc :

$$\begin{aligned} F([f])(v) &= \frac{i}{8} (\delta(v+2k) - \delta(v-2k)) - \frac{4ik}{\pi^2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{2p+1}{((2p+1)^2 - 4k^2)^2} \delta(v - (2p+1)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta(v-2k) - \delta(v+2k)}{2i} + \frac{8k}{\pi^2} \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{2p+1}{((2p+1)^2 - 4k^2)^2} \cdot \frac{\delta(v - (2p+1)) - \delta(v + (2p+1))}{2i}. \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier inverse des deux membres, on obtient :

$$[f(t)] = \frac{1}{4} [\sin 4k\pi t] + \frac{8k}{\pi^2} \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{2p+1}{((2p+1)^2 - 4k^2)^2} [\sin(2(2p+1)\pi t)].$$

La série de Fourier réelle de $f(t)$ est donc :

$$\boxed{\frac{\sin 4k\pi t}{4} + \frac{8k}{\pi^2} \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{2p+1}{((2p+1)^2 - 4k^2)^2} \sin(2(2p+1)\pi t)}.$$

Exercice 9.8 (Shannon)

Soit $T = [\cos]$ la distribution régulière associée à la fonction $t \mapsto \cos t$.

1) Déterminer la transformée de Fourier $\hat{T}$ de T .

2) Soit $T_\theta(t) = \cos t \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - p \frac{\pi}{2}\right)$ le signal échantillonné de $\cos t$ à la fréquence $\theta = \frac{2}{\pi}$.

Montrer que $T_\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \delta_{k\pi}$.

3) Montrer que $T_\theta = (\delta_0 - \delta_\pi) * \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta_{2q\pi}$.

En déduire que la transformée de Fourier de T_θ est $\hat{T}_\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2k+1}{2\pi}}$.

4) Soit P la fonction « porte » qui vaut 1 sur $\left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ et 0 ailleurs.

Vérifier que $P \cdot \hat{T}_\theta = \frac{2}{\pi} \hat{T}$.

En déduire que

$$T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \left[\frac{\sin 2t}{2(t - n\pi)} \right] = \left[\frac{\sin 2t}{2t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin 2t}{t^2 - n^2 \pi^2} \right].$$

1) On a $\cos t = \frac{1}{2} (\exp(it) + \exp(-it))$, donc $T(t) = \frac{1}{2} ([\exp(it)] + [\exp(-it)])$.

On a $\exp(\pm it) = \exp\left(2i\pi\left(\pm \frac{1}{2\pi}\right)t\right)$, donc la transformée de Fourier de $[\exp(\pm it)]$ est $\delta\left(\nu \mp \frac{1}{2\pi}\right)$.

Il s'ensuit que $\hat{T} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\frac{1}{2\pi}} + \delta_{-\frac{1}{2\pi}} \right)$.

2) On a $T_\theta(t) = \cos t \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - p \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \cos t \delta\left(t - p \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \cos \frac{p\pi}{2} \delta\left(t - p \frac{\pi}{2}\right)$.

Comme $\cos \frac{p\pi}{2} = 0$ si p est impair et $\cos \frac{2k\pi}{2} = (-1)^k$, on a $T_\theta(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \delta(t - k\pi)$,

soit $T_\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \delta_{k\pi}$.

3) On a $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \delta_k \pi = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta_{2q\pi} - \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta_{(2q+1)\pi} = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta_{2q\pi} * \delta_0 - \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta_{2q\pi} * \delta_\pi$, d'où le résultat demandé.

On a $\sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta_{2q\pi}(t) = \frac{1}{2\pi} \sqcup \sqcup \left(\frac{t}{2\pi} \right)$, dont la transformée de Fourier est

$$\sqcup \sqcup (2\pi\nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{q}{2\pi}}(\nu).$$

D'autre part, la transformée de Fourier de $\delta_0 - \delta_\pi$ est $[1 - \exp(-2i\pi^2\nu)]$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \hat{T}_\theta(\nu) &= (1 - \exp(-2i\pi^2\nu)) \frac{1}{2\pi} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{q}{2\pi}}(\nu) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \left(1 - \exp\left(-2i\pi^2 \frac{q}{2\pi}\right) \right) \delta_{\frac{q}{2\pi}}(\nu) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{q \in \mathbb{Z}} (1 - \exp(-i\pi q)) \delta_{\frac{q}{2\pi}}(\nu). \end{aligned}$$

Comme $1 - \exp(-i\pi q) = 0$ lorsque q est pair et $1 - \exp(-(2k+1)i\pi) = 2$, on a bien

$$\hat{T}_\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2k+1}{2\pi}}.$$

4) On a $P(\nu) \hat{T}_\theta(\nu) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} P\left(\frac{2k+1}{2\pi}\right) \delta\left(\nu - \frac{2k+1}{2\pi}\right).$

On a $P\left(\frac{1}{2\pi}\right) = P\left(-\frac{1}{2\pi}\right) = 1$ et $P\left(\frac{2k+1}{2\pi}\right) = 0$ pour $k \in \mathbb{Z} - \{-1, 0\}$. Par conséquent :

$$P(\nu) \hat{T}_\theta(\nu) = \frac{1}{\pi} \left(\delta\left(\nu - \frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{2\pi}\right) \right) = \frac{2}{\pi} \hat{T}(\nu).$$

De l'égalité $\hat{T} = \frac{\pi}{2} P \cdot \hat{T}_\theta$ on déduit, en prenant les transformées de Fourier inverses des deux membres :

$$\begin{aligned} T(t) &= \bar{F}(P)(t) * T_\theta(t) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\sin 2t}{\pi t} \right] * \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta(t - n\pi) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \left[\frac{\sin 2(t - n\pi)}{2(t - n\pi)} \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{(-1)^n \sin 2t}{2(t - n\pi)} \right] \\ &= \left[\frac{\sin 2t}{2t} \right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n \sin 2t}{2} \left(\frac{1}{t - n\pi} + \frac{1}{t + n\pi} \right) \right] \\ &= \left[\frac{\sin 2t}{2t} \right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n t \sin 2t}{t^2 - n^2 \pi^2} \right] = \left[\frac{\sin 2t}{2t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t \sin 2t}{t^2 - n^2 \pi^2} \right], \end{aligned}$$

puisque cette dernière série de fonctions (prolongées par continuité sur $\pi\mathbb{Z}$) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.9 (périodisation)

Soit x un nombre réel donné tel que $0 < |x| < \pi$.

- 1) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction g_x définie par :
 $g_x(t) = \exp(ixt)$ pour $t \in [-1, 1]$, $g_x(t) = 0$ pour $t \notin [-1, 1]$.

En déduire la transformée de Fourier de la fonction h_x définie par :
 $h_x(t) = \cos xt$ pour $t \in [-1, 1]$, $h_x(t) = 0$ pour $t \notin [-1, 1]$.

- 2) Soit f_x la fonction périodique de période 2 qui coïncide avec h_x sur $[-1, 1]$.

Montrer que la transformée de Fourier de la distribution régulière $[f_x]$ est

$$\hat{f}_x(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2} \delta\left(\nu - \frac{n}{2}\right).$$

En déduire que la série de Fourier réelle $SF(f_x)$ de f_x est donnée par :

$$SF(f_x)(t) = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2} \cos n\pi t.$$

Préciser pourquoi l'on a $f_x(t) = SF(f_x)(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- 3) Calculer la somme $\frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x \sin x}{x^2 - n^2 \pi^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que
 $0 < |x| < \pi$.

En déduire que l'on a $\cos x = \frac{\sin 2x}{2x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x \sin 2x}{x^2 - n^2 \pi^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel
que $0 < |x| < \pi$.

- 4) Montrer que cette dernière égalité reste valide pour tout $x \in \mathbb{R}$, à condition de
prolonger par continuité les termes du second membre.

- 1) On peut calculer $\hat{g}_x$ à l'aide de l'intégrale habituelle, mais on peut aussi procéder comme
suit :

$$\begin{aligned} \text{On a } [g_x(t)]' &= [g'_x(t)] + g_x(-1+)\delta(t+1) - g_x(1-)\delta(t-1) \\ &= ix[g_x(t)] + \exp(-ix)\delta(t+1) - \exp(ix)\delta(t-1). \end{aligned}$$

En prenant les transformées de Fourier des deux membres, il vient :

$$2i\pi\nu[\hat{g}_x(\nu)] = ix[\hat{g}_x(\nu)] + \exp(-ix)[\exp(2i\pi\nu)] - \exp(ix)[\exp(-2i\pi\nu)],$$

soit $i(2\pi\nu - x)[\hat{g}_x(\nu)] = [\exp(i(2\pi\nu - x)) - \exp(-i(2\pi\nu - x))] = [2i \sin(2\pi\nu - x)]$. On

en déduit que $[\hat{g}_x(\nu)] = \left[\frac{2\sin(2\pi\nu - x)}{2\pi\nu - x} \right]$ et $\hat{g}_x(\nu) = \frac{2\sin(2\pi\nu - x)}{2\pi\nu - x}$, car, g_x étant à sup-
port borné, la transformée de Fourier de $[g_x]$ est une distribution régulière, associée à la
fonction $C^\infty \hat{g}_x$, et il ne peut y avoir, dans l'expression de sa transformée de Fourier,

de distributions singulières, comme le sont les solutions non nulles de l'équation $(2\pi\nu - x)X(\nu) = 0$.

On a $h_x(t) = \frac{1}{2}(g_x(t) + g_x(-t))$, donc

$$\hat{h}_x(\nu) = \frac{1}{2}(\hat{g}_x(\nu) + \hat{g}_x(-\nu)) = \frac{\sin(x - 2\pi\nu)}{x - 2\pi\nu} + \frac{\sin(x + 2\pi\nu)}{x + 2\pi\nu}.$$

2) On a $f_x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_x(t - 2n)$, d'où $[f_x] = [h_x] * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2n} = [h_x(t)] * \frac{1}{2} \sqcup \sqcup \left(\frac{t}{2}\right)$.

On en déduit que

$$[\hat{f}_x(\nu)] = \hat{h}_x(\nu) \sqcup \sqcup (2\nu) = \hat{h}_x(\nu) \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(\nu - \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{h}_x\left(\frac{n}{2}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \hat{h}_x\left(\frac{n}{2}\right) &= \frac{\sin(x - n\pi)}{x - n\pi} + \frac{\sin(x + n\pi)}{x + n\pi} \\ &= (-1)^n \sin x \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right) = \frac{(-1)^n 2x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé. En prenant les transformées de Fourier inverses, on en déduit la série de Fourier de f_x :

$$\begin{aligned} SF(f_x)(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2} \exp(i\pi n t) \\ &= \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2} (\exp(i\pi n t) + \exp(-i\pi n t)), \end{aligned}$$

en regroupant les termes d'ordre n et $-n$, d'où le résultat demandé.

La fonction f_x , étant continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier. On peut tout aussi bien invoquer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de cette série de Fourier.

3) En prenant $t = 0$ dans l'égalité $f_x(t) = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2} \cos n\pi t$, on obtient :

$$\frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x \sin x}{x^2 - n^2\pi^2} = f_x(0) = 1.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\cos x$, et vu que $2\sin x \cos x = \sin 2x$, on obtient l'égalité $\cos x = \frac{\sin 2x}{2x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x \sin 2x}{x^2 - n^2\pi^2}$, valide pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| < \pi$.

4) Les termes du deuxième membre de l'égalité précédente sont tous prolongeables par continuité sur $\pi\mathbb{Z}$, et le deuxième membre se prolonge ainsi en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, qui coïncide donc avec $\cos x$ sur $[-\pi, \pi]$.

En écrivant le second membre sous la forme $s(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n \sin 2x}{2(x - n\pi)}$, on obtient

$$s(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n \sin 2(x + 2\pi)}{2(x - (n - 2)\pi)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{n-2} \sin 2x}{2(x - (n - 2)\pi)} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^p \sin 2x}{2(x - p\pi)} = s(x).$$

La fonction s est donc 2π -périodique, et coïncide avec $\cos$ sur $[-\pi, \pi]$, donc elle coïncide avec $\cos$ sur $\mathbb{R}$ tout entier (comparer avec l'exercice 3.8, questions 4 et 5).

Exercice 9.10

Soit $s(t)$ une fonction réelle de la variable réelle t , tempérée. On note $\hat{s}(\nu)$ la transformée de Fourier de la distribution tempérée $[s(t)]$, et l'on suppose que $\hat{s}(\nu)$ n'est pas singulière à l'origine, de telle sorte que le produit $Y(\nu)\hat{s}(\nu)$ a un sens.

On appelle *signal analytique associé* à $s(t)$ le signal $s_a(t)$ tel que $\hat{s}_a(\nu) = 2Y(\nu)\hat{s}(\nu)$.

1) Déterminer $s_a(t)$ pour $s(t) = \cos \omega t$ et $s(t) = \sin \omega t$.

2) Déterminer $s_a(t)$ pour $s(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$ et $s(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$.

3) Montrer que la partie réelle de $s_a(t)$ est égale à $s(t)$ et que la partie imaginaire de $s_a(t)$ est égale à la transformée de Hilbert inverse de $s(t)$. Retrouver ainsi les résultats du 2) de l'exercice 0.7.

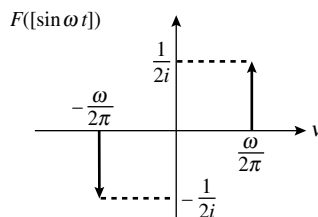
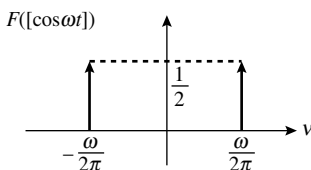
1) La transformée de Fourier de $[\cos \omega t]$ est $\frac{1}{2} \left(\delta \left(\nu - \frac{\omega}{2\pi} \right) + \delta \left(\nu + \frac{\omega}{2\pi} \right) \right)$ et donc, pour $s(t) = \cos \omega t$, on a : $\hat{s}_a(\nu) = 2Y(\nu)\hat{s}(\nu) = \delta \left(\nu - \frac{\omega}{2\pi} \right)$ et par conséquent $s_a(t) = \exp i \omega t$.

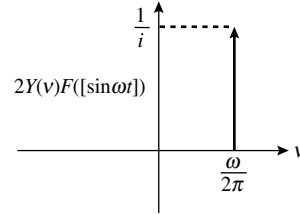
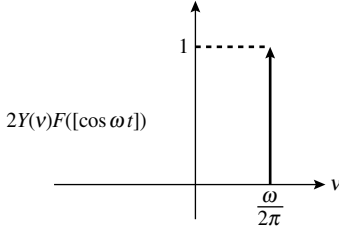
De même, la transformée de Fourier de $[\sin \omega t]$ est :

$$\frac{1}{2i} \left(\delta \left(\nu - \frac{\omega}{2\pi} \right) - \delta \left(\nu + \frac{\omega}{2\pi} \right) \right) \text{ et donc, pour } s(t) = \sin \omega t,$$

$$\text{on a } \hat{s}_a(\nu) = 2Y(\nu)\hat{s}(\nu) = \frac{1}{i} \delta \left(\nu - \frac{\omega}{2\pi} \right) = -i \delta \left(\nu - \frac{\omega}{2\pi} \right) \text{ et par conséquent}$$

$$s_a(t) = -i \exp i \omega t = \exp i \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$





2) Si $s(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$, on a $\hat{s}(v) = \pi \exp(-2\pi|v|)$ (R5.15).

On a donc $\hat{s}_a(v) = 2\pi Y(v) \exp(-2\pi|v|)$, et donc, par transformation de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} s_a(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}_a(v) \exp(+2i\pi vt) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi Y(v) \exp(-2\pi|v| + 2i\pi vt) dt \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \exp(-2\pi(1-it)v) dv = 2\pi \left[\frac{\exp(-2\pi(1-it)v)}{-2\pi(1-it)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-it}, \end{aligned}$$

soit encore :

$$s_a(t) = \frac{1}{1-it} = \frac{1+it}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1} + i \frac{t}{t^2+1}.$$

Pour $s(t) = \frac{t}{t^2+1}$, on peut écrire $s(t) = -\frac{1}{2i\pi}(-2i\pi t) \frac{1}{t^2+1}$, et donc :

$$\hat{s}(v) = -\frac{1}{2i\pi} [\pi \exp(-2\pi|v|)]' = \left[-\frac{1}{2i} (\exp(-2\pi|v|))' \right] = [-i\pi \operatorname{sgn}(v) \exp(-2\pi|v|)],$$

car $\exp(-2\pi|v|)$ est continue, et donc la dérivée de la distribution régulière associée à cette fonction est la distribution régulière associée à sa dérivée. On en déduit :

$$\hat{s}_a(v) = 2Y(v)\hat{s}(v) = -2i\pi Y(v) \exp(-2\pi|v|),$$

car $Y(v) \operatorname{sgn}(v) = Y(v)$. Par transformation de Fourier inverse, et en utilisant le résultat du cas précédent, on obtient immédiatement :

$$s_a(t) = -i \frac{1}{1-it} = \frac{t}{t^2+1} - i \frac{1}{t^2+1}.$$

3) Dans le cas général, l'égalité $\hat{s}_a(v) = 2Y(v)\hat{s}(v)$ donne par transformation de Fourier inverse, sachant que la transformée de Fourier inverse d'un produit est le produit de convolution des transformées de Fourier inverses de chacun des facteurs, et que d'autre part, (avec la relation $\bar{F}(f)(v) = F(f)(-v)$) la transformée de Fourier inverse de $[Y(v)]$ est

$$\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{2i\pi} Pf \frac{1}{t} :$$

$$\begin{aligned} s_a(t) &= 2 \left(\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{2i\pi} Pf \frac{1}{t} \right) * s(t) = \delta(t) * s(t) + \frac{i}{\pi} Pf \frac{1}{t} * s(t) \\ &= s(t) + \frac{i}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(u)}{t-u} du = s(t) - i \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(u)}{u-t} du = s(t) - iH(s(t)), \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

- Pour $s(t) = \frac{1}{t^2+1}$, on a $s_a(t) = \frac{1}{t^2+1} + i \frac{t}{t^2+1}$, donc $H\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = -\frac{t}{t^2+1}$.
- Pour $s(t) = \frac{t}{t^2+1}$, on a $s_a(t) = \frac{t}{t^2+1} - i \frac{1}{t^2+1}$, donc $H\left(\frac{t}{t^2+1}\right) = \frac{1}{t^2+1}$.

Exercice 9.11

Soit $E(t)$ la fonction « partie entière de t », égale pour chaque valeur de t au plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à t . Soit $T(t)$ la distribution régulière associée à la fonction $Y(t)E(t)$.

1) Calculer la dérivée de T .

2) Déterminer la transformée de Laplace de T' et en déduire celle de T .

1) La fonction $Y(t)E(t)$ est constante sur les intervalles $]-\infty, 1[$, $[1, 2[$, ..., $[n, n+1[$, ... et discontinue seulement pour $t \in \mathbb{N}^*$, valeurs de t en lesquelles le saut de $Y(t)E(t)$ vaut 1. Par conséquent $T'(t) = \sum_{n \geq 1} \delta(t-n)$.

2) La transformée de Laplace $G(p)$ de $T'(t)$ est donc :

$$G(p) = \sum_{n \geq 1} \exp(-np) = \exp(-p) \sum_{k \geq 0} \exp(-kp) = \frac{\exp(-p)}{1 - \exp(-p)}.$$

D'autre part, si F désigne la transformée de Laplace de T , la transformée de Laplace de sa dérivée est $G(p) = pF(p)$, et par conséquent :

$$F(p) = \frac{1}{p} G(p) = \frac{\exp(-p)}{p(1 - \exp(-p))} = \frac{1}{p(\exp(p) - 1)}.$$

On peut trouver ce résultat sans dérivation, en constatant que l'on a :

$$Y(t)E(t) = Y(t-1) + Y(t-2) + \dots + Y(t-n) + \dots$$

donc que :

$$[Y(t)E(t)] = [Y(t-1)] + [Y(t-2)] + \dots + [Y(t-n)] + \dots = [Y(t)] * \sum_{n \geq 1} \delta(t-n),$$

et donc, la transformée de Laplace de $[Y(t)]$ étant $\frac{1}{p}$, que :

$$F(p) = \frac{1}{p} \sum_{n \geq 1} \exp(-np).$$

On voit ici la maniabilité de la transformation de Laplace étendue aux distributions.

Exercice 9.12

Soit $f(t)$ la fonction nulle pour $t < 0$ ou $t > \pi$, et égale à $\sin t$ pour $0 \leq t \leq \pi$.

- 1) Vérifier que $f(t) = Y(t)\sin t + Y(t - \pi)\sin(t - \pi)$. En déduire la transformée de Laplace de $[f]$.
- 2) Exprimer $[Y(t)|\sin t|]$ sous forme d'un produit de convolution $[f] * T$, où T est une distribution causale que l'on déterminera. En déduire la transformée de Laplace de $[Y(t)|\sin t|]$.

1) Comme $\sin(t - \pi) = -\sin t$, on a :

$$Y(t)\sin t + Y(t - \pi)\sin(t - \pi) = \sin t \cdot (Y(t) - Y(t - \pi)).$$

La fonction $Y(t) - Y(t - \pi)$ est nulle pour $t < 0$ ou $t > \pi$, et égale à 1 pour $0 \leq t \leq \pi$. On a donc bien l'égalité cherchée.

La transformée de Laplace de $[Y(t)\sin t]$ étant $\frac{1}{p^2 + 1}$, on a :

$$\begin{aligned} L([Y(t - \pi)\sin(t - \pi)])(p) &= \frac{\exp(-\pi p)}{p^2 + 1}, \\ L([f])(p) &= \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{\exp(-\pi p)}{p^2 + 1} = \frac{1 + \exp(-\pi p)}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

2) La fonction $Y(t)|\sin t|$ coïncide avec $f(t)$ sur $[0, \pi]$, et, comme $|\sin t|$ est périodique de période π , vaut $f(t - \pi)$ sur $[\pi, 2\pi]$, $f(t - 2\pi)$ sur $[2\pi, 3\pi]$, ...

$f(t - n\pi)$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, etc. On a donc :

$$\begin{aligned} Y(t)|\sin t| &= f(t) + f(t - \pi) + f(t - 2\pi) + \dots + f(t - n\pi) + \dots, \\ [Y(t)|\sin t|] &= [f(t)] + [f(t - \pi)] + [f(t - 2\pi)] + \dots + [f(t - n\pi)] + \dots \\ &= [f(t)] + [f(t)] * \delta(t - \pi) + [f(t)] * \delta(t - 2\pi) + \dots + [f(t)] * \delta(t - n\pi) + \dots \\ &= [f(t)] * \sum_{n \geq 0} \delta(t - n\pi). \end{aligned}$$

On a donc : $[Y(t)|\sin t|] = [f(t)] * T(t)$, avec $T(t) = \sum_{n \geq 0} \delta(t - n\pi)$.

La transformée de Laplace de T est :

$$L(T)(p) = \sum_{n \geq 0} \exp(-n\pi p) = \sum_{n \geq 0} \exp(-\pi p)^n = \frac{1}{1 - \exp(-\pi p)}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} L([Y(t)|\sin t|])(p) &= L([f(t)] * T(t))(p) = L([f(t)])(p) \cdot L(T)(p) \\ &= \frac{1 + \exp(-\pi p)}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 - \exp(-\pi p)} = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1 + \exp(-\pi p)}{1 - \exp(-\pi p)} = \frac{\coth \frac{\pi p}{2}}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

(Il est conseillé de chercher l'exercice 9.33 pour comparer les techniques. Voir aussi l'exercice 6.10.)

Exercice 9.13

Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient pour $t \geq 0$ l'équation intégrale-différentielle :

$$t \frac{df}{dt}(t) + f(t) = 2 \int_0^t f(u) \sin(t-u) du.$$

Soit $T(t)$ la distribution régulière associée à la fonction sommable sur tout segment $Y(t)f(t)$, et soit $\alpha = f(0)$ le saut de $Y(t)f(t)$ en 0. On a :

$$\frac{dT}{dt} = \left[Y(t) \frac{df}{dt}(t) \right] + \alpha \delta(t),$$

$$\left[Y(t) \frac{df}{dt}(t) \right] = \frac{dT}{dt} - \alpha \delta(t).$$

D'autre part, on a $\left[Y(t) \int_0^t f(u) \sin(t-u) du \right] = [Y(t)f(t)] * [Y(t)\sin t]$. En multipliant les deux membres de l'équation proposée par $Y(t)$ et en prenant les distributions régulières associées, il vient donc :

$$t \frac{dT}{dt} - \alpha t \delta(t) + T = 2T * [Y(t)\sin t],$$

ou encore, comme $t\delta(t) = 0$, $t \frac{dT}{dt} + T = 2T * [Y(t)\sin t]$.

Prenons les transformées de Laplace des deux membres, en appelant F celle de T . Il vient :

$$-p \frac{dF}{dp}(p) + F(p) = 2F(p) \frac{1}{p^2 + 1},$$

ce qui donne :

$$-p \frac{dF}{dp}(p) = \frac{2}{p^2 + 1} F(p)$$

$$\frac{dF}{F} = -\frac{2dp}{p(p^2 + 1)} = -2 \frac{dp}{p} + \frac{2pdp}{p^2 + 1}$$

qui s'intègre en :

$$\ln \left| \frac{F(p)}{K} \right| = -2 \ln |p| + \ln(p^2 + 1),$$

$$F(p) = K \frac{p^2 + 1}{p^2} = K \left(1 + \frac{1}{p^2} \right),$$

dont l'originale est $T(t) = K(\delta(t) + [tY(t)])$. Pour que $T(t)$ soit une distribution régulière, il faut que $K = 0$ (car $\delta(t)$ est une distribution singulière), et donc que $Y(t)f(t)$ soit nulle presque partout. Il s'ensuit, par continuité de f , que f doit être nulle sur $[0, +\infty[$. Les solutions au problème proposé sont donc les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ nulles pour $t \geq 0$.

Exercice 9.14

Déterminer les couples (X, Z) de distributions causales qui sont solutions du système d'équations de convolution :

$$X * X - Z * Z = [Y(t)t \cos t],$$

$$2 X * Z = [Y(t)t \sin t].$$

Soient F et G les transformées de Laplace respectives de X et Z .

Sachant que les transformées de Laplace de $Y(t) \cos t$ et $Y(t) \sin t$ sont respectivement $\frac{p}{p^2 + 1}$

et $\frac{1}{p^2 + 1}$, on en déduit celles de $Y(t)t \cos t = tY(t) \cos t$

et de $Y(t)t \sin t = tY(t) \sin t$, qui sont respectivement :

$$-\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + 1} \right) = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2},$$

$$-\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}.$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} F(p)^2 - G(p)^2 = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2} \\ 2F(p)G(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} \end{cases}.$$

Posons $U(p) = F(p) + iG(p)$. On a $U(p)^2 = F(p)^2 - G(p)^2 + 2iF(p)G(p)$,

donc :

$$U(p)^2 = \frac{p^2 - 1 + 2pi}{(p^2 + 1)^2} = \frac{(p+i)^2}{(p^2 + 1)^2} = \left(\frac{p+i}{p^2 + 1} \right)^2.$$

On en déduit que : $U(p) = F(p) + iG(p) = \pm \left(\frac{p+i}{p^2 + 1} \right) = \pm \left(\frac{p}{p^2 + 1} + i \frac{1}{p^2 + 1} \right),$

d'où, en reprenant les originales et en identifiant parties réelles et parties imaginaires, les deux solutions possibles suivantes :

$$\begin{aligned} X(t) &= [Y(t) \cos t], & Z(t) &= [Y(t) \sin t] \\ \text{et : } X(t) &= -[Y(t) \cos t], & Z(t) &= -[Y(t) \sin t]. \end{aligned}$$

Exercice 9.15

L'amplitude $x(t)$ d'un oscillateur linéaire amorti vérifie l'équation différentielle :

$$x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (H)$$

où λ et ω_0 sont des coefficients réels strictement positifs. On pose :

$$\omega = \sqrt{|\omega_0^2 - \lambda^2|}.$$

- 1) On suppose que $x(t)$ vérifie les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = v_0$, et soit $y(t) = [Y(t)x(t)]$ la distribution régulière associée à la fonction $Y(t)x(t)$. Écrire l'équation différentielle (H') vérifiée par $y(t)$ et déterminer sa solution au moyen de la transformation de Laplace (on distinguera les cas $\lambda < \omega_0$, $\lambda = \omega_0$ et $\lambda > \omega_0$).
- 2) On se place désormais dans le cas où $\lambda < \omega_0$ et l'on entretient le mouvement de l'oscillateur en lui appliquant tous les deux passages à la position d'équilibre une impulsion d'intensité fixe $a = v_0(1 - e^{-\lambda T})$, avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$. On démontre que l'équation différentielle régissant l'amplitude est alors :

$$[x(t)]'' + 2\lambda[x(t)]' + \omega_0^2[x(t)] = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - \frac{2\pi n}{\omega}\right), \quad (E)$$

où $[x(t)]$ est la distribution régulière associée à $x(t)$, que nous supposons tempérée.

a) Déterminer la transformée de Fourier $\hat{x}(v)$ de $[x(t)]$.

b) En déduire le développement de $x(t)$ en série de Fourier réelle.

- 3) Soient f et g les fonctions périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ telles que pour

$$t \in [0, T[\text{ on ait } f(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t \text{ et } g(t) = v_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t.$$

a) Calculer les dérivées $[f]'$ et $[g]'$ des distributions régulières $[f]$ et $[g]$. En déduire que $[f]$ est solution de l'équation (E).

b) En déduire une expression de l'amplitude x trouvée à la question 2.b en fonction de f .

1) Multiplions les deux membres de (H) par $Y(t)$ et prenons les distributions régulières associées. Il vient $[Y(t)x''(t)] + 2\lambda[Y(t)x'(t)] + \omega_0^2[Y(t)x(t)] = 0$.

On a $y'(t) = [Y(t)x(t)]' = [Y(t)x'(t)]$, puisque $Y(t)x(t)$ est continue. Puisque le saut de $Y(t)x'(t)$ en 0 est v_0 et que $Y(t)x'(t)$ est continue ailleurs, on a également $y''(t) = [Y(t)x'(t)]' = [Y(t)x''(t)] + v_0\delta(t)$, soit

$[Y(t)x''(t)] = y''(t) - v_0\delta(t)$, d'où l'équation différentielle vérifiée par $y(t)$:

$$y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega_0^2 y(t) = v_0\delta(t). \quad (H')$$

Soit $X(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$. Celles de $y'(t)$ et $y''(t)$ sont alors respectivement $pX(p)$ et $p^2X(p)$. L'équation (H') donne alors :

$$(p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2) X(p) = v_0, \quad (H'')$$

soit :

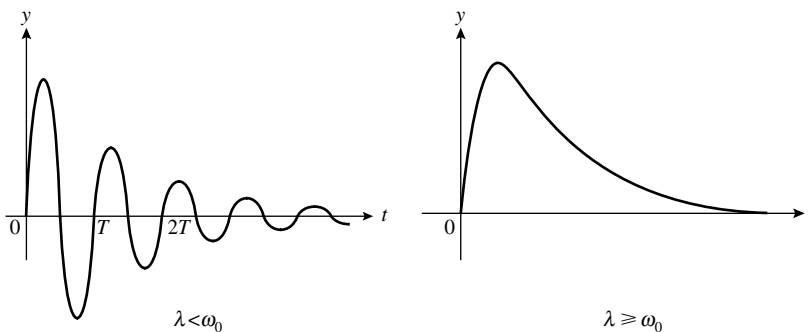
$$X(p) = \frac{v_0}{p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2} = \frac{v_0}{(p + \lambda)^2 + (\omega_0^2 - \lambda^2)}.$$

Si $\lambda < \omega_0$, $\omega_0^2 - \lambda^2 > 0$, donc $X(p) = \frac{v_0}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$ et $x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t$.

Si $\lambda = \omega_0$, $\omega_0^2 - \lambda^2 = 0$, donc $X(p) = \frac{v_0}{(p + \lambda)^2}$ et $x(t) = v_0 t e^{-\lambda t}$.

Si $\lambda > \omega_0$, $\omega_0^2 - \lambda^2 < 0$, donc $X(p) = \frac{v_0}{(p + \lambda)^2 - \omega^2}$ et $x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\lambda t} \text{sh } \omega t$.

(Les formules ci-dessus donnant les valeurs de $x(t)$ pour $t \geq 0$.)



2) a) L'équation (E) donne :

$$(-4\pi^2 v^2 + 4i\pi \lambda v + \omega_0^2) \hat{x}(v) = \frac{a\omega}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(v - \frac{n\omega}{2\pi}\right),$$

soit, comme $-4\pi^2 v^2 + 4i\pi \lambda v + \omega_0^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(v) &= \frac{a\omega}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{-4\pi^2 v^2 + 4i\pi \lambda v + \omega_0^2} \delta\left(v - \frac{n\omega}{2\pi}\right) \\
 &= \frac{a\omega}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{-n^2 \omega^2 + 2i\lambda n \omega + \omega_0^2} \delta\left(v - \frac{n\omega}{2\pi}\right) \\
 &= \frac{a\omega}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(\omega_0^2 - n^2 \omega^2) - 2i\lambda n \omega}{(\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2 + 4\lambda^2 n^2 \omega^2} \delta\left(v - \frac{n\omega}{2\pi}\right).
 \end{aligned}$$

b) On en déduit la série de Fourier complexe de $x(t)$:

$$x(t) = \frac{a\omega}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(\omega_0^2 - n^2 \omega^2) - 2i\lambda n \omega}{(\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2 + 4\lambda^2 n^2 \omega^2} \exp(in\omega t),$$

et, en regroupant les termes d'indices opposés, la série de Fourier réelle de $x(t)$:

$$x(t) = \frac{a\omega}{\pi} \left(\frac{1}{2\omega_0^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{\omega_0^2 - n^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2 + 4\lambda^2 n^2 \omega^2} \cos n\omega t + \frac{2\lambda n \omega}{(\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2 + 4\lambda^2 n^2 \omega^2} \sin n\omega t \right).$$

3) a) Comme $f(t)$ est continue, on a $[f]' = [f'] = [g - \lambda f]$. Donc :

$$[f]' = [g] - \lambda[f].$$

D'autre part, $[g(t)]' = [g'(t)] + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Delta g(nT) \delta(t - nT)$, où les $\Delta g(nT)$ sont les sauts de g en ses points de discontinuité nT . Par périodicité, ces sauts sont tous égaux, et l'on a :

$$\begin{aligned}
 \Delta g(nT) &= \Delta g(0) = g(0^+) - g(0^-) = g(0^+) - g(T^-) = v_0 - v_0 e^{-\lambda T} \\
 &= v_0 (1 - e^{-\lambda T}) = a.
 \end{aligned}$$

D'autre part $g'(t) = -\omega^2 f(t) - \lambda g(t)$. Par conséquent :

$$[g(t)]' = -\omega^2 [f(t)] - \lambda [g(t)] + a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT).$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 [f(t)]'' &= [g(t)]' - \lambda [f(t)]' \\
 &= \left(-\omega^2 [f(t)] - \lambda [g(t)] + a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT) \right) - \lambda ([g(t)] - \lambda [f(t)]) \\
 &= (\lambda^2 - \omega^2) [f(t)] - 2\lambda [g(t)] + a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT).
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 [f(t)]'' + 2\lambda [f(t)]' + \omega_0^2 [f(t)] &= ((\lambda^2 - \omega^2) - 2\lambda^2 + \omega_0^2) [f(t)] + (-2\lambda + 2\lambda) [g(t)] + a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT) \\
 &= a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT),
 \end{aligned}$$

puisque $\omega_0^2 - \lambda^2 - \omega^2 = 0$. La distribution $[f]$ est donc solution de (E).

b) On a :

$$[x(t)]'' + 2\lambda[x(t)]' + \omega_0^2[x(t)] = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - \frac{2\pi n}{\omega}\right),$$

$$[f(t)]'' + 2\lambda[f(t)]' + \omega_0^2[f(t)] = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - \frac{2\pi n}{\omega}\right).$$

En retranchant membre à membre ces deux égalités, et en posant

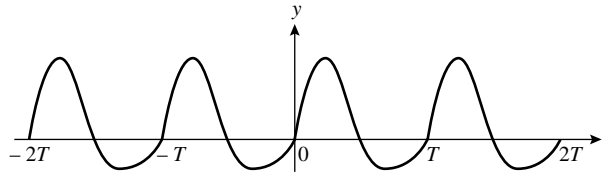
$U(t) = [x(t)] - [f(t)]$, il vient :

$$U''(t) + 2\lambda U'(t) + \omega_0^2 U(t) = 0,$$

dont la solution générale est $U(t) = A[e^{-\lambda t} \cos \omega t] + B[e^{-\lambda t} \sin \omega t]$.

Comme $[x]$ est tempérée (par hypothèse) et $[f]$ est tempérée, il doit en être de même pour U , ce qui implique que $A = B = 0$ (étudier le comportement de la fonction $Ae^{-\lambda t} \cos \omega t + Be^{-\lambda t} \sin \omega t$ lorsque $t \rightarrow -\infty$). Donc $U = 0$ et $x = f$.

Le graphe de $y = x(t)$ est représenté ci-dessous :



On pourra remarquer que sur l'intervalle $[0, T]$, $x(t)$ coïncide avec la solution de l'équation (H) étudiée dans la première question.

Exercice 9.16

- 1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$. Déterminer la transformée de Laplace de la distribution régulière $[Y(t)t^\alpha]$ associée à la fonction sommable $Y(t)t^\alpha$. On rappelle qu'il existe une fonction Γ définie pour $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{x-1} dt$, et qui vérifie l'identité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, ce qui permet de la prolonger aux intervalles $] -n, -n+1[$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, en posant :

$$\forall x \in] -n, -n+1[, \quad \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

- 2) Pour $\alpha \in] -n-1, -n[$, $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la distribution $\text{Pf}[Y(t)t^\alpha]$ par l'égalité :

$$\frac{d^n}{dt^n} [Y(t)t^{\alpha+n}] = (\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+1) \text{Pf}[Y(t)t^\alpha].$$

Calculer la transformée de Laplace de $\text{Pf}[Y(t)t^\alpha]$.

3) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$, on pose $T_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \text{Pf}[Y(t)t^\alpha]$ si

$$\alpha > -1, \text{ et } T_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \text{Pf}[Y(t)t^\alpha] \text{ si } \alpha < -1.$$

Calculer $T_\alpha * T_\beta$ lorsque α et β sont deux éléments distincts de $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$ tels que $\alpha + \beta \notin \{-2, -3, -4, \dots\}$.

Calculer $T_{-3/2} * T_{-3/2}$.

1) La transformée de Laplace de $[Y(t)t^\alpha]$ est la fonction, définie pour tout p réel strictement positif :

$$F_\alpha(p) = \int_0^{+\infty} t^\alpha \exp(-pt) dt.$$

Faisons le changement de variable $u = pt$. Il vient :

$$F_\alpha(p) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{p}\right)^\alpha \exp(-u) \frac{du}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha \exp(-u) du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

2) On a $\text{Pf}[Y(t)t^\alpha] = \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+1)} \frac{d^n}{dt^n} [Y(t)t^{\alpha+n}]$. Donc si $F_\alpha(p)$ désigne la transformée de Laplace de $\text{Pf}[Y(t)t^\alpha]$, on a :

$$\begin{aligned} F_\alpha(p) &= \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+1)} p^n L\left([Y(t)t^{\alpha+n}]\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+1)} p^n \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{p^{\alpha+n+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

3) La transformée de Laplace de T_α est donc $\frac{1}{p^{\alpha+1}}$. Il s'ensuit que celle de $T_\alpha * T_\beta$ est

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}} \times \frac{1}{p^{\beta+1}} = \frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \text{ dont l'originale n'est autre que } T_{\alpha+\beta+1}.$$

La transformée de Laplace de $T_{-3/2}$ étant $\frac{1}{p^{(-3/2)+1}} = \frac{1}{p^{-1/2}} = p^{1/2}$, celle de $T_{-3/2} * T_{-3/2}$

est donc $p^{1/2} \cdot p^{1/2} = p$, et par conséquent $T_{-3/2} * T_{-3/2} = \delta'$.

Remarquons que si S est une distribution causale quelconque, on a :

$$T_{-3/2} * (T_{-3/2} * S) = (T_{-3/2} * T_{-3/2}) * S = \delta' * S = S'.$$

Par conséquent, la convolution avec $T_{-3/2}$ est une opération qui, répétée deux fois de suite, donne une dérivation. On peut donc légitimement dire que convoluer avec $T_{-3/2}$ c'est « dériver une demi-fois », ou encore que l'opérateur de convolution avec $T_{-3/2}$ est une racine carrée de l'opérateur de dérivation des distributions causales.

Exercice 9.17

- 1) Déterminer la transformée en z du signal numérique causal $f(n)$ défini par :

$$f(n) = \frac{1}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- 2) En déduire la transformée en z des signaux numériques causaux $g(n)$ et $h(n)$ définis par :

$$g(2k) = \frac{1}{(2k)!} \text{ et } g(2k+1) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

$$h(2k+1) = \frac{1}{(2k+1)!} \text{ et } h(2k) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

- 1) La transformée en z de $f(n)$ est $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$. En effet, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La fonction $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est donc égale à sa dérivée, par conséquent $y(x) = C \exp(x)$, et comme $y(0) = 1$, on a $C = 1$.

- 2) Soit $G(z)$ la transformée en z de $g(n)$. On a :

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} z^n = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n \right) = \frac{F(z) + F(-z)}{2}.$$

$$\text{On en déduit : } G(z) = \frac{F(z) + F(-z)}{2} = \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right) + \exp\left(-\frac{1}{z}\right)}{2} = \text{ch}\left(\frac{1}{z}\right).$$

De même la transformée en z de $h(n)$ est :

$$H(z) = \frac{F(z) - F(-z)}{2} = \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right) - \exp\left(-\frac{1}{z}\right)}{2} = \text{sh}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Exercice 9.18

Déterminer la transformée en z des signaux numériques causaux suivants :

- 1) $f(n) = an^2 + bn + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (a, b, c réels donnés).
- 2) $g(n) = \text{sh}n\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (θ réel donné).

On précisera dans chaque cas la couronne de convergence.

1) La transformée en z de $f(n)$ est :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (an^2 + bn + c) z^{-n} = a \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^{-n} + b \sum_{n=0}^{+\infty} n z^{-n} + c \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}.$$

La somme $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$ est convergente pour $|z| > 1$ et égale à $\frac{z}{z-1}$. On en déduit :

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n z^{-n} = -z S'(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \text{ pour } |z| > 1,$$

$$S_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^{-n} = -z S_1'(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \text{ pour } |z| > 1,$$

$$\text{donc } F(z) = a S_2(z) + b S_1(z) + c S(z) = \frac{z(cz^2 + (a+b-2c)z + (a-b+c))}{(z-1)^3}.$$

La couronne de convergence est définie par $|z| > 1$.

2) On a $\operatorname{sh} \theta = \frac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta}) = \frac{1}{2}((e^{\theta})^1 - (e^{\theta})^{-1})$. La transformée en z de $g(n)$ est donc :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh} \theta z^{-n} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-\theta} z)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{\theta} z)^{-n} \right) = \frac{S(e^{-\theta} z) - S(e^{\theta} z)}{2},$$

$$\text{soit } G(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-\theta} z}{e^{-\theta} z - 1} - \frac{e^{\theta} z}{e^{\theta} z - 1} \right) = \frac{2z \operatorname{sh} \theta}{2(z^2 - 2z \operatorname{ch} \theta + 1)} = \frac{z \operatorname{sh} \theta}{z^2 - 2z \operatorname{ch} \theta + 1}.$$

La couronne de convergence est définie par $|e^{\theta} z| > 1$ et $|e^{-\theta} z| > 1$, c'est-à-dire $|z| > e^{-\theta}$ et $|z| > e^{\theta}$, soit en définitive $|z| > e^{|\theta|}$.

Exercice 9.19

Pour tout nombre réel $a > 0$, soit $f_a(n)$ le signal numérique causal défini par $f_a(n) = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Soit b un nombre réel strictement positif. Déterminer le produit de convolution $f_a * f_b$ (on distinguera les cas $b \neq a$ et $b = a$).

2) Retrouver ces résultats en utilisant la transformation en z .

1) On a $(f_a * f_b)(n) = \sum_{k=0}^n f_a(k) f_b(n-k) = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$. Cette somme est égale à :

$$\boxed{\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}} \text{ si } b \neq a \text{ et à } \boxed{(n+1)a^n} \text{ si } b = a.$$

2) La transformée en z de $f_a(n)$ étant $F_a(z) = \frac{z}{z-a}$, définie pour $|z| > a$, celle de $f_a * f_b$ est

$F_a(z)F_b(z)$, soit $\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$ si $b \neq a$ et $\frac{z^2}{(z-a)^2}$ si $b = a$, définie pour $|z| > \max(a, b)$.

Dans le premier cas, on décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = 1 + \frac{(a+b)z-ab}{(z-a)(z-b)} = 1 + \frac{a^2}{(a-b)(z-a)} + \frac{b^2}{(b-a)(z-b)}.$$

La fonction constante 1 est la transformée en z du signal $s(n)$ tel que $s(0) = 1$ et $s(n) = 0$ pour $n \neq 0$. D'autre part $\frac{a}{z-a} = \frac{z-(z-a)}{z-a} = \frac{z}{z-a} - 1$, donc $\frac{a}{z-a}$ est la transformée en z de

$f_a - s$. De même $\frac{b}{z-b}$ est la transformée en z de $f_b - s$. Il s'ensuit que $\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$ est la

transformée en z du signal :

$$\left(1 - \frac{a}{a-b} - \frac{b}{b-a}\right)s(n) + \frac{a}{a-b}f_a(n) + \frac{b}{b-a}f_b(n) = \frac{af_a(n) - bf_b(n)}{a-b} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Dans le deuxième cas, on écrit $\frac{z^2}{(z-a)^2} = 1 + \frac{2az - a^2}{(z-a)^2} = 1 + a \frac{z}{(z-a)^2} + \frac{a}{z-a}$ qui est la transformée en z de $s(n) + ana^{n-1} + (a^n - s(n))$, soit $(n+1)a^n$.

Exercice 9.20

1) Déterminer les signaux numériques $f_a(n)$ et $g_a(n)$ dont les transformées en z sont

respectivement les fonctions $\frac{1}{z-a}$ et $\frac{1}{(z-a)^2}$ ($a \in \mathbb{C}^*$) :

a) sur la couronne $|z| > |a|$.

b) sur la couronne $|z| < |a|$.

2) En déduire le signal numérique $h(n)$ dont la transformée en z est la fonction

$$H(z) = \frac{z+11}{z^3-3z+2} :$$

a) sur la couronne $|z| > 2$.

b) sur la couronne $1 < |z| < 2$.

c) sur la couronne $|z| < 1$.

1) a) Pour $|z| > |a|$, on a : $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z\left(1-\frac{a}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} z^{-n}$, donc :

$$\boxed{f_a(n) = a^{n-1}} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } \boxed{f_a(n) = 0} \text{ pour } n \leq 0.$$

On a :

$$\frac{1}{(z-a)^2} = -\left(\frac{1}{z-a}\right)' = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n a^{n-1} z^{-n}\right)' = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a^{n-2} z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a^{n-2} z^{-n}, \text{ donc :}$$

$$\boxed{g_a(n) = (n-1)a^{n-2}} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } \boxed{g_a(n) = 0} \text{ pour } n \leq 0.$$

b) Pour $|z| < |a|$, on a :

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a\left(1-\frac{z}{a}\right)} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^0 a^{n-1} z^{-n},$$

donc :

$$\boxed{f_a(n) = -a^{n-1}} \text{ pour } n \leq 0 \text{ et } \boxed{f_a(n) = 0} \text{ pour } n \geq 1.$$

De même qu'à la question précédente, on trouve :

$$\boxed{g_a(n) = -(n-1)a^{n-2}} \text{ pour } n \leq 0 \text{ et } \boxed{g_a(n) = 0} \text{ pour } n \geq 1.$$

2) Le dénominateur $z^3 - 3z + 2$ se factorise en $(z-1)^2(z+2)$. On peut décomposer la fraction rationnelle $H(z)$ en éléments simples :

$$H(z) = \frac{z+11}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{4}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

Sur chacune des couronnes considérées, on aura donc $h(n) = 4g_1(n) - f_1(n) + f_{-2}(n)$, c'est-à-dire :

a) Sur la couronne $|z| > 2$:

$$h(n) = 4(n-1) - 1 + 2^{n-1} = 4n - 5 + 2^{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$\text{et } h(n) = 0 \quad \text{pour } n \leq 0.$$

b) Sur la couronne $1 < |z| < 2$:

$$h(n) = 4(n-1) - 1 + 0 = 4n - 5 \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$\text{et } h(n) = 0 + 0 - 2^{n-1} = -2^{n-1} \quad \text{pour } n \leq 0.$$

c) Sur la couronne $|z| < 1$:

$$h(n) = -4(n-1) + 1 - 2^{n-1} = -4n + 5 - 2^{n-1} \quad \text{pour } n \leq 0$$

$$\text{et } h(n) = 0 \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Exercices d'entraînement

- 9.21** Soit f une fonction continue, de carré sommable sur $\mathbb{R}$. On rappelle que sa transformée de Hilbert $H(f)$ est donnée par :

$$H(f)(t) = \frac{1}{\pi} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{u-t} du.$$

1) Écrire $[H(f)]$ comme le produit de convolution de $[f]$ par une distribution que l'on précisera. En déduire la transformée de Fourier de $H(f)$ en fonction de celle de f .

2) Calculer $H(H(f))$.

- 9.22** 1) Soit $f_n(t) = \frac{\sin nt}{t}$. Déterminer $\hat{f}_n(v)$.

2) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_n(v)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f_n(t)]$.

- 9.23** En utilisant l'identité $t^2 \text{Pf} \frac{\sin t}{t^2} = \sin t$, calculer la transformée de Fourier de

$$\text{Pf} \frac{\sin t}{t^2}.$$

- 9.24** Soit $f(t) = Y(t)\exp(-at)$, $a > 0$.

1) Calculer $[f]'$ et en déduire $\hat{f}$.

2) En déduire les transformées de Fourier de $\exp(-a|t|)$,

$$\text{sgnt} \cdot \exp(-a|t|), \quad \frac{1}{t^2+1} \quad \text{et} \quad \frac{t}{t^2+1} \quad (\text{cf. exercice 5.2}).$$

- 9.25** 1) Calculer les transformées de Fourier des distributions régulières associées aux fonctions $t+1$, $t-1$, t^2-1 , $(t^2-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2-1)^n)$. Déterminer la transformée de Fourier de $[P_n]$.

- 9.26** Soit $D_\tau(t)$ la distribution égale à $\frac{1}{\tau} \left(\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right)$.

1) Calculer la transformée de Fourier de $D_\tau(t)$, puis celle de :

$$D_\tau^{*n} = D_\tau * D_\tau \dots * D_\tau \quad (n \text{ facteurs}).$$

2) En déduire la limite de D_τ^{*n} lorsque τ tend vers 0.

- 9.27** Soit $E(t)$ la partie entière de t , c'est-à-dire le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à t .

- 1) Vérifier que $\left[E\left(t + \frac{1}{2}\right) \right]$ est une distribution impaire.
- 2) Calculer la dérivée, la transformée de Fourier de la dérivée et la transformée de Fourier de $T(t) = \left[E\left(t + \frac{1}{2}\right) \right]$.
- 3) En déduire la transformée de Fourier de $[E]$.

9.28 On considère la fonction $f(t) = Y(t) \exp(-at)$, $a > 0$.

- 1) Calculer sa transformée de Fourier $\hat{f}(v)$.
- 2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t-n)$.

Calculer $g(t)$ pour $0 \leq t < 1$ et vérifier que g est périodique de période 1.

- 3) Déterminer $\hat{g}$ et en déduire la série de Fourier complexe S_g de g .

9.29 On considère la fonction f périodique de période T , définie sur $[0, T]$ par l'égalité $f(t) = at(T-t)$ ($a > 0$).

- 1) Calculer $[f]''$. En déduire les transformées de Fourier de $[f]''$ et de $[f]$.
- 2) Déterminer les séries de Fourier complexe, puis réelle, de f (comparer avec l'exercice 3.7).

9.30 Soit $g(t) = |\sin \pi t|$. Calculer $[g]''$. En déduire la transformée de Fourier de $[g]$ et la série de Fourier réelle de g .

9.31 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $f_k(t)$ la fonction périodique de période 2π telle que pour

$$|t| \leq \pi \text{ on ait } f_k(t) = \cos \frac{t}{2k}.$$

- 1) Calculer $[f_k]''$. En déduire la transformée de Fourier $\hat{f}_k$ de $[f_k]$ et la série de Fourier complexe de f_k .

- 2) Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} [f_k(t)]$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{f}_k(v)$.

9.32 Déterminer la distribution causale T telle que l'on ait :

$$T''' - 2T'' + T' - 2T = 2\delta'.$$

On constatera que T est la distribution régulière associée à une fonction $y(t)$ vérifiant, pour $t > 0$, une équation différentielle linéaire à coefficients constants que l'on déterminera, et des conditions initiales que l'on déterminera également.

9.33 Soit T la distribution régulière associée à la fonction $Y(t)|\sin t|$.

- 1) Calculer $T'' + T$.
 - 2) En déduire la transformée de Laplace de T .
- (On pourra comparer avec l'exercice 9.12.)

9.34 Soit $f(n)$ un signal numérique, $F(z)$ sa transformée en z . Déterminer les transformées en z des signaux numériques suivants :

- 1) $g(2k) = f(2k)$ et $g(2k+1) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- 2) $h(2k+1) = f(2k+1)$ et $h(2k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- 3) $r(2k) = (-1)^k f(2k)$ et $r(2k+1) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- 4) $s(2k+1) = (-1)^k f(2k+1)$ et $s(2k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

9.35 Déterminer les signaux numériques $f(n)$ dont les transformées en z sont les fractions rationnelles suivantes :

- 1) $\frac{1}{z(z^2+1)}$ a) sur la couronne $|z| > 1$,
b) sur la couronne $0 < |z| < 1$.
- 2) $\frac{1}{z^2-2z+4}$ a) sur la couronne $|z| > 2$,
b) sur la couronne $|z| < 2$.
- 3) $\frac{1}{z^4+5z^2+4}$ a) sur la couronne $|z| > 2$,
b) sur la couronne $1 < |z| < 2$,
c) sur la couronne $|z| < 1$.

Réponses

9.21 1) $[H(f)] = \frac{1}{\pi} Pf \frac{1}{t} * [f]$, $F(H(f))(v) = -i \operatorname{sgn} v \cdot F(f)(v)$.

2) $H(H(f)) = -f$.

9.22 1) $\hat{f}_n(v) = \pi P_1 \left(\frac{\pi v}{n} \right)$. 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}_n(v) = \pi$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f_n(t)] = \pi \delta(t)$.

9.23 Soit $T(t) = Pf \frac{\sin t}{t^2}$. Alors $\hat{T}(v)$ est la distribution régulière associée à la fonction qui

vaut $-i\pi \operatorname{sgn}(v)$ pour $|v| \geq \frac{1}{2\pi}$ et $-2i\pi^2 v$ pour $|v| \leq \frac{1}{2\pi}$.

9.24 1) $[f(t)]' = \delta(t) - a[f(t)]$, $\hat{f}(v) = \frac{1}{a+2i\pi v}$.

2) $\frac{2a}{a^2+4\pi^2 v^2}$, $\frac{-4i\pi v}{a^2+4\pi^2 v^2}$, $\pi \exp(-2\pi|v|)$, $-i\pi \operatorname{sgn} v \exp(-2\pi|v|)$.

9.25 1) $\delta(v) - \frac{1}{2i\pi} \delta'(v)$, $-\delta(v) - \frac{1}{2i\pi} \delta'(v)$, $-\delta(v) - \frac{1}{4\pi^2} \delta''(v)$,

$(-1)^n \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\delta^{(2k)}(v)}{2^{2k} \pi^{2k}}$.

$$2) \sum_{n \leq 2k \leq 2n} \frac{(2k)! i^n}{2^{2k} \pi^{2k} k! (n-k)! (2k-n)!} \delta^{(2k-n)}(v).$$

$$9.26 \quad 1) F(D_\tau)(v) = 2i \frac{\sin \pi \tau v}{\tau} = 2i \pi v \frac{\sin \pi \tau v}{\pi \tau v}, \quad F(D_\tau^{*n})(v) = (2i \pi v)^n \left(\frac{\sin \pi \tau v}{\pi \tau v} \right)^n.$$

$$2) \delta^{(n)}(t).$$

$$9.27 \quad 1) \sqcup \sqcup \left(t + \frac{1}{2} \right), \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta(v-n), \quad -\frac{1}{2i\pi} \delta'(v) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^n}{2i\pi n} \delta(v-n).$$

$$2) -\frac{1}{2i\pi} \delta'(v) - \frac{1}{2} \delta(v) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{2i\pi n} \delta(v-n).$$

$$9.28 \quad 1) \hat{f}(v) = \frac{1}{a + 2i\pi v}, \quad 2) g(t) = \frac{\exp(-at)}{1 - \exp(-a)} \text{ sur } [0, 1[.$$

$$3) \hat{g}(v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{a + 2i\pi n} \delta(v-n), \quad S_g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\exp(2i\pi n t)}{a + 2i\pi n}.$$

$$9.29 \quad 1) [f(t)]'' = 2a \left(-1 + T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t-nT) \right), \quad F([f]'')(v) = 2a \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \delta\left(v - \frac{n}{T}\right),$$

$$F([f])(v) = \frac{aT^2}{6} \delta(v) - \frac{aT^2}{2\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} \delta\left(v - \frac{n}{T}\right).$$

$$2) f(t) = aT^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\exp\left(2i\pi n \frac{t}{T}\right)}{n^2} \right) = aT^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)}{n^2} \right).$$

$$9.30 \quad [g(t)]'' = -\pi^2 [g(t)] + 2\pi \sqcup \sqcup(t), \quad \hat{g}(v) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1-4n^2} \delta(v-n),$$

$$g(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\cos 2\pi n t}{4n^2 - 1}.$$

$$9.31 \quad 1) [f_k(t)]'' = -\frac{1}{4k^2} [f_k(t)] + \frac{1}{k} \sin \frac{\pi}{2k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - (2n+1)\pi),$$

$$\hat{f}_k(v) = \frac{2k}{\pi} \sin \frac{\pi}{2k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1-4k^2 n^2} \delta\left(v - \frac{n}{2\pi}\right), \quad f_k(t) = \frac{2k}{\pi} \sin \frac{\pi}{2k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{1-4k^2 n^2} \exp i n t.$$

$$2) \lim_{k \rightarrow +\infty} [f_k(t)] = [1] \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{f}_k(v) = \delta(v).$$

$$9.32 \quad y''' - 2y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4.$$

$$T = \left[\frac{2}{5} Y(t) (2 \exp(2t) - 2 \cosh t + \sinh t) \right].$$

$$9.33 \quad 1) \quad T'' + T = \delta(t) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \delta(t - n\pi). \quad 2) \quad \frac{\coth \frac{\pi p}{2}}{p^2 + 1}.$$

$$9.34 \quad 1) \quad G(z) = \frac{F(z) + F(-z)}{2}. \quad 2) \quad H(z) = \frac{F(z) - F(-z)}{2}.$$

$$3) \quad R(z) = \frac{F(iz) + F(-iz)}{2}. \quad 4) \quad S(z) = \frac{F(-iz) - F(iz)}{2i}.$$

$$9.35 \quad 1) \quad \text{a) } f(2k+1) = (-1)^{k+1} \text{ pour tout } k \geq 1, f(n) = 0 \text{ si } n \text{ est pair ou } n < 3.$$

$$\text{b) } f(2k+1) = (-1)^k \text{ pour tout } k \leq 0, f(n) = 0 \text{ si } n \text{ est pair ou } n > 1.$$

$$2) \quad \text{a) } f(n) = 2^{n-3} \sin \frac{(n-1)\pi}{3} \text{ pour } n \geq 1, f(n) = 0 \text{ pour } n \leq 0.$$

$$\text{b) } f(n) = -2^{n-3} \sin \frac{(n-1)\pi}{3} \text{ pour } n \leq 0, f(n) = 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

$$3) \quad \text{a) } f(2k) = (-1)^k \frac{4^{k-1} - 1}{3} \text{ pour } k \geq 1, f(n) = 0 \text{ si } n \text{ est impair ou } n \leq 1.$$

$$\text{b) } f(2k) = \begin{cases} \frac{1}{3}(-1)^{k-1} & \text{pour } k \geq 1 \\ \frac{1}{3}(-1)^{k-1} 4^{k-1} & \text{pour } k \leq 0 \end{cases}, f(n) = 0 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

$$\text{c) } f(2k) = (-1)^k \frac{1 - 4^{k-1}}{3} \text{ pour } k \leq 0, f(n) = 0 \text{ si } n \text{ est impair ou } n \geq 2.$$

Chapitre 10

Filtrage

RAPPELS

I. Filtrage analogique

- Un *filtre linéaire (permanent continu)* est une fonctionnelle Φ qui à un signal d'entrée e appartenant à un certain ensemble $\mathcal{A}_\Phi$ de distributions, associe un signal de sortie, ou réponse, $s = \Phi(e)$ (qui est également une distribution), telle que Φ vérifie les propriétés suivantes :
 - linéarité : $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{A}_\Phi, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \Phi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = \lambda_1 \Phi(e_1) + \lambda_2 \Phi(e_2)$.
 - permanence : pour tout $e \in \mathcal{A}_\Phi$, si $\Phi(e) = s$, alors $\Phi(e(t - t_0)) = s(t - t_0)$ pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$.
 - continuité : si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}_\Phi$ convergeant vers $e \in \mathcal{A}_\Phi$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(e_n) = \Phi \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n \right) = \Phi(e).$$

- Pour un filtre linéaire Φ , sa *réponse impulsionnelle* est par définition $D = \Phi(\delta)$. Pour tout $e \in \mathcal{A}_\Phi$, on a alors $\Phi(e) = D * e$.
- La *fonction de transfert* d'un filtre linéaire Φ est la transformée de Laplace $G = L(D)$ de sa réponse impulsionnelle D .
Les transformées de Laplace $E = L(e)$ et $S = L(s)$ d'un signal d'entrée $e \in \mathcal{A}_\Phi$ et de la réponse s correspondante sont alors liées par la relation $S = GE$.
- Un filtre linéaire Φ est dit *causal* si et seulement si pour tout signal d'entrée e nul pour $t < t_0$, la réponse $s = \Phi(e)$ est également nulle pour $t < t_0$.

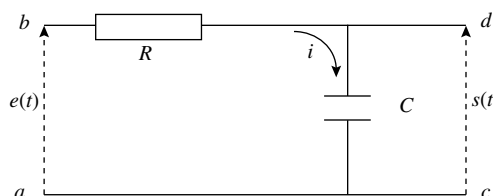
Pour qu'un filtre linéaire soit causal, il faut et il suffit que sa réponse impulsionnelle D soit causale, c'est à dire nulle pour $t < 0$.

II. Filtrage numérique

- Un *filtre numérique linéaire (permanent continu)* est une fonctionnelle Φ qui à un signal d'entrée numérique e appartenant à un certain ensemble $\mathcal{A}_\Phi$, associe un signal de sortie numérique, ou réponse, $s = \Phi(e)$, telle que Φ vérifie les propriétés de linéarité, permanence et continuité, qui sont définies de la même façon que pour les filtres analogiques.
- Pour un filtre numérique linéaire Φ , sa *réponse impulsionnelle* est par définition $D = \Phi(E_0)$, où E_0 est le signal numérique défini par $E_0(0) = 1$ et $E_0(n) = 0$ pour $n \neq 0$. Pour tout $e \in \mathcal{A}_\Phi$, on a alors $\Phi(e) = D * e$, où $D * e$ est défini par $(D * e)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e(k)D(n - k)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- La *fonction de transfert* d'un filtre numérique linéaire Φ est la transformée en z , $G = \mathcal{T}_z(D)$ de sa réponse impulsionnelle D . Les transformées en z $E = \mathcal{T}_z(e)$ et $S = \mathcal{T}_z(s)$ d'un signal d'entrée $e \in \mathcal{A}_\Phi$ et de la réponse s correspondante sont alors liées par la relation $S = GE$.
- Un filtre numérique linéaire Φ est dit *causal* si et seulement si pour tout signal d'entrée e nul pour $n < n_0$, la réponse $s = \Phi(e)$ est également nulle pour $n < n_0$. Pour qu'un filtre linéaire soit causal, il faut et il suffit que sa réponse impulsionnelle D soit causale, c'est-à-dire nulle pour $n < 0$.
- Un filtre numérique linéaire Φ est dit *stable* si et seulement si à tout signal d'entrée borné correspond une réponse bornée. Cette condition est équivalente à chacune des deux suivantes :
 - (i) la réponse impulsionnelle D de Φ est sommable : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |D(n)| < +\infty$.
 - (ii) la couronne de convergence de la fonction de transfert de Φ contient le cercle $|z| = 1$.

Exercice 10.1

On considère le circuit électrique correspondant au schéma ci-dessous :



On crée entre les bornes a et b une différence de potentiel dépendant du temps $e(t)$. Soit alors $s(t)$ la différence de potentiel entre les bornes c et d à l'instant t . On suppose $e(t)$ et $s(t)$ nulles pour $t < 0$.

1) Exprimer $e(t)$ en fonction de $s(t)$, $\frac{ds}{dt}(t)$, R et C . Montrer que l'on peut écrire $e = A * s$, où A est une distribution causale que l'on déterminera.

2) Déterminer la « réponse impulsionnelle » D , c'est-à-dire la distribution s correspondant à $e = \delta$. Montrer que pour tout signal e , on a $s = D * e$.

Déterminer la « fonction de transfert » G du filtre, c'est-à-dire la transformée de Laplace de D .

3) Déterminer la réponse s dans les cas suivants :

a) $e(t) = Y(t)$

b) $e(t) = Y(t) \sin \omega t$

c) $e(t) = Y(t) \exp(-at) \quad (a > 0).$

1) Soit $i(t)$ l'intensité traversant le circuit à l'instant t . La différence de potentiel entre les bornes d et b de la résistance R à l'instant t est : $e(t) - s(t) = Ri(t)$.

Celle aux bornes du condensateur C est $s(t) = \frac{1}{C}q(t)$, où $q(t)$ est la charge du condensateur à l'instant t . On a donc :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = C \frac{ds}{dt}(t) = \frac{e(t) - s(t)}{R},$$

ce qui donne : $e(t) - s(t) = RC \frac{ds}{dt}(t)$

$$e(t) = s(t) + RC \frac{ds}{dt}(t)$$

que l'on peut encore écrire : $e(t) = (\delta(t) + RC\delta'(t)) * s(t) = (A * s)(t)$ en posant :

$$A = \delta + RC\delta'.$$

2) Pour $e = \delta$, la réponse D vérifie $\delta = A * D$, ce qui montre, puisque δ est l'élément neutre du produit de convolution, que D est « l'inverse de convolution » de A . Pour tout signal e on a $e = A * s$, donc :

$$D * e = D * (A * s) = (D * A) * s = \delta * s = s.$$

Pour calculer D , on constate que la transformée de Laplace de A est $1 + RCp$, que l'on peut écrire, en posant $\alpha = \frac{1}{RC}$, sous la forme $\frac{p + \alpha}{\alpha}$. Donc la fonction de transfert G , transformée de Laplace de D , est $G(p) = \frac{1}{1 + RCp} = \frac{\alpha}{p + \alpha}$, dont l'originale est :

$$D(t) = [\alpha Y(t) \exp(-\alpha t)].$$

3) Notons E et S les transformées de Laplace de e et s .

La relation $s = D * e$ donne $S(p) = G(p)E(p)$. Donc :

a) Si $e(t) = Y(t)$, $E(p) = \frac{1}{p}$ donc $S(p) = \frac{\alpha}{p(p+\alpha)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\alpha}$, et par conséquent $s(t) = Y(t) - Y(t)\exp(-\alpha t) = Y(t)(1 - \exp(-\alpha t))$.

b) Si $e(t) = Y(t)\sin\omega t$, $E(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ donc :

$$S(p) = \frac{\alpha\omega}{(p+\alpha)(p^2 + \omega^2)} = \frac{\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{p+\alpha} - \frac{p-\alpha}{p^2 + \omega^2} \right)$$

$$S(p) = \frac{\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{p+\alpha} + \frac{\alpha}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right)$$

dont l'originale est $s(t) = \frac{\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2} Y(t) \left(\exp(-\alpha t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t - \cos \omega t \right)$.

c) Si $e(t) = Y(t)\exp(-at)$, $E(p) = \frac{1}{p+a}$ donc $S(p) = \frac{\alpha}{(p+a)(p+\alpha)}$.

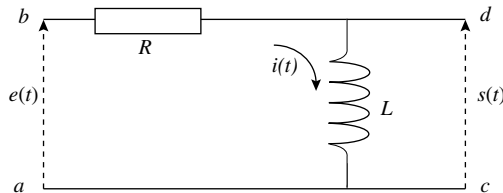
Si $a \neq \alpha$, $S(p) = \frac{\alpha}{\alpha - a} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+\alpha} \right)$

et $s(t) = \frac{\alpha}{\alpha - a} Y(t) (\exp(-at) - \exp(-\alpha t))$.

Si $a = \alpha$, $S(p) = \frac{\alpha}{(p+\alpha)^2}$ et $s(t) = \alpha Y(t) t \exp(-\alpha t)$.

Exercice 10.2

On considère le circuit électrique correspondant au schéma ci-dessous :



On crée entre les bornes a et b une différence de potentiel dépendant du temps $e(t)$. Soit alors $s(t)$ la différence de potentiel entre les bornes c et d à l'instant t . On suppose $e(t)$ et $s(t)$ nulles pour $t < 0$. On note $i(t)$ l'intensité du courant de b vers a à l'instant t .

- 1) Montrer que $\frac{ds}{dt}(t) + \frac{R}{L}s(t) = \frac{de}{dt}(t)$.
- 2) Soit T la distribution régulière associée à la fonction $t \mapsto Y(t)\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$.
Calculer $\left(\delta' + \frac{R}{L}\delta\right) * T$. En déduire la réponse indicielle du circuit, c'est-à-dire la réponse $s(t)$ correspondant au signal d'entrée $e(t) = Y(t)$.
- 3) Calculer la réponse impulsionnelle D du circuit, c'est-à-dire la réponse s correspondant au signal d'entrée $e = \delta$. En déduire la fonction de transfert G du circuit.
- 4) Déterminer la réponse s du circuit pour les signaux d'entrée suivants :
 - a) $e(t) = Y(t) \sin \omega t$.
 - b) $e(t) = Y(t) \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)$.

1) On a $e - s = Ri$ et $s = L \frac{di}{dt}$, donc $\frac{de}{dt} - \frac{ds}{dt} = R \frac{di}{dt} = \frac{R}{L}s$, d'où le résultat demandé.

2) On a $\left(\delta' + \frac{R}{L}\delta\right) * T = \delta' * T + \frac{R}{L}\delta * T = T' + \frac{R}{L}T$.

Or $T'(t) = \left[Y(t)\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]' = \left[-\frac{R}{L}Y(t)\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right] + \delta(t) = -\frac{R}{L}T(t) + \delta(t)$.

On a donc $\left(\delta' + \frac{R}{L}\delta\right) * T = \delta$.

Soit s la réponse indicielle du circuit. On a $\frac{ds}{dt}(t) + \frac{R}{L}s(t) = \frac{d}{dt}[Y(t)] = \delta(t)$, soit

$\left(\delta' + \frac{R}{L}\delta\right) * s = \delta$. En convoluant les deux membres par T , il vient $T * \left(\delta' + \frac{R}{L}\delta\right) * s =$

$T * \delta = T$. D'autre part, comme $T * \left(\delta' + \frac{R}{L}\delta\right) = \left(\delta' + \frac{R}{L}\delta\right) * T = \delta$, on a

$T * \left(\delta' + \frac{R}{L}\delta\right) * s = \delta * s = s$, donc $s = T$.

3) Soit D la réponse impulsionnelle. La réponse indicielle est alors donnée par $T(t) = D(t) * [Y(t)]$. En dérivant les deux membres, il vient $T'(t) = D(t) * [Y(t)]' = D(t) * \delta(t) = D(t)$.

Donc $D = T' = -\frac{R}{L}T + \delta$.

En passant aux transformées de Laplace, il vient $G(p) = -\frac{\frac{R}{L}}{p + \frac{R}{L}} + 1 = \frac{p}{p + \frac{R}{L}}$.

4) a) La transformée de Laplace de $e(t) = Y(t) \sin \omega t$ est $E(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. La transformée de Laplace de la réponse correspondante est donc $S(p) = G(p)E(p) = \frac{p\omega}{\left(p + \frac{R}{L}\right)(p^2 + \omega^2)}$.

En décomposant cette fraction rationnelle en éléments simples, on obtient :

$$S(p) = -\frac{LR\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \frac{1}{p + \frac{R}{L}} + \frac{LR\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \frac{L^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

En revenant aux originales, on obtient

$$s(t) = \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} Y(t) \left[-R \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + R \cos \omega t + L\omega \sin \omega t \right].$$

b) La transformée de Laplace de $e(t) = Y(t) \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)$ est $E(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} = \frac{R}{L} \frac{1}{p\left(p + \frac{R}{L}\right)}$. Donc $S(p) = G(p)E(p) = \frac{R}{L} \frac{1}{\left(p + \frac{R}{L}\right)^2}$. On en déduit $s(t) = \frac{R}{L} Y(t) t \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$.

Exercice 10.3

On considère un filtre linéaire permanent continu Φ tel que lorsque le signal d'entrée est $e(t) = [Y(t)]$ la réponse de Φ est :

$$s(t) = [Y(t)(1 - \exp(-at))],$$

où a est une constante réelle strictement positive.

- 1) Calculer la dérivée de la distribution $[Y(t)(1 - \exp(-at))]$. En déduire la réponse impulsionnelle D de Φ .
- 2) Déterminer la transformée de Fourier $\hat{D}$ de D , ainsi que la fonction de transfert de Laplace du filtre Φ , c'est-à-dire la transformée de Laplace G de D .
- 3) Soient n un nombre entier relatif, ω un nombre réel strictement positif. Calculer la transformée de Fourier de $[\exp(in\omega t)]$ ainsi que le produit de cette transformée par $\hat{D}(v)$. En déduire que la réponse de Φ au signal d'entrée $[\exp(in\omega t)]$ est de la forme $\lambda(n, \omega)[\exp(in\omega t)]$, où $\lambda(n, \omega)$ est une constante dépendant de n et de ω que l'on déterminera. Calculer la transformée de Laplace de $[Y(t) \exp(in\omega t)]$ ainsi que le produit de cette transformée par G . En déduire la réponse de Φ au signal d'entrée $[Y(t) \exp(in\omega t)]$.

4) Soit f une fonction continue périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(in\omega t)$

sa série de Fourier complexe. On admettra que les réponses de Φ aux signaux d'entrée $[f]$ et $[Yf]$ sont des distributions régulières, associées respectivement aux fonctions continues g et g_+ . Calculer $[g_+ - Yg]$ en fonction de $g(0)$ et D .

(La réponse à $[f]$ correspond au filtrage en régime permanent et $[g_+ - Yg]$ est la réponse transitoire du filtre lorsque le signal d'entrée n'est appliqué qu'à partir de l'instant $t = 0$).

1) La fonction $Y(t)(1 - \exp(-at))$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on a :

$$[Y(t)(1 - \exp(-at))] = [(Y(t)(1 - \exp(-at)))] = [aY(t) \exp(-at)].$$

Comme on a $[Y(t)(1 - \exp(-at))] = D(t) * [Y(t)]$, il vient :

$$\begin{aligned} [Y(t)(1 - \exp(-at))]' &= [Y(t)(1 - \exp(-at))] * \delta' = (D * [Y]) * \delta' \\ &= D * ([Y] * \delta') = D * [Y]' = D * \delta = D. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$D(t) = [aY(t) \exp(-at)].$$

2) La fonction $aY(t) \exp(-at)$ étant sommable, la transformée de Fourier de $[aY(t) \exp(-at)]$ est la distribution régulière associée à la transformée de Fourier au sens des fonctions de $aY(t) \exp(-at)$. Cette dernière est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} aY(t) \exp(-at) \exp(-2i\pi vt) dt = a \int_0^{+\infty} \exp(-(a + 2i\pi v)t) dt = \frac{a}{a + 2i\pi v}.$$

On a donc : $\hat{D}(v) = \left[\frac{a}{a + 2i\pi v} \right]$. D'autre part, la transformée de Laplace de $D(t)$ est

$$G(p) = \frac{a}{p + a}.$$

3) La transformée de Fourier de $[\exp(in\omega t)]$ est $\delta\left(v - \frac{n\omega}{2\pi}\right)$. On a :

$$\hat{D}(v) \delta\left(v - \frac{n\omega}{2\pi}\right) = \frac{a}{a + 2i\pi v} \delta\left(v - \frac{n\omega}{2\pi}\right) = \frac{a}{a + in\omega} \delta\left(v - \frac{n\omega}{2\pi}\right),$$

dont la transformée de Fourier inverse est la réponse $D(t) * [\exp(in\omega t)]$ au signal $[\exp(in\omega t)]$. Cette réponse est donc $\frac{a}{a + in\omega} [\exp(in\omega t)]$, qui est bien de la forme attendue,

$$\text{avec } \lambda(n, \omega) = \frac{a}{a + in\omega}.$$

De même, la transformée de Laplace de $[Y(t)\exp(in\omega t)]$ étant $\frac{1}{p - in\omega}$, son produit par

$G(p)$ est $\frac{a}{(p+a)(p-in\omega)} = \frac{a}{a+in\omega} \left(\frac{1}{p-in\omega} - \frac{1}{p+a} \right)$. La réponse de Φ au signal d'entrée

$[Y(t)\exp(in\omega t)]$ est alors l'originale de cette fonction, soit :

$$\frac{a}{a+in\omega}[Y(t)\exp(in\omega t)] - \frac{a}{a+in\omega}[Y(t)\exp(-at)].$$

4) On a $[f(t)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n [\exp(in\omega t)]$, donc, le filtre étant linéaire :

$$[g(t)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{a}{a+in\omega} [\exp(in\omega t)],$$

et, $g(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, $g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{a}{a+in\omega} \exp(in\omega t)$. De même, on a :

$[Y(t)f(t)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n [Y(t)\exp(in\omega t)]$, d'où la réponse :

$$\begin{aligned} [g_+(t)] &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \left(\frac{a}{a+in\omega} [Y(t)\exp(in\omega t)] - \frac{a}{a+in\omega} [Y(t)\exp(-at)] \right) \\ &= \left[Y(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{a}{a+in\omega} \exp(in\omega t) \right] - \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{a}{a+in\omega} \right) [Y(t)\exp(-at)] \\ &= [Y(t)g(t)] - g(0) \frac{D(t)}{a}. \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$[g_+(t) - Y(t)g(t)] = -\frac{g(0)}{a} D(t).$$

Exercice 10.4

Soit h la réponse impulsionnelle d'un système linéaire. Démontrer que la réponse indicielle $s = Y * h$ est dérivable au sens des distributions et que

$$[s]' = [Y]' * [h] = [Y] * [h]' = [h].$$

Sous les hypothèses de l'exercice 4.8, comparer h avec les produits de convolution au sens des fonctions $Y' * h$ et $Y * h'$.

Puisque $[s] = [Y * h] = [Y] * [h]$, on en déduit que $[s]' = [Y]' * [h] = [Y] * [h]'$.

Or $[Y]' = \delta$ donc $[s]' = \delta * [h] = [h]$.

D'après l'exercice 8.14, $[Y] * [h]'$ est une primitive de $[h]'$, c'est-à-dire une distribution de la forme $[h] + c$, où c est une constante. Comme $[Y]$ et $[h]'$ sont causales $[Y] * [h]'$ aussi, il faut donc que $c = 0$ car $[h]$ est causale.

On retrouve bien le résultat de l'exercice 4.8 car $[s]' = [h]$, d'où $s' = h$ sur $]0, \infty[$ puisque s est continue sur $]0, \infty[$.

Au sens des fonctions $Y' = 0$ presque partout et donc $Y' * h = 0$ qui est différent de h sur $]0, \infty[$.

Au sens des fonctions h' est causale et définie sur $\mathbb{R}^*$ et pour $t > 0$:

$$(Y * h')(t) = \int_0^t h'(t-u) du = [-h(t-u)]_0^t = -h(0^+) + h(t).$$

Si $h(0^+) \neq 0$, ce qui est le cas dans le cadre de l'exercice 4.8, il est clair que $Y * h'$ est différent de h sur $]0, \infty[$. Il est donc nécessaire d'utiliser la dérivation au sens des distributions pour justifier la relation $s' = h$.

Exercice 10.5

On considère un filtre numérique Φ qui, à toute entrée numérique e , associe une réponse numérique $s = \Phi(e)$. Pour chacun des cas suivants, déterminer la réponse impulsionnelle h et la fonction de transfert en z de Φ , et préciser si le filtre est causal et s'il est stable.

$$1) s(n) = \sum_{k=-\infty}^n e(k).$$

$$2) s(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} e(n+k).$$

$$3) s(n) = e(n) - e(n-1).$$

$$4) s(n) = e(n+1) - e(n).$$

$$5) s(n) = e(n) - 2e(n-1) + e(n-2).$$

$$6) s(n) = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k e(n-k) \quad \text{où } p \in \mathbb{N}^* \text{ est donné.}$$

1) Soit E_0 le signal numérique tel que $E_0(0) = 1$ et $E_0(n) = 0$ pour $n \neq 0$. La réponse impulsionnelle h est, par définition, la réponse à ce signal d'entrée. On a donc :

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^n E_0(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}.$$

La fonction de transfert en z de Φ est alors : $H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$, définie pour $|z| > 1$. Comme la réponse impulsionnelle est causale, le filtre Φ est causal. Comme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \text{ est infini, le filtre } \Phi \text{ n'est pas stable.}$$

2) La réponse impulsionnelle de Φ est :

$$h(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} E_0(n+k) = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \leq 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}. \text{ La fonction de transfert en } z \text{ de } \Phi \text{ est donc}$$

$$H(z) = \sum_{n \leq 0} 2^n z^{-n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^p = \frac{2}{2-z}, \text{ définie pour } |z| < 2. \text{ Comme la réponse impulsion-$$

nelle n'est pas causale, le filtre Φ n'est pas causal. Comme $|z| = 1$ est dans la couronne de convergence de $H(z)$, le filtre Φ est stable.

3) On a $h(n) = 0$ si $n < 0$ ou $n > 1$, et $h(0) = 1$, $h(1) = -1$.

La fonction de transfert en z de Φ est donc $H(z) = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z}$, définie pour $z \neq 0$. On voit immédiatement que Φ est causal et stable. On peut remarquer, les fonctions de transfert en z étant inverses l'une de l'autre, que ce filtre est le filtre réciproque de celui défini au 1), c'est-à-dire que l'entrée e donnant la réponse r pour l'un est la réponse à l'entrée r pour l'autre.

4) On a $h(n) = 0$ si $n < -1$ ou $n > 0$, et $h(-1) = 1$, $h(0) = -1$.

La fonction de transfert en z de Φ est donc $H(z) = z - 1$, définie pour tout z . On voit immédiatement que Φ n'est pas causal, mais est stable.

5) On a $h(n) = 0$ si $n < 0$ ou $n > 2$, et $h(0) = h(2) = 1$, $h(1) = -2$.

La fonction de transfert en z de Φ est donc $H(z) = 1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^2$, définie pour $z \neq 0$.

On voit immédiatement que Φ est causal et stable. On peut remarquer que ce filtre correspond à l'association en série de deux filtres identiques à celui défini au 3).

6) On a $h(n) = 0$ si $n < 0$ ou $n > p$, et $h(n) = (-1)^n C_p^n$ pour $0 \leq n \leq p$.

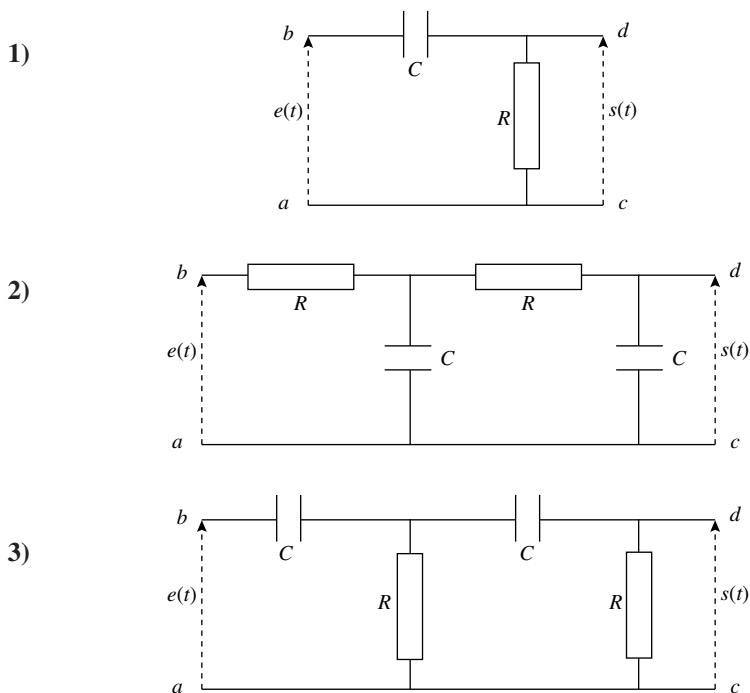
La fonction de transfert en z de Φ est donc

$$H(z) = \sum_{n=0}^p (-1)^n C_p^n z^{-n} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^p = \left(\frac{z-1}{z}\right)^p, \text{ définie pour } z \neq 0. \text{ On voit immédiatement}$$

que Φ est causal et stable. Ce filtre correspond à l'association en série de p filtres identiques à celui défini au 3).

Exercice d'entraînement

10.6 Déterminer pour les filtres dont le schéma figure ci-dessous la réponse impulsionnelle $D(t)$ et la fonction de transfert $G(p)$.



Réponses

10.6 1) $G(p) = \frac{RCp}{1 + RCp}$, $D(t) = \delta(t) - \left[\frac{Y(t)}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]$.

2) $G(p) = \frac{1}{R^2 C^2 p^2 + 3RCp + 1}$, $D(t) = \left[\frac{Y(t)}{2RC\sqrt{5}} (\exp(-\omega_1 t) - \exp(-\omega_2 t)) \right]$,

avec $\omega_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2RC}$ et $\omega_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2RC}$.

3) $G(p) = \frac{R^2 C^2 p^2}{1 + 2RCp}$, $D(t) = \frac{RC}{2} \delta'(t) - \frac{1}{4} \delta(t) + \left[\frac{Y(t)}{8RC} \exp\left(-\frac{t}{2RC}\right) \right]$.

Chapitre 11

Espace de probabilités

RAPPELS

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités.

- On a :

$$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0 \quad (\text{R11.1})$$

- Pour les évènements A et B on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{R11.2})$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad (\text{R11.3})$$

- Pour la suite d'évènements $A_1, \dots, A_n$, deux à deux disjoints, on a :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \quad (\text{R11.4})$$

- Les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont, pour la probabilité P , mutuellement indépendants si :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (\text{R11.5})$$

- **Probabilité conditionnelle.** La probabilité conditionnelle de B sachant A est définie par :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0) \quad (\text{R11.6})$$

- **Propriétés des probabilités totales.** Soit $A_1, \dots, A_n$ une partition de Ω telle que $\forall k, P(A_k) \neq 0$. Alors, pour tout $B \in \mathcal{A}$ on a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B|A_k)P(A_k) \quad (\text{R11.7})$$

- **Théorème de Bayes.** Soit $A_1, \dots, A_n$ une partition de Ω telle que $\forall k, P(A_k) \neq 0$. Alors, pour tout $B \in \mathcal{A}$ on a :

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{k=1}^n P(B|A_k)P(A_k)} \quad (\text{R11.8})$$

Exercice 11.1

Un sac contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On en extrait au hasard n boules. Quelle est la probabilité que la somme des points tirés soit supérieure ou égale à la somme des points restants ?

Pour $n = 2$? Pour $n = 3$? Pour $n = 4$?

Notons Ω l'ensemble des événements possibles. On a :

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \dots, i_n) : i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n \text{ et } i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, 2n\}\}.$$

Alors, Ω est constitué des sous-ensembles à n éléments d'un ensemble à $2n$ éléments.

Le tirage étant effectué au hasard, les événements possibles peuvent être considérés comme équiprobables. On a donc :

$$\text{card}(\Omega) = C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ et } \forall A \in \Omega, P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

$$\text{Soient : } S = \text{somme totale des points} = \sum_{i=1}^{2n} i = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1),$$

S_1 = somme des points tirés, S_2 = somme des points restants,

$A = \{\omega : S_1(\omega) > S_2(\omega)\}$, $B = \{\omega : S_1(\omega) < S_2(\omega)\}$,

et $C = \{\omega : S_1(\omega) = S_2(\omega)\}$.

On cherche à calculer $P(A \cup C)$.

Puisqu'on partage les $2n$ boules en 2 parties égales, la somme des points tirés et la somme des points qui restent jouent des rôles symétriques, c'est-à-dire $P(A) = P(B)$.

On a $\Omega = A \cup B \cup C$; les événements A , B et C sont disjoints, donc :

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 2P(A) + P(C),$$

$$\text{soit : } P(A) = \frac{1}{2}(1 - P(C)).$$

Donc,
$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{2}(1 + P(C)).$$

• Si $n = 2$, on a $\Omega = \{\omega = (i, j) : i \neq j \text{ et } i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$, soit :

$\Omega = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4)\}$; donc $\text{card}(\Omega) = 6$ et $S = 10$.

$A = \{(2, 4); (3, 4)\}$, $B = \{(1, 2); (1, 3)\}$, $C = \{(1, 4); (2, 3)\}$.

Donc :
$$P(A \cup C) = \frac{2}{3}.$$

• Si $n = 3$, on a $\Omega = \{\omega = (i, j, k) : i \neq j \neq k \text{ et } i, j, k \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$,

$\text{card}(\Omega) = 20$ et $S = 21$.

On a : $C = \{(i, j, k) : i \neq j \neq k \text{ et } i + j + k = 21 - (i + j + k)\} = \emptyset$, on en déduit que

$$P(A \cup C) = \frac{1}{2}.$$

On remarque, que pour n impair, on a toujours $C = \emptyset$;

donc :
$$P(A \cup C) = \frac{1}{2}.$$

• Si $n = 4$, on a $\Omega = \{\omega = (i, j, k, m) : i \neq j \neq k \neq m \text{ et } i, j, k, m \in \{1, 2, \dots, 8\}\}$, $\text{card}(\Omega) = 70$ et $S = 36$.

$C = \{(i, j, k, m) : i \neq j \neq k \neq m \text{ et } i + j + k + m = 18\}$

$= \{(1, 2, 7, 8); (1, 3, 6, 8); (1, 4, 5, 8); (1, 4, 6, 7); (2, 3, 6, 7); (2, 3, 5, 8); (2, 4, 5, 7); (3, 4, 5, 6)\}$

donc $\text{card}(C) = 8$,

on en déduit que :
$$P(A \cup C) = \frac{39}{70} \approx 0,56.$$

Exercice 11.2 Formule de Poincaré

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

1) Montrer que, quels que soient les événements A, B et C , on a :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

2) Montrer que, pour toute suite $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'événements de $P(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{p=1}^n A_p\right) &= \sum_{0 < p \leq n} P(A_p) - \sum_{0 < p < m \leq n} P(A_p \cap A_m) \\ &+ \sum_{0 < p < l < m \leq n} P(A_p \cap A_l \cap A_m) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

(Formule de Poincaré.)

- 3) Un circuit est formé de n composants tous distincts. Chacun de ces composants doit occuper une place déterminée (il y a n places distinctes) dans le circuit. Un technicien peu scrupuleux répartit tous ces composants au hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit à sa place ?

Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ?

1) Montrons que, quels que soient les événements A et B , on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1)$$

En effet : $A \cup B = A \cup (B - A)$ avec $A \cap (B - A) = \emptyset$.

$$\text{D'où : } P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \quad (2)$$

de plus : $B = (B - A) \cup (A \cap B)$ avec $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

$$\text{D'où : } P(B) = P(B - A) + P(A \cap B). \quad (3)$$

En portant (3) dans (2), on obtient (1).

On passe au cas de trois événements en utilisant (1) :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)). \end{aligned}$$

Or, $P(A \cup B)$ et $P((A \cap C) \cup (B \cap C))$ s'expriment grâce à (1). On obtient alors aisément le résultat demandé.

2) La formule de Poincaré s'obtient par récurrence. Les cas $n = 2$ et $n = 3$ ont été traités au 1). Supposons que :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n-1} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Calculons : } P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n) &= P((A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n) \\ &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) + P(A_n) - P((A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n) \end{aligned}$$

en utilisant (1).

D'où :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n-1} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ &\quad + P(A_n) - P((A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n)). \end{aligned}$$

Quant à la dernière probabilité ci-dessus, c'est la probabilité de la réunion de $(n - 1)$ événements ; on peut alors lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

Il vient alors :

$$P((A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n)) = \sum_{1 \leq i_1 \leq n-1} P(A_{i_1} \cap A_n) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_n) + \dots$$

$$+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_n) + \dots + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n).$$

En regroupant le tout, on obtient la formule attendue. On pouvait procéder autrement. En effet, on vérifie aisément que :

$$\mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(\omega) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{I}_{A_i}(\omega)) \quad (\text{pour tout } \omega \text{ de } \Omega). \quad (4)$$

En prenant les espérances membre à membre, et après développement du produit de droite, on obtient :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \dots + (-1)^{n+1} P_n \quad \text{où}$$

$$P_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

3) On appelle A_i l'événement : « le i -ème composant est à sa place ». On cherche alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} S_i$$

$$\text{où : } S_i = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_i}).$$

$$\text{Il est clair que : } P(A_j) = \frac{1}{n}, \forall j.$$

$$\text{D'où : } S_i = C_n^i \left(\frac{1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n-i+1} \right) = \frac{1}{i!}.$$

$$\text{Ainsi : } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i!}.$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i!} = \boxed{1 - \frac{1}{e}}.$$

Exercice 11.3

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Soient $A_1, \dots, A_n$ n événements de $P(\Omega)$.

1) Démontrer que :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1 \cap A_2) \times \dots$$

$$\times P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

(On supposera que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$).

- 2) On considère un lot de 15 composants électroniques dont 5 sont défectueux. On prélève au hasard successivement 3 composants du lot. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous trois non défectueux ?

1) La démonstration se fait par récurrence. Pour $n = 2$, on sait que, par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$P(A_2 / A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}. \text{ D'où : } P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2 / A_1) \text{ (remarquons que :}$$

$A_1 \supset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$. D'où : $P(A_1) \geq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Donc $P(A_1) \neq 0$, et la définition de la probabilité conditionnelle est valide).

Supposons la formule vraie au rang $n - 1$, à savoir :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) = P(A_1) P(A_2 / A_1) \times \dots \times P(A_{n-1} / A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \quad (1)$$

Examinons :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) &= P((A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n) \\ &= P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \quad (2) \end{aligned}$$

grâce à la démonstration du cas $n = 2$.

En portant (1) dans (2), on obtient le résultat cherché.

On peut ici aussi remarquer que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

- 2) La probabilité pour que le premier composant ne soit pas défectueux est $\frac{10}{15}$. Si le premier composant n'est pas défectueux, la probabilité pour que le deuxième ne soit pas défectueux est $\frac{9}{14}$, car seuls 9 des 14 restants sont non défectueux.

Si les deux premiers composants sont non défectueux, la probabilité pour que le troisième ne soit pas défectueux est $\frac{8}{13}$ car seuls 8 des 13 restants sont non défectueux.

D'après le résultat du 1), on a donc :

$$p = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} = \frac{24}{91}.$$

Exercice 11.4

Un étudiant X pour se rendre au CNAM peut prendre le métro ou le bus.

Si au jour $j - 1$ il prend le métro, la probabilité qu'il prenne le bus au jour j est de θ ($0 < \theta < 1$). Si au jour $j - 1$ il prend le bus, il prend le métro au jour j .

Soit p_n la probabilité que X prenne le métro au jour n .

- 1) Déterminer p_n en fonction de n et de θ , sachant qu'au premier jour X prend le métro.
- 2) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $A_n = \{X \text{ prend le métro le jour } n\}$ et $p_n = P(A_n)$.

Si au jour n , il prend le métro, la probabilité qu'il prenne le bus au jour $n + 1$ est θ , donc $P(A_{n+1}^c / A_n) = \theta$.

Si au jour n , il prend le bus, il prend le métro au jour $n + 1$, donc $P(A_{n+1} / A_n^c) = 1$.

Le premier jour, il prend le métro, donc $p_1 = 1$.

Donc $p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} / A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} / A_n^c)P(A_n^c)$.

Or : $P(A_n^c) = 1 - P(A_n) = 1 - p_n$.

d'où : $\forall n \geq 1 \quad p_{n+1} = 1 - p_n + (1 - \theta)p_n = 1 - \theta p_n$ (*)

On cherche une solution de (*) sous la forme : $p_n = u_n + \lambda$, d'où (*) s'écrit $u_{n+1} + \lambda = 1 - \theta u_n - \theta \lambda$, soit $u_{n+1} = -\theta u_n + 1 - \lambda - \theta \lambda$.

On choisit λ de sorte que : $1 - \lambda - \theta \lambda = 0$, soit $1 = (1 + \theta)^{-1}$, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifie la relation : $u_{n+1} = -\theta u_n$ (**)

On cherche une solution de (**) sous la forme $u_n = R^n$ avec $R \neq 0$. Soit $R = -\theta$, donc $u_n = \alpha(-\theta)^n$, la constante α est déterminée par la condition initiale u_1 . Soit :

$$\alpha = -\frac{u_1}{\theta} = -\frac{p_1 - \lambda}{\theta} = -\frac{1}{1 + \theta}.$$

Donc :

$$p_n = \frac{1 - (-\theta)^n}{1 + \theta}.$$

2) On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{1 + \theta}$.

Exercice 11.5

Un garagiste est le client de trois fournisseurs de pneus F_1 , F_2 et F_3 , qui lui ont livré respectivement N_1 , N_2 et N_3 pneus. Ces pneus sont de deux modèles M_1 et M_2 .

- Le fournisseur F_1 a livré n_1 pneus M_1 ($n_1 < N_1$).
- Le fournisseur F_2 a livré n_2 pneus M_1 ($n_2 < N_2$).
- Le fournisseur F_3 a livré n_3 pneus M_1 ($n_3 < N_3$).

L'employé du garagiste tient à la main un pneu M_2 .

Quelle est la probabilité que ce pneu provienne du fournisseur F_3 ?

Notons $N = N_1 + N_2 + N_3$ et $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Les fournisseurs de pneus F_1 , F_2 et F_3 ont livré respectivement N_1 , N_2 et N_3 pneus donc,

pour $i = 1, 2, 3$, on a $P(F_i) = \frac{N_i}{N}$.

Pour $i = 1, 2, 3$, le fournisseur F_i a livré n_i pneus M_1 donc :

$$P(M_1 / F_i) = \frac{n_i}{N_i} \quad \text{et} \quad P(M_2 / F_i) = \frac{N_i - n_i}{N_i}.$$

On cherche à calculer $P(F_3 / M_2)$. Par la formule de Bayes (R11.8), on a :

$$P(F_3 / M_2) = \frac{P(F_3 \cap M_2)}{P(M_2)} = \frac{P(M_2 / F_3)P(F_3)}{P(M_2)}$$

$$\text{mais :} \quad P(M_2) = \sum_{i=1}^3 P(F_i \cap M_2) = \sum_{i=1}^3 P(F_i)P(M_2 / F_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 (N_i - n_i)$$

$$\text{donc :} \quad P(F_3 / M_2) = \frac{N_3 - n_3}{N - n}.$$

Exercice 11.6

Une boîte contient n_1 boules rouges et n_2 blanches. On tire une boule et on remet dans la boîte M boules de l'autre couleur. Puis on tire une deuxième boule. En admettant que, lors de chacun des tirages, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées, calculer la probabilité pour que :

- 1) la seconde boule tirée soit rouge
- 2) la seconde boule tirée soit blanche.

Pour $i = 1, 2$ soit $R_i = \{\text{la } i^{\text{ième}} \text{ boule tirée est rouge}\}$ et

$B_i = \{\text{la } i^{\text{ième}} \text{ boule tirée est blanche}\}$.

- 1) On cherche à calculer $P(R_2)$. On a : $R_2 = (B_1 \cup R_1) \cap R_2$ d'où

$$P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) = P(R_2 / B_1) P(B_1) + P(R_2 / R_1) P(R_1)$$

Or,

$$P(B_1) = \frac{n_2}{n_1 + n_2}, \quad P(R_1) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

$$P(R_2 / B_1) = \frac{n_1 + M}{n_1 + n_2 + M - 1}, \quad P(R_2 / R_1) = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 + M - 1}$$

D'où

$$P(R_2) = \frac{n_2(n_1 + M) + (n_1 - 1)n_1}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + M - 1)}$$

2) On cherche à calculer $P(B_2)$. On a :

$$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(B_2 \cap R_1) = P(B_2/B_1) P(B_1) + P(B_2/R_1) P(R_1)$$

Or, $P(B_2/B_1) = \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 + M - 1}$ et $P(B_2/R_1) = \frac{n_2 + M}{n_1 + n_2 + M - 1}$. D'où

$$P(B_2) = \frac{n_2(n_2 - 1) + n_1(n_2 + M)}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + M - 1)}$$

Exercice 11.7

Pour $k \in D = \{1, \dots, n\}$, on définit la suite p_k par :

$$p_k = \begin{cases} \theta & \text{si } k = n \\ C_n(1 - \theta) \max\{k, n - k\} & \text{si } k = 1, \dots, n - 1 \end{cases}$$

où $n \geq 2$, $0 < \theta < 1$ et C_n est une constante positive.

Déterminer C_n de sorte que p_k soit une loi de probabilités sur D .

On doit avoir $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, ce qui donne :

$$C_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-1} \max\{k, n - k\}}.$$

Distinguons deux cas :

• cas $n = 2m$: $\max\{k, 2m - k\} = \begin{cases} 2m - k & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ k & \text{si } m + 1 \leq k \leq 2m - 1 \end{cases}$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{2m-1} \max\{k, 2m - k\} = \sum_{k=1}^m (2m - k) + \sum_{k=m+1}^{2m-1} k.$$

$$\text{Dans la somme } \sum_{k=m+1}^{2m-1} k, \text{ en posant } j = k - m, \text{ l'on obtient } \sum_{k=m+1}^{2m-1} k = \sum_{j=1}^{m-1} (j + m).$$

$$\text{D'autre part, } \sum_{k=1}^m (2m - k) = m + \sum_{k=1}^{m-1} (2m - k), \text{ il vient donc}$$

$$\sum_{k=1}^{2m-1} \max\{k, 2m - k\} = m + \sum_{k=1}^{m-1} (2m - k) + \sum_{j=1}^{m-1} (j + m) = m + \sum_{k=1}^{m-1} 3m = m(3m - 2)$$

$$\text{d'où } C_{2m} = \frac{1}{m(3m - 2)}.$$

$$\bullet \text{ cas } n = 2m+1 : \max\{k, 2m+1-k\} = \begin{cases} 2m+1-k & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ k & \text{si } m+1 \leq k \leq 2m \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m} \max\{k, 2m+1-k\} &= \sum_{k=1}^m (2m+1-k) + \sum_{k=m+1}^{2m} k \\ &= \sum_{k=1}^m (2m+1-k) + \sum_{j=1}^m (m+j) = \sum_{k=1}^m (3m+1) = m(3m+1) \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad C_{2m+1} = \frac{1}{m(3m+1)}.$$

On remarque que la valeur de C_n ne dépend pas de θ .

Exercice 11.8

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} K \exp(ax) & \text{si } x \leq 0 \\ K \exp(-bx) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

où $a > 0$, $b > 0$ et K est une constante positive.

Déterminer K de sorte que f soit une densité de probabilités sur $\mathbb{R}$.

Donner l'expression de sa fonction de répartition.

On doit avoir $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, ce qui donne :

$$\frac{1}{K} = \int_{-\infty}^0 \exp(ax) dx + \int_0^{\infty} \exp(-bx) dx = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\text{soit } K = \frac{ab}{a+b}.$$

$$\text{On a } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Si $x \leq 0$,

$$F(x) = \frac{ab}{a+b} \int_{-\infty}^x \exp(au) du = \frac{b}{a+b} \exp(ax).$$

Si $x \geq 0$,

$$F(x) = \frac{ab}{a+b} \int_{-\infty}^0 \exp(au) du + \frac{ab}{a+b} \int_0^x \exp(-bu) du = 1 - \frac{a}{a+b} \exp(-bx).$$

Exercices d'entraînement

- 11.9** Dans une population 15 % des hommes et 5 % des femmes sont blonds. On choisit au hasard une personne blonde. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme :
- a) si les femmes sont aussi nombreuses que les hommes ?
 - b) s'il y a trois fois plus de femmes ?
- 11.10** Un joueur de bridge possède dans sa main 13 cartes d'un jeu de 52 cartes distribuées au hasard. Calculer la probabilité qu'il ait :
- a) un as exactement.
 - b) au moins un as.
 - c) un as et un roi.
 - d) au moins un as et au moins un roi.
 - e) une carte de chaque valeur.
- 11.11** Un récepteur se bloque si la durée entre les instants de réception de deux signaux est inférieur au temps mort τ . On sait que les deux signaux atteignent le récepteur dans l'intervalle de temps $(0, T)$ et arrivent indépendamment l'un de l'autre et au hasard.
- a) Décrire l'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience.
 - b) Quelle est la probabilité que le récepteur se bloque ?
- 11.12** Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires. On tire une boule, si elle est rouge, on la remplace par 7 boules noires, sinon, on la remplace par 2 boules rouges et puis on tire une deuxième boule. Calculer la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge.
- 11.13** On jette un dé trois fois.
- a) Décrire l'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience.
 - b) Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soient supérieure ou égale à 15.
- 11.14** On jette deux pièces. En supposant que $P\{\text{Face}\} = \theta$ et $P\{\text{Pile}\} = 1 - \theta$ ($0 \leq \theta \leq 1$), quelle est la probabilité d'obtenir au moins une Pile ?

Réponses

- 11.9** Soit $B = \{\text{la personne choisie est blonde}\}$, $F = \{\text{la personne choisie est une femme}\}$ et $H = \{\text{la personne choisie est un homme}\}$. On cherche : $P(F/B)$. Par la formule de Bayes on a :

$$P(F/B) = \frac{P(B/F) P(F)}{P(B/F) P(F) + P(B/H) P(H)}$$

a) On a : $P(F) = P(H) = \frac{1}{2}$ d'où

$$P(F/B) = \frac{\frac{5}{100} \frac{1}{2}}{\frac{5}{100} \frac{1}{2} + \frac{15}{100} \frac{1}{2}} = \frac{5}{20} = 0,25$$

b) On a : $P(F) = \frac{3}{4}$ et $P(H) = \frac{1}{4}$ d'où

$$P(F/B) = \frac{\frac{5}{100} \frac{3}{4}}{\frac{5}{100} \frac{3}{4} + \frac{15}{100} \frac{1}{4}} = \frac{15}{30} = 0,5$$

11.10 On a : $\Omega = \{\text{parties de 13 cartes parmi les 52 cartes}\}$, donc $\text{card}(\Omega) = C_{52}^{13}$.

a) $p_a = \frac{C_4^1 C_{52-4}^{13-1}}{C_{52}^{13}} = 0,4388$

b) $p_b = 1 - \frac{C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}} = 0,6962$

c) $p_c = \frac{C_4^1 C_4^1 C_{52-8}^{13-2}}{C_{52}^{13}} = 0,1932$

d) $p_d = 1 - \left(\frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}} + \frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}} - \frac{C_{44}^{13}}{C_{52}^{13}} \right) = 0,4741$

e) $p_e = \frac{4^{13}}{C_{52}^{13}} = 1,0568 \cdot 10^{-4}$

11.11 a) Deux signaux S_1 et S_2 atteignent le récepteur dans l'intervalle $(0, T)$. Soient T_1 le temps d'arrivée de S_1 et T_2 le temps d'arrivée de S_2 , on a :

$$\Omega = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq T, 0 \leq t_2 \leq T\}$$

b) Soit $RB = \{\text{le récepteur se bloque}\}$. On a :

$$RB = \{(t_1, t_2) \in \Omega : |t_1 - t_2| < \tau\}$$

d'où $P(RB) = \frac{\text{aire}(RB)}{\text{aire}(\Omega)} = \frac{T^2 - 2 \frac{(T-\tau)^2}{2}}{T^2} = \frac{2\tau T - \tau^2}{T^2}$.

11.12 Pour $j = 1, 2$ soit $R_j = \{\text{la } j\text{-ème boule tirée est rouge}\}$ et $N_j = \{\text{la } j\text{-ème boule tirée est noire}\}$. On cherche $P(R_2)$. On a :

$$P(R_2) = P(R_2/R_1) P(R_1) + P(R_2/N_1) P(N_1) = \frac{4}{14} \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \frac{3}{8} = 0,3869$$

11.13 a) $\Omega = \{(i_1, i_2, i_3) : 1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 6\}$.

b) Soit $A = \{(i_1, i_2, i_3) : i_1 + i_2 + i_3 \geq 15\}$. On cherche $P(A)$. On a :

i_1	i_2	i_3	$i_1 + i_2 + i_3$	nombre de (i_1, i_2, i_3)
3	6	6	15	3
4	5	6	15	6
4	6	6	16	3
5	5	5	15	1
5	5	6	16	3
5	6	6	17	3
6	6	6	18	1
				card(A)=20

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{20}{6^3} = 0,0926$$

11.14 On a : $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$.

Soit $A = \{\text{au moins une } P\}$, on a :

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P((F, F)) = 1 - \theta^2$$

Chapitre 12

Variables Aléatoires

RAPPELS

Soit X une variable aléatoire réelle de probabilité P_X .

- La fonction de répartition de la loi de X est définie par :

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (\text{R12.1})$$

- Les moments d'ordre k de X sont définis par :

$$\text{cas discret :} \quad E[X^k] = \sum_i i^k P(X = i) \quad (\text{R12.2})$$

$$\text{cas continu :} \quad E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx \quad (\text{R12.3})$$

- La variance de X est définie par :

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (\text{R12.4})$$

- La loi d'une variable aléatoire réelle X est une distribution et pour toute fonction h à support compact on a :

$$E[h(X)] = \langle P_X, h \rangle \quad (\text{R12.5})$$

- La fonction caractéristique de la loi de X est définie par :

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] \quad (\text{R12.6})$$

La fonction caractéristique de la loi de X correspond à la transformée de Fourier de la loi de X prise au point $-\frac{t}{2\pi}$.

- Soient n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ de loi $f_{X_1, \dots, X_n}$ et soit

$$(U_1, \dots, U_n) = (\varphi_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \varphi_n(X_1, \dots, X_n))$$

alors la loi de $(U_1, \dots, U_n)$ est telle que pour toute fonction h à support compact on a :

$$E[h(U_1, \dots, U_n)] = E[h(\varphi_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \varphi_n(X_1, \dots, X_n))] \quad (\text{R12.7})$$

En particulier, si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dont la loi admet la densité $f_{X_1, \dots, X_n}$ et si

$$\varphi : (X_1, \dots, X_n) \longrightarrow (\varphi_1(X_1, \dots, X_n), \dots, \varphi_n(X_1, \dots, X_n))$$

de D sur Δ est un difféomorphisme d'inverse g . Alors, la loi de $(U_1, \dots, U_n)$ est définie sur Δ et admet la densité $f_{U_1, \dots, U_n}$ définie par :

$$f_{U_1, \dots, U_n}(u_1, \dots, u_n) = |j_g(u_1, \dots, u_n)| f_{X_1, \dots, X_n}(g(u_1, \dots, u_n)) \quad (\text{R12.8})$$

où j_g désigne le jacobien de g défini par :

$$j_g(u_1, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.
 - La loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ est définie par :

$$\text{cas discret :} \quad P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \quad (\text{R12.9})$$

$$\text{cas continu :} \quad f_X(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (\text{R12.10})$$

– Espérance conditionnelle :

$$\text{cas discret :} \quad E[h(X) | Y = j] = \sum_i h(i) P(X = i | Y = j) \quad (\text{R12.11})$$

$$\text{cas continu :} \quad E[h(X) | Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x|y) dx \quad (\text{R12.12})$$

– Calculs de l'espérance et la variance à partir de l'espérance conditionnelle :

$$E[X] = E_Y [E[X|Y]] \quad (\text{R12.13})$$

$$\text{Var}[X] = E_Y [\text{Var}[X|Y]] + \text{Var}_Y [E[X|Y]] \quad (\text{R12.14})$$

- Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et X une autre variable aléatoire.
- On dit que X_n **converge en probabilité** vers X si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \quad (\text{R12.15})$$

– On dit que X_n **converge en moyenne quadratique** vers X si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - X)^2] = 0 \quad (\text{R12.16})$$

– On dit que X_n **converge en loi** vers X si :

$$\forall x \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad (\text{R12.17})$$

où F_{X_n} et F_X désignent les fonctions de répartition de la loi de X_n et X .

$$\forall t \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t) \quad (\text{R12.18})$$

où φ_{X_n} et φ_X désignent les fonctions caractéristiques de la loi de X_n et X .

- Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles telles que

$$\forall n \quad E[X_n] = \mu < \infty, \text{Var}[X_n] = \sigma^2 < \infty$$

– **Loi faible des grands nombres**

$$\text{La moyenne empirique } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ converge en probabilité } \mu \quad (\text{R12.19})$$

– **Théorème Limite Central.** Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \text{ converge en loi vers } \mathcal{N}(0,1) \quad (\text{R12.20})$$

où $\mathcal{N}(0,1)$ désigne la loi normale centrée-réduite.

Exercice 12.1 (loi uniforme discrète)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\Delta = \{1, \dots, N\}$ ($N \geq 2$).

- 1) Déterminer la loi de : $S = X + Y$.
- 2) Déterminer la loi de : $D = X - Y$.

Du fait que X et Y suivent la même loi uniforme sur l'ensemble Δ et qu'elles sont indépendantes, on a :

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i) P(Y = j) = \frac{1}{N} \frac{1}{N} \quad \forall i \in \Delta, \forall j \in \Delta.$$

1) On remarque que $S = X + Y$ est à valeurs dans l'ensemble $\Delta_1 = \{2, \dots, 2N\}$; donc $\forall k \in \Delta_1$ on a :

$$\begin{aligned} P(S = k) &= \sum_{i \in \Delta} P(X = i, S = k) = \sum_{i \in \Delta} P(X = i, X + Y = k) \\ &= \sum_{i \in \Delta, k-i \in \Delta} P(X = i, Y = k - i) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \{i \in \Delta\} \cap \{k - i \in \Delta\} &= \{1 \leq i \leq N\} \cap \{1 \leq k - i \leq N\} \\ &= \{\max(1, k - N) \leq i \leq \min(N, k - 1)\} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} P(S = k) &= \sum_{i=\max(1, k-N)}^{\min(N, k-1)} P(X = i) P(Y = k - i) \\ &= \frac{\min(N, k - 1) - \max(1, k - N) + 1}{N^2} \\ &= \begin{cases} \frac{k - 1}{N^2} & \text{si } 2 \leq k \leq N + 1 \\ \frac{2N - k + 1}{N^2} & \text{si } N + 2 \leq k \leq 2N \end{cases} \end{aligned}$$

2) On remarque que $D = X - Y$ est à valeurs dans l'ensemble $\Delta_2 = \{1 - N, \dots, N - 1\}$; donc $\forall k \in \Delta_2$ on a :

$$\begin{aligned} P(D = k) &= \sum_{j \in \Delta} P(Y = j, D = k) = \sum_{j \in \Delta} P(Y = j, X - Y = k) \\ &= \sum_{j \in \Delta, k+j \in \Delta} P(Y = j, X = k + j) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\{j \in \Delta\} \cap \{k+j \in \Delta\} &= \{1 \leq j \leq N\} \cap \{1 \leq k+j \leq N\} \\ &= \{\max(1, 1-k) \leq j \leq \min(N, N-k)\}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}P(D=k) &= \sum_{j=\max(1, 1-k)}^{\min(N, N-k)} P(X=k+j) P(Y=j) \\ &= \frac{\min(N, N-k) - \max(1, 1-k) + 1}{N^2} \\ &= \begin{cases} \frac{N+k}{N^2} & \text{si } 1-N \leq k \leq 0 \\ \frac{N-k}{N^2} & \text{si } 1 \leq k \leq N-1 \end{cases} = \frac{N-|k|}{N^2}\end{aligned}$$

Exercice 12.2 (calculs de lois discrètes)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\Delta = \{1, \dots, 2N\}$ ($N \geq 2$) de loi :

$$P(X=i) = \frac{2N+1-i}{N(2N+1)} \quad \forall i \in \Delta$$

- 1) Déterminer la loi de : $Y = \min(X, 2N - X)$.
- 2) Déterminer la loi de : $Z = \max(X, 2N - X)$.

On remarque que l'égalité $X = 2N - X$ implique que $X = N$; donc : Y est à valeurs dans l'ensemble $\Delta_1 = \{0, \dots, N\}$ et Z est à valeurs dans l'ensemble $\Delta_2 = \{N, \dots, 2N\}$.

$$1) \text{ On a : } Y = \begin{cases} X & \text{si } 1 \leq X \leq N \\ 2N - X & \text{si } N+1 \leq X \leq 2N \end{cases}$$

$$\text{ce qui peut s'écrire sous la forme : } Y = \begin{cases} X & \text{si } 1 \leq X \leq N-1 \\ N & \text{si } X = N \\ 2N - X & \text{si } N+1 \leq X \leq 2N-1 \\ 0 & \text{si } X = 2N \end{cases}$$

On en déduit :

$$P(Y=0) = P(X=2N) = \frac{1}{N(2N+1)}$$

$$P(Y=N) = P(X=N) = \frac{N+1}{N(2N+1)}$$

et pour $k \in \{1, \dots, N-1\}$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(X = k) + P(2N - X = k) \\ &= P(X = k) + P(X = 2N - k) = \frac{2(N+1)}{N(2N+1)} \end{aligned}$$

2) On a : $Z = \begin{cases} 2N - X & \text{si } 1 \leq X \leq N \\ X & \text{si } N+1 \leq X \leq 2N \end{cases}$

ce qui peut s'écrire sous la forme : $Z = \begin{cases} 2N - X & \text{si } 1 \leq X \leq N-1 \\ N & \text{si } X = N \\ X & \text{si } N+1 \leq X \leq 2N-1 \\ 2N & \text{si } X = 2N \end{cases}$

On en déduit :

$$P(Z = N) = P(X = N) = \frac{N+1}{N(2N+1)}$$

$$P(Z = 2N) = P(X = 2N) = \frac{1}{N(2N+1)}$$

et pour $k \in \{N+1, \dots, 2N-1\}$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(2N - X = k) + P(X = k) \\ &= P(X = 2N - k) + P(X = k) = \frac{2(N+1)}{N(2N+1)} \end{aligned}$$

Exercice 12.3

Soit un vendeur de lots de pièces mécaniques disposant, à une date τ_0 , d'un stock S .

La demande X , pour un intervalle de temps $[\tau_0, \tau_1]$, est une variable aléatoire entière ayant une loi de probabilité définie par : $P(X = x) = Kpq^{x-1} \forall x \geq x_0$, où p et q sont deux réels dans $]0, 1[$ tels que $p + q = 1$, x_0 est un entier naturel inférieur à S et K est une constante.

1) Calculer K en fonction de x_0 . En déduire $E[X]$.

2) Si X est inférieur au stock S , les lots restants sont à perte et le vendeur aura à affronter une dépense moyenne de d_1 euros ; si X est supérieur au stock S , il faut un approvisionnement spécial de pièces manquantes et le supplément du coût représente une perte moyenne de d_2 euros. Calculer l'espérance mathématique des dépenses que va affronter le vendeur pendant la période $[\tau_0, \tau_1]$.

1) On doit avoir $\sum_{i=x_0}^{\infty} P(X=i) = 1$; $\sum_{i=x_0}^{\infty} P(X=i) = Kp \sum_{i=x_0}^{\infty} q^{i-1}$, dans la dernière somme, en changeant i en $j + x_0$, on obtient :

$$\sum_{i=x_0}^{\infty} P(X=i) = Kpq^{x_0-1} \sum_{j=0}^{\infty} q^j = Kpq^{x_0-1} \frac{1}{1-q} = Kq^{x_0-1}$$

d'où $K = q^{1-x_0}$ et l'expression de la loi de X devient :

$$P(X=x) = pq^{x-x_0} \quad \forall x \geq x_0.$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } E[X] &= \sum_i iP(X=i) = p \sum_{i=x_0}^{\infty} iq^{i-x_0} = p \sum_{j=0}^{\infty} (j+x_0)q^j \\ &= x_0 + p \sum_{j=0}^{\infty} jq^j = x_0 + p \sum_{j=1}^{\infty} jq^j = x_0 + pq \sum_{j=1}^{\infty} jq^{j-1} \\ &= x_0 + pq \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{\infty} t^j \Big|_{t=q} = x_0 + pq \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} - 1 \right) \Big|_{t=q} = x_0 + \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

2) Soit D la variable aléatoire associée au montant des dépenses que devra affronter le vendeur pendant la période $[\tau_0, \tau_1]$. D prend les valeurs 0, d_1 et d_2 avec les probabilités $P(D=0) = P(X=S)$, $P(D=d_1) = P(X < S)$ et $P(D=d_2) = P(X > S)$.

On a : $P(D=0) = P(X=S) = pq^{S-x_0}$

$$P(D=d_1) = \sum_{k=x_0}^{S-1} P(X=k) = p \sum_{k=x_0}^{S-1} q^{k-x_0}. \text{ Dans la dernière somme, en changeant } k \text{ en } j + x_0,$$

$$\text{on obtient : } P(D=d_1) = p \sum_{j=0}^{S-x_0-1} q^j = 1 - q^{S-x_0},$$

$$P(D=d_2) = \sum_{k=S+1}^{\infty} P(X=k) = p \sum_{k=S+1}^{\infty} q^{k-x_0} = q^{S+1-x_0}.$$

On en déduit :

$$E[D] = 0 \cdot P(D=0) + d_1 \cdot P(D=d_1) + d_2 \cdot P(D=d_2) = d_1 + (qd_2 - d_1)q^{S-x_0}.$$

Exercice 12.4

Un produit de saison rapporte un bénéfice net de λ euros par unité vendue mais, inversement, chaque unité invendue à la fin de saison engendre une perte de m euros. On admet que le nombre X d'unités achetées auprès d'un certain magasin

au cours des saisons de vente successive suit une loi continue de densité f à valeurs positives. On admet que le magasin doit avoir constitué tout son stock avant la saison. Combien d'unités faut-il stocker pour maximiser le profit moyen ?

Notons X : la demande aléatoire ; s : la taille du stock ; $R_s(X)$: le revenu net de l'opération et $h(s) = E[R_s(X)]$. On cherche à maximiser h .

$$\text{On a : } R_s(X) = \begin{cases} \lambda X - (s - X)m & \text{si } 0 < X \leq s \\ \lambda s & \text{si } X > s \end{cases}.$$

Donc :

$$h(s) = E[R_s(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(x) f(x) dx = \int_0^s (\lambda x - (s - x)m) f(x) dx + \int_s^{\infty} \lambda s f(x) dx.$$

On remarque que : $\int_s^{\infty} f(x) dx = P(X > s) = 1 - P(X \leq s) = 1 - \int_0^s f(x) dx$, il vient donc

$$h(s) = \lambda s + (\lambda + m) \int_0^s x f(x) dx - (\lambda + m)s \int_0^s f(x) dx.$$

Or, si $G(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(t) dt$, on a $G'(x) = g(\psi(x))\psi'(x) - g(\varphi(x))\varphi'(x)$.

On en déduit :

$$h'(s) = \lambda + (\lambda + m)s f(s) - (\lambda + m) \int_0^s f(x) dx - (\lambda + m)s f(s) = \lambda - (\lambda + m) \int_0^s f(x) dx.$$

Donc $h'(s) = 0$ implique $\int_0^s f(x) dx = \frac{\lambda}{\lambda + m}$ et l'on obtient un maximum puisque $h''(s) = -(\lambda + m)f(s) < 0 \forall s > 0$, car f est une densité de probabilité.

Si l'on note $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ la fonction de répartition de la loi de X , on obtient

$$s = F^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda + m}\right), \text{ où } F^{-1} \text{ désigne la fonction réciproque de } F.$$

Exercice 12.5

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières positives, on considère la variable aléatoire $Y = 2a\left[\frac{X}{2}\right] - aX + 1$, où $[X]$ désigne la partie entière de X et $a \in \mathbb{R}^*$.

Déterminer la loi de Y et calculer $E[Y]$ et $\text{Var}[Y]$ si :

1) X suit une loi géométrique de paramètre θ , i.e.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = (1 - \theta)\theta^k.$$

2) X suit une loi de Poisson de paramètre λ , i.e.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

3) X suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, i.e.

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Si X prend des valeurs paires, on a $Y = 1$ et si X prend des valeurs impaires, on a $Y = 1 - a$, donc Y prend ses valeurs dans $\{1, 1 - a\}$.

$$1) \text{ On a : } P(Y = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k} = \frac{1}{1 + \theta}$$

$$P(Y = 1 - a) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k + 1) = (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k+1} = \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

$$\text{Donc : } E[Y] = \sum_{j \in \{1, 1-a\}} j P(Y = j) = \frac{1 + \theta(1-a)}{1 + \theta}$$

$$\text{et : } E[Y^2] = \sum_{j \in \{1, 1-a\}} j^2 P(Y = j) = \frac{1 + \theta(1-a)^2}{1 + \theta}, \text{ d'où : } \text{Var}[Y] = \frac{\theta a^2}{(1 + \theta)^2}.$$

2) On a :

$$P(Y = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + e^{-2\lambda})$$

$$P(Y = 1 - a) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k + 1) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-\lambda} \left(\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\lambda}).$$

$$\text{Donc : } E[Y] = \sum_{j \in \{1, 1-a\}} j P(Y = j) = 1 - \frac{a}{2} (1 - e^{-2\lambda}) \text{ et } \text{Var}[Y] = \frac{a^2}{4} (1 - e^{-4\lambda}).$$

3) Si $n = 2m$, on a :

$$P(Y = 1) = \sum_{k=1}^m P(X = 2k) = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(Y = 1 - a) = \sum_{k=1}^m P(X = 2k - 1) = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc : } E[Y] = 1 - \frac{a}{2} \text{ et } \text{Var}[Y] = \frac{a^2}{4}.$$

Si $n = 2m + 1$, on a :

$$P(Y = 1) = \sum_{k=1}^m P(X = 2k) = \frac{m}{2m+1} \text{ et } P(Y = 1 - a) = \sum_{k=0}^m P(X = 2k + 1) = \frac{m+1}{2m+1}.$$

Donc :
$$E[Y] = 1 - \frac{m+1}{2m+1}a \text{ et } \text{Var}[Y] = \frac{m(m+1)}{(2m+1)^2}a^2.$$

Exercice 12.6

Dans cet exercice on désigne par φ et Φ la densité et la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ définies par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.

2) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, de densité $f_X(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$.

a) Exprimer F_X la fonction de répartition de la loi de X en fonction de Φ .

b) On pose :

$$U_1 = \mathbb{1}_{]-\infty, \mu]}(X), \quad V_1 = \mathbb{1}_{[\mu - \sigma, \mu + \sigma]}(X),$$

$$U_2 = X \mathbb{1}_{]-\infty, \mu]}(X) \quad \text{et} \quad V_2 = X \mathbb{1}_{[\mu - \sigma, \mu + \sigma]}(X)$$

Exprimer $E[U_1]$, $E[V_1]$, $E[U_2]$ et $E[V_2]$ en fonction de $\Phi(1) = 0,8413$, de μ et de σ .

1) On a :

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = \underbrace{\int_{-\infty}^x \varphi(t) dt}_I + \underbrace{\int_{-\infty}^{-x} \varphi(t) dt}_{II}$$

dans II en changeant t en $-t$ et en tenant compte de $\varphi(x) = \varphi(-x)$, on obtient :

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt + \int_x^{\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$$

2.a) Par définition on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^x \varphi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) dt$$

en effectuant le changement de variable : $u = \frac{t - \mu}{\sigma}$, on obtient :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \varphi(u) du = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

2.b) On a :

$$E[U_1] = P(X \leq \mu) = F_X(\mu) = \Phi\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(0) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} E[V_1] &= P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = F_X(\mu + \sigma) - F_X(\mu - \sigma) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \boxed{2\Phi(1) - 1 = 0,6827} \end{aligned}$$

$$E[U_2] = \int_{-\infty}^{\mu} x f_X(x) dx = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\mu} x \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx$$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, on obtient :

$$E[U_2] = \int_{-\infty}^0 (\mu + \sigma t) \varphi(t) dt = \mu \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt + \sigma \int_{-\infty}^0 t \varphi(t) dt$$

en tenant compte de $\frac{d}{dt} \varphi(t) = -t \varphi(t)$, on a :

$$E[U_2] = \mu \Phi(0) - \sigma \varphi(0) = \boxed{\frac{\mu}{2} - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}}$$

$$E[V_2] = \int_{\{|x-\mu| \leq \sigma\}} x f_X(x) dx = \frac{1}{\sigma} \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} x \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx$$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, on obtient :

$$E[V_2] = \int_{-1}^1 (\mu + \sigma t) \varphi(t) dt = \mu \int_{-1}^1 \varphi(t) dt + \sigma \int_{-1}^1 t \varphi(t) dt$$

or, la fonction $t \mapsto t \varphi(t)$ est impaire, donc $\int_{-1}^1 t \varphi(t) dt = 0$ et on en déduit :

$$E[V_2] = \mu (\Phi(1) - \Phi(-1)) = \boxed{\mu (2\Phi(1) - 1) = 0,6827 \mu}$$

Exercice 12.7

On désigne par φ et Φ la densité et la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de densité f donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$$

On définit $h(X)$ par : $h(X) = \begin{cases} \theta & \text{si } X \leq \mu - \sigma \\ X & \text{sinon} \end{cases}$

où θ est un réel.

1) Déterminer $M(\theta) = E[h(X)]$ et $V(\theta) = \text{Var}[h(X)]$.

2) Pour quelle valeur de θ , $V(\theta)$ est-elle minimum ? (on la notera $\hat{\theta}$). En déduire $M(\hat{\theta})$ et $V(\hat{\theta})$.

3) Que deviennent $M(\hat{\theta})$ et $V(\hat{\theta})$, si $\mu = -\frac{\varphi(1)}{\Phi(1)}$?

On remarque que l'expression de $h(X)$ s'écrit sous la forme :

$$h(X) = \theta \mathbb{1}_{]-\infty, \mu - \sigma]}(X) + X \mathbb{1}_{] \mu - \sigma, \infty[}(X)$$

on a donc : $h^2(X) = \theta^2 \mathbb{1}_{]-\infty, \mu - \sigma]}(X) + X^2 \mathbb{1}_{] \mu - \sigma, \infty[}(X)$.

Notons : $a = \int_{-\infty}^{\mu - \sigma} f(x) dx$ et

$$c_1(\mu, \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\infty} x f(x) dx, \quad c_2(\mu, \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

On a : $a = \int_{-\infty}^{\mu - \sigma} \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) dx$, en effectuant le changement de variable : $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$,

on obtient : $a = \int_{-\infty}^{-1} \varphi(u) du = \Phi(-1)$.

On a : $c_1(\mu, \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\infty} \frac{x}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) dx$, en effectuant le changement de variable :

$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$, on obtient :

$$\begin{aligned} c_1(\mu, \sigma) &= \sigma \int_{-1}^{\infty} (u + \mu) \varphi(u) du = \sigma \mu \int_{-1}^{\infty} \varphi(u) du + \sigma \int_{-1}^{\infty} u \varphi(u) du \\ &= \sigma \mu (1 - \Phi(-1)) + \sigma [-\varphi(u)]_{-1}^{\infty} = \sigma \mu \Phi(1) + \sigma \varphi(1) \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} c_2(\mu, \sigma) &= \sigma^2 \int_{-1}^{\infty} (u + \mu)^2 \varphi(u) \, du \\ &= \sigma^2 \mu^2 \Phi(1) + 2\mu \sigma^2 \varphi(1) + \sigma^2 \int_{-1}^{\infty} u^2 \varphi(u) \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or, } \int_{-1}^{\infty} u^2 \varphi(u) \, du &= \int_{-1}^{\infty} u \, d(-\varphi(u)) \\ &= [-u \varphi(u)]_{-1}^{\infty} + \int_{-1}^{\infty} \varphi(u) \, du = \Phi(1) - \varphi(1). \end{aligned}$$

On en déduit

$$c_2(\mu, \sigma) = \sigma^2 \mu^2 \Phi(1) + 2\mu \sigma^2 \varphi(1) + \sigma^2 (\Phi(1) - \varphi(1))$$

1) On a :

$$\begin{aligned} M(\theta) &= E [\theta \mathbb{1}_{]-\infty, \mu-\sigma]}(X) + X \mathbb{1}_{[\mu-\sigma, \infty[}(X)] \\ &= \theta E [\mathbb{1}_{]-\infty, \mu-\sigma]}(X)] + E [X \mathbb{1}_{[\mu-\sigma, \infty[}(X)] \\ &= \theta \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} f(x) \, dx + \int_{\mu-\sigma}^{\infty} x f(x) \, dx = a \theta + c_1(\mu, \sigma) \\ E [h^2(X)] &= \theta^2 E [\mathbb{1}_{]-\infty, \mu-\sigma]}(X)] + E [X^2 \mathbb{1}_{[\mu-\sigma, \infty[}(X)] \\ &= \theta^2 \int_{-\infty}^{\mu-\sigma} f(x) \, dx + \int_{\mu-\sigma}^{\infty} x^2 f(x) \, dx = a \theta^2 + c_2(\mu, \sigma) \end{aligned}$$

d'où

$$V(\theta) = E [h^2(X)] - M^2(\theta) = a \theta^2 + c_2(\mu, \sigma) - (a \theta + c_1(\mu, \sigma))^2$$

2) On a :

$$V'(\theta) = 2a\theta(1-a) - 2ac_1(\mu, \sigma), \quad V''(\theta) = 2a(1-a) > 0 \quad \forall \theta$$

d'où

$$V'(\theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \iff \boxed{\hat{\theta} = \frac{c_1(\mu, \sigma)}{1-a} = \sigma \left(\mu + \frac{\varphi(1)}{\Phi(1)} \right)}$$

On a :

$$M(\hat{\theta}) = a \hat{\theta} + c_1(\mu, \sigma) = \hat{\theta}$$

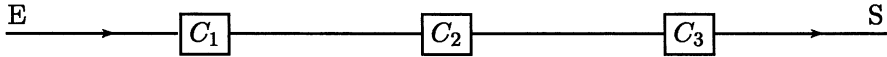
$$V(\hat{\theta}) = c_2(\mu, \sigma) - \frac{c_1^2(\mu, \sigma)}{1-a}$$

On remarque que $\hat{\theta}$ est le point fixe de M .

- 3) Si $\mu = -\frac{\varphi(1)}{\Phi(1)}$, on a : $\hat{\theta} = 0$, $M(\hat{\theta}) = 0$ et $V(\hat{\theta}) = \frac{\Phi^2(1) - \Phi(1)\varphi(1) - \varphi^2(1)}{\Phi(1)} \sigma^2$.

Exercice 12.8

Un système électronique, ayant une entrée E et une sortie S , est constitué de trois composants C_1 , C_2 et C_3 montés en série selon le schéma suivant :



Le système cesse de fonctionner quand il n'y a plus de chemin entre E et S . Soit T_1 , T_2 et T_3 les durées de vie respectives des composants C_1 , C_2 et C_3 . On suppose que ce sont des variables aléatoires réelles indépendantes de lois :

$$f_j(t) = \lambda_j e^{-\lambda_j t} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(t) \quad j = 1, 2, 3 \quad (\lambda_j > 0)$$

Déterminer la durée de vie du système.

Notons T la durée de vie du système, on a : $T = \inf\{T_1, T_2, T_3\}$.

Pour $t > 0$, on a :

$$\{T > t\} = \{\{T_1 > t\} \cap \{T_2 > t\} \cap \{T_3 > t\}\}$$

Cherchons la fonction de répartition de T ; pour $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(\inf\{T_1, T_2, T_3\} > t) \\ &= 1 - P(\{T_1 > t\} \cap \{T_2 > t\} \cap \{T_3 > t\}) \end{aligned}$$

or, T_1 , T_2 et T_3 sont indépendantes, donc

$$\begin{aligned} P(\{T_1 > t\} \cap \{T_2 > t\} \cap \{T_3 > t\}) &= P(T_1 > t) P(T_2 > t) P(T_3 > t) \\ &= (1 - P(T_1 \leq t)) (1 - P(T_2 \leq t)) (1 - P(T_3 \leq t)) \\ &= (1 - F_1(t)) (1 - F_2(t)) (1 - F_3(t)) \end{aligned}$$

On en déduit : $F_T(t) = 1 - (1 - F_1(t)) (1 - F_2(t)) (1 - F_3(t))$.

D'autre part, pour $j = 1, 2, 3$ la fonction de répartition de T_j est définie par :

$$F_j(t) = \int_{-\infty}^t f_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda_j t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Donc $F_T(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$. En dérivant F_T on obtient f_T la densité de T : $\forall t > 0$

$$f_T(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$$

On remarque que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

Exercice 12.9

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet la densité :

$$f(x, y) = (y - x) \mathbb{I}_{]0,1[}(x) \mathbb{I}_{]1,2[}(y)$$

- 1) Déterminer les densités marginales de X et de Y .
- 2) X et Y sont-elles indépendantes ?
- 3) Déterminer la loi de $U = X + Y$.
- 4) On considère le polynôme $Q(t) = t^2 - \sqrt{Y}t - \frac{X - \theta}{4}$, où $\theta > 0$.

Calculer, en fonction de θ , la probabilité que les racines de Q soient réelles et distinctes.

- 1) Pour $0 < x < 1$, la densité marginale de X est donnée par :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{3}{2} - x.$$

Pour $1 < y < 2$, la densité marginale de Y est donnée par :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = y - \frac{1}{2}.$$

- 2) X et Y ne sont pas indépendantes, en effet : $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.
- 3) On a :

$$E[\varphi(U)] = E[\varphi(X + Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x + y) f(x, y) dx dy.$$

Effectuons le changement de variables suivant :

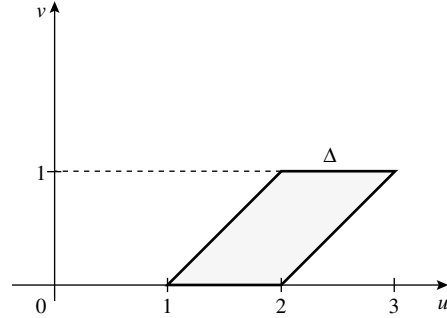
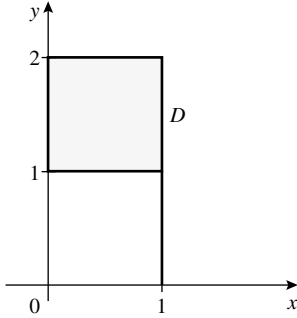
$$\begin{cases} v = x \\ u = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v \\ y = u - v \end{cases}.$$

Si $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 1 < y < 2\}$, D a pour image Δ donnée par :

$$\Delta = \{(u, v) : 0 < v < 1, 1 < u - v < 2\} = \{(u, v) : 0 < v < 1, u - 2 < v < u - 1\}.$$

Donc : $E[\varphi(U)] = \iint_{\Delta} \varphi(u) |j(u, v)| f(v, u - v) du dv$ où j désigne le jacobien de la transformation donné par :

$$j(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$



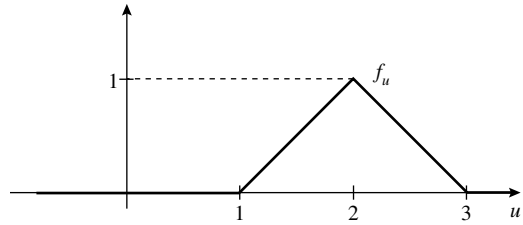
On peut écrire : $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, où $\Delta_1 = \{(u, v) : 1 < u < 2, 0 < v < u - 1\}$ et : $\Delta_2 = \{(u, v) : 2 < u < 3, u - 2 < v < 1\}$.

Donc :

$$\begin{aligned} E[\varphi(U)] &= \int_1^2 \varphi(u) \left(\int_0^{u-1} (u-2v) dv \right) du + \int_2^3 \varphi(u) \left(\int_{u-2}^1 (u-2v) dv \right) du \\ &= \int_1^2 \varphi(u)(u-1) du + \int_2^3 \varphi(u)(3-u) du. \end{aligned}$$

On en déduit la densité de la loi de U :

$$f_U(u) = \begin{cases} u-1 & \text{si } u \in]1, 2[\\ 3-u & \text{si } u \in]2, 3[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



4) Les racines de Q sont réelles et distinctes si et seulement si $X + Y > \theta$.

Or : $P(X + Y > \theta) = P(U > \theta) = 1 - P(U \leq \theta)$ où $P(U \leq \theta)$ désigne la fonction de répartition de la loi de U en θ donnée par :

$$P(U \leq \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \in]0, 1[\\ \int_1^\theta (u-1) du = \frac{(\theta-1)^2}{2} & \text{si } \theta \in]1, 2[\\ \int_1^2 (u-1) du + \int_2^\theta (3-u) du = 1 - \frac{(3-\theta)^2}{2} & \text{si } \theta \in]2, 3[\\ 1 & \text{si } \theta \geq 3 \end{cases}$$

Donc :

$$P(X + Y > \theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in]0, 1[\\ 1 - \frac{(\theta-1)^2}{2} & \text{si } \theta \in]1, 2[\\ \frac{(3-\theta)^2}{2} & \text{si } \theta \in]2, 3[\\ 0 & \text{si } \theta \geq 3 \end{cases}$$

Exercice 12.10

On dit qu'une variable aléatoire réelle Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si la densité de la loi de Z est donnée par :

$$f_Z(z) = \lambda e^{-\lambda z} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(z).$$

- 1) Calculer $E[Z^k]$ ($k \in \mathbb{N}$), en déduire $\text{Var}[Z]$.
- 2) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres λ et μ . Déterminer la loi de $U = X + Y$.
- 3) Soit X_1, X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ . Déterminer la loi du couple (U_1, V_1) où $U_1 = X_1 + X_2$, $V_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$.

En déduire la loi marginale de V_1 . Les variables U_1 et V_1 sont-elles indépendantes ?

- 4) Soit X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ . Déterminer la loi du couple (U_2, V_2) où $U_2 = \frac{X_1 + X_2}{X_1}$,

$$V_2 = \frac{X_1 + X_2}{X_3}.$$

- 5) Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes ; on suppose que Z_1 suit une loi uniforme sur $[0, \theta]$ ($\theta > 0$) et que Z_2 suit une loi exponentielle de paramètre λ . On pose $W = Z_1 + Z_2$ et de $T = Z_2 - Z_1$.

Déterminer la loi du couple (W, T) . En déduire les lois marginales de W et de T .

- 1) On a :

$$E[Z^k] = \int_{-\infty}^{\infty} z^k f_Z(z) dz = \lambda \int_0^{\infty} z^k e^{-\lambda z} dz = \frac{1}{\lambda^k} \int_0^{\infty} u^k e^{-u} du = \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^k} = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

D'où :

$$\text{Var}[Z] = E[Z^2] - (E[Z])^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- 2) Comme X et Y sont indépendantes, la densité de la loi de U est donnée par : $f_U = f_X * f_Y$. Donc, en utilisant l'exercice 4.6, on a :

si $\lambda = \mu$: $f_U(u) = \lambda^2 u e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(u)$

si $\lambda \neq \mu$: $f_U(u) = \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} (e^{-\lambda u} - e^{-\mu u}) \mathbb{1}_{]0, \infty[}(u).$

3) On a :

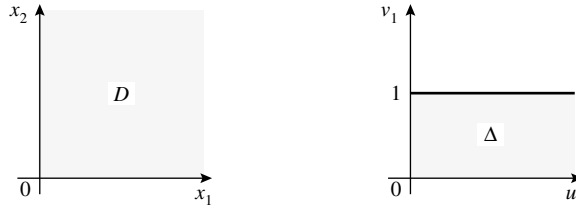
$$E\left[\varphi_1(X_1 + X_2)\varphi_2\left(\frac{X_1}{X_1 + X_2}\right)\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x_1 + x_2)\varphi_2\left(\frac{x_1}{x_1 + x_2}\right)f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)dx_1 dx_2.$$

Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u_1 = x_1 + x_2 \\ v_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = u_1 v_1 \\ x_2 = u_1(1 - v_1) \end{cases}$$

si $D = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$, D a pour image Δ définie par :

$$\Delta = \{(u_1, v_1) : u_1 > 0, 0 < v_1 < 1\}.$$



Donc :

$$E[\varphi_1(U_1)\varphi_2(V_1)] = \iint_{\Delta} \varphi_1(u_1)\varphi_2(v_1) |j(u_1, v_1)| f_{X_1, X_2}(u_1 v_1, u_1(1 - v_1)) du_1 dv_1$$

où j désigne le jacobien de la transformation donné par :

$$j(u_1, v_1) = \frac{D(x_1, x_2)}{D(u_1, v_1)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial v_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial v_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & u_1 \\ 1 - v_1 & -u_1 \end{vmatrix} = -u_1.$$

On en déduit la densité de la loi du couple (U_1, V_1) donnée par :

$$f_{U_1, V_1}(u_1, v_1) = |j(u_1, v_1)| f_{X_1, X_2}(u_1 v_1, u_1(1 - v_1)) \mathbb{1}_{\Delta}(u_1, v_1)$$

$$= u_1 f_{X_1}(u_1 v_1) f_{X_2}(u_1(1 - v_1)) \mathbb{1}_{\Delta}(u_1, v_1)$$

car X_1 et X_2 sont indépendantes.

$$\text{D'où : } f_{U_1, V_1}(u_1, v_1) = \lambda^2 u_1 \exp(-\lambda u_1) \mathbb{1}_{]0, \infty[}(u_1) \mathbb{1}_{]0, 1[}(v_1)$$

On remarque que U_1 et V_1 sont indépendantes ; en effet, V_1 suit une loi uniforme sur $]0, 1[$ de densité $f_{V_1}(v_1) = \mathbb{1}_{]0, 1[}(v_1)$ et la densité de la loi de U_1 est donnée par $f_{U_1}(u_1) = \lambda^2 u_1 \exp(-\lambda u_1) \mathbb{1}_{]0, \infty[}(u_1)$.

4) Introduisons la nouvelle variable $W = X_1 + X_2$ et effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1} \\ v_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_3} \\ w = x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{w}{u_2} \\ x_2 = w \left(1 - \frac{1}{u_2}\right) \\ x_3 = \frac{w}{v_2} \end{cases}.$$

Si $D = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$, D a pour image Δ :

$$\Delta = \{(u_2, v_2, w) : u_2 > 1, v_2 > 0, w > 0\}.$$

Donc, la densité de la loi du vecteur (U_2, V_2, W) est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{U_2, V_2, W}(u_2, v_2, w) &= |j(u_2, v_2, w)| f_{X_1, X_2, X_3}\left(\frac{w}{u_2}, w\left(1 - \frac{1}{u_2}\right), \frac{w}{v_2}\right) \mathbb{1}_{\Delta}(u_2, v_2, w) \\ &= |j(u_2, v_2, w)| f_{X_1}\left(\frac{w}{u_2}\right) f_{X_2}\left(w\left(1 - \frac{1}{u_2}\right)\right) f_{X_3}\left(\frac{w}{v_2}\right) \mathbb{1}_{\Delta}(u_2, v_2, w) \end{aligned}$$

avec :

$$j(u_2, v_2, w) = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_2, v_2, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial v_2} & \frac{\partial x_1}{\partial w} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial v_2} & \frac{\partial x_2}{\partial w} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial v_2} & \frac{\partial x_3}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{w}{u_2^2} & 0 & \frac{1}{u_2} \\ \frac{w}{u_2^2} & 0 & 1 - \frac{1}{u_2} \\ 0 & -\frac{w}{v_2^2} & \frac{1}{v_2} \end{vmatrix} = -\frac{w^2}{u_2^2 v_2^2}.$$

D'où :

$$f_{U_2, V_2, W}(u_2, v_2, w) = \lambda^3 \frac{w^2}{u_2^2 v_2^2} \exp\left\{-\lambda w\left(1 + \frac{1}{v_2}\right)\right\} \mathbb{1}_{\Delta}(u_2, v_2, w)$$

On en déduit la densité de la loi du couple $(U_2, V_2) : \forall u_2 > 1, v_2 > 0$

$$f_{U_2, V_2}(u_2, v_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_2, V_2, W}(u_2, v_2, w) dw = \frac{\lambda^3}{u_2^2 v_2^2} \int_0^{\infty} w^2 \exp\left\{-\lambda w\left(1 + \frac{1}{v_2}\right)\right\} dw.$$

Faisons le changement de variable $t = \lambda w\left(1 + \frac{1}{v_2}\right)$, d'où $\lambda dw = \frac{v_2}{v_2 + 1} dt$ et :

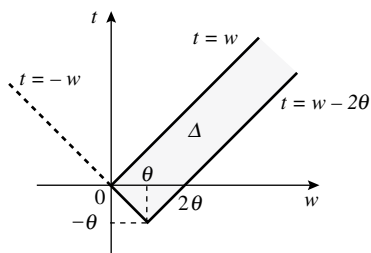
$$f_{U_2, V_2}(u_2, v_2) = \frac{1}{u_2^2 v_2^2} \frac{v_2^3}{(v_2 + 1)^3} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{2v_2}{u_2^2 (v_2 + 1)^3}.$$

On remarque que U_2 et V_2 sont indépendantes ; en effet, il est facile de vérifier que la densité de la loi de U_2 est donnée par $f_{U_2}(u_2) = \frac{1}{u_2^2} \mathbb{1}_{]1, \infty[}(u_2)$ et la densité de la loi de V_2 par

$$f_{V_2}(v_2) = \frac{2v_2}{(v_2 + 1)^3} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(v_2)$$

5) Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} w = z_1 + z_2 \\ t = z_2 - z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(w - t) \\ z_2 = \frac{1}{2}(w + t) \end{cases}$$



si $D = \{(z_1, z_2) : 0 \leq z_1 \leq \theta, z_2 > 0\}$, D a pour image Δ :

$$\Delta = \{(w, t) : w + t > 0 \text{ et } 0 \leq w - t \leq 2\theta\}.$$

Donc, la densité de la loi du couple (W, T) est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{W,T}(w, t) &= |j(w, t)| f_{Z_1, Z_2}\left(\frac{w-t}{2}, \frac{w+t}{2}\right) \mathbb{1}_{\Delta}(w, t) \\ &= |j(w, t)| f_{Z_1}\left(\frac{w-t}{2}\right) f_{Z_2}\left(\frac{w+t}{2}\right) \mathbb{1}_{\Delta}(w, t) \end{aligned}$$

car X_1 et X_2 sont indépendantes et j désigne le jacobien de la transformation donné par :

$$j(w, t) = \frac{D(z_1, z_2)}{D(w, t)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial w} & \frac{\partial z_1}{\partial t} \\ \frac{\partial z_2}{\partial w} & \frac{\partial z_2}{\partial t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial w} & \frac{\partial w}{\partial t} \\ \frac{\partial t}{\partial w} & \frac{\partial t}{\partial t} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où : } f_{W,T}(w, t) = \frac{\lambda}{2\theta} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}(w+t)\right) \mathbb{1}_{\Delta}(w, t).$$

Pour déterminer la loi marginale de W , on écrit le domaine Δ sous la forme :

$$\Delta = \{(w, t) : 0 < w \leq \theta \text{ et } -w \leq t \leq w\} \cup \{(w, t) : w > \theta \text{ et } w - 2\theta \leq t \leq w\}.$$

$$\text{Donc, pour } 0 < w \leq \theta : f_W(w) = \int_{-w}^w f_{W,T}(w, t) dt = \frac{1}{\theta} (1 - \exp(-\lambda w))$$

$$\text{pour } w > \theta : f_W(w) = \int_{w-2\theta}^w f_{W,T}(w, t) dt = \frac{\exp(\lambda\theta) - 1}{\theta} \exp(-\lambda w).$$

Déterminons la loi marginale de T :

$$\Delta = \{(w, t) : -\theta \leq t \leq 0 \text{ et } -t \leq w \leq t + 2\theta\} \cup \{(w, t) : t > 0 \text{ et } t \leq w \leq t + 2\theta\}.$$

$$\text{Donc, pour } -\theta \leq t \leq 0 : f_T(t) = \int_{-t}^{t+2\theta} f_{W,T}(w, t) dw = \frac{1}{\theta} [1 - \exp(-\lambda(t+\theta))]$$

$$\text{pour } t > 0 : f_T(t) = \int_t^{t+2\theta} f_{W,T}(w, t) dw = \frac{1 - \exp(-\lambda\theta)}{\theta} \exp(-\lambda t).$$

Exercice 12.11

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On pose : $U = X^2 + Y^2$ et $V = \frac{X^2}{X^2 + Y^2}$.

- 1) Déterminer la loi du couple (U, V) .
- 2) U et V sont-elles indépendantes ?

1) Comme X et Y sont indépendantes, la densité de la loi du couple (X, Y) est donnée par :

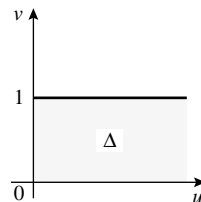
$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

On a :

$$\begin{aligned} E[\varphi_1(U)\varphi_2(V)] &= E\left[\varphi_1(X^2 + Y^2)\varphi_2\left(\frac{X^2}{X^2 + Y^2}\right)\right] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x^2 + y^2)\varphi_2\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x^2 + y^2)\varphi_2\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)f_{X,Y}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{uv} \\ y = \sqrt{u(1-v)} \end{cases}$$



si $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$, D a pour image Δ :

$$\Delta = \{(u, v) : u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}.$$

$$\text{Donc : } E[\varphi_1(U)\varphi_2(V)] = 4 \iint_{\Delta} \varphi_1(u)\varphi_2(v)|j(u, v)|f_{X,Y}(\sqrt{uv}, \sqrt{u(1-v)}) du dv$$

$$\text{avec : } j(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{1-v}}{2\sqrt{u}} & \frac{-\sqrt{u}}{2\sqrt{1-v}} \end{vmatrix} = \frac{-1}{4\sqrt{v(1-v)}}.$$

On en déduit la densité de la loi du couple (U, V) donnée par :

$$f_{U,V}(u, v) = 4|j(u, v)|f_{X,Y}(\sqrt{uv}, \sqrt{u(1-v)})\mathbb{1}_{\Delta}(u, v).$$

$$\text{D'où : } f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\mathbb{1}_{\Delta}(u, v).$$

2) U et V sont indépendantes ; en effet, on a :

$$\forall u \geq 0, f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v) dv = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)$$

$$\forall v \in [0,1], f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v) du = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}.$$

Exercice 12.12 (loi Normale tronquée)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ de densité : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

et de fonction de répartition : $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$.

- 1) Déterminer la loi de $Y = |X|$.
- 2) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer la loi de $Z = X \mathbb{1}_{[\theta, \infty[}(X)$.
- 3) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer la loi de $T = X \mathbb{1}_{]-\infty, \theta]}(X)$.
- 4) Pour $a < b$, déterminer la loi de $U = X \mathbb{1}_{[a, b]}(X)$.

1) On remarque que Y est à valeurs dans $[0, \infty[$. Pour tout $y \geq 0$, la fonction de répartition de la loi de Y est définie par :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^y \varphi(x) dx = \Phi(y) - \Phi(-y)$$

En dérivant on obtient la densité de la loi de Y :

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = (\varphi(y) + \varphi(-y)) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(y) = 2\varphi(y) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(y)$$

2) La fonction de répartition de la loi de Z est définie par :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq z | X \geq \theta)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } z < \theta \\ \frac{P(X \leq z \text{ et } X \geq \theta)}{P(X \geq \theta)} & \text{si } z \geq \theta \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } z < \theta \\ \frac{\Phi(z) - \Phi(\theta)}{1 - \Phi(\theta)} & \text{si } z \geq \theta \end{cases}$$

En dérivant on obtient la densité de la loi de Z :

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \frac{\varphi(z)}{1 - \Phi(\theta)} \mathbb{1}_{[\theta, \infty[}(z)$$

3) La fonction de répartition de la loi de T est définie par :

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(X \leq t | X \leq \theta) = \frac{P(X \leq \inf\{t, \theta\})}{P(X \leq \theta)}$$

$$= \begin{cases} \frac{P(X \leq t)}{P(X \leq \theta)} & \text{si } t \leq \theta \\ 1 & \text{si } t > \theta \end{cases} = \begin{cases} \frac{\Phi(t)}{\Phi(\theta)} & \text{si } t \leq \theta \\ 1 & \text{si } t > \theta \end{cases}$$

En dérivant on obtient la densité de la loi de T :

$$f_T(t) = F'_T(t) = \frac{\varphi(t)}{\Phi(\theta)} \mathbb{1}_{]-\infty, \theta[}(t)$$

4) La fonction de répartition de la loi de U est définie par :

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(X \leq u | a \leq X \leq b)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } u < a \\ \frac{P(a \leq X \leq u)}{P(a \leq X \leq b)} & \text{si } a \leq u \leq b \\ 1 & \text{si } u > b \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } u < a \\ \frac{\Phi(u) - \Phi(a)}{\Phi(b) - \Phi(a)} & \text{si } a \leq u \leq b \\ 1 & \text{si } u > b \end{cases}$$

En dérivant on obtient la densité de la loi de U :

$$f_U(u) = F'_U(u) = \frac{\varphi(u)}{\Phi(b) - \Phi(a)} \mathbb{1}_{[a, b]}(u)$$

Exercice 12.13

Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que la loi de Y est définie sur l'intervalle $]0, 1[$ de densité f et que conditionnellement à $\{Y = y\}$, X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, avec $n \geq 2$, et suit la loi :

$$P(X = k | Y = y) = \begin{cases} y & \text{si } k = n \\ \frac{1-y}{n-1} & \text{si } k = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

On notera $\mu = E[Y] = \int_0^1 y f(y) dy$ et $\sigma^2 = \text{Var}[Y] = \int_0^1 (y - \mu)^2 f(y) dy$.

- 1) Déterminer la loi marginale de X . En déduire $E[X]$ et $\text{Var}[X]$.
- 2) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = k\}$.
- 3) Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a :

$$E[Y | X = n] > E[Y | X = k].$$

1) La loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$f_{X,Y}(k, y) = P(X = k / Y = y) f(y) = \begin{cases} y f(y) & \text{si } k = n \\ \frac{1-y}{n-1} f(y) & \text{si } k = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

et la loi marginale de X est donnée par : $P(X = k) = \int_0^1 f_{X,Y}(k, y) dy$, soit :

$$P(X = k) = \begin{cases} \int_0^1 y f(y) dy = \mu & \text{si } k = n \\ \frac{1}{n-1} \int_0^1 (1-y) f(y) dy = \frac{1-\mu}{n-1} & \text{si } k = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

On a :

$$E[X] = \sum_{k=1}^n k P(X = k) = n P(X = n) + \sum_{k=1}^{n-1} k P(X = k) = n\mu + \frac{1-\mu}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(1+\mu)}{2}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=1}^n k^2 P(X = k) = n^2 P(X = n) + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 P(X = k) = n^2 \mu + \frac{1-\mu}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= n^2 \mu + \frac{1-\mu}{n-1} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{6} + \frac{n(4n+1)}{6} \mu \end{aligned}$$

$$\text{et : } \text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{n}{12} (1-\mu)(3n\mu + n - 2).$$

2) Pour tout $k = 1, \dots, n$, on a $f_Y(y / X = k) = \frac{f_{X,Y}(k, y)}{P(X = k)}$; soit :

$$f_Y(y / X = k) = \begin{cases} \frac{y}{\mu} f(y) & \text{si } k = n \\ \frac{1-y}{1-\mu} f(y) & \text{si } k = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

3) On remarque que $0 < \mu < 1$; en effet, Y est à valeurs dans $]0, 1[$; d'autre part, on a :

$$E[Y / X = n] = \int_0^1 y f_Y(Y / X = n) dy = \frac{1}{\mu} \int_0^1 y^2 f(y) dy = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu}$$

et : $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$

$$E[Y / X = k] = \int_0^1 y f_Y(Y / X = k) dy = \frac{1}{1-\mu} \int_0^1 y(1-y) f(y) dy = \frac{\mu - (\sigma^2 + \mu^2)}{1-\mu}$$

donc : $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, $E[Y / X = n] - E[Y / X = k] = \frac{\sigma^2}{\mu(1-\mu)} > 0$.

Exercice 12.14

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires. On suppose que la loi de X est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ de densité $f(x) = \frac{1}{16x^4} \exp\left(\frac{-1}{2x}\right) \mathbb{I}_{]0, \infty[}(x)$ et conditionnellement à $\{X = x\}$, Y et Z sont indépendantes et suivent la même loi $\mathcal{N}(0, x)$, c'est-à-dire :

$$f_Y(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{y^2}{2x}\right), \quad f_Z(z/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{z^2}{2x}\right).$$

- 1) Déterminer la loi du couple (Y, Z) .
- 2) Déterminer la loi de X conditionnellement à $\{Y = y, Z = z\}$.
- 3) Calculer $E[X/Y, Z]$.
- 4) On pose $U = Y + Z$. Déterminer la loi de X conditionnellement à $\{U = u\}$.
- 5) Calculer $E[X/U]$.

1) Comme, conditionnellement à $\{X = x\}$, Y et Z sont indépendantes, l'on a :

$$f_{Y,Z}(y, z/x) = f_Y(y/x) f_Z(z/x).$$

Donc : $f_{X,Y,Z}(x, y, z) = f_{Y,Z}(y, z/x) f(x) = f_Y(y/x) f_Z(z/x) f(x)$,

$$\text{et : } f_{Y,Z}(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y,Z}(x, y, z) dx.$$

D'où la densité de la loi du couple $(Y, Z) : \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f_{Y,Z}(y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y/x) f_Z(z/x) f(x) dx = \frac{1}{32\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^5} \exp\left[\frac{-1}{2x}(1+y^2+z^2)\right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi(1+y^2+z^2)^4} \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du = \frac{\Gamma(4)}{2\pi(1+y^2+z^2)^4} = \frac{3}{\pi(1+y^2+z^2)^4}. \end{aligned}$$

On remarque que Y et Z ne sont pas indépendantes.

2) Conditionnellement à $\{Y = y, Z = z\}$, la loi de X est donnée par :

$$f_X(x/y, z) = \frac{f_{X,Y,Z}(x, y, z)}{f_{Y,Z}(y, z)}$$

$$\text{soit : } f_X(x/y, z) = \frac{(1+y^2+z^2)^4}{96x^5} \exp\left[\frac{-1}{2x}(1+y^2+z^2)\right] \mathbb{I}_{]0, \infty[}(x).$$

3) On a :

$$E[X/Y = y, Z = z] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x/y, z) dx = \frac{1+y^2+z^2}{12} \Gamma(3) = \frac{1}{6}(1+y^2+z^2),$$

$$\text{soit : } E[X/Y, Z] = \frac{1}{6}(1+Y^2+Z^2).$$

4) Du fait que, conditionnellement à $\{X=x\}$, Y et Z sont indépendantes et suivent la même loi $\mathcal{N}(0,x)$, l'on déduit que, conditionnellement à $\{X=x\}$, $U = Y + Z$ suit une loi $\mathcal{N}(0,2x)$;

c'est-à-dire $f_U(u/x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \exp\left(-\frac{u^2}{4x}\right)$; on a donc : $\forall u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,U}(x,u) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_U(u/x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{32\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{9/2}} \exp\left[\frac{-1}{4x}(2+u^2)\right] dx. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{2+u^2}{4x}$, on obtient :

$$f_U(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}(2+u^2)^{7/2}} \int_0^{\infty} t^{5/2} e^{-t} dt = \frac{4\Gamma(7/2)}{\sqrt{\pi}(2+u^2)^{7/2}}, \text{ et en tenant compte de } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

et $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$ et donc : $f_U(u) = \frac{15}{2}(2+u^2)^{-\frac{7}{2}}$.

On a alors :

$$f_X(x/u) = \frac{f_{X,U}(x,u)}{f_U(u)} = \frac{(2+u^2)^{7/2}}{16 \times 15\sqrt{\pi}} \frac{1}{x^{9/2}} \exp\left[\frac{-1}{4x}(2+u^2)\right] \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x).$$

5) On a : $E[X/U=u] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x/u) dx = \frac{2+u^2}{10}$, soit : $E[X/U] = \frac{2+U^2}{10}$.

Exercice 12.15

1) Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité :

$$f_X(x) = (1 - |x|) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

Déterminer φ_X la fonction caractéristique de la loi de X .

2) Pour $n \geq 1$, on définit les fonctions f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x + \sqrt{1 + \theta_n^2} & \text{si } -\sqrt{1 + \theta_n^2} \leq x \leq -\theta_n \\ -\theta_n + \sqrt{1 + \theta_n^2} & \text{si } -\theta_n \leq x \leq \theta_n \\ \sqrt{1 + \theta_n^2} - x & \text{si } \theta_n \leq x \leq \sqrt{1 + \theta_n^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ_n est une suite de réels strictement positifs vérifiant : $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, les f_n sont des densités de probabilités.

- b) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de lois f_n . Déterminer φ_n la fonction caractéristique de la loi de X_n .
- c) Montrer que X_n converge en loi vers X . En déduire $\forall \eta \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \eta)$.

1) On a :

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{-2i\pi tx} dx = \int_{-1}^0 (1+x) e^{-2i\pi tx} dx + \int_0^1 (1-x) e^{-2i\pi tx} dx \\ &= \frac{1 + 2i\pi t - e^{2i\pi t}}{4\pi^2 t^2} + \frac{1 - 2i\pi t - e^{-2i\pi t}}{4\pi^2 t^2} \\ &= \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2\pi^2 t^2} = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^2\end{aligned}$$

2) Posons : $a_n = \sqrt{1 + \theta_n^2}$.

a) Du fait que f_n est paire, on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx &= \int_{-a_n}^{-\theta_n} (x + a_n) dx \\ &\quad + \int_{-\theta_n}^{\theta_n} (a_n - \theta_n) dx + \int_{\theta_n}^{a_n} (a_n - x) dx \\ &= 2 \int_0^{\theta_n} (a_n - \theta_n) dx + 2 \int_{\theta_n}^{a_n} (a_n - x) dx \\ &= 2 [(a_n - \theta_n)x]_0^{\theta_n} + 2 \left[a_n x - \frac{x^2}{2} \right]_{\theta_n}^{a_n} = a_n^2 - \theta_n^2 = 1\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-2i\pi tx} dx = \int_{-a_n}^{-\theta_n} (x + a_n) e^{-2i\pi tx} dx \\ &\quad + \int_{-\theta_n}^{\theta_n} (a_n - \theta_n) e^{-2i\pi tx} dx + \int_{\theta_n}^{a_n} (a_n - x) e^{-2i\pi tx} dx \\ &= 2 \int_0^{\theta_n} (a_n - \theta_n) \cos(2\pi tx) dx + 2 \int_{\theta_n}^{a_n} (a_n - x) \cos(2\pi tx) dx \\ &= \frac{\cos(2\pi\theta_n t) - \cos(2\pi a_n t)}{2\pi^2 t^2}\end{aligned}$$

c) Du fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$, on a : $\cos(2\pi\theta_n t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ et $a_n = \sqrt{1 + \theta_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, $\cos(2\pi a_n t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \cos(2\pi t)$. On en déduit

$$\forall t, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2\pi^2 t^2} = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^2 = \varphi_X(t)$$

ce qui montre que X_n converge en loi vers X .

Pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq \eta) &= P(X \geq \eta) = \int_{\eta}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \eta \leq -1 \\ \int_{\eta}^0 (1+x) dx + \int_0^1 (1-x) dx = 1 - \frac{(1+\eta)^2}{2} & \text{si } -1 \leq \eta \leq 0 \\ \int_{\eta}^1 (1-x) dx = \frac{(1-\eta)^2}{2} & \text{si } 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 12.16 (convergence en loi)

1) Pour $x \in]0, 1[$, étudier la variation de la fonction $g(x) = \frac{1}{x(1-x)} - 4$.

Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. On définit la variable aléatoire X par : $X = \frac{1}{U(1-U)} - 4$.

2) Déterminer f_X la densité de la loi de X .

3) Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .

4) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X . On pose : $U_n = \sup\{X_1, \dots, X_n\}$.

Déterminer F_n la fonction de répartition de la loi de U_n . Montrer que $T_n = \frac{2n}{U_n}$ converge en loi vers la variable aléatoire T de loi Exponentielle de paramètre 1.

1) On a : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \infty$. D'autre part, $g'(x) = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$; donc g' s'annule au point $x = \frac{1}{2}$. $g'(x) \leq 0$ si $x \leq \frac{1}{2}$ et $g'(x) \geq 0$ si $x \geq \frac{1}{2}$; donc $x = \frac{1}{2}$ réalise le minimum de g sur l'intervalle $]0, 1[$.

2) D'après 1), on remarque que $X = g(U)$ donc la variable aléatoire X est à valeurs dans $]0, \infty[$. Pour toute fonction h à support compact on a :

$$\begin{aligned} E[h(g(U))] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(g(u)) f_U(u) du \\ &= \int_0^1 h(g(u)) du = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} h(g(u)) du}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 h(g(u)) du}_{I_2} \end{aligned}$$

Dans $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} h(g(u)) du$, effectuons le changement de variable : $x = g(u) = \frac{1}{u(1-u)} - 4$.

On a : $u^2 - u + \frac{1}{x+4} = 0$; du fait que g est décroissante sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}]$, on a :

$u = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x+4}}$. Donc quand $u \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ et quand $u \rightarrow \frac{1}{2}$, $x \rightarrow 0$; et

$du = -\frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)^{3/2}}$. Il vient donc : $I_1 = \int_0^{\infty} h(x) \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)^{3/2}}$.

Dans $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(g(u)) du$, effectuons le changement de variable :

$x = g(u) = \frac{1}{u(1-u)} - 4$.

Du fait que g est croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1[$, on a : $u = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{x+4}}$. Donc

quand $u \rightarrow \frac{1}{2}$, $x \rightarrow 0$ et quand $u \rightarrow 1$, $x \rightarrow \infty$; et $du = \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)^{3/2}}$. Il vient donc :

$I_2 = \int_0^{\infty} h(x) \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)^{3/2}}$. On en déduit :

$$E[h(X)] = I_1 + I_2 = \int_0^{\infty} h(x) \frac{2}{\sqrt{x}(x+4)^{3/2}} dx$$

Donc la densité de la loi de X est définie par : $f_X(x) = \frac{2}{\sqrt{x}(x+4)^{3/2}} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x)$.

3) La fonction de répartition de la loi de X est définie par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_0^x \frac{2 dt}{\sqrt{t} (t+4)^{3/2}}$$

Effectuons le changement de variable : $\sqrt{t} = 2\lambda$, il vient donc :

$$F_X(x) = \int_0^{\frac{\sqrt{x}}{2}} \frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)^{3/2}}. \text{ Effectuons le nouveau changement de variable :}$$

$$\theta = \arctan(\lambda), \left(d\theta = \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} \right), \text{ on a :}$$

$$F_X(x) = \int_0^{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)} \cos\theta d\theta = \sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right) = \sqrt{\frac{x}{x+4}}$$

4) La fonction de répartition de la loi de U_n est définie par :

$$\begin{aligned} F_n(t) &= P(U_n \leq t) = P(\sup\{X_1, \dots, X_n\} \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq t) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t) = (F_X(t))^n = \left(\sqrt{\frac{t}{t+4}}\right)^n \end{aligned}$$

Cherchons la fonction de répartition de la loi de T_n . Pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) &= P(T_n \leq t) = P\left(\frac{2n}{U_n} \leq t\right) = 1 - P\left(U_n \leq \frac{2n}{t}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{\frac{2n}{t}}{\frac{2n}{t} + 4}\right)^{\frac{n}{2}} = 1 - \left(1 + \frac{2t}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = 1 - \left[\left(1 + \frac{2t}{n}\right)^n\right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2t}{n}\right)^n = e^{2t}$. On en déduit, que pour tout $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{T_n}(t) = 1 - e^{-t}$ ce qui est la fonction de répartition de la loi Exponentielle de paramètre 1.

Exercice 12.17

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, N\}$. On pose :

$$U_n = \inf\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \text{ et } V_n = \sup\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

1) Calculer les lois de U_n et V_n .

2) On suppose que $\frac{N}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Montrer que U_n converge en loi vers une variable aléatoire U dont on précisera la loi.

1) Loi de U_n : $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$ $P(U_n \leq k) = 1 - (1 - P(X_1 \leq k))^n$

or : $P(X_1 = k) = \frac{1}{N}$, donc : $P(X_1 \leq k) = \sum_{i=1}^k P(X_1 = i) = \frac{k}{N}$;

d'où : $P(U_n \leq k) = 1 - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$.

Soit : $P(U_n = k) = P(U_n \leq k) - P(U_n \leq k-1) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$.

Loi de V_n : $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} P(V_n \leq k) &= P(\{\forall i = 1, \dots, n \ X_i \leq k\}) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq k\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq k) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_1 \leq k) = [P(X_1 \leq k)]^n = \left(\frac{k}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

Soit : $P(V_n = k) = P(V_n \leq k) - P(V_n \leq k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$.

2) On a : $P(U_n = k) = \left(1 - \frac{n}{N} \frac{k-1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{n}{N} \frac{k}{n}\right)^n$;

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \lim_{n \rightarrow \infty} P(U_n = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{N} \frac{k-1}{n}\right)^n - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{N} \frac{k}{n}\right)^n \\ &= e^{-(k-1)} - e^{-k} = e^{-(k-1)}(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

On en déduit que $U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} U$, où U suit une loi géométrique de paramètre $(1 - e^{-1})$.

Exercice 12.18 (convergence en loi)

- 1) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de loi $P(Y = -1) = \alpha$, $P(Y = 1) = 1 - \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$.

Déterminer φ_Y la fonction caractéristique de la loi de Y .

- 2) Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels tels que : $\forall n \geq 1, 0 < \alpha_n < 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$. On considère la suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$ suivant la loi :

$$f_n(x) = \alpha_n \mathbb{I}_{[-n, 1-n]}(x) + (1 - \alpha_n) \mathbb{I}_{[n-1, n]}(x)$$

- a) Déterminer φ_n la fonction caractéristique de la loi de X_n .

- b) On pose : $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Montrer que Y_n converge en loi vers Y .

- 1) La fonction caractéristique de la loi de Y est définie par :

$$\varphi_Y(t) = E[e^{itY}] = \sum_{y \in \{-1, 1\}} e^{ity} P(Y = y) = \alpha e^{-it} + (1 - \alpha) e^{it}$$

- 2) a) La fonction caractéristique de la loi de X_n est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= E[e^{itX_n}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_n(x) dx \\ &= \alpha_n \int_{-n}^{1-n} e^{itx} dx + (1 - \alpha_n) \int_n^{n-1} e^{itx} dx \\ &= \alpha_n \frac{e^{it} - 1}{it} e^{-int} + (1 - \alpha_n) \frac{1 - e^{-it}}{it} e^{int} \\ &= \left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \right) \left[\alpha_n e^{i\left(\frac{1}{2}-n\right)t} + (1 - \alpha_n) e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)t} \right] \end{aligned}$$

- 2) b) La fonction caractéristique de la loi de Y_n est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_n}(t) &= E[e^{itY_n}] = E\left[e^{it\frac{X_n}{n}}\right] = \varphi_n\left(\frac{t}{n}\right) \\ &= \left(\frac{\sin\left(\frac{t}{2n}\right)}{\frac{t}{2n}} \right) \left[\alpha_n e^{i\left(\frac{1}{2n}-1\right)t} + (1 - \alpha_n) e^{i\left(1-\frac{1}{2n}\right)t} \right] \end{aligned}$$

Or, pour tout t ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{2n}\right)}{\frac{t}{2n}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\alpha_n e^{i\left(\frac{1}{2n}-1\right)t} + (1 - \alpha_n) e^{i\left(1-\frac{1}{2n}\right)t} \right] = \alpha e^{-it} + (1 - \alpha) e^{it} = \varphi_Y(t)$$

on en déduit :

$$\forall t, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) = \alpha e^{-it} + (1 - \alpha) e^{it} = \varphi_Y(t)$$

ce qui montre que Y_n converge en loi vers Y .

Exercice 12.19

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi :

$$\forall x = -1, 0, 1, 2, \dots \quad P(X_i = x) = \frac{1}{e(x+1)!}.$$

On pose : $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1) Déterminer la loi de S_n .

2) En utilisant le théorème de la limite centrale (R12.20), montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

1) Pour tout i , posons $Y_i = X_i + 1$; donc les variables Y_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(Y_i = k) = P(X_i = k - 1) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

On en déduit que les Y_i suivent une loi de Poisson de paramètre 1 et en particulier, $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$ suit une loi de Poisson de paramètre n , c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{N}$

$$P(T_n = k) = e^{-n} \frac{n^k}{k!}.$$

On a : $E[T_n] = \text{Var}[T_n] = n$.

Pour tout $k \in \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots\}$, la loi de S_n est de la forme :

$$P(S_n = k) = P(T_n - n = k) = P(T_n = k + n) = e^{-n} \frac{n^{k+n}}{(k+n)!}.$$

2) Par le théorème de la limite centrale, la suite de variables aléatoires

$$Z_n = \frac{T_n - E[T_n]}{\sqrt{\text{Var}[T_n]}} = \frac{T_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 12.20

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi :

$$P(X_n = 1) = p, P(X_n = 0) = 1 - p \quad (0 < p < 1).$$

Pour tout n , on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

1) Déterminer la loi de Y_n . En déduire $E[Y_n]$ et $\text{Var}[Y_n]$.

2) Soit $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, calculer $E[T_n]$ et $\text{Var}[T_n]$.

3) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers la variable aléatoire presque sûrement égale à $2p$.

1) Y_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1,2\}$ et l'on a :

$$P(Y_n = 0) = P(X_n = 0, X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0) = (1 - p)^2$$

$$P(Y_n = 2) = P(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 1) = p^2$$

$$P(Y_n = 1) = 1 - P(Y_n = 0) - P(Y_n = 2) = 2p(1 - p).$$

On en déduit : $E[Y_n] = 2p$ et $\text{Var}[Y_n] = 2p(1 - p)$.

2) On a : $E[T_n] = E[Y_1] = 2p$ et $\text{Var}[T_n] = \frac{1}{n} \text{Var}[Y_1] = \frac{2p(1-p)}{n}$.

3) On a : $E[(T_n - 2p)^2] = \text{Var}[T_n] = \frac{2p(1-p)}{n}$,

donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} E[(T_n - 2p)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2p(1-p)}{n} = 0$.

On en déduit : $T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{m.q.}} 2p$.

Exercice 12.21 (convergence en loi)

1) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Déterminer φ_X la fonction caractéristique de la loi de X .

2) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi :

$$P\left(X_n = -\frac{1}{2^n}\right) = P\left(X_n = \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$$

a) Déterminer φ_n la fonction caractéristique de la loi de X_n .

b) On pose : $S_n = X_1 + \dots + X_n$. En utilisant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

montrer que S_n converge en loi vers X .

1) La fonction caractéristique de la loi de X est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{itx} dx \\ &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

2) a) La fonction caractéristique de la loi de X_n est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= E[e^{itX_n}] = \sum_{k \in \{-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\}} e^{itk} P(X_n = k) \\ &= \frac{1}{2} \left[\exp\left(-\frac{it}{2^n}\right) + \exp\left(\frac{it}{2^n}\right) \right] = \cos\left(\frac{t}{2^n}\right) \end{aligned}$$

2) b) La fonction caractéristique de la loi de S_n est définie par :

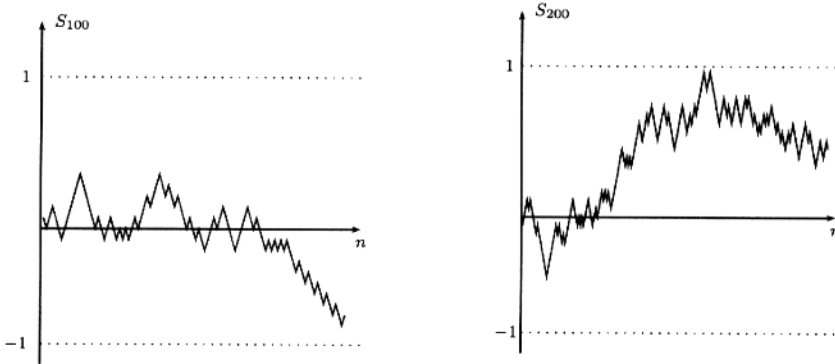
$$\begin{aligned} \varphi_{S_n}(t) &= E[e^{itS_n}] = E[e^{it(X_1 + \dots + X_n)}] = E\left[\prod_{k=1}^n e^{itX_k}\right] \\ &= \prod_{k=1}^n E[e^{itX_k}] = \prod_{k=1}^n \varphi_k(t) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \\ &= \frac{\sin t}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \frac{\sin t}{t} \frac{\frac{t}{2^n}}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{t}{2^n}}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} = 1$, on en déduit :

$$\forall t, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{S_n}(t) = \frac{\sin t}{t} = \varphi_X(t)$$

ce qui montre que S_n converge en loi vers X .

La figure suivante représente différentes trajectoires de S_n pour $n = 100$ et $n = 200$.



Exercice 12.22

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes ; on suppose que pour tout i , X_i et Y_i sont indépendantes entre elles et de lois données par :

$$P(X_i = 1) = p, P(X_i = -1) = 1 - p \quad (p \in]0, 1[)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(Y_i = k) = \theta^k (1 - \theta) \quad (\theta \in]0, 1[).$$

On pose : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$.

1) Calculer $E[S_n]$ et $\text{Var}[S_n]$.

2) Application : on suppose $p = \frac{1}{2}$. Montrer que, pour tout réel $\eta > 0$, les limites :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| \leq n\eta) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| \leq \eta\sqrt{n})$$
 existent et trouver leurs valeurs.

1) Pour tout i , on a : $E[X_i] = 2p - 1$, $\text{Var}[X_i] = 4p(1 - p)$ et

$$\mu = E[Y_i] = \sum_{k=0}^{\infty} k P(Y_i = k) = (1 - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} k \theta^k = \frac{\theta}{1 - \theta}, \quad \sigma^2 = \text{Var}[Y_i] = \frac{\theta}{(1 - \theta)^2}$$

Comme X_i et Y_i sont indépendantes, on a :

$$E[S_n] = nE[X_1 Y_1] = nE[X_1] E[Y_1] = n\mu(2p - 1)$$

$$\text{Var}[S_n] = n\text{Var}[X_1 Y_1] = n[E[X_1^2 Y_1^2] - (E[X_1 Y_1])^2]$$

$$= n[E[X_1^2]E[Y_1^2] - (E[X_1])^2 E[Y_1]^2].$$

Or, $E[X_1^2] = \text{Var}[X_1] + (E[X_1])^2 = 1$

et $E[Y_1^2] = \text{Var}[Y_1] + (E[Y_1])^2 = \sigma^2 + \mu^2 = \frac{\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^2}.$

Donc : $\text{Var}[S_n] = n[\sigma^2 + 4p(1-p)\mu^2].$

2) Si $p = \frac{1}{2}$, on a : $E[S_n] = 0$ et $\text{Var}[S_n] = n(\sigma^2 + \mu^2) = n\tau^2$ où l'on a posé

$$\tau^2 = \sigma^2 + \mu^2 = \frac{\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^2}.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\forall \varepsilon > 0$, on a :

$$P(|S_n - E[S_n]| > \varepsilon) = P(|S_n| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[S_n]}{\varepsilon^2} = \frac{n\tau^2}{\varepsilon^2}.$$

Prenons $\varepsilon = n\eta$, il vient donc $P(|S_n| > n\eta) \leq \frac{\tau^2}{n\eta^2}.$

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| > n\eta) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau^2}{n\eta^2} = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| \leq n\eta) = 1.$

Par le théorème de la limite centrale, la suite de variables aléatoires $Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}} = \frac{S_n}{\tau\sqrt{n}}$

converge en loi vers une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| \leq \eta\sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \leq \eta\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{|S_n|}{\tau\sqrt{n}} \leq \frac{\eta}{\tau}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(|Z_n| \leq \frac{\eta}{\tau}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{\eta}{\tau}\right) = P\left(-\frac{\eta}{\tau} \leq Z \leq \frac{\eta}{\tau}\right) = \Phi\left(\frac{\eta}{\tau}\right) - \Phi\left(-\frac{\eta}{\tau}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\eta}{\tau}\right) - 1 = 2\Phi\left(\frac{\eta(1-\theta)}{\sqrt{\theta(1+\theta)}}\right) - 1, \end{aligned}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 12.23

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que X_i suit une

loi de Poisson de paramètre 1. On pose : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1) Déterminer la loi de S_n .

2) En utilisant le théorème de la limite centrale, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k!} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

1) Comme $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1, S_n suit une loi de Poisson de paramètre n . En particulier, on a :

$$\forall k \geq 0, P(S_n = k) = e^{-n} \frac{n^k}{k!}, P(0 \leq S_n \leq n) = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$$

et : $E[S_n] = \text{Var}[S_n] = n$.

2) Par le théorème de la limite centrale, la suite de variables aléatoires

$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(0 \leq S_n \leq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(-\sqrt{n} \leq \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(-\sqrt{n} \leq Z_n \leq 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Phi(0) - \Phi(-\sqrt{n})] = \Phi(0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 12.24

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et de fonction caractéristique φ vérifiant :

$$\forall n \geq 0 \quad \mu = E[X_n] < \infty, \sigma^2 = \text{Var}[X_n] < \infty.$$

On définit : $\psi(t) = \ln(\varphi(t))$.

On pose : $U_0 = \frac{X_0}{2}$ et, pour $n \geq 1$, $U_n = \frac{U_{n-1} + X_n}{2}$.

1) Exprimer la fonction caractéristique de U_n en fonction de ψ .

2) Étudier la convergence en loi de la suite $(U_n)_{n \geq 0}$.

1) On a : $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{X_k}{2^{n+1-k}}$. Posons $a_k = \frac{1}{2^{n+1-k}}$, l'expression de U_n devient alors :

$U_n = \sum_{k=0}^n a_k X_k$. Notons φ_n la fonction caractéristique de U_n . On a :

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= E[\exp(-2i\pi t U_n)] = E\left[\exp\left(-2i\pi t \sum_{k=0}^n a_k X_k\right)\right] = E\left[\prod_{k=0}^n \exp(-2i\pi t a_k X_k)\right] \\ &= \prod_{k=0}^n E[\exp(-2i\pi t a_k X_k)] = \prod_{k=0}^n \varphi_{X_k}(a_k t) = \prod_{k=0}^n \varphi(a_k t).\end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \ln(\varphi_n(t)) = \sum_{k=0}^n \ln(\varphi(a_k t)) = \sum_{k=0}^n \psi(a_k t). \quad (1)$$

D'autre part, de $\psi(t) = \ln(\varphi(t))$, on déduit $\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ et

$$\psi''(t) = \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} - \left(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)^2; \text{ et en particulier en } t = 0, \text{ on a :}$$

$$\psi'(0) = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = \varphi'(0) = -2i\pi E[X_1] = -2i\pi \mu$$

$$\begin{aligned}\text{et } \psi''(0) &= \frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)} - \left(\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}\right)^2 = \varphi''(0) - (\varphi'(0))^2 = (-2i\pi)^2 E[X_1^2] - (-2i\pi E[X_1])^2 \\ &= (-2i\pi)^2 [E[X_1^2] - (E[X_1])^2] = -4\pi^2 \sigma^2.\end{aligned}$$

En utilisant le développement limité de ψ (à l'ordre 2), au voisinage de $t = 0$, on a :

$$\psi(t) = \psi(0) + t\psi'(0) + \frac{t^2}{2}\psi''(0) + o(t^2) = -2i\pi \mu t - \frac{1}{2}(2\pi \sigma)^2 t^2 + o(t^2).$$

Donc, de la relation (1), on déduit :

$$\ln(\varphi_n(t)) = \sum_{k=0}^n \left(-2i\pi a_k \mu t - \frac{1}{2}(2\pi a_k \sigma)^2 t^2\right) + R_n \quad (2)$$

où $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$. Soit :

$$\ln(\varphi_n(t)) = -2i\pi \mu t \sum_{k=0}^n a_k - \frac{1}{2}(2\pi \sigma)^2 t^2 \sum_{k=0}^n a_k^2 + R_n. \quad (3)$$

$$\text{Or : } \sum_{k=0}^n a_k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ et } \sum_{k=0}^n a_k^2 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.$$

Donc de la relation (3) on déduit, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\varphi_n(t)) = -2i\pi\mu t - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi\sigma}{\sqrt{3}} \right)^2 t^2$, soit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \exp \left[-2i\pi\mu t - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi\sigma}{\sqrt{3}} \right)^2 t^2 \right]; \text{ on en déduit que } U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} U, \text{ où } U \text{ suit une loi } \mathcal{N} \left(\mu, \frac{\sigma^2}{3} \right).$$

Exercices d'entraînement

12.25 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{12} - \frac{x}{8} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ C & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{24} + \frac{x}{8} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

où C est une constante.

- 1) Calculer la valeur de C de sorte que f soit une densité de probabilité.
- 2) Soit X une variable aléatoire dont la loi admet la densité f . Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .

12.26 Soit X une variable aléatoire réelle de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda + \mu} e^{\frac{x}{\lambda}} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\lambda + \mu} e^{-\frac{x}{\mu}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0, \mu > 0)$$

- 1) Déterminer $E[X]$ et $Var[X]$.
- 2) On pose : $U_1 = \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(X)$ et $U_2 = \mathbb{1}_{[0, \infty[}(X)$. Déterminer $E[U_1]$ et $E[U_2]$.
- 3) On pose : $V_1 = X \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(X)$ et $V_2 = X \mathbb{1}_{[0, \infty[}(X)$. Déterminer $E[V_1]$ et $E[V_2]$.

12.27 Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$ ($\mu > 0$) de densité : $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$.

- 1) Déterminer la densité de la loi de $T = \left| \frac{X - \mu}{\mu} \right|$.
- 2) Calculer $E[T]$ et $\text{Var}[T]$.

12.28 Soit X une variable aléatoire réelle de densité : $f_X(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[1, \infty[}(x)$.
Déterminer la densité de la loi de $U = 1 - \frac{1}{X}$.

12.29 Soit X une variable aléatoire réelle de densité : $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Déterminer la densité de la loi de $U = \frac{1}{X}$.

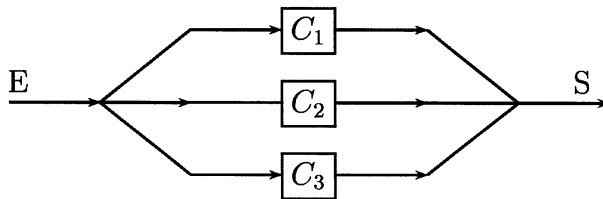
12.30 Soit X une variable aléatoire réelle de densité : $f_X(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$.

- 1) Déterminer la densité de la loi de $U = \sqrt{X}$.
- 2) Pour $\eta > 0$, déterminer $P(U > \eta)$.

12.31 Soit X une variable aléatoire réelle de densité : $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

- 1) Déterminer la densité de la loi de $U = \frac{1}{1+X^2}$.
- 2) Déterminer F_U la fonction de répartition de la loi de U .
- 3) Calculer $E[U]$ et $\text{Var}[U]$.

12.32 Un système électronique, ayant une entrée E et une sortie S , est constitué de trois composants C_1 , C_2 et C_3 montés en parallèle selon le schéma suivant :

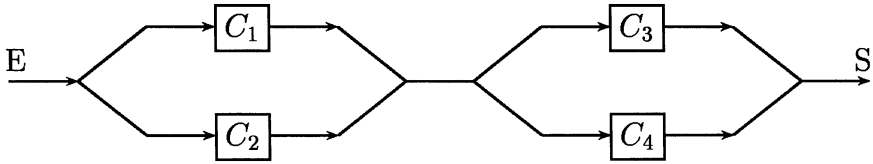


Le système cesse de fonctionner quand il n'y a plus de chemin entre E et S . Soit T_1 , T_2 et T_3 les durées de vie respectives des composants C_1 , C_2 et C_3 . On suppose que ce sont des variables aléatoires réelles indépendantes de lois :

$$f_j(t) = \lambda_j e^{-\lambda_j t} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(t) \quad j = 1, 2, 3 \quad (\lambda_j > 0)$$

Déterminer la durée de vie du système.

12.33 Reprendre le même problème que **12.32** avec le système suivant :



On suppose que les durées de vie des 4 composants sont des variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives :

$$f_j(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \mathbb{I}_{[0, \infty[}(t) \quad j = 1, 2 \quad (\lambda_1 > 0)$$

$$f_j(t) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \mathbb{I}_{[0, \infty[}(t) \quad j = 3, 4 \quad (\lambda_2 > 0)$$

Déterminer la durée de vie du système.

12.34 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $U = XY$.

12.35 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $U = X^2 + Y^2$.

12.36 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de densité : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0, \infty[}(x)$ ($\lambda > 0$). Déterminer la loi de $U = \sqrt{X + Y}$.

12.37 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives : $f_X(x) = 2x \mathbb{I}_{[0, 1]}(x)$ et $f_Y(y) = 2(1 - y) \mathbb{I}_{[0, 1]}(y)$. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

12.38 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1) Déterminer la loi du couple $(X, X - Y)$.

2) X et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

12.39 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de loi :

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2 + y^2)}$$

On pose : $S = X + Y$ et $U = X^2 + Y^2$.

1) Déterminer la loi du couple (S, U) .

2) S et U sont-elles indépendantes ?

3) Déterminer la loi marginale de U .

4) Déterminer la loi conditionnelle de S sachant $\{U = u\}$.

5) Calculer $E[S^2]$ et $\text{Var}[S^2]$.

12.40 On considère (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = K e^{-(x^2+y^2)} \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}}$$

où K est une constante.

On définit les variables aléatoires S, U, V, Z et T par :

$$\begin{aligned} S &= X + Y, & U &= \frac{X}{X + Y}, & V &= \frac{Y}{X + Y} \\ Z &= \sup\{U, V\}, & T &= \inf\{U, V\}. \end{aligned}$$

- 1) En effectuant le changement de variables $x = \sqrt{r} \cos \theta$, $y = \sqrt{r} \sin \theta$, déterminer la valeur de la constante K .
- 2) Déterminer la loi du couple (S, U) .
- 3) U et S sont-elles indépendantes ?
- 4) Déterminer la loi marginale de U .
- 5) Déterminer F_U la fonction de répartition de la loi de U .
- 6) Exprimer F_V la fonction de répartition de la loi de V en fonction de F_U .
- 7) Déterminer F_T la fonction de répartition de la loi de T . En déduire f_T la densité de la loi de T .
- 8) Déterminer F_Z la fonction de répartition de la loi de Z . En déduire f_Z la densité de la loi de Z .

12.41 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On pose : $U = -\ln(1 - XY)$.

- 1) Déterminer f_U la densité de la loi de U .
- 2) Déterminer F_U la fonction de répartition de la loi de U .
- 3) Soit $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que U .

On pose : $T_n = \sup\{U_1, \dots, U_n\}$. Déterminer F_{T_n} la fonction de répartition de la loi de T_n .

12.42 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. On définit la variable aléatoire U par : $U = \frac{X + Y}{2 - X - Y}$.

- 1) Déterminer la loi du couple (X, U) .
- 2) X et U sont-elles indépendantes ?
- 3) Déterminer la loi marginale de U .
- 4) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{U = u\}$.

12.43 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que :

- la loi de Y admet la densité : $f_Y(y) = 6y(1 - y) \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$
- conditionnellement à $\{Y = y\}$, X suit une loi uniforme $\mathcal{U}([0, y])$.

1) Déterminer f_X la densité de la loi de X .

2) Déterminer φ_X la fonction caractéristique de la loi de X .

12.44 Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|} \quad (\theta > 0)$$

1) Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .

2) Déterminer $E[X]$ et $Var[X]$.

3) Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[-\theta, \theta]$.
On suppose que X et U sont indépendantes et on définit la variable aléatoire Y par :

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \leq \theta \\ X + U & \text{si } X > \theta \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout θ , $Var[Y] > Var[X]$.

12.45 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que :

- la loi de Y admet la densité : $f_Y(y) = y e^{-y} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(y)$
- conditionnellement à $\{Y = y\}$, X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\theta - y, \theta + y]$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

1) Déterminer f_X la densité de probabilité de la loi de X .

2) Déterminer $E[X]$ et $Var[X]$.

Réponses

12.25 1) $C = \frac{7}{24}$.

2) On a : $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

• si $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$,

• si $0 < x \leq 1$, $F_X(x) = \frac{x(20 - 3x)}{48}$,

• si $1 < x \leq 2$, $F_X(x) = \frac{3 + 14x}{48}$,

• si $2 < x \leq 3$, $F_X(x) = \frac{15 + 2x + 3x^2}{48}$,

• si $x \geq 3$, $F_X(x) = 1$.

12.26 1) $E[X] = \mu - \lambda$ et $\text{Var}[X] = \mu^2 + \lambda^2$.

2) $E[U_1] = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ et $E[U_2] = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

3) $E[V_1] = \frac{-\lambda^2}{\lambda + \mu}$ et $E[V_2] = \frac{\mu^2}{\lambda + \mu}$.

12.27 1) $f_T(t) = \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2 t^2}{2}} \mathbb{I}_{[0, \infty[}(t)$.

2) $E[T] = \frac{\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\pi}}$ et $\text{Var}[T] = \frac{\pi - 2}{\mu^2\pi}$.

12.28 U suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, $f_U(u) = \mathbb{I}_{[0, 1]}(u)$.

12.29 U suit la même loi que X , $f_U(u) = \frac{1}{\pi(1 + u^2)}$.

12.30 1) $f_U(u) = \frac{2u}{(1 + u^2)^2} \mathbb{I}_{]0, \infty[}(u)$.

2) $P(U > \eta) = \frac{1}{1 + \eta^2}$.

12.31 1) $f_U(u) = \frac{1}{\pi\sqrt{u}\sqrt{1-u}} \mathbb{I}_{]0, 1[}(u)$.

2) $\forall u \in [0, 1], F_U(u) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{u})$.

3) $E[U] = \frac{1}{2}$ et $\text{Var}[U] = \frac{1}{8}$.

12.32 Soit T la durée de vie du système, on a : $T = \sup\{T_1, T_2, T_3\}$ et

$$f_T(t) = [\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} (1 - e^{-\lambda_2 t}) (1 - e^{-\lambda_3 t}) + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} (1 - e^{-\lambda_1 t}) (1 - e^{-\lambda_3 t}) + \lambda_3 e^{-\lambda_3 t} (1 - e^{-\lambda_1 t}) (1 - e^{-\lambda_2 t})] \mathbb{I}_{]0, \infty[}(t)$$

12.33 Soit $U = \sup\{T_1, T_2\}$, $V = \sup\{T_3, T_4\}$ et T la durée de vie du système, on a : $T = \inf\{U, V\}$ et

$$f_T(t) = \{2\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} (1 - e^{-\lambda_1 t}) [1 - (1 - e^{-\lambda_2 t})^2] + 2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} (1 - e^{-\lambda_2 t}) [1 - (1 - e^{-\lambda_1 t})^2]\} \mathbb{I}_{]0, \infty[}(t)$$

12.34 $f_U(u) = -\ln(u) \mathbb{I}_{]0, 1]}(u)$.

$$12.35 \quad f_U(u) = \frac{\pi}{4} \mathbb{1}_{[0,1]}(u) + \frac{1}{2} \left[\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{u-1}{u}}\right) \right] \mathbb{1}_{[1,2]}(u).$$

$$12.36 \quad f_U(u) = 2\lambda^2 u^3 e^{-\lambda u^2} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(u).$$

$$12.37 \quad f_S(s) = \left(2s^2 \left(1 - \frac{s}{3}\right)\right) \mathbb{1}_{[0,1]}(s) + \left(\frac{8}{3} - 2s^2 + \frac{2}{3}s^3\right) \mathbb{1}_{[1,2]}(s).$$

$$12.38 \quad \text{Posons : } U = X - Y.$$

$$1) f_{X,U}(x,u) = \mathbb{1}_{\{-1 \leq u \leq x \leq 1\}}.$$

2) X et $U = X - Y$ ne sont pas indépendantes.

$$12.39 \quad 1) f_{S,U}(s,u) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2u-s^2}} \mathbb{1}_{\{u \geq 0, 2u-s^2 \geq 0\}}.$$

2) S et U ne sont pas indépendantes.

$$3) f_U(u) = e^{-u} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(u).$$

$$4) f_S(s|u) = \frac{f_{S,U}(s,u)}{f_U(u)} = \frac{1}{\pi \sqrt{2u-s^2}} \mathbb{1}_{[-\sqrt{2u}, \sqrt{2u}]}(s) \quad (u \geq 0).$$

$$5) E[S^2] = 1 \text{ et } \text{Var}[S^2] = 2.$$

$$12.40 \quad 1) K = \frac{4}{\pi}.$$

$$2) f_{S,U}(s,u) = \frac{4}{\pi} s \exp(-s^2(u^2 + (1-u)^2)) \mathbb{1}_{]0,\infty[}(s) \mathbb{1}_{]0,1[}(u)$$

3) S et U ne sont pas indépendantes.

$$4) f_U(u) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1+(2u-1)^2} \mathbb{1}_{]0,1[}(u)$$

$$5) F_U(u) = \int_0^u f_U(t) dt = \frac{2}{\pi} \left(\arctan(2u-1) + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$6) F_V(v) = \frac{2}{\pi} \left(\arctan(2v-1) + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$7) F_T(t) = 1 - \frac{4}{\pi} \arctan(1-2t), \quad f_T(t) = \frac{8}{\pi} \frac{1}{1+(1-2t)^2} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(t)$$

$$8) F_Z(z) = \frac{4}{\pi} \arctan(2z-1), \quad f_Z(z) = \frac{8}{\pi} \frac{1}{1+(2z-1)^2} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}(z)$$

12.41 1) $f_U(u) = -e^{-u} \ln(1 - e^{-u}) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(u)$.

2) La fonction de répartition de la loi de U est définie par :

$$F_U(u) = \int_{-\infty}^u f_U(t) dt = - \int_0^u e^{-t} \ln(1 - e^{-t}) dt$$

En effectuant le changement de variable : $\lambda = 1 - e^{-t}$ ($d\lambda = e^{-t} dt$), on obtient :

$$F_U(u) = - \int_0^{1-e^{-u}} \ln(\lambda) d\lambda = - [\lambda (\ln(\lambda) - 1)]_0^{1-e^{-u}} = (1 - e^{-u}) (1 - \ln(1 - e^{-u}))$$

3) La fonction de répartition de la loi de T_n est définie par :

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) &= P(T_n \leq t) = P(\sup\{U_1, \dots, U_n\} \leq t) \\ &= \prod_{i=1}^n P(U_i \leq t) = \prod_{i=1}^n F_{U_i}(t) \\ &= (F_U(t))^n = (1 - e^{-t})^n (1 - \ln(1 - e^{-t}))^n \end{aligned}$$

12.42 1) La densité de la loi du couple (X, U) est donnée par :

$$f_{X,U}(x, u) = \frac{2}{(1+u)^2} \mathbb{1}_{\Delta}(x, u),$$

$$\text{avec : } \Delta = \left\{ (x, u) : u \geq 0, 0 \leq \frac{2u}{1+u} - x \leq 1 \right\}.$$

2) X et U ne sont pas indépendantes ; car, elles sont liées par la relation :

$$0 \leq \frac{2U}{1+U} - X \leq 1.$$

3)

$$f_U(u) = \begin{cases} \int_0^{\frac{2u}{1+u}} \frac{2}{(1+u)^2} dx = \frac{4u}{(1+u)^3} & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ \int_0^1 \frac{2}{(1+u)^2} dx = \frac{2}{(1+u)^2} & \text{si } u > 1 \end{cases}$$

4) La loi conditionnelle de X sachant $\{U = u\}$ est définie par :

$$f_X(x|u) = \frac{f_{X,U}(x, u)}{f_U(u)} = \begin{cases} \frac{1+u}{2u} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{2u}{1+u}, 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, u > 1 \end{cases}$$

12.43 1)

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x|y) f_Y(y) = 6(1-y) \mathbb{1}_{[0, y]}(x) \mathbb{1}_{[0, 1]}(y) \\ &= 6(1-y) \mathbb{1}_{[0, 1]}(x) \mathbb{1}_{[x, 1]}(y) \end{aligned}$$

La loi marginale de X est définie par : $\forall x \in [0, 1]$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy = 6 \int_x^1 (1 - y) \, dy = 3(1 - x)^2$$

2) La fonction fonction caractéristique de la loi de X est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) \, dx = 6 \int_0^1 (1 - x)^2 e^{itx} \, dx \\ &= \frac{3(2t + it^2 - 2i + 2ie^{it})}{t^3} \end{aligned}$$

12.44 1) On a : $F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{t-\theta} \, dt = \frac{1}{2} e^{x-\theta} & \text{si } x \leq \theta \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{\theta}^x e^{-(t-\theta)} \, dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$

2) On a : $E[X] = \theta$, $E[X^2] = 2 + \theta^2$ et $Var[X] = 2$

3) On a : $E[Y] = \theta$ et $Var[Y] = 2 + \theta^2 + \frac{\theta^2}{6} - \theta^2 = 2 + \frac{\theta^2}{6} > 2 = Var[X]$.

12.45 1)

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x|y) f_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-y} \mathbb{1}_{[\theta-y, \theta+y]}(x) \mathbb{1}_{]0, \infty[}(y) \\ &= \frac{1}{2} e^{-y} \mathbb{1}_{]-\infty, \infty[}(x) \mathbb{1}_{[|x-\theta|, \infty[}(y) \end{aligned}$$

La loi marginale de X est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{|x-\theta|}^{\infty} e^{-y} \, dy = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$$

2) On a : $E[X] = \theta$ et $Var[X] = 2$.

Chapitre 13

Covariance. Coefficient de corrélation

RAPPELS

Soient X et Y deux variables aléatoires.

- **covariance de X et Y :**

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \quad (\text{R13.1})$$

- Si $Cov(X, Y) \neq 0$ on dit que les variables X et Y sont corrélées.
- Si X et Y sont indépendantes on a : $Cov(X, Y) = 0$, alors elles sont décorrélées (en général, la réciproque est fausse).

- **Propriétés de la covariance :**

$$\left\{ \begin{array}{l} Cov(X, X) = Var[X] \\ Cov(X, Y) = Cov(Y, X) \\ Cov(aX, bY) = ab Cov(X, Y) \\ \text{si } Y = aX + b, \text{ alors } Cov(X, Y) = a Var[X] \end{array} \right. \quad (\text{R13.2})$$

- **coefficient de corrélation entre X et Y :**

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var[X] Var[Y]}} \quad (\text{R13.3})$$

- **Propriétés du coefficient de corrélation :**

$$|\rho| \leq 1 \quad (\text{R13.4})$$

- $\hat{X}$ la meilleure approximation de X par la droite $aY + b$:

$$\hat{X} = E[X] + \rho \frac{\text{Var}[X]}{\text{Var}[Y]} (Y - E[Y]) \quad (\text{R13.5})$$

Exercice 13.1

Soit X une variable aléatoire telle que $\text{Var}[X] = \sigma^2 < \infty$; pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ de la façon suivante :

$$X_1 = X \text{ et } \forall i = 2, \dots, n \quad X_i = \theta X_{i-1}.$$

Calculer le coefficient de corrélation entre X_n et X_1 . Commenter le résultat.

On a : $X_n = \theta X_{n-1} = \theta^{n-1} X$, donc :

$$\text{Cov}(X_n, X_1) = \text{Cov}(\theta^{n-1} X, X) = \theta^{n-1} \text{Cov}(X, X) = \theta^{n-1} \text{Var}[X] = \theta^{n-1} \sigma^2.$$

D'autre part : $\text{Var}[X_n] = \text{Cov}(X_n, X_n) = \text{Cov}(\theta^{n-1} X, \theta^{n-1} X) = \theta^{2(n-1)} \sigma^2$.

$$\text{Donc : } \rho(X_n, X_1) = \frac{\text{Cov}(X_n, X_1)}{\sqrt{\text{Var}[X_n] \text{Var}[X_1]}} = \frac{\theta^{(n-1)} \sigma^2}{\sqrt{\theta^{2(n-1)} \sigma^4}} = \frac{\theta^{n-1}}{|\theta|^{n-1}}$$

$$\text{soit : } \rho(X_n, X_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k + 1 \\ \text{sgn}(\theta) & \text{si } n = 2k \end{cases}.$$

Ce résultat est naturel car, pour $Y = aX + b$ où a et b sont des constantes ($a \neq 0$), on a $\rho(X, Y) = \text{sgn}(a) = \pm 1$. Or $X_n = \theta^{n-1} X_1$, donc il est clair que si $n - 1$ est pair $\rho(X_n, X_1) = 1$ et si $n - 1$ est impair $\rho(X_n, X_1) = \text{sgn}(\theta)$.

Exercice 13.2

Soit $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ des variables aléatoires telles que pour tout $i = 1, \dots, 2n$ (avec $n \geq 2$) $\text{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$ et pour $i \neq j$ $\text{Cov}(X_i, X_j) = \theta \sigma^2$.

$$\text{Soit : } Y = \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } Z = \sum_{i=1}^{2n} X_i.$$

1) Calculer $\text{Var}[Y]$ et $\text{Var}[Z]$. En déduire des conditions sur θ .

2) Dans ces conditions, calculer le coefficient de corrélation entre Y et Z .

1) On a :

$$\begin{aligned}\text{Var}[Z] &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{2n} X_i, \sum_{j=1}^{2n} X_j\right) = \sum_{i=j} \text{Cov}(X_i, X_j) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= 2n\sigma^2 + 2n(2n-1)\text{Cov}(X_1, X_2) = 2n\sigma^2[1 + (2n-1)\theta].\end{aligned}$$

On doit donc avoir $1 + (2n-1)\theta > 0$, ce qui donne $\theta > \frac{-1}{2n-1}$. (1)

De même $\text{Var}[Y] = n\sigma^2[1 + (n-1)\theta]$; avec $1 + (n-1)\theta > 0$, ce qui donne : $\theta > \frac{-1}{n-1}$. (2)

Les conditions (1) et (2) sont réalisées si $\theta > \sup\left\{\frac{-1}{n-1}, \frac{-1}{2n-1}\right\} = \frac{-1}{2n-1}$. (3)

D'autre part, par (R13.4), pour $i \neq j$, on doit avoir $|\rho(X_i, X_j)| \leq 1$, ce qui donne :

$$\frac{|\text{Cov}(X_i, X_j)|}{\sqrt{\text{Var}[X_i]\text{Var}[X_j]}} = |\theta| \leq 1. \quad (4)$$

En regroupant les conditions (3) et (4), on obtient : $\theta \in \left[\frac{-1}{2n-1}, 1\right]$.

2) On a :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y, Z) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^{2n} X_j\right) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j + \sum_{j=n+1}^{2n} X_j\right) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right) + \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=n+1}^{2n} X_j\right) = \text{Var}[Y] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{2n} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \text{Var}[Y] + n^2 \text{Cov}(X_n, X_{2n}) = \text{Var}[Y] + n^2 \theta \sigma^2 = n\sigma^2[1 + (2n-1)\theta];\end{aligned}$$

d'où :

$$\rho(Y, Z) = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sqrt{\text{Var}[Y]\text{Var}[Z]}} = \sqrt{\frac{1 + (2n-1)\theta}{2(1 + (n-1)\theta)}}.$$

Exercice 13.3

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles, on suppose que :

- Conditionnellement à $\{Y = y\}$, la loi de X a pour densité :

$$f_X(x|y) = \frac{x+y}{1+y} e^{-x} \mathbb{I}_{]0, \infty[}(x) \quad (\forall y > 0)$$

- Conditionnellement à $\{X = x\}$, la loi de Y a pour densité :

$$f_Y(y|x) = \frac{x+y}{1+x} e^{-y} \mathbb{I}_{]0, \infty[}(y) \quad (\forall x > 0)$$

- 1) Montrer que X et Y suivent la même loi.
- 2) Calculer $E[X]$, $\text{Var}[X]$ et $E[XY]$. En déduire ρ le coefficient de corrélation entre X et Y .
- 3) Avec (R13.5). Déterminer :
 - a) $\hat{X}$ la meilleure approximation de X par la droite $aY + b$.
 - b) $e = \|\hat{X} - X\|^2$ la précision de l'approximation et l'erreur relative $\frac{\|\hat{X} - X\|}{\|X\|}$.

1) Par définition de la loi du couple (X, Y) , on a : $\forall x > 0, \forall y > 0$

$$\begin{cases} f_{X,Y}(x, y) = f_Y(y|x) f_X(x) = \frac{x+y}{1+x} e^{-y} f_X(x) \\ f_{X,Y}(x, y) = f_X(x|y) f_Y(y) = \frac{x+y}{1+y} e^{-x} f_Y(y) \end{cases} \quad (1)$$

De (1) on déduit : $\forall x > 0, \forall y > 0$

$$\frac{x+y}{1+x} e^{-y} f_X(x) = \frac{x+y}{1+y} e^{-x} f_Y(y) \quad (2)$$

Or, une fonction de x ne peut être constamment égale à une fonction de y que si ces deux fonctions sont égales à une constante que l'on notera λ . Soit, $\forall x > 0, \forall y > 0$

$$\frac{f_X(x)}{(1+x)e^{-x}} = \frac{f_Y(y)}{(1+y)e^{-y}} = \lambda \quad (3)$$

où $\lambda > 0$. Il vient donc

$$1 = \int_0^\infty f_X(x) dx = \lambda \int_0^\infty (1+x) e^{-x} dx$$

On en déduit $f_X(x) = \frac{1+x}{2} e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$. De même : $f_Y(y) = \frac{1+y}{2} e^{-y} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(y)$.

2) Du fait que X et Y suivent la même loi, on a $E[X] = E[Y]$ et $\text{Var}[X] = \text{Var}[Y]$. Or,

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^\infty x f_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty x (1+x) e^{-x} dx = \frac{3}{2} \\ E[X^2] &= \int_{-\infty}^\infty x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2 (1+x) e^{-x} dx = 4 \end{aligned}$$

d'où $\text{Var}[X] = \frac{7}{4}$. D'autre part, on a :

$$E[XY] = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty xy f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Or, $f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y|x) f_X(x) = \frac{x+y}{2} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \mathbb{1}_{]0,\infty[}(y)$; ce qui implique :

$$E[XY] = \frac{1}{2} \int_0^\infty y e^{-y} \left(\int_0^\infty x (x+y) e^{-x} dx \right) dy = 2$$

Le coefficient de corrélation entre X et Y est défini par :

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}} = \frac{E[XY] - E[X] E[Y]}{\text{Var}[X]} = -\frac{1}{7} = -0,1429$$

3.a) On a :

$$\hat{X} = E[X] + \rho \frac{\text{Var}[X]}{\text{Var}[Y]} (Y - E[Y]) = \frac{12 - Y}{7}$$

3.b) On a : $e = \text{Var}[X] (1 - \rho^2) = \frac{12}{7} = 1,7143$.

L'erreur relative est définie par : $\frac{\|\hat{X} - X\|}{\|X\|} = \sqrt{1 - \rho^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7} = 0,9897$.

Exercice 13.4

Soit U une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$ de densité $f_U(u) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(u)$. On définit les variables aléatoires X, Y, Z par : $X = \cos^3(\pi U)$, $Y = \cos^2(\pi U)$ et $Z = \cos(\pi U)$.

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-1}^1 \cos^n(\pi\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2m - 1 \\ \frac{C_{2m}^m}{4^m} & \text{si } n = 2m \end{cases}$

1) Déterminer $K_{X,Y,Z}$ la matrice variance-covariance du vecteur (X, Y, Z) .

2) Déterminer :

a) $\hat{X}$ la meilleure approximation de X par une variable aléatoire de la forme $\beta + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z$.

b) $\|\hat{X} - X\|^2$ l'erreur de l'approximation.

1) Par définition on a : $K_{X,Y,Z} = \begin{pmatrix} \text{Var}[X] & \text{Cov}(X,Y) & \text{Cov}(X,Z) \\ \text{Cov}(X,Y) & \text{Var}[Y] & \text{Cov}(Y,Z) \\ \text{Cov}(X,Z) & \text{Cov}(Y,Z) & \text{Var}[Z] \end{pmatrix}$.

On a :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^3(\pi u) f_U(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos^3(\pi u) du = 0$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^6(\pi u) f_U(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos^6(\pi u) du = \frac{5}{16}$$

d'où $\text{Var}[X] = \frac{5}{16}$. De même, on a :

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(\pi u) f_U(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos^2(\pi u) du = \frac{1}{2}$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^4(\pi u) f_U(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos^4(\pi u) du = \frac{3}{8}$$

d'où $\text{Var}[Y] = \frac{1}{8}$; et

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi u) f_U(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos(\pi u) du = 0$$

$$E[Z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(\pi u) f_U(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos^2(\pi u) du = \frac{1}{2}$$

d'où $\text{Var}[Z] = \frac{1}{2}$. D'autre part, on a :

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^5(\pi u) f_U(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos^5(\pi u) du = 0$$

$$E[XZ] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^4(\pi u) f_U(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos^4(\pi u) du = \frac{3}{8}$$

$$E[YZ] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^3(\pi u) f_U(u) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos^3(\pi u) du = 0$$

on en déduit :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] E[Y] = 0$$

$$\text{Cov}(X, Z) = E[XZ] - E[X] E[Z] = \frac{3}{8}$$

$$\text{Cov}(Y, Z) = E[YZ] - E[Y] E[Z] = 0$$

$$\text{D'où } K_{X,Y,Z} = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2.a) On a :

$$\hat{X} = E[X] + \alpha_1 (Y - E[Y]) + \alpha_2 (Z - E[Z]) = \alpha_1 \left(Y - \frac{1}{2}\right) + \alpha_2 Z$$

où (α_1, α_2) sont solutions du système : $\begin{pmatrix} \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Z) \end{pmatrix} = K_{Y,Z} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ avec

$$K_{Y,Z} = \begin{pmatrix} \text{Var}[Y] & \text{Cov}(Y, Z) \\ \text{Cov}(Y, Z) & \text{Var}[Z] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On a donc $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \frac{3}{4}$ d'où $\hat{X} = \frac{3}{4} Z$.

2.b) L'erreur de l'approximation est définie par :

$$\|\hat{X} - X\|^2 = \frac{\det(K_{X,Y,Z})}{\det(K_{Y,Z})} = \frac{1}{32} = 0,0313$$

Exercice 13.5

Soit U une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), de densité $f_U(u) = \lambda e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(u)$. On définit les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{n+1}$ par : $X_k = e^{-kU}$ ($k = 1, \dots, n+1$).

- 1) Pour $k = 1, \dots, n+1$, déterminer $E[X_k]$ et $\text{Var}[X_k]$.
- 2) Pour $i \neq j$, déterminer $\text{Cov}(X_i, X_j)$. En déduire K_n la matrice variance-covariance du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$.
- 3) On suppose $n = 4$ et $\lambda = 1$, déterminer :
 - a) $\hat{X}_{n+1}$ la meilleure approximation de X_{n+1} par une variable aléatoire de la forme $\beta + \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k$.
 - b) $\|\hat{X}_{n+1} - X_{n+1}\|^2$ l'erreur de l'approximation.

1) Pour $k = 1, \dots, n+1$, on a :

$$E[X_k] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ku} f_U(u) du = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+k)u} du = \frac{\lambda}{\lambda+k}$$

$$E[X_k^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ku} f_U(u) du = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+2k)u} du = \frac{\lambda}{\lambda+2k}$$

$$\text{d'où } \text{Var}[X_k] = \frac{\lambda k^2}{(\lambda+k)^2(\lambda+2k)}.$$

2) Pour $i \neq j$, on a :

$$E[X_i X_j] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu} e^{-ju} f_U(u) du = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+i+j)u} du = \frac{\lambda}{\lambda+i+j}$$

d'où

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j] = \frac{\lambda i j}{(\lambda+i+j)(\lambda+i)(\lambda+j)}$$

La matrice variance-covariance du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ est définie par :

$$\begin{aligned} K_n &= \begin{pmatrix} \text{Var}[X_1] & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}(X_1, X_n) & \dots & \text{Var}[X_n] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2(\lambda+2)} & \dots & \frac{n\lambda}{(\lambda+n+1)(\lambda+1)(\lambda+n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{n\lambda}{(\lambda+n+1)(\lambda+1)(\lambda+n)} & \dots & \frac{n^2\lambda}{(\lambda+n)^2(\lambda+2n)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.a) On a :

$$\hat{X}_4 = E[X_4] + \sum_{k=1}^3 \alpha_k (X_k - E[X_k])$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont solutions du système : $\begin{pmatrix} \text{Cov}(X_4, X_1) \\ \text{Cov}(X_4, X_2) \\ \text{Cov}(X_4, X_3) \end{pmatrix} = K_3 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ avec

$$K_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{40} & \frac{1}{12} & \frac{9}{112} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \text{Cov}(X_4, X_1) \\ \text{Cov}(X_4, X_2) \\ \text{Cov}(X_4, X_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} \\ \frac{8}{105} \\ \frac{3}{40} \end{pmatrix}$$

On trouve $\alpha_1 = \frac{2}{7}$, $\alpha_2 = -\frac{9}{7}$, $\alpha_3 = 2$. On en déduit

$$\hat{X}_4 = -\frac{1}{70} + \frac{2}{7} X_1 - \frac{9}{7} X_2 + 2 X_3$$

3.b) L'erreur de l'approximation est définie par :

$$\|\hat{X}_4 - X_4\|^2 = \text{Var}[X_4] - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{44100} = 2,2676 \cdot 10^{-5}$$

Exercice 13.6

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité de fonction de répartition F . Pour $n \geq 3$ et $j \in \{1, \dots, n-1\}$ on considère les variables aléatoires Y_j définies par : $Y_j = \theta_j \mathbb{1}_{\{X \leq x_j\}}$ où les points x_j vérifient $F(x_j) = \frac{j}{n}$ et $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ sont des réels.

- 1) Déterminer $E[Y_j]$ et $\text{Var}[Y_j]$.
- 2) Pour $i \neq j$, déterminer $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$.

1) Pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$, Y_j est à valeurs dans $\{0, \theta_j\}$. On a :

$$E[Y_j] = 0 P(Y_j = 0) + \theta_j P(Y_j = \theta_j) = \theta_j P(X \leq x_j) = \frac{j}{n} \theta_j.$$

On remarque que

$$E[Y_j^2] = 0^2 P(Y_j = 0) + \theta_j^2 P(Y_j = \theta_j) = \theta_j^2 P(X \leq x_j) = \frac{j}{n} \theta_j^2$$

d'où $\boxed{\text{Var}[Y_j] = \frac{j}{n} (1 - \frac{j}{n}) \theta_j^2}$

2) On a : $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = E[Y_i Y_j] - E[Y_i] E[Y_j]$. Or,

$$\begin{aligned} E[Y_i Y_j] &= \theta_i \theta_j P(Y_i = \theta_i, Y_j = \theta_j) = \theta_i \theta_j P(X \leq x_i, X \leq x_j) \\ &= \theta_i \theta_j P(X \leq \min(x_i, x_j)) = \frac{\min(i, j)}{n} \theta_i \theta_j \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \left(\frac{\min(i, j)}{n} - \frac{i j}{n^2} \right) \theta_i \theta_j = \frac{\min(i, j)}{n} \left(1 - \frac{\max(i, j)}{n} \right) \theta_i \theta_j}$$

Exercice 13.7

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre λ . On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad U_n = \sum_{i=2}^n (X_i - X_{i-1})$$

- 1) Déterminer $\text{Var}[U_n]$.

- 2) Déterminer le coefficient de corrélation entre S_n et U_n .
 3) S_n et U_n sont-ils indépendants ?

Du fait que $X_1, \dots, X_n$ suivent la même loi Exponentielle de paramètre λ , on a :

$$\forall i, E[X_i] = \frac{1}{\lambda}, \text{Var}[X_i] = \frac{1}{\lambda^2}$$

et comme $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes on a : $\forall i \neq j, \text{cov}(X_i, X_j) = 0$.

1) On peut écrire l'expression de U_n sous la forme :

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=2}^n X_i - \sum_{i=2}^n X_{i-1} = \sum_{i=2}^{n-1} X_i + X_n - X_1 - \underbrace{\sum_{i=3}^n X_{i-1}}_{j=i-1} \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} X_i + X_n - X_1 - \sum_{j=2}^{n-1} X_j = X_n - X_1 \end{aligned}$$

On en déduit : $\text{Var}[U_n] = \text{Var}[X_n - X_1] = \text{Var}[X_n] + \text{Var}[X_1] = \frac{2}{\lambda^2}$.

2) Le coefficient de corrélation entre S_n et U_n est défini par : $\rho = \frac{\text{Cov}(S_n, U_n)}{\sqrt{\text{Var}[S_n] \text{Var}[U_n]}}$.

Or,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(S_n, U_n) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, X_n - X_1\right) = \text{Cov}\left(X_1 + \sum_{i=2}^{n-1} X_i + X_n, X_n - X_1\right) \\ &= \text{Cov}(X_1, X_n - X_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \text{Cov}(X_i, X_n - X_1) + \text{Cov}(X_n, X_n - X_1) \\ &= -\text{Var}[X_1] + 0 + \text{Var}[X_n] = 0 \end{aligned}$$

On en déduit : $\rho = 0$.

3) Bien que $\text{Cov}(S_n, U_n) = 0$, S_n et U_n ne sont pas indépendantes.

Exercice 13.8

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité : $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

Pour $\theta_1 \neq \theta_2$, on définit les variables aléatoires Y_1 et Y_2 par :

$$Y_1 = \begin{cases} \theta_1 X & \text{si } X \leq 0 \\ X & \text{si } X > 0 \end{cases} \quad Y_2 = \begin{cases} \theta_2 X & \text{si } X \leq 0 \\ X & \text{si } X > 0 \end{cases}$$

1) Exprimer $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$ en fonction de θ_1 et θ_2 .

2) On suppose $\theta_1 = -\frac{1+\sqrt{8}}{3}$ et $\theta_2 = \frac{-1+\sqrt{8}}{3}$. Que constate-t-on ?

1) On peut écrire Y_1 et Y_2 sous la forme :

$$Y_1 = \theta_1 X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}(X) + X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X) \text{ et } Y_2 = \theta_2 X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}(X) + X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \text{Cov}(\theta_1 X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}, \theta_2 X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}(X)) + \text{Cov}(\theta_1 X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}, X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X)) \\ &\quad + \text{Cov}(X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X), \theta_2 X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}(X)) + \text{Cov}(X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X), X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X)) \\ &= \theta_1 \theta_2 \text{Var}[X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}] + \theta_1 \text{Cov}(X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}, X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X)) \\ &\quad + \theta_2 \text{Cov}(X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X), X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}(X)) + \text{Var}[X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X)] \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} E[X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 x e^x dx = -\frac{1}{2}, \quad E[X \mathbb{I}_{[0, \infty[}] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \frac{1}{2} \\ E[X^2 \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx = 1, \quad E[X^2 \mathbb{I}_{[0, \infty[}] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 1 \end{aligned}$$

donc : $\text{Var}[X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}(X)] = \text{Var}[X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X)] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, d'autre part,

$$\text{Cov}(X \mathbb{I}_{[0, \infty[}(X), X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}(X)) = -E[X \mathbb{I}_{]-\infty, 0]}] E[X \mathbb{I}_{[0, \infty[}] = \frac{1}{4}$$

on en déduit :

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \frac{3\theta_1 \theta_2 + \theta_1 + \theta_2 + 3}{4}$$

2) On a : $\theta_1 \theta_2 = -\frac{7}{9}$ et $\theta_1 + \theta_2 = -\frac{2}{3}$, donc pour ces valeurs particulières bien que Y_1 et Y_2 ne soient indépendantes, on a : $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$.

Exercice 13.9

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$. On défi-

nit la variable aléatoire Y par : $Y = \sum_{i=1}^n a_i X^{2i-1}$; où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels.

Déterminer ρ le coefficient de corrélation entre X et Y .

Le coefficient de corrélation entre X et Y est défini par : $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}}$.

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$E[X^k] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^k dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ \frac{1}{k+1} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

On en déduit : $E[X] = 0$, $\text{Var}[X] = E[X^2] = \frac{1}{3}$, $E[Y] = \sum_{i=1}^n a_i E[X^{2i-1}] = 0$,

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Y] &= \text{Cov}(Y, Y) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n a_i X^{2i-1}, \sum_{j=1}^n a_j X^{2j-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X^{2i-1}, X^{2j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{cov}(X^{2i-1}, X^{2i-1}) + \sum_{i \neq j}^n a_i a_j \text{cov}(X^{2i-1}, X^{2j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}[X^{2i-1}] + \sum_{i \neq j}^n a_i a_j (E[X^{2i+2j-2}] - E[X^{2i-1}] E[X^{2j-1}]) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i^2 E[X^{4i-2}] + \sum_{i \neq j}^n a_i a_j E[X^{2i+2j-2}] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{4i-1} + \sum_{i \neq j}^n \frac{a_i a_j}{2i+2j-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}\left(X, \sum_{i=1}^n a_i X^{2i-1}\right) = \sum_{i=1}^n a_i \text{cov}(X, X^{2i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i (E[X^{2i}] - E[X] E[X^{2i-1}]) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2i+1}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\rho = \frac{\sqrt{3} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2i+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{4i-1} + \sum_{i \neq j}^n \frac{a_i a_j}{2i+2j-1}}} = \frac{\sqrt{3} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2i+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{4i-1} + 2 \sum_{i < j}^n \frac{a_i a_j}{2i+2j-1}}}$$

Exercice 13.10 (Modèle Auto-Régressif d'ordre 1 AR(1))

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires vérifiant la relation : $X_i = \alpha X_{i-1} + \epsilon_i$, où $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et α est un réel appartenant à $[-1, 1]$.

Pour $i \neq j$, calculer $\rho_{i,j}$ le coefficient de corrélation entre X_i et X_j .

On remarque que $X_1 = \epsilon_1$, $X_2 = \alpha X_1 + \epsilon_2$, On en déduit : $X_i = \sum_{k=1}^i \alpha^{i-k} \epsilon_k$

Du fait que $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ sont indépendantes on a :

$$\begin{aligned}
\text{Var}[X_i] &= \sum_{k=1}^i \text{Var}[\alpha^{i-k} \epsilon_k] = \sum_{k=1}^i \alpha^{2i-2k} \text{Var}[\epsilon_k] \\
&= \sigma^2 \sum_{k=1}^i \alpha^{2i-2k} = \frac{1 - \alpha^{2i}}{1 - \alpha^2} \sigma^2
\end{aligned}$$

Pour $i \neq j$ cherchons $Cov(X_i, X_j)$. On a :

$$Cov(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^i \sum_{r=1}^j \alpha^{i-k} \alpha^{j-r} Cov(\epsilon_k, \epsilon_r)$$

du fait que $Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i)$, il suffit qu'on regarde le cas $i < j$. Or, si $i < j$, on a :

$$\sum_{k=1}^i \sum_{r=1}^j = \sum_{k=1}^i \sum_{r=1}^i + \sum_{k=1}^i \sum_{r=i+1}^j = \sum_{k=r} + \sum_{k \neq r} + \sum_{k=1}^i \sum_{r=i+1}^j$$

On en déduit :

$$Cov(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^i \alpha^{i+j-2k} Cov(\epsilon_k, \epsilon_k) = \frac{\alpha^{j-i}(1 - \alpha^{2i})}{1 - \alpha^2} \sigma^2$$

Notons : $m = \min\{i, j\}$ et $M = \max\{i, j\}$, il vient donc :

$$Cov(X_i, X_j) = \frac{\alpha^{M-m}(1 - \alpha^{2m})}{1 - \alpha^2} \sigma^2$$

Pour $i \neq j$ cherchons maintenant $\rho_{i,j}$ le coefficient de corrélation entre X_i et X_j ,

$$\rho_{i,j} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var[X_i]Var[X_j]}} = \frac{\alpha^{M-m}(1 - \alpha^{2m})}{\sqrt{(1 - \alpha^{2i})(1 - \alpha^{2j})}} = \alpha^{M-m} \sqrt{\frac{1 - \alpha^{2m}}{1 - \alpha^{2M}}}$$

On remarque que si $\alpha = \pm 1$ on a : $Var[X_i] = i \sigma^2$.

D'autre part, si $\alpha = 1$, $Cov(X_i, X_j) = \min\{i, j\} \sigma^2 = m \sigma^2$.

Si $\alpha = -1$,

$$Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} -\min\{i, j\} \sigma^2 & \text{si } i + j \text{ impair} \\ \min\{i, j\} \sigma^2 & \text{si } i + j \text{ pair} \end{cases} = \begin{cases} -m \sigma^2 & \text{si } m + M \text{ impair} \\ m \sigma^2 & \text{si } m + M \text{ pair} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{M}} & \text{si } \alpha = 1 \\ -\sqrt{\frac{m}{M}} & \text{si } \alpha = -1 \text{ et } m + M \text{ impair} \\ \sqrt{\frac{m}{M}} & \text{si } \alpha = -1 \text{ et } m + M \text{ pair} \end{cases}$$

Exercices d'entraînement

13.11 Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire réelles de densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{8} (y^2 - x^2) e^{-y} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(y) \mathbb{1}_{[-y, y]}(x)$$

- 1) X et Y sont-elles indépendantes ?
- 2) Déterminer les lois marginales de X et de Y .
- 3) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Que remarquez-vous ?

13.12 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x) \quad (\theta > 0)$$

- 1) Pour $n \geq 1$, déterminer $E[X_n]$ et $\text{Var}[X_n]$.
- 2) On pose : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Pour $k \neq m$, déterminer $\text{Cov}(\bar{X}_k, \bar{X}_m)$.

13.13 Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire réelles telles que : $E[X] = 1$, $E[Y] = -1$, $\text{Var}[X] = 1 + \theta^2$, $\text{Var}[Y] = 1 + \theta^2$ et $\text{Cov}(X, Y) = \theta$.

- 1) Exprimer $E[XY]$ en fonction de θ .
- 2) Déterminer ρ le coefficient de corrélation entre X et Y .
- 3) Déterminer :
 - a) $\hat{X}$ la meilleure approximation de X par la droite $aY + b$.
 - b) $e(\theta) = \|\hat{X} - X\|^2$ la précision de l'approximation.

Réponses

13.11 1) X et Y ne sont pas indépendantes, car elles sont liées par la condition $|X| \leq Y$.

2) On a : $f_X(x) = \frac{1}{4} (1 + |x|) e^{-|x|}$ et $f_Y(y) = \frac{1}{6} y^3 e^{-y} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(y)$.

3) On a : $E[X] = 0$, $E[Y] = 4$ et $E[XY] = 0$, d'où $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Bien que X et Y ne soient pas indépendantes on a : $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

13.12 1) $E[X_n] = \theta$, $\text{Var}[X_n] = \theta^2$.

2) $\text{Cov}(\bar{X}_k, \bar{X}_m) = \frac{\theta^2}{\max(k, m)}$.

13.13 1) Par définition on a : $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] E[Y]$, d'où

$$E[XY] = \text{Cov}(X, Y) + E[X] E[Y] = \theta - 1$$

2) Par définition on a : $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}} = \frac{\theta}{1 + \theta^2}$.

3.a) On a :

$$\hat{X} = E[X] + \rho \frac{\text{Var}[X]}{\text{Var}[Y]} (Y - E[Y]) = 1 + \frac{\theta}{1 + \theta^2} (Y + 1)$$

3.b) On a : $e(\theta) = \text{Var}[X] (1 - \rho^2) = \frac{(\theta^2 + \theta + 1)(\theta^2 - \theta + 1)}{1 + \theta^2}$.

Chapitre 14

Vecteurs gaussiens

RAPPELS

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur ligne aléatoire et ${}^t\mathbf{X}$ son transposé.

- On définit le vecteur moyenne de $\mathbf{X}$ par :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_k] \end{pmatrix} \quad (\text{R14.1})$$

- On définit la matrice variance-covariance de $\mathbf{X}$ par :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{X}} = E[(\mathbf{X} - \mathbf{M}_{\mathbf{X}})({}^t(\mathbf{X} - \mathbf{M}_{\mathbf{X}}))] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{1k} & \sigma_{2k} & \dots & \sigma_k^2 \end{pmatrix} \quad (\text{R14.2})$$

où $\sigma_i^2 = \text{Var}[X_i]$ et pour $i \neq j$, $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$.

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire. $\mathbf{X}$ est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire Normale. La loi du vecteur aléatoire gaussien $\mathbf{X}$ est entièrement déterminée par la donnée de $\mathbf{M}_\mathbf{X}$ et de $\mathbf{V}_\mathbf{X}$. Pour tout vecteur aléatoire gaussien $\mathbf{X}$, on note $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{M}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{X})$.

Les composantes d'un vecteur aléatoire gaussien $\mathbf{X}$ sont des variables aléatoires normales : $\forall i = 1, \dots, k$, X_i suit une loi normale $\mathcal{N}(E[X_i], \text{Var}[X_i])$.

Soit $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{M}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{X})$.

- La loi de $\mathbf{X}$ admet une densité $f_\mathbf{X}$ si et seulement si $\det \mathbf{V}_\mathbf{X} \neq 0$, et on a :

$$f_\mathbf{X}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k (\det \mathbf{V}_\mathbf{X})^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mathbf{M}_\mathbf{X}) \mathbf{V}_\mathbf{X}^{-1} (x - \mathbf{M}_\mathbf{X}) \right) \quad (\text{R14.3})$$

où x est un vecteur ligne.

- Les composantes de $\mathbf{X}$ sont indépendantes si et seulement si $\mathbf{V}_\mathbf{X}$ est diagonale.
- Soit $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}$, avec $\mathbf{A}$ une matrice $p \times k$, $\mathbf{B}$ un vecteur $p \times 1$. Alors, $\mathbf{Y}$ est un vecteur gaussien $\mathcal{N}_p(\mathbf{M}_\mathbf{Y}, \mathbf{V}_\mathbf{Y})$ avec :

$$\mathbf{M}_\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{M}_\mathbf{X} + \mathbf{B} \text{ et } \mathbf{V}_\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{V}_\mathbf{X} \mathbf{A}^t \quad (\text{R14.4})$$

Exercice 14.1

Soit $\mathbb{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien, on suppose $M_\mathbb{X} = E[\mathbb{X}] = 0$ et

$$K_\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 4 & c \\ b & c & 9 \end{pmatrix}.$$

- D'après les propriétés du coefficient de corrélation, trouver des conditions que doivent vérifier (a, b, c) pour que $K_\mathbb{X}$ soit une matrice de covariance.

$$2) \text{ On définit } \mathbb{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3) \text{ par } \begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_2 - X_1 \\ Y_3 = X_3 - X_2 \end{cases}$$

- Quelle est la loi de $\mathbb{Y}$?
- Peut-on trouver a, b, c de sorte que Y_1, Y_2 et Y_3 soient indépendantes ?
- On suppose ces conditions réalisées, calculer $E[X_1 X_2]$, $E[X_1 X_3]$, $E[X_2 X_3]$.

- On doit avoir $\forall i \neq j$, $\left| \frac{\text{Cov}(X_i X_j)}{\sqrt{\text{Var}[X_i] \text{Var}[X_j]}} \right| \leq 1$ ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{a}{\sqrt{1 \times 4}} \right| \leq 1 \\ \left| \frac{b}{\sqrt{1 \times 9}} \right| \leq 1 \\ \left| \frac{c}{\sqrt{4 \times 9}} \right| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a| \leq 2 \\ |b| \leq 3 \\ |c| \leq 6 \end{array} \right.$$

2) a) On a $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\mathbb{X}$, avec $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; donc, $\mathbb{Y}$ est un vecteur gaussien. Sa moyenne

est $M_{\mathbb{Y}} = \mathbb{A}M_{\mathbb{X}} = 0$ et sa matrice de covariance est $K_{\mathbb{Y}} = \mathbb{A}K_{\mathbb{X}}^t\mathbb{A}$, d'après (R14.4),

$$K_{\mathbb{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & b-a \\ a-1 & 5-2a & a-b+c-4 \\ b-a & a-b+c-4 & 13-2c \end{pmatrix}.$$

b) Les variables gaussiennes Y_1 , Y_2 et Y_3 sont indépendantes si et seulement si $\forall i \neq j$ $\text{Cov}(X_i, Y_j) = 0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} a-1=0 \\ b-a=0 \\ a-b+c-4=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=4 \end{array} \right.,$$

d'où :

$$K_{\mathbb{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que Y_1 suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, Y_2 suit la loi $\mathcal{N}(0,3)$, Y_3 suit la loi $\mathcal{N}(0,5)$.

c) On a : $\left\{ \begin{array}{l} X_1 = Y_1 \\ X_2 = Y_1 + Y_2 \\ X_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3 \end{array} \right.$, donc $\left\{ \begin{array}{l} X_1 X_2 = Y_1^2 + Y_1 Y_2 \\ X_1 X_3 = Y_1^2 + Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 \\ X_2 X_3 = Y_1^2 + Y_2^2 + 2Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 \end{array} \right.$

$$E[X_1 X_2] = E[Y_1^2] = 1, \quad E[X_1 X_3] = E[Y_1^2] = 1, \quad E[X_2 X_3] = E[Y_1^2] + E[Y_2^2] = 4.$$

Exercice 14.2

1) Soit Z une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Calculer $E[Z^4]$ et $\text{Var}[Z^2]$.

2) Soit $\mathbb{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de moyenne $M_{\mathbb{X}} = 0$ et de matrice de covariance :

$$K_{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $\mathbb{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par $\mathbb{Y} = A\mathbb{X}$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \alpha & 2\alpha & \alpha \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha > 0.$$

a) Déterminer α de sorte que $\text{Var}[Y_2] = \text{Var}[Y_3]$.

Sous ces conditions, que vaut le produit tAA ?

b) On suppose que les conditions de la question 2) a) sont réalisées et l'on pose :

$$Q(\mathbb{X}) = 4X_1^2 + 4X_2^2 + 4X_3^2 + 2X_1X_2 - 2X_1X_3 + 2X_2X_3.$$

Calculer $E[Q(\mathbb{X})]$ et $\text{Var}[Q(\mathbb{X})]$.

1) On a :

$$E[Z^4] = \int_{-\infty}^{\infty} z^4 f_Z(z) dz = 2 \int_0^{\infty} z^4 f_Z(z) dz = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^4 \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz.$$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{z^2}{2\sigma^2}$, on obtient :

$$E[Z^4] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (2\sigma^2 t)^2 e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{3/2} e^{-t} dt = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

$$\text{Or : } \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \text{ d'où } E[Z^4] = 3\sigma^4.$$

$$\text{Donc : } \text{Var}[Z^2] = E[Z^4] - (E[Z^2])^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4.$$

2) a) $\mathbb{Y}$ est un vecteur gaussien de moyenne $M_{\mathbb{Y}} = 0$ et de matrice de covariance :

$$K_{\mathbb{Y}} = AK_{\mathbb{X}}{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 30\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

La condition $\text{Var}[Y_2] = \text{Var}[Y_3]$ donne $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Donc, si $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, on a ${}^tAA = I_3$ et donc ${}^tA = A^{-1}$.

b) On a : $Q(\mathbb{X}) = {}^t\mathbb{X}K_{\mathbb{X}}\mathbb{X}$. Comme $\mathbb{X} = A^{-1}\mathbb{Y} = {}^tA\mathbb{Y}$, on en déduit que $Q(\mathbb{X}) = {}^t({}^tA\mathbb{Y})K_{\mathbb{X}}({}^tA\mathbb{Y}) = {}^t\mathbb{Y}AK_{\mathbb{X}}{}^tA\mathbb{Y} = {}^t\mathbb{Y}K_{\mathbb{Y}}\mathbb{Y} = 2Y_1^2 + 5Y_2^2 + 5Y_3^2$.

Or, Y_1 suit une loi $\mathcal{N}(0,2)$, Y_2 suit une loi $\mathcal{N}(0,5)$ et Y_3 suit une loi $\mathcal{N}(0,5)$; donc :

$$E[Y_1] = E[Y_2] = E[Y_3] = 0 \text{ et } E[Y_1^2] = 2, \quad E[Y_2^2] = E[Y_3^2] = 5.$$

Alors, $E[Q(\mathbb{X})] = 54$.

Comme Y_1 , Y_2 et Y_3 sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} \text{Var}[Q(\mathbb{X})] &= \text{Var}[2Y_1^2] + \text{Var}[5Y_2^2] + \text{Var}[5Y_3^2] \\ &= 4\text{Var}[Y_1^2] + 25\text{Var}[Y_2^2] + 25\text{Var}[Y_3^2] \text{ donc, d'après 1) :} \\ \text{Var}[Q(\mathbb{X})] &= 2(16 + 625 + 625) = 2\,532. \end{aligned}$$

Exercice 14.3

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$ de

$$\text{densité : } f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right).$$

Soit K une variable aléatoire, indépendante de $X_1, X_2, \dots, X_n$, à valeurs dans $\{1, \dots, n-1\}$, de loi $p_k = P(K = k)$.

Pour $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta$, on définit la variable aléatoire Y par :

$$Y = \sum_{i=1}^K \ln\left(\frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta)}\right) + \sum_{i=K+1}^n \ln\left(\frac{f(X_i, \theta_2)}{f(X_i, \theta)}\right).$$

1) Déterminer la loi de Y .

2) On suppose : $\theta_1 = \theta + \frac{u}{\sqrt{n}}$ et $\theta_2 = \theta - \frac{u}{\sqrt{n}}$ ($u > 0$).

Que constate-t-on ?

1) L'expression de Y s'écrit sous la forme :

$$Y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K [(X_i - \theta)^2 - (X_i - \theta_1)^2] + \frac{1}{2} \sum_{i=K+1}^n [(X_i - \theta)^2 - (X_i - \theta_2)^2]$$

$$\text{soit : } Y = (\theta_1 - \theta) \sum_{i=1}^K \left(X_i - \frac{\theta_1 + \theta}{2}\right) + (\theta_2 - \theta) \sum_{i=K+1}^n \left(X_i - \frac{\theta_2 + \theta}{2}\right).$$

On remarque que, conditionnellement à $\{K = k\}$, les variables

$$(\theta_1 - \theta) \sum_{i=1}^K \left(X_i - \frac{\theta_1 + \theta}{2}\right) \text{ et } (\theta_2 - \theta) \sum_{i=K+1}^n \left(X_i - \frac{\theta_2 + \theta}{2}\right) \text{ sont indépendantes.}$$

Conditionnellement à $\{K = k\}$, pour $i = 1, \dots, k$, X_i suit une loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$, donc $X_i - \frac{\theta_1 + \theta}{2}$

suit une loi $\mathcal{N}\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta}{2}, 1\right) \equiv \mathcal{N}\left(\frac{\theta - \theta_1}{2}, 1\right)$; du fait que $X_1, \dots, X_k$ sont indépendantes,

$$\sum_{i=1}^k \left(X_i - \frac{\theta_1 + \theta}{2}\right) \text{ suit une loi } \mathcal{N}\left(\frac{k}{2}(\theta - \theta_1), k\right) \text{ et } (\theta_1 - \theta) \sum_{i=1}^k \left(X_i - \frac{\theta_1 + \theta}{2}\right) \text{ suit une loi } \\ (\theta_1 - \theta) \mathcal{N}\left(\frac{k}{2}(\theta - \theta_1), k\right) \equiv \mathcal{N}\left(-\frac{k}{2}(\theta_1 - \theta)^2, k(\theta_1 - \theta)^2\right).$$

De même,

$$(\theta_2 - \theta) \sum_{i=k+1}^n \left(X_i - \frac{\theta_2 + \theta}{2}\right) \text{ suit une loi } \mathcal{N}\left(-\frac{(n-k)}{2}(\theta_2 - \theta)^2, (n-k)(\theta_2 - \theta)^2\right).$$

De ce qui précède, on déduit que, conditionnellement à $\{K = k\}$, Y suit une loi

$$\mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2) \text{ avec } \mu_k = -\frac{1}{2}[k(\theta_1 - \theta)^2 + (n-k)(\theta_2 - \theta)^2] \text{ et}$$

$$\sigma_k^2 = k(\theta_1 - \theta)^2 + (n-k)(\theta_2 - \theta)^2.$$

Donc la loi de Y conditionnellement à $\{K = k\}$ est donnée par : $\forall y \in \mathbb{R}$

$$P(Y \leq y | K = k) = \Phi\left(\frac{y - \mu_k}{\sigma_k}\right), \text{ où } \Phi \text{ désigne la fonction de répartition de la loi } \mathcal{N}(0, 1).$$

D'où la loi de Y :

$$P(Y \leq y) = \sum_{k=1}^{n-1} P(Y = y | K = k) P(K = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \Phi\left(\frac{y - \mu_k}{\sigma_k}\right) p_k.$$

2) Si $\theta_1 = \theta + \frac{u}{\sqrt{n}}$ et $\theta_2 = \theta - \frac{u}{\sqrt{n}}$, on a $\mu_k = -\frac{u^2}{2}$ et $\sigma_k^2 = u^2$, ce qui signifie que Y et

K sont indépendantes et que Y suit une loi $\mathcal{N}\left(-\frac{u^2}{2}, u^2\right)$; on constate que la loi de Y ne dépend pas de n .

Exercice 14.4

On désigne par : $\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ et $\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$, la densité et la fonction de répartition

de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ et $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$.

Dans cet exercice, pour des commodités de calcul, au lieu de travailler avec la fonction caractéristique φ_X , on utilise :

$$\psi_X(t) = \varphi_X\left(-\frac{t}{2i\pi}\right) = E[\exp(tX)].$$

Partie I

- 1) Soit Y_1 une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$; déterminer ψ_{Y_1} .
- 2) Soit Y_2 une variable aléatoire de loi χ_n^2 (loi du chi-deux à n degrés de liberté)

de densité $f_{Y_2}(y) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \mathbb{I}_{]0, \infty[}(y)$. Déterminer ψ_{Y_2} .

- 3) Soit Y_3 une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$; déterminer la loi de Y_3^2 .
- 4) Soit $V_1, V_2, \dots, V_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On pose : $V = \sum_{i=1}^n V_i^2$. Déterminer la loi de V .
- 5) On dit qu'une variable aléatoire U suit une loi T_n (loi de Student à n degrés de liberté) si la densité de la loi de U est donnée par :

$$f_U(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Soient Y_3 et Y_4 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0,1)$ et χ_n^2 . Montrer que $U = \frac{Y_3}{\sqrt{\frac{Y_4}{n}}}$ suit une loi T_n .

Partie II

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

On pose : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$.

- 1) Montrer que $\bar{X}_n$ et S_n^2 sont indépendantes.
- 2) Déterminer les lois de $\bar{X}_n$, $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ et $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{S_n}$.
- 3) Montrer que S_n^2 converge en moyenne quadratique vers σ^2 .

Partie I

1) On a :

$$\begin{aligned}\psi_{Y_1}(t) &= E[\exp(tY_1)] = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} \varphi\left(\frac{y-\mu}{\tau}\right) dy = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ty - \frac{(y-\mu)^2}{2\tau^2}\right) dy \\ &= \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\tau^2 t^2\right\} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(y - (\mu + \tau^2 t))^2\right\} dy \\ &= \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\tau^2 t^2\right\}.\end{aligned}$$

2) On a :

$$\psi_{Y_2}(t) = E[\exp(tY_2)] = \int_0^{\infty} e^{ty} f_{Y_2}(y) dy = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{\frac{n}{2}-1} \exp\left\{-\frac{1-2t}{2}y\right\} dy.$$

En faisant le changement de variable $\lambda = \frac{1-2t}{2}y$, on obtient :

$$\forall t < \frac{1}{2}, \quad \psi_{Y_2}(t) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{2}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} \lambda^{\frac{n}{2}-1} e^{-\lambda} d\lambda = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}.$$

3) La loi de Y_3^2 est donnée par : $\forall t > 0$

$$F_{Y_3^2}(t) = P(Y_3^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq Y_3 \leq \sqrt{t}) = \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t}) = 2\Phi(\sqrt{t}) - 1.$$

D'où la densité de la loi de Y_3^2 :

$$f_{Y_3^2}(t) = (F_{Y_3^2}(t))' = \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi(\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2}} \mathbb{I}_{]0, \infty[}(t)$$

donc Y_3^2 suit une loi χ_1^2 .

4) D'après la question 3), pour tout $i = 1, \dots, n$, V_i^2 suit une loi χ_1^2 , donc

$\psi_{V_i^2} = (t)(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$. D'autre part, comme $V_1, V_2, \dots, V_n$ sont indépendantes et suivent la

même loi, on a :

$$\begin{aligned}\psi_V(t) &= E[\exp(tV)] = E\left[\exp\left(t \sum_{i=1}^n V_i^2\right)\right] = E\left[\prod_{i=1}^n \exp(tV_i^2)\right] \\ &= \prod_{i=1}^n E[\exp(tV_i^2)] = \prod_{i=1}^n \psi_{V_i^2}(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

donc, V suit une loi χ_n^2 .

5) Comme Y_3 et Y_4 sont indépendantes, la densité de la loi du couple (Y_3, Y_4) est donnée par :

$$f_{Y_3, Y_4}(y_3, y_4) = f_{Y_3}(y_3)f_{Y_4}(y_4) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \varphi(y_3) y_4^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y_4}{2}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(y_3) \mathbb{I}_{]0, \infty[}(y_4).$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} u = \frac{y_3}{\sqrt{\frac{y_4}{n}}} \\ v = \frac{y_4}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_3 = u\sqrt{v} \\ y_4 = nv \end{cases}.$$

La densité de la loi du couple (U, V) est donnée par :

$$f_{U, V}(u, v) = |j(u, v)| f_{Y_3, Y_4}(u\sqrt{v}, nv) \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(u) \mathbb{I}_{]0, \infty[}(v)$$

$$\text{avec : } j(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial u} & \frac{\partial y_3}{\partial v} \\ \frac{\partial y_4}{\partial u} & \frac{\partial y_4}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{v} & \frac{u}{2\sqrt{v}} \\ 0 & n \end{vmatrix} = n\sqrt{v}, \text{ d'où :}$$

$$f_{U, V}(u, v) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} v^{\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{nv}{2}\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(u) \mathbb{I}_{]0, \infty[}(v).$$

La loi marginale de U est donnée par : $f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U, V}(u, v) dv$;

soit : $\forall u \in \mathbb{R}$

$$f_U(u) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} v^{\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{nv}{2}\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)\right\} dv.$$

En faisant le changement de variable $\lambda = \frac{nv}{2}\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)$, on obtient :

$$f_U(u) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^\infty \lambda^{\frac{n-1}{2}} e^{-\lambda} d\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Partie II

1) Posons $\mathbb{X} = {}^t(X_1, \dots, X_n)$, où $\forall i = 1, \dots, n$, X_i suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$; alors, pour $t = {}^t(t_1, \dots, t_n)$,

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbb{X}}(t) &= E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n t_i X_i\right)\right] = E\left[\prod_{i=1}^n \exp(t_i X_i)\right] = \prod_{i=1}^n E[\exp(t_i X_i)] \\ &= \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t_i) = \exp\left\{m \sum_{i=1}^n t_i + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2\right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Posons : $\mathbb{V} = \bar{X}_n$ et $\mathbb{U} = {}^t(U_1, \dots, U_n) = {}^t(X_1 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n)$;

alors, pour $h = (s_1, \dots, s_n, \lambda)$, la transformée de la loi du vecteur $(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbb{U}, \mathbb{V}}(h) &= \psi_{\mathbb{U}, \mathbb{V}}(s_1, \dots, s_n, \lambda) = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n s_i U_i + \lambda \mathbb{V}\right)\right] \\ &= E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n s_i (X_i - \mathbb{V}) + \lambda \mathbb{V}\right)\right] = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n s_i X_i + \left(\lambda - \sum_{i=1}^n s_i\right) \mathbb{V}\right)\right] \end{aligned}$$

si l'on note $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i$; on a : $\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s}) = 0$, il vient donc :

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbb{U}, \mathbb{V}}(s_1, \dots, s_n, \lambda) &= E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n s_i X_i + (\lambda - n\bar{s}) \bar{X}_n\right)\right] \\ &= E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n s_i X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\lambda - n\bar{s}) X_i\right)\right] = E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{n} - \bar{s} + s_i\right) X_i\right)\right]. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (1), avec $t_i = \frac{\lambda}{n} - \bar{s} + s_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbb{U}, \mathbb{V}}(s_1, \dots, s_n, \lambda) &= \psi_{\mathbb{X}}\left(\frac{\lambda}{n} - \bar{s} + s_1, \dots, \frac{\lambda}{n} - \bar{s} + s_n\right) \\ &= \exp\left\{m \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{n} - \bar{s} + s_i\right) + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{n} - \bar{s} + s_i\right)^2\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ m\lambda + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\lambda^2}{2} + \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2 \right) \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2 \right\} \exp \left\{ m\lambda + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{n} \lambda^2 \right\} = \psi_{\mathbb{U}, \mathbb{V}}(s_1, \dots, s_n, 0) \psi_{\mathbb{U}, \mathbb{V}}(0, \dots, 0, \lambda).
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V} = \bar{X}_n$ sont indépendantes et en particulier :

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbb{U}}(s_1, \dots, s_n) &= \psi_{\mathbb{U}, \mathbb{V}}(s_1, \dots, s_n, 0) = \exp \left\{ \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2 \right\} \\
\psi_{\bar{X}_n}(\lambda) &= \psi_{\mathbb{V}}(\lambda) = \psi_{\mathbb{U}, \mathbb{V}}(0, \dots, 0, \lambda) = \exp \left\{ m\lambda + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{n} \lambda^2 \right\}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Du fait que $\mathbb{U}$ et $\bar{X}_n$ sont indépendantes, on déduit que, pour tout $i = 1, \dots, n$, $U_i = X_i - \bar{X}_n$ et $\bar{X}_n$ sont indépendantes et donc $U_i^2 = (X_i - \bar{X}_n)^2$ et $\bar{X}_n$ sont indépendantes. Donc $\bar{X}_n$ est indépendante de toute combinaison de $(X_i - \bar{X}_n)^2$, en particulier de

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

2) Par la relation (2), on a $\psi_{\bar{X}_n}(\lambda) = \exp \left\{ m\lambda + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{n} \lambda^2 \right\}$; donc $\bar{X}_n$ suit une loi

$$\mathcal{N} \left(m, \frac{\sigma^2}{n} \right).$$

Donc $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et d'après I.3), $W = \frac{n(\bar{X}_n - m)^2}{\sigma^2}$ suit une loi χ_1^2 .

Pour $i = 1, \dots, n$, posons $Z_i = \frac{X_i - m}{\sigma}$; alors $Z_1, \dots, Z_n$ sont indépendantes et suivent une

loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et donc $Z = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ suit une loi χ_n^2 .

Soit : $Y = \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2$, on a alors : $Z = W + Y$; en effet :

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m + m - \bar{X}_n)^2 \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - \frac{n(\bar{X}_n - m)^2}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Comme $\bar{X}_n$ et S_n^2 sont indépendantes, on déduit que Y et W sont indépendantes et l'on a $\psi_Z(t) = \psi_{W+Y}(t) = \psi_W(t)\psi_Y(t)$; d'où :

$$\psi_Y(t) = \frac{\psi_Z(t)}{\psi_W(t)} = \frac{(1-2t)^{\frac{-n}{2}}}{(1-2t)^{\frac{-1}{2}}} = (1-2t)^{\frac{n-1}{2}}.$$

On en déduit que : $Y = \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2$ suit une loi χ_{n-1}^2 .

$$\text{Par ailleurs : } \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{S_n} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - m)}{\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \frac{1}{n-1}}} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - m)}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}};$$

donc, d'après I.5), $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{S_n}$ suit une loi T_{n-1} .

3) Comme $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2$ suit une loi χ_{n-1}^2 , on a $E\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2\right] = n-1$ donc $E[S_n^2] = \sigma^2$ et

$\text{Var}\left[\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2\right] = 2(n-1)$ et $\text{Var}[S_n^2] = \frac{2\sigma^4}{n-1}$; d'autre part, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(S_n^2 - \sigma^2)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[S_n^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sigma^4}{n-1} = 0$$

ce qui montre que $S_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{m.q.}} \sigma^2$.

Exercices d'entraînement

14.5 Soit $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien $\mathcal{N}_3(\mathbb{M}_{\mathbb{X}}, \mathbf{K}_{\mathbb{X}})$ avec $\mathbb{M}_{\mathbb{X}} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{K}_{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 \\ -2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ par $\mathbb{Y} = \mathbf{A} \mathbb{X}$ avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & -2\alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$ où

$\alpha > 0, \beta > 0$ et $\gamma > 0$.

1) Montrer que Y_1, Y_2 et Y_3 sont indépendantes.

2) Dans la suite on pose : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

a) Calculer le produit $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$. ($^t \mathbf{A}$ désigne la transposée de $\mathbf{A}$).

b) On pose : $Q(\mathbb{X}) = {}^t \mathbb{X} \mathbf{K}_{\mathbb{X}} \mathbb{X}$. Calculer $E[Q(\mathbb{X})]$ et $\text{Var}[Q(\mathbb{X})]$.

14.6 Soit $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien $\mathcal{N}_4(\mathbb{M}_{\mathbb{X}}, \mathbf{K}_{\mathbb{X}})$ avec $\mathbb{M}_{\mathbb{X}} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{K}_{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (\theta > \frac{1}{2})$$

On définit le vecteur $\mathbb{Y} = {}^t(Y_1, Y_2)$ par :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - X_2 + 2X_4 \\ Y_2 = 3X_1 - 2X_2 - \theta X_3 + X_4 \end{cases}$$

1) Déterminer la loi de $\mathbb{Y}$.

2) Déterminer θ_0 de sorte que Y_1 et Y_2 soient indépendantes.

14.7 Soit $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien $\mathcal{N}_4(\mathbb{M}_{\mathbb{X}}, \mathbf{K}_{\mathbb{X}})$ avec $\mathbb{M}_{\mathbb{X}} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{K}_{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \theta & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \theta & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \theta \end{pmatrix} \quad (\theta > 3)$$

On définit le vecteur $\mathbb{Y} = {}^t(Y_1, Y_2)$ par :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - X_2 + 2X_4 \\ Y_2 = 3X_1 - 2X_2 - \theta X_3 + X_4 \end{cases}$$

1) Déterminer la loi de $\mathbb{Y}$.

2) Déterminer θ_0 de sorte que Y_1 et Y_2 soient indépendantes.

3) On suppose $\theta = 5$. Déterminer la loi conditionnelle de Y_1 sachant $\{Y_2 = y_2\}$ et puis calculer $E[Y_1 | Y_2]$ et $\text{Var}[Y_1 | Y_2]$.

Réponses

14.5 1) $\mathbb{Y}$ est un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_3(\mathbb{M}_{\mathbb{Y}}, \mathbf{K}_{\mathbb{Y}})$ où $\mathbb{M}_{\mathbb{Y}} = \mathbf{A} \mathbb{M}_{\mathbb{X}} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{K}_{\mathbb{Y}} = \begin{pmatrix} 18\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 27\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 22\gamma^2 \end{pmatrix}$$

2.a) On a : $\mathbf{A}^t \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

2.b) On a : $Q(\mathbb{X}) = {}^t \mathbb{Y} \mathbf{K}_{\mathbb{Y}} \mathbb{Y} = 3Y_1^2 + 9Y_2^2 + 11Y_3^2$.

$E[Q(\mathbb{X})] = 211$ et $\text{Var}[Q(\mathbb{X})] = 9 \text{Var}[Y_1^2] + 81 \text{Var}[Y_2^2] + 121 \text{Var}[Y_3^2] = 42566$.

14.6 1) $\mathbb{Y}$ est un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_2(\mathbb{M}_{\mathbb{Y}}, \mathbf{K}_{\mathbb{Y}})$ où $\mathbb{M}_{\mathbb{Y}} = \mathbf{A} \mathbb{M}_{\mathbb{X}} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{K}_{\mathbb{Y}} = \begin{pmatrix} 12 + \theta & 4 - 2\theta \\ 4 - 2\theta & 3\theta^2 + 5\theta - 2 \end{pmatrix}$$

2) Y_1 et Y_2 sont indépendantes si $4\theta_0 - 2 = 0$, soit $\theta_0 = 2$.

14.7 1) $\mathbb{Y}$ est un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_2(\mathbb{M}_{\mathbb{Y}}, \mathbf{K}_{\mathbb{Y}})$ où $\mathbb{M}_{\mathbb{Y}} = \mathbf{A} \mathbb{M}_{\mathbb{X}} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{K}_{\mathbb{Y}} = \mathbf{A} \mathbf{K}_{\mathbb{X}} {}^t \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6\theta - 6 & 2\theta - 8 \\ 2\theta - 8 & \theta^3 + 10\theta - 14 \end{pmatrix}$$

2) Comme Y_1 et Y_2 sont gaussiennes, Y_1 et Y_2 sont indépendantes si $\text{cov}(Y_1, Y_2) = 2\theta - 8 = 0$, soit $\theta_0 = 4$.

3) Si $\theta = 5$ on a : $\mathbf{K}_{\mathbb{Y}} = \begin{pmatrix} 24 & 2 \\ 2 & 161 \end{pmatrix}$. La loi du couple (Y_1, Y_2) est définie par :

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \mathbf{K}_{\mathbb{Y}}}} \exp\left(-\frac{1}{2} ({}^t \mathbf{y} \mathbf{K}_{\mathbb{Y}}^{-1} \mathbf{y})\right) \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{3860}} \exp\left(-\frac{1}{2 \times 3860} (161y_1^2 - 4y_1y_2 + 24y_2^2)\right) \end{aligned}$$

Y_2 suit une loi $\mathcal{N}(0, 161)$ donc $f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{161} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y_2^2}{2 \times 161}\right)$, d'où

$$f_{Y_1}(y_1|y_2) = \frac{f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)}{f_{Y_2}(y_2)} = \frac{\sqrt{161}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{3860}} \exp\left(-\frac{161}{2 \times 3860} \left(y_1 - \frac{2y_2}{161}\right)^2\right)$$

On en déduit que conditionnellement à $\{Y_2 = y_2\}$, Y_1 suit une loi $\mathcal{N}\left(\frac{2y_2}{161}, \frac{3860}{161}\right)$ d'où

$$E[Y_1|Y_2] = \frac{2Y_2}{161} \text{ et } \text{Var}[Y_1|Y_2] = \frac{3860}{161}.$$

Chapitre 15

Processus stationnaires du second ordre. Signaux aléatoires

RAPPELS

- Un processus aléatoire est une famille de variables aléatoires noté $X(n, \omega)$ dans le cas d'un processus à temps discret et $X(t, \omega)$ dans le cas d'un processus à temps continu. Dans les formules qui suivent on note $X(t, \omega)$ sachant que dans le cas discret on doit remplacer t par n . Soit X un processus aléatoire.
- **Fonction moyenne de X :**

$$\mu_X(t) = E[X(t, \omega)] \quad (\text{R15.1})$$

- **Fonction covariance de X :**

$$C_X(t_1, t_2) = E \left[(X(t_1, \omega) - \mu_X(t_1)) \overline{(X(t_2, \omega) - \mu_X(t_2))} \right] \quad (\text{R15.2})$$

- **Fonction d'autocorrélation de X :**

$$R_X(t_1, t_2) = E \left[X(t_1, \omega) \overline{X(t_2, \omega)} \right] \quad (\text{R15.3})$$

- **Fonction variance de X :**

$$\sigma_X^2(t) = C_X(t, t) \quad (\text{R15.4})$$

- **Puissance instantanée de X :**

$$E \left[|X(t, \omega)|^2 \right] \quad (\text{R15.5})$$

- Un processus aléatoire X est dit stationnaire au second ordre si sa fonction moyenne μ_X est une constante et si sa fonction d'autocorrélation R_X ne dépend que de la différence entre n et m si X est à temps discret (de la différence entre t_1 et t_2 si X est à temps continu). Soit X un processus aléatoire stationnaire au second ordre.
- **Fonction d'autocorrélation de X :**

$$\text{temps discret : } R_X(n_0) = E \left[X(n + n_0, \omega) \overline{X(n, \omega)} \right] \quad (\text{R15.6})$$

$$\text{temps continu : } R_X(\tau) = E \left[X(t + \tau, \omega) \overline{X(t, \omega)} \right]$$

- **Puissance de X :**

$$P_X = R_X(0) \quad (\text{R15.7})$$

- **Densité spectrale de puissance de X :**

$$\text{temps discret : } S_X(\nu) = \mathcal{F}(R_X)(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) e^{-2i\pi k\nu} \quad (\text{R15.8})$$

$$\text{temps continu : } S_X(\nu) = \mathcal{F}(R_X)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-2i\pi\tau\nu} d\tau$$

- **X est dit ergodique si :**

$$\text{temps discret : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^n X(k, \omega) = \mu_X \quad (\text{15.9})$$

$$\text{temps continu : } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \omega) dt = \mu_X$$

Exercice 15.1

On considère le signal numérique X défini par : $X(n, \omega) = \sum_{k=0}^N \theta_k Y_{n-k}(\omega)$, où

$(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant :

$\forall k \quad E[Y_k] = 0$, $\text{Var}[Y_k] = 1$ et $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N$ sont des nombres complexes.

Calculer la moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction d'autocorrélation de X .

La moyenne de X est donnée par :

$$\mu_X(n) = E[X(n, \omega)] = E\left[\sum_{k=0}^N \theta_k Y_{n-k}\right] = \sum_{k=0}^N \theta_k E[Y_{n-k}] = 0.$$

La fonction covariance de X est donnée par :

$$\begin{aligned} C_X(n, m) &= E\left[(X(n, \omega) - \mu_X(n))(\overline{X(m, \omega) - \mu_X(m)})\right] = E[X(n, \omega)\overline{X(m, \omega)}] \\ &= E\left[\left(\sum_{k=0}^N \theta_k Y_{n-k}\right)\left(\sum_{p=0}^N \bar{\theta}_p Y_{m-p}\right)\right] = \sum_{k=0}^N \sum_{p=0}^N \theta_k \bar{\theta}_p E[Y_{n-k} Y_{m-p}]. \end{aligned}$$

Or :

$$E[Y_{n-k} Y_{m-p}] = \begin{cases} 1 & \text{si } n-k = m-p \\ 0 & \text{si } n-k \neq m-p \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = m-n+k \\ 0 & \text{si } p \neq m-n+k \end{cases}$$

donc :

$$C_X(n, m) = \sum_{k \in \Delta} \theta_k \bar{\theta}_{m-n+k}, \quad \text{où } \Delta = \{k : 0 \leq k \leq N \text{ et } 0 \leq m-n+k \leq N\}.$$

L'ensemble Δ s'écrit sous la forme :

$$\Delta = \{k : \max\{0, n-m\} \leq k \leq \min\{N, N+n-m\}\}$$

- si $n \leq m$: $\Delta = \{k : 0 \leq k \leq N+n-m\}$ et $C_X(n, m) = \sum_{k=0}^{N+n-m} \theta_k \bar{\theta}_{m-n+k}$
- si $n > m$: $\Delta = \{k : n-m \leq k \leq N\}$ et

$$C_X(n, m) = \sum_{k=n-m}^N \theta_k \bar{\theta}_{m-n+k} = \sum_{k=0}^{N+m-n} \theta_{k+n-m} \bar{\theta}_k.$$

La variance de X est donnée par : $\sigma_X^2 = C_X(n, n) = \sum_{k=0}^N \theta_k \bar{\theta}_k = \sum_{k=0}^N |\theta_k|^2.$

La fonction d'autocorrélation de X est égale à sa fonction covariance car X est centré, soit :

$$R_X(n, m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N+n-m} \theta_k \bar{\theta}_{m-n+k} & \text{si } n \leq m \\ \sum_{k=0}^{N+m-n} \theta_{k+n-m} \bar{\theta}_k & \text{si } n > m \end{cases}$$

Exercice 15.2

On considère le signal analogique X défini par :

$X(t, \omega) = Y(\omega) \cos(\theta t) + Z(\omega) \sin(\theta t)$, où Y et Z sont des variables aléatoires réelles indépendantes centrées et de même variance σ^2 et θ est un réel.

- 1) Calculer la moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction d'autocorrélation de X .
- 2) Démontrer que X est stationnaire au second ordre.

1) La moyenne de X est donnée par :

$$\mu_X(t) = E[X(t, \omega)] = \cos \theta t E[Y] + \sin \theta t E[Z] = 0. \text{ Donc } X \text{ est centré.}$$

La fonction covariance de X est donnée par :

$$\begin{aligned} C_X(t, u) &= E[(X(t, \omega) - \mu_X(t)) (\overline{X(u, \omega) - \mu_X(u)})] \\ &= E[(X(t, \omega) \overline{X(u, \omega)})] = E[(X(t, \omega) X(u, \omega))], \text{ car } X \text{ est réel. Donc :} \end{aligned}$$

$$C_X(t, u) = \cos \theta t \cos \theta u E[Y^2] + \sin \theta t \sin \theta u E[Z^2] + (\cos \theta t \sin \theta u + \cos \theta u \sin \theta t) E[YZ].$$

Or, Y et Z sont indépendantes, donc $E[YZ] = E[Y]E[Z] = 0$, et d'autre part, $E[Y^2] = \text{Var}[Y] = E[Z^2] = \text{Var}[Z] = \sigma^2$.

$$\text{Donc : } C_X(t, u) = \sigma^2 (\cos \theta t \cos \theta u + \sin \theta t \sin \theta u) = \sigma^2 \cos((t - u)\theta).$$

La variance de X est donnée par : $\sigma_X^2 = C_X(t, t) = \sigma^2$.

La fonction d'autocorrélation de X est donnée par :

$$R_X(t, u) = E[X(t, \omega) \overline{X(u, \omega)}] = \sigma^2 \cos(t - u)\theta.$$

2) On a $\mu_X(t) = 0$, donc indépendant de t et $R_X(t, u) = \sigma^2 \cos(t - u)\theta$ ne dépend que de la différence $t - u$; ce qui montre que X est stationnaire au second ordre.

Exercice 15.3

On considère le signal analogique X défini par : $X(t, \omega) = \sum_{k=1}^n Y_k(\omega) e^{it\theta_k}$,

où $Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes vérifiant :

$\forall k = 1, \dots, n \quad E[Y_k] = 0, \text{ Var}[Y_k] = \sigma_k^2$ et $\theta_1, \dots, \theta_n$ sont des réels.

1) Calculer la moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction d'auto-corrélation de X .

2) Démontrer que X est stationnaire au second ordre.

1) La moyenne de X est donnée par :

$$\mu_X(t) = E[X(t, \omega)] = E\left[\sum_{k=1}^n Y_k e^{-it\theta_k}\right] = \sum_{k=1}^n e^{-it\theta_k} E[Y_k] = 0.$$

La fonction covariance de X vaut :

$$\begin{aligned} C_X(t, u) &= E[(X(t, \omega) - \mu_X(t))(\overline{X(u, \omega) - \mu_X(u)})] = E[X(t, \omega) \overline{X(u, \omega)}] \\ &= E\left[\left(\sum_{k=1}^n Y_k e^{-it\theta_k}\right) \left(\sum_{p=1}^n \overline{Y_p e^{iu\theta_p}}\right)\right] = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n Y_k \overline{Y_p} e^{i(u\theta_p - t\theta_k)} E[Y_k \overline{Y_p}]. \end{aligned}$$

Or :

$$E[Y_k \overline{Y_p}] = \begin{cases} E[Y_k^2] = \text{Var}[Y_k] = \sigma_k^2 & \text{si } k = p \\ E[Y_k \overline{Y_p}] = E[Y_k] E[\overline{Y_p}] = 0 & \text{si } k \neq p \end{cases}$$

d'où :

$$C_X(t, u) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 e^{-i(t-u)\theta_k}.$$

La variance de X est donnée par : $\sigma_X^2 = C_X(t, t) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$.

La fonction d'autocorrélation de X est donnée par :

$$R_X(t, u) = E[X(t, \omega) \overline{X(u, \omega)}] = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 e^{-i(t-u)\theta_k}.$$

2) On a $\mu_X(t) = 0$, et $R_X(t, u) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 e^{-i(t-u)\theta_k}$ ne dépend que de la différence $t - u$; donc

X est stationnaire au second ordre.

Exercice 15.4

On considère le signal numérique X défini par :

$$X(n, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Y_{n-k}(\omega),$$

où θ est un réel constant vérifiant $|\theta| < 1$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées de même variance σ^2 .

- 1) Démontrer que X est stationnaire au second ordre.
- 2) Déterminer sa puissance.
- 3) Montrer que sa densité spectrale de puissance est donnée par :

$$S_X(\nu) = \frac{\sigma^2}{1 + \theta^2 - 2\theta \cos 2\pi\nu}.$$

- 1) La moyenne de X est donnée par :

$$\mu_X(n) = E[X(n, \omega)] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Y_{n-k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E[Y_{n-k}] = 0.$$

La fonction d'autocorrélation de X est donnée par :

$$\begin{aligned} R_X(n, m) &= E[X(n, \omega) \overline{X(m, \omega)}] = E\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k Y_{n-k}\right) \left(\sum_{p=0}^{\infty} \theta^p Y_{m-p}\right)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \theta^k \theta^p E[Y_{n-k} Y_{m-p}] \end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned} E[Y_{n-k} Y_{m-p}] &= \begin{cases} E[Y_{n-k}^2] = \sigma^2 & \text{si } n-k = m-p \\ 0 & \text{si } n-k \neq m-p \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } p = m-n+k \\ 0 & \text{si } p \neq m-n+k \end{cases} \end{aligned}$$

donc, $R_X(n, m) = \sigma^2 \sum_{k \in \Delta} \theta^k \theta^{m-n+k},$

où : $\Delta = \{k : 0 \leq k \leq \infty \text{ et } 0 \leq m-n+k \leq \infty\}.$

L'ensemble Δ s'écrit sous la forme $\Delta = \{k : \max\{0, n-m\} \leq k \leq \infty\}$

• si $n \leq m$: $\Delta = \{k : 0 \leq k \leq \infty\}$ et $R_X(n, m) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{m-n+2k} = \frac{\theta^{m-n}}{1-\theta^2} \sigma^2$

• si $n > m$: $\Delta = \{k : n - m \leq k \leq \infty\}$ et

$$R_X(n, m) = \sigma^2 \sum_{k=n-m}^{\infty} \theta^{m-n+2k} = \sigma^2 \theta^{n-m} \sum_{j=0}^{\infty} \theta^{2j} = \frac{\theta^{m-n}}{1-\theta^2} \sigma^2.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, R_X(n, m) = \frac{\theta^{|n-m|}}{1-\theta^2} \sigma^2.$

En particulier, on a : $E[|X(n, \omega)|^2] = R_X(n, n) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}.$

On en déduit que X est stationnaire au second ordre.

2) On a : $R_X(\tau) = R_X(m + \tau, m) = \frac{\theta^{|\tau|}}{1-\theta^2} \sigma^2.$

La puissance de X est donnée par : $P_X = R_X(0) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}.$

3) La densité spectrale de puissance de X est donnée par :

$$S_X(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_X(k) \exp(2i\pi\nu k).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } S_X(\nu) &= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta^{|k|} \exp(2i\pi\nu k) \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} \sum_{k=-\infty}^0 \theta^{-k} \exp(2i\pi\nu k) + \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \exp(2i\pi\nu k). \end{aligned}$$

Dans la somme $\sum_{k=-\infty}^0 \theta^{-k} \exp(2i\pi\nu k)$, en changeant k en $-k$, on obtient :

$$S_X(\nu) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \exp(-2i\pi\nu k) + \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \exp(2i\pi\nu k)$$

$$\begin{aligned} \text{soit : } S_X(\nu) &= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\theta \exp(-2i\pi\nu))^k + \sum_{k=1}^{\infty} (\theta \exp(2i\pi\nu))^k \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} \left[\frac{1}{1-\theta \exp(-2i\pi\nu)} + \frac{1}{1-\theta \exp(2i\pi\nu)} - 1 \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\theta^2} \left[\frac{1}{1-\theta \exp(-2i\pi\nu)} + \frac{\theta \exp(2i\pi\nu)}{1-\theta \exp(2i\pi\nu)} \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{1+\theta^2-2\theta \cos 2\pi\nu}. \end{aligned}$$

Exercice 15.5

On considère le signal analogique X défini par :

$X(t, \omega) = \cos(2\pi tY(\omega) + Z(\omega))$, où Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes. La loi de Y a pour densité f_Y et la loi de Z est uniforme sur $]-\pi, \pi[$.

- 1) Démontrer que X est stationnaire au second ordre.
- 2) Déterminer sa puissance.
- 3) Déterminer sa densité spectrale de puissance.

Comme la loi de Z est uniforme sur $]-\pi, \pi[$, on a : $f_Z(z) = \frac{1}{2\pi}$

et $E[h_2(Z)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_2(z) dz$; et du fait que Y et Z sont indépendantes, on a $E[h_1(Y)h_2(Z)] = E[h_1(Y)]E[h_2(Z)]$.

1) La moyenne de X est donnée par :

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t, \omega)] = E[\cos(2\pi tY + Z)] \\ &= E[\cos(2\pi tY)\cos(Z)] - E[\sin(2\pi tY)\sin(Z)] \\ &= E[\cos(2\pi tY)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos z dz - E[\sin(2\pi tY)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin z dz = 0.\end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation de X est donnée par :

$$R_X(t, u) = E[X(t, \omega) \overline{X(u, \omega)}] = E[\cos(2\pi tY + Z)\cos(2\pi uY + Z)].$$

Or, $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$; donc :

$$R_X(t, u) = \frac{1}{2} \{ E[\cos(2\pi(t-u)Y)] + E[\cos(2\pi(t+u)Y + 2Z)] \}.$$

Par la même démonstration que pour $\mu_X(t) = 0$, on a :

$$E[\cos(2\pi(t+u)Y + 2Z)] = 0 ; \text{ il vient donc :}$$

$$R_X(t, u) = \frac{1}{2} E[\cos(2\pi(t-u)Y)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi(t-u)y) f_Y(y) dy.$$

Donc $R_X(t, u)$ ne dépend que de la différence $t - u$. En particulier on a :

$$E[|X(t, \omega)|^2] = R_X(t, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que X est stationnaire au second ordre.

2) On a : $R_X(\tau) = R_X(u + \tau, u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\tau y) f_Y(y) dy.$

La puissance de X est donnée par : $P_X = R_X(0) = \frac{1}{2}.$

3) La densité spectrale de puissance de X est donnée par :

$$\begin{aligned}\forall v \in \mathbb{R} \quad S_X(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau. \\ S_X(v) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\tau y) \exp(-2i\pi\tau v) f_Y(y) d\tau dy \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(2i\pi\tau y) + \exp(-2i\pi\tau y)) \exp(-2i\pi\tau v) f_Y(y) d\tau dy \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-2i\pi\tau(v-y)) + \exp(-2i\pi\tau(v+y))) f_Y(y) d\tau dy \\ &= \frac{1}{4} \left\{ F[\bar{F}[f_Y]](v) + \bar{F}[F[f_Y]](-v) \right\} = \frac{1}{4} (f_Y(v) + f_Y(-v)).\end{aligned}$$

Exercice 15.6

Soit Y un signal centré et stationnaire au second ordre, on définit le signal analogique X par :

$$X(t, \omega) = Y(t, \omega) + \cos(2\pi t + Z(\omega)),$$

où $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t, \omega)$ et $Z(\omega)$ sont des variables aléatoires indépendantes et la loi de Z est uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

- 1) Démontrer que X est stationnaire au second ordre.
- 2) Déterminer sa puissance en fonction de celle de Y .
- 3) Déterminer son spectre de puissance en fonction de celui de Y .

Comme Y est centré et stationnaire au second ordre, on a donc $\mu_Y(t) = 0$, $R_Y(t, u) = E[Y(t, \omega) \overline{Y(u, \omega)}]$ ne dépend que de la différence $t - u$.

Nous noterons $R_Y(\tau) = R_Y(u + \tau, u)$ (avec $R_Y(\tau) = R_Y(-\tau)$), S_Y et P_Y le spectre de puissance et la puissance de Y .

1) La moyenne de X est donnée par :

$$\mu_X(t) = E[X(t, \omega)] = E[Y(t, \omega)] + E[\cos(2\pi t + Z)].$$

Mais :

$$E[\cos(2\pi t + Z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t + z) f_Z(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi t + z) dz = 0$$

donc : $\mu_X(t) = \mu_Y(t) = 0$.

La fonction d'autocorrélation de X est donnée par :

$$\begin{aligned}
 R_X(t, u) &= E[X(t, \omega) \overline{X(u, \omega)}] \\
 &= E[(Y(t, \omega) + \cos(2\pi t + Z)) \overline{(Y(u, \omega) + \cos(2\pi u + Z))}] \\
 &= E[Y(t, \omega) \overline{Y(u, \omega)}] + E[Y(t, \omega) \cos(2\pi u + Z)] \\
 &\quad + E[\overline{Y(u, \omega)} \cos(2\pi t + Z)] + E[\cos(2\pi t + Z) \cos(2\pi u + Z)].
 \end{aligned}$$

Mais : $E[Y(t, \omega) \cos(2\pi u + Z)] = E[Y(t, \omega)] E[\cos(2\pi u + Z)] = 0$

$$E[\overline{Y(u, \omega)} \cos(2\pi t + Z)] = E[\overline{Y(u, \omega)}] E[\cos(2\pi t + Z)] = 0$$

$$\begin{aligned}
 E[\cos(2\pi t + Z) \cos(2\pi u + Z)] &= \frac{1}{2} \left\{ E[\cos(2\pi(t - u))] + E[\cos(2\pi(t + u) + 2Z)] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \cos(2\pi(t - u)) + \frac{1}{2} \underbrace{E[\cos(2\pi(t + u) + 2Z)]}_{=0} \\
 &= \frac{1}{2} \cos(2\pi(t - u))
 \end{aligned}$$

donc : $R_X(t, u) = R_Y(t, u) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(t - u))$.

Donc $R_X(t, u)$ ne dépend que de la différence $t - u$ et X est stationnaire au second ordre.

En particulier, on a : $E[|X(t, \omega)|^2] = R_X(t, t) = R_Y(t, t) + \frac{1}{2}$.

2) On a :

$$R_X(\tau) = R_X(u + \tau, u) = R_Y(u + \tau, u) + \frac{1}{2} \cos(2\pi\tau) = R_Y(\tau) + \frac{1}{2} \cos(2\pi\tau).$$

La puissance de X est donnée par :

$$P_X = R_X(0) = R_Y(0) + \frac{1}{2} = P_Y + \frac{1}{2}.$$

3) Le spectre de puissance de X est donné par :

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad S_X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau.$$

$$\begin{aligned}
 S_X(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(R_Y(\tau) + \frac{1}{2} \cos(2\pi\tau) \right) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau \\
 &= S_Y(v) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\tau) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau = S_Y(v) + \frac{1}{4} (\delta_1(v) + \delta_{-1}(v)).
 \end{aligned}$$

Exercice 15.7

Soit Y un signal stationnaire au second ordre, on définit le signal analogique X par :

$$X(t, \omega) = Y(t+1, \omega) - Y(t, \omega).$$

- 1) Démontrer que X est stationnaire au second ordre.
- 2) Déterminer sa puissance en fonction de celle de Y .
- 3) Déterminer son spectre de puissance en fonction de celui de Y .

Comme Y est stationnaire au second ordre, on a donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad \mu_Y(t) = \text{constante} = \mu$,
 $R_Y(t, u) = E[Y(t, \omega) \overline{Y(u, \omega)}]$ ne dépend que de la différence
 $t - u$, $R_Y(\tau) = R_Y(u + \tau, u)$ et $\forall t \in \mathbb{R} \quad R_Y(\tau) = R_Y(-\tau)$. Nous noterons S_Y et P_Y le spectre de
 puissance et la puissance de Y .

1) La moyenne de X est donnée par :

$$\mu_X(t) = E[X(t, \omega)] = E[Y(t+1, \omega)] - E[Y(t, \omega)] = 0, \text{ donc le signal } X \text{ est centré.}$$

La fonction d'autocorrélation de X est donnée par :

$$\begin{aligned} R_X(t, u) &= E[(Y(t+1, \omega) - Y(t, \omega)) \overline{(Y(u+1, \omega) - Y(u, \omega))}] \\ &= E[Y(t+1, \omega) \overline{Y(u+1, \omega)}] - E[Y(t+1, \omega) \overline{Y(u, \omega)}] \\ &\quad - E[Y(t, \omega) \overline{Y(u+1, \omega)}] + E[Y(t, \omega) \overline{Y(u, \omega)}] \\ &= R_Y(t+1, u+1) - R_Y(t+1, u) - R_Y(t, u+1) + R_Y(t, u). \end{aligned}$$

Comme $R_Y(t, u)$ ne dépend que de la différence $t - u$, c'est vrai aussi pour $R_X(t, u)$; donc X est stationnaire au second ordre.

En particulier, on a :

$$E[|X(t, \omega)|^2] = R_X(t, t) = R_Y(t+1, t+1) - R_Y(t+1, t) - R_Y(t, t+1) + R_Y(t, t) = 2(R_Y(0) - R_Y(1)).$$

2) On a :

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= R_X(u + \tau, u) = R_Y(u + \tau + 1, u + 1) - R_Y(u + \tau + 1, u) - R_Y(u + \tau, u + 1) + R_Y(u + \tau, u) \\ &= R_Y(\tau) - R_Y(\tau + 1) - R_Y(\tau - 1) + R_Y(\tau) = 2R_Y(\tau) - R_Y(\tau + 1) - R_Y(\tau - 1). \end{aligned}$$

La puissance de X est donnée par :

$$P_X = R_X(0) = 2R_Y(0) - R_Y(1) - R_Y(-1) = 2(P_Y - R_Y(1)).$$

3) Le spectre de puissance de X vaut :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{R} \quad S_X(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau. \\ S_X(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} (2R_Y(\tau) - R_Y(\tau + 1) - R_Y(\tau - 1)) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mais : } \forall v \in \mathbb{R} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau = S_Y(v) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau+1) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau = \exp(2i\pi v) S_Y(v) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau-1) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau = \exp(-2i\pi v) S_Y(v) \\ \text{donc : } & S_X(v) = 2[1 - \cos(2\pi v)] S_Y(v) = 4\sin^2(\pi v) S_Y(v). \end{aligned}$$

Exercice 15.8

Soit Y un signal centré et stationnaire au second ordre, on définit le signal analogique X par $X(t, \omega) = Y(t, \omega) - V(\omega)$, où $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t, \omega)$ et $V(\omega)$ sont des variables aléatoires indépendantes et la loi de V est uniforme sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

- 1) Le signal X est-il stationnaire au second ordre ?
- 2) Déterminer sa puissance.
- 3) Déterminer son spectre de puissance.
- 4) On définit le signal analogique Z par : $Z(t, \omega) = X(t, \omega) - X(t-s, \omega)$, où s est un réel positif fixé.
 1. Le signal Z est-il stationnaire au second ordre ?
 2. Déterminer sa puissance.
 3. Déterminer son spectre de puissance.

Comme Y est centré et stationnaire au second ordre, on a donc :

$\mu_Y(t) = E[Y(t, \omega)] = 0$, $R_Y(t, u) = E[Y(t, \omega) \overline{Y(u, \omega)}]$ ne dépend que de la différence $t - u$, et

$R_Y(\tau) = R_Y(u + \tau, u)$. Notons S_Y et P_Y le spectre de puissance et la puissance de Y .

- 1) La moyenne de X est donnée par :

$\mu_X(t) = E[X(t, \omega)] = E[Y(t, \omega)] - E[V(\omega)] = 0$, donc le signal X est centré.

La fonction d'autocorrélation de X est donnée par :

$$\begin{aligned} R_X(t, u) &= E[X(t, \omega) \overline{X(u, \omega)}] = E[(Y(t, \omega) - V(\omega)) \overline{(Y(u, \omega) - V(\omega))}] \\ &= E[Y(t, \omega) \overline{Y(u, \omega)}] - E[(Y(t, \omega) + \overline{Y(u, \omega)}) V(\omega)] + E[V^2(\omega)] \\ &= E[Y(t, \omega) \overline{Y(u, \omega)}] + \frac{T^2}{12} = R_Y(t, u) + \frac{T^2}{12}. \end{aligned}$$

Donc $R_X(t, u)$ ne dépend que de la différence $t - u$. En particulier on a :

$$R_X(t, t) = E\left[X(t, \omega)^2\right] = R_Y(t, t) + \frac{T^2}{12} = R_Y(0) + \frac{T^2}{12}.$$

On en déduit que X est stationnaire au second ordre.

2) On a :

$$R_X(\tau) = R_X(u + \tau, u) = R_Y(u + \tau, u) + \frac{T^2}{12} = R_Y(\tau) + \frac{T^2}{12}.$$

La puissance de X est donnée par :

$$P_X = R_X(0) = R_Y(0) + \frac{T^2}{12} = P_Y + \frac{T^2}{12}.$$

3) Le spectre de puissance de X est donné par :

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad S_X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(R_Y(\tau) + \frac{T^2}{12} \right) \exp(-2i\pi v\tau) d\tau = S_Y(v) + \frac{T^2}{12} \delta(v).$$

4) 1. La moyenne de Z est donnée par :

$$\mu_Z(t) = E[Z(t, \omega)] = E[X(t, \omega)] - E[X(t - s, \omega)] = 0 \text{ donc le signal } Z \text{ est centré.}$$

La fonction d'autocorrélation de Z est donnée par :

$$\begin{aligned} R_Z(t, u) &= E\left[Z(t, \omega) \overline{Z(u, \omega)}\right] = E\left[(X(t, \omega) - X(t - s, \omega))(\overline{X(u, \omega) - X(u - s, \omega)})\right] \\ &= E\left[X(t, \omega) \overline{X(u, \omega)}\right] - E\left[X(t, \omega) \overline{Y(u - s, \omega)}\right] \\ &\quad - E\left[X(t - s, \omega) \overline{X(u, \omega)}\right] + E\left[X(t - s, \omega) \overline{X(u - s, \omega)}\right] \\ &= R_X(t, u) - R_X(t, u - s) - R_X(t - s, u) + R_X(t - s, u - s) \\ &= R_Y(t, u) - R_Y(t, u - s) - R_Y(t - s, u) + R_Y(t - s, u - s) \\ &= 2R_Y(t - u) - R_Y(t - u + s) - R_Y(t - u - s). \end{aligned}$$

Donc $R_Z(t, u)$ ne dépend que de la différence $t - u$. On en déduit que Z est stationnaire au second ordre. En particulier, on a :

$$\begin{aligned} R_Z(t, t) &= E[|Z(t, \omega)|^2] = R_Y(t, t) - R_Y(t, t - s) - R_Y(t - s, t) + R_Y(t - s, t - s) \\ &= 2(R_Y(0) - R_Y(s)). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} R_Z(u + \tau, u) &= R_X(u + \tau, u) - R_X(u + \tau, u - s) - R_X(u + \tau - s, u) + R_X(u + \tau - s, u - s) \\ &= 2R_Y(\tau) - R_Y(\tau + s) - R_Y(\tau - s) = R_Z(\tau). \end{aligned}$$

La puissance de Z vaut :

$$P_Z = R_Z(0) = 2R_Y(0) - R_Y(s) - R_Y(-s) = 2(P_Y - R_Y(s)).$$

3. Le spectre de puissance de Z est donné par :

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad S_Z(v) = \int_{-\infty}^{\infty} (2R_Y(\tau) - R_Y(\tau+s) - R_Y(\tau-s)) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau$$

$$\text{mais, } \forall v \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau = S_Y(v)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau+s) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) \exp(-2i\pi(\tau-s)v) d\tau = \exp(2i\pi s v) S_Y(v)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau-s) \exp(-2i\pi\tau v) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) \exp(-2i\pi(\tau+s)v) d\tau = \exp(-2i\pi s v) S_Y(v)$$

$$\text{donc :} \quad S_Z(v) = 2[1 - \cos(2\pi s v)] S_Y(v) = 4\sin^2(\pi s v) S_Y(v).$$

Exercice 15.9

On considère le filtre linéaire qui, à tout signal numérique d'entrée $X(n)$, fait correspondre le signal de sortie $Y(n)$ défini par la relation de récurrence :

$$Y(n) - \frac{1}{4}Y(n-1) = X(n).$$

- 1) Vérifier que le filtre est causal. Déterminer la fonction de transfert H et le domaine de convergence de H .
- 2) Déterminer la réponse impulsionnelle h .
- 3) On suppose que X est centré, stationnaire au second ordre de fonction d'auto-corrélation :

$$R_X(k) = \begin{cases} \theta & \text{si } k = \pm 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $|\theta| \leq \frac{1}{2}$. Déterminer le spectre de puissance de X .

- 4) Déterminer le spectre de puissance de Y .
- 5) Calculer la puissance en sortie.

1) La fonction de transfert H est définie par : $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$.

La solution causale correspond au domaine de convergence $\left| \frac{1}{4}z^{-1} \right| < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{4}$.

En prenant $z = \exp(2i\pi\nu)$, on obtient le gain de fréquences en puissance :

$$|H(\nu)|^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos(2\pi\nu) + \frac{1}{16}} = \frac{16}{17 - 8\cos(2\pi\nu)}.$$

2) La réponse impulsionnelle h s'obtient par développement en série entière de z^{-1} de H :

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k z^{-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)z^{-k}$$

ce qui donne :

$$h(k) = \begin{cases} 4^{-k} & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}.$$

En prenant $z = \exp(2i\pi\nu)$, on obtient le gain de fréquences en amplitude :

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \exp(-2i\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\exp(-2i\pi\nu)}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{\exp(-2i\pi\nu)}{4}} \\ &= \frac{4}{4 - \exp(-2i\pi\nu)} = \frac{4(4 - \exp(-2i\pi\nu))}{(4 - \exp(-2i\pi\nu))(4 - \exp(2i\pi\nu))} = \frac{4(4 - \exp(2i\pi\nu))}{17 - 8\cos(2\pi\nu)}. \end{aligned}$$

3) Le spectre de puissance de X vaut :

$$S_X(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_X(k)z^{-k} = \theta z + 1 + \theta z^{-1}$$

et pour $z = \exp(2i\pi\nu)$, on obtient :

$$S_X(\nu) = 1 + \theta \exp(2i\pi\nu) + \theta \exp(-2i\pi\nu) = 1 + 2\theta \cos(2\pi\nu).$$

4) Le spectre de puissance en sortie du filtre est donné par :

$$S_Y(\nu) = |H(\nu)|^2 S_X(\nu) = \frac{16(1 + 2\theta \cos(2\pi\nu))}{17 - 8\cos(2\pi\nu)}.$$

5) La puissance en sortie est donnée par :

$$P_Y = R_Y(0) = E[Y(n)^2] = \int_{-1/2}^{1/2} S_Y(\nu) d\nu,$$

soit :

$$P_Y = 16 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1 + 2\theta \cos(2\pi\nu)}{17 - 8\cos(2\pi\nu)} d\nu = \frac{16}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 + 2\theta \cos x}{17 - 8\cos x} dx = \frac{8(2 + \theta)}{15}.$$

Exercice 15.10

On considère le filtre linéaire qui, à tout signal numérique, d'entrée $X(n)$, fait correspondre le signal de sortie $Y(n)$ défini par la relation de récurrence :

$$Y(n) - \frac{5}{6}Y(n-1) + \frac{1}{6}Y(n-2) = X(n).$$

- 1) Vérifier que le filtre est causal. Déterminer la fonction de transfert H et le domaine de convergence de H .
- 2) Déterminer la réponse impulsionnelle h .
- 3) On suppose que X est centré, stationnaire au second ordre de fonction d'auto-corrélation

$$R_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = \pm 1, \pm 2 \\ 2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer le spectre de puissance de X .

- 4) Déterminer le spectre de puissance de Y .
- 5) Calculer la puissance en sortie.

- 1) La fonction de transfert H est définie par :

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2z}\right)\left(1 - \frac{1}{3z}\right)}.$$

La solution causale correspond au domaine de convergence : $\frac{1}{|2z|} < 1$ et $\frac{1}{|3z|} < 1$ c'est-à-dire $|z| > \frac{1}{2}$.

En prenant $z = \exp(2i\pi\nu)$, on obtient le gain de fréquences en puissance :

$$|H(\nu)|^2 = \frac{18}{(5 - 4\cos(2\pi\nu))(5 - 3\cos(2\pi\nu))}.$$

- 2) La réponse impulsionnelle h s'obtient par développement en série entière de z^{-1} de H ; on a :

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2z}\right)\left(1 - \frac{1}{3z}\right)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^{-k}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} z^{-k}\right)$$

$$\text{or, } \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^{-k}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} z^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}, \text{ avec } c_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j} \frac{1}{3^{k-j}} = \frac{3}{2^k} - \frac{3}{3^k};$$

$$\text{il vient donc : } H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2^k} - \frac{3}{3^k}\right) z^{-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) z^{-k}$$

$$\text{ce qui donne : } h(k) = \begin{cases} \left(\frac{3}{2^k} - \frac{2}{3^k}\right) & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}.$$

En prenant $z = \exp(2i\pi\nu)$, on obtient le gain de fréquences en amplitude :

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \exp(-2i\pi\nu k) = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\exp(-2i\pi\nu)}{2} \right)^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\exp(-2i\pi\nu)}{3} \right)^k \\ &= \frac{6}{2 - \exp(-2i\pi\nu)} - \frac{6}{3 - \exp(-2i\pi\nu)} = 3 \frac{5 - (5 - 2 \cos(2\pi\nu)) \exp(2i\pi\nu)}{(5 - 4 \cos(2\pi\nu))(5 - 3 \cos(2\pi\nu))}. \end{aligned}$$

3) Le spectre de puissance de X est donné par :

$$S_X(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_X(k) z^{-k} = 2 + \frac{1}{2}(z^{-1} + z) + \frac{1}{2}(z^{-2} + z^2)$$

et pour $z = \exp(2i\pi\nu)$, on obtient :

$$S_X(\nu) = 2 + \cos(2\pi\nu) + \cos(4\pi\nu) = 1 + \cos(2\pi\nu) + 2\cos^2(2\pi\nu).$$

4) Le spectre de puissance en sortie du filtre est donné par :

$$S_Y(\nu) = |H(\nu)|^2 S_X(\nu) = \frac{18(1 + \cos(2\pi\nu) + 2\cos^2(2\pi\nu))}{(5 - 4\cos(2\pi\nu))(5 - 3\cos(2\pi\nu))}.$$

5) La puissance en sortie est donnée par :

$$P_Y = R_Y(0) = E[|Y(n)|^2] = \int_{-1/2}^{1/2} S_Y(\nu) d\nu,$$

soit :

$$P_Y = 18 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1 + \cos(2\pi\nu) + 2\cos^2(2\pi\nu)}{(5 - 4\cos(2\pi\nu))(5 - 3\cos(2\pi\nu))} d\nu = \frac{33}{5}.$$

Exercice 15.11

On considère un système dont l'entrée X et la sortie Y vérifient la relation :

$$Y(t, \omega) = \sqrt{5} \int_t^{\infty} \exp(t-u) X(u, \omega) du,$$

où X est centré, stationnaire au second ordre, de fonction d'autocorrélation :

$$R_X(\tau) = \cos(2\tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

- 1) Déterminer la réponse impulsionnelle h . En déduire le gain en fréquence.
- 2) Déterminer le spectre de puissance de X .
- 3) Déterminer le spectre de puissance de Y .
- 4) Déterminer la fonction d'autocorrélation en sortie :

$$R_Y(\tau) = E[Y(t+\tau) \overline{Y(t)}].$$

5) Calculer la puissance en sortie.

6) Déterminer la fonction d'intercorrélation entrée/sortie :

$$R_{YX}(\tau) = E[X(t+\tau) \overline{Y(t)}].$$

1) La réponse impulsionnelle h vérifie : $Y(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)X(u, \omega)du$,

donc, comme :

$$Y(t, \omega) = \sqrt{5} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-u} X(u, \omega) \mathbb{1}_{]t, \infty[}(u) du = \sqrt{5} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-u} X(u, \omega) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(t-u) du,$$

on en déduit : $h(x) = \sqrt{5}e^x \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x)$.

On remarque que le filtre n'est pas causal.

On a :

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad H(v) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-2i\pi vx} dx = \sqrt{5} \int_{-\infty}^0 e^{x-2i\pi vx} dx = \frac{\sqrt{5}}{1-2i\pi v}$$

$$\text{et } |H(v)|^2 = \frac{5}{1+4\pi^2 v^2}.$$

2) Le spectre de puissance de X est donné par :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{R} \quad S_X(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-2i\pi v\tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2i\tau} + e^{2i\tau}) e^{-2i\pi v\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-2i\pi\tau\left(v + \frac{1}{\pi}\right)\right) + \exp\left(-2i\pi\tau\left(v - \frac{1}{\pi}\right)\right) \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_{\frac{1}{\pi}}(v) + \delta_{-\frac{1}{\pi}}(v) \right). \end{aligned}$$

3) Le spectre de puissance de Y est donné par :

$$S_Y(v) = |H(v)|^2 S_X(v) = \frac{5}{2(1+4\pi^2 v^2)} \left(\delta_{\frac{1}{\pi}}(v) + \delta_{-\frac{1}{\pi}}(v) \right).$$

4) $R_Y(\tau) = E[Y(t+\tau)\overline{Y(t)}]$ s'obtient par transformation de Fourier inverse de S_Y : $\forall \tau \in \mathbb{R}$

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(v) e^{2i\pi v\tau} dv = \cos(2\tau).$$

5) La puissance en sortie est donnée par : $P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(v) dv = R_Y(0) = 1$.

6) On a : $S_{YX}(v) = H(v) S_X(v) = \frac{\sqrt{5}}{2(1-2i\pi v)} \left(\delta_{\frac{1}{\pi}}(v) + \delta_{-\frac{1}{\pi}}(v) \right)$, donc :

$$R_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(v) e^{2i\pi v\tau} dv = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{e^{2i\tau}}{1-2i} + \frac{e^{-2i\tau}}{1+2i} \right) = \frac{\cos(2\tau) - 2\sin(2\tau)}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 15.12

On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = \exp\{-2i\pi(Y(\omega) + tZ(\omega))\}$$

où Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes.

On suppose que la loi de Y admet la densité $f_Y(y) = (1 - |y|) \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$ et que Z suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

- 1) Montrer que X est stationnaire au second ordre.
- 2) Calculer P_X la puissance de X .
- 3) Déterminer S_X la densité spectrale de puissance de X .
- 4) X est-il ergodique ?

1) On a :

$m_X(t) = E[X(t, \omega)] = E[\exp(-2i\pi Y)]E[\exp(-2i\pi tZ)] = \varphi_Y(1)\varphi_Z(t)$ où φ_Y et φ_Z désignent les fonctions caractéristiques de Y et de Z données par :

$$\varphi_Z(t) = E[\exp(-2i\pi tZ)] = \exp(-2\pi^2 t^2)$$

$$\varphi_Y(1) = E[\exp(-2i\pi Y)] = \int_{-1}^0 (1+y)e^{-2i\pi y} dy + \int_0^1 (1-y)e^{-2i\pi y} dy = 0$$

donc : $m_X(t) = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} R_X(t, u) &= E[X(t, \omega) \overline{X(u, \omega)}] = E[\exp(-2i\pi(Y + tZ)) \exp(2i\pi(Y + uZ))] \\ &= E[\exp(-2i\pi(t - u)Z)] = \varphi_Z(t - u). \end{aligned}$$

On en déduit que X est stationnaire au second ordre.

2) Pour $t = u + \tau$, on a : $R_X(\tau) = R_X(u + \tau, u) = \varphi_Z(\tau) = \exp(-2\pi^2 \tau^2)$.

La puissance de X est donnée par : $P_X = R_X(0) = 1$.

3) On a :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{R}, S_X(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-2i\pi v\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi^2 \tau^2 - 2i\pi v\tau) d\tau \\ &= \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2\pi^2 \left(\tau + \frac{iv}{2\pi}\right)^2\right\} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right). \end{aligned}$$

4) On a :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t + \tau, \omega) \overline{X(t, \omega)} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \exp(-2i\pi\tau Z(\omega)) dt = \exp(-2i\pi\tau Z(\omega)).$$

On en déduit que X n'est pas ergodique.

Exercice 15.13

On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = \sqrt{\frac{3}{N}} \sum_{k=1}^N Z_k(\omega) \exp\{-2i\pi t Y_k(\omega)\}$$

où $N \geq 1$ et $Z_1, \dots, Z_N, Y_1, \dots, Y_N$ sont des variables aléatoires indépendantes.

On suppose que $Z_1, \dots, Z_N$ suivent toutes la même loi uniforme sur l'intervalle

$[-1, 1]$ et que $Y_1, \dots, Y_N$ suivent toutes la même loi de densité $h(y) = \frac{1}{2} \exp(-|y|)$.

- 1) Montrer que X est stationnaire au second ordre.
- 2) Calculer P_X la puissance de X .
- 3) Déterminer S_X la densité spectrale de puissance de X .
- 4) X est-il ergodique ?

1) Pour $k = 1, \dots, N$ on a : $E[Z_k] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 z dz = 0$ et d'autre part, du fait que $Z_1, \dots, Z_N, Y_1, \dots, Y_N$ sont indépendantes, on a :

$$E[Z_k \exp\{-2i\pi t Y_k\}] = E[Z_k] E[\exp\{-2i\pi t Y_k\}] = E[Z_k] \phi_{Y_k}(t) = 0,$$

où ϕ_{Y_k} désigne la fonction caractéristique de Y_k .

On en déduit que : $\mu_X(t) = E[X(t, \omega)] = 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} R_X(t, u) &= E[X(t, \omega) \overline{X(u, \omega)}] \\ &= E\left[\left(\sqrt{\frac{3}{N}} \sum_{k=1}^N Z_k \exp(-2i\pi t Y_k)\right) \left(\sqrt{\frac{3}{N}} \sum_{j=1}^N Z_j \exp(2i\pi u Y_j)\right)\right] \\ &= \frac{3}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N E[Z_k Z_j \exp\{-2i\pi(t Y_k - u Y_j)\}] \\ &= \frac{3}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N E[Z_k Z_j] E[\exp\{-2i\pi(t Y_k - u Y_j)\}]. \end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N = \sum_{k=j}^N + \sum_{k \neq j}$ et comme pour $k \neq j$, on a : $E[Z_k Z_j] = E[Z_k] E[Z_j] = 0$, on en déduit que :

$$R_X(t, u) = \frac{3}{N} \sum_{k=1}^N E[Z_k^2] E[\exp\{-2i\pi(t-u)Y_k\}] = \frac{3}{N} \sum_{k=1}^N E[Z_k^2] \varphi_{Y_k}(t-u)$$

en tenant compte de $E[Z_k^2] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{1}{3}$ on obtient :

$$R_X(t, u) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_{Y_k}(t-u).$$

Du fait que $Y_1, \dots, Y_N$ suivent toutes la même loi, pour $k = 1, \dots, N$ on a $\varphi_{Y_k} = \varphi_{Y_1}$. Il vient donc $R_X(t, u) = \varphi_{Y_1}(t-u)$. On en déduit que X est stationnaire au second ordre.

2) Pour $t = u + \tau$, on a : $R_X(\tau) = R_X(u + \tau, u) = \varphi_{Y_1}(\tau) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 \tau^2}$.

La puissance de X est donnée par : $P_X = R_X(0) = 1$.

3) On a : $\forall v \in \mathbb{R}$,

$$S_X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-2i\pi v \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2i\pi v \tau)}{1 + 4\pi^2 \tau^2} d\tau = \frac{1}{2} \exp(-|v|).$$

4) Pour $k = 1, \dots, N$, posons $X_k(t, \omega) = \sqrt{\frac{3}{N}} Z_k(\omega) \exp\{-2i\pi t Y_k(\omega)\}$. On a donc :

$$X(t, \omega) = \sum_{k=1}^N X_k(t, \omega). \text{ D'autre part,}$$

$$X_k(t + \tau, \omega) \overline{X_k(t, \omega)} = \frac{3}{N} Z_k^2(\omega) \exp\{-2i\pi \tau Y_k(\omega)\}, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_k(t + \tau, \omega) \overline{X_k(t, \omega)} dt \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Z_k^2(\omega) \exp(-2i\pi \tau Y_k(\omega)) dt = Z_k^2(\omega) \exp(-2i\pi Y_k(\omega)). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour $k = 1, \dots, N$, X_k n'est pas ergodique et donc X n'est pas ergodique.

Exercice 15.14

Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ et K une autre variable aléatoire discrète, indépendante de U , à valeurs dans $\mathbb{Z}$ de loi $P(K = k) = p_k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On définit le signal analogique $X(t, \omega)$ par :

$$X(t, \omega) = \cos(2\pi t K(\omega) + U(\omega))$$

- 1) X est-il stationnaire au second ordre ?
- 2) Calculer P_X la puissance de X .
- 3) Déterminer S_X le spectre de puissance de X .

1) On a : $m_X(t) = E[X(t, \omega)] = E_K [E[X(t, \omega) | K]]$. Or,

$$\begin{aligned} E[X(t, \omega) | K = k] &= E[\cos(2\pi t k + U)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t k + u) f_U(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi t k + u) du = 0 \end{aligned}$$

d'où $m_X(t) = E_K[0] = 0$. D'autre par, la fonction d'autocorrélation de X est définie par :

$$R_X(t, v) = E[X(t, \omega) \overline{X(v, \omega)}] = E_K [E[X(t, \omega) \overline{X(v, \omega)} | K]]$$

Or,

$$\begin{aligned} E[X(t, \omega) \overline{X(v, \omega)} | K = k] &= E[\cos(2\pi t k + U) \cos(2\pi v k + U)] \\ &= \frac{1}{2} E[\cos(2\pi k(t + v) + 2U) + \cos(2\pi k(t - v))] \\ &= \frac{1}{2} \cos(2\pi k(t - v)) + \frac{1}{2} \underbrace{E[\cos(2\pi k(t + v) + 2U)]}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} \cos(2\pi k(t - v)) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } R_X(t, v) = \frac{1}{2} E[\cos(2\pi K(t - v))] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi k(t - v)) p_k.$$

On en déduit que X est stationnaire au second ordre.

2) On a : $R_X(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi k \tau) p_k$. En particulier, la puissance de X est définie par :

$$P_X = R_X(0) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = \frac{1}{2}$$

13) Le spectre de puissance de X est défini par :

$$\begin{aligned}
 S_X(\nu) &= \mathcal{F}[R_X](\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi k \tau) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2i\pi k \tau} + e^{-2i\pi k \tau}) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta_{\{k\}}(\nu) + \delta_{\{-k\}}(\nu)) p_k \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{4} (p_{-\nu} + p_{\nu}) & \text{si } \nu \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 15.15

On considère un filtre numérique d'entrée X et la sortie Y :

$Y(n, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(n-k) X(k, \omega)$, où X est centré, stationnaire au second ordre de fonction d'autocorrélation R_X , de spectre de puissance S_X et la réponse impulsionnelle h est définie par :

$$h(n) = \begin{cases} \theta & \text{si } n \in \{1, 2\} \\ 1 - 4\theta & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

- 1) Déterminer le spectre de puissance de Y . En déduire R_Y .
- 2) Déterminer la fonction d'intercorrélation entrée/sortie : R_{XY} .

1) On a : $S_Y(\nu) = |H(\nu)|^2 S_X(\nu)$ avec

$$\begin{aligned}
 H(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-2ik\pi\nu} = \sum_{k \in \{0, 1, 2\}} h(k) e^{-2ik\pi\nu} \\
 &= (1 - 4\theta) + \theta (e^{-2i\pi\nu} + e^{-4i\pi\nu})
 \end{aligned}$$

d'où

$$S_Y(\nu) = [1 - 8\theta + 18\theta^2 + 2\theta(1 - 3\theta) \cos(2\pi\nu) + 2\theta(1 - 4\theta) \cos(4\pi\nu)] S_X(\nu)$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} R_Y(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} S_Y(\nu) e^{2in\pi\nu} d\nu = (1 - 8\theta + 18\theta^2) \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} e^{2in\pi\nu} S_X(\nu) d\nu}_{R_X(n)} \\ &\quad + 2\theta(1 - 3\theta) \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2\pi\nu) e^{2in\pi\nu} S_X(\nu) d\nu \\ &\quad + 2\theta(1 - 4\theta) \int_{-1/2}^{1/2} \cos(4\pi\nu) e^{2in\pi\nu} S_X(\nu) d\nu \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2\pi\nu) e^{2in\pi\nu} S_X(\nu) d\nu &= \frac{1}{2} (R_X(n-1) + R_X(n+1)) \\ \int_{-1/2}^{1/2} \cos(4\pi\nu) e^{2in\pi\nu} S_X(\nu) d\nu &= \frac{1}{2} (R_X(n-2) + R_X(n+2)) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} R_Y(n) &= (1 - 8\theta + 18\theta^2) R_X(n) + \theta(1 - 3\theta) (R_X(n-1) + R_X(n+1)) \\ &\quad + \theta(1 - 4\theta) (R_X(n-2) + R_X(n+2)) \end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} R_{XY}(n) &= h * R_X(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(n-k) R_X(k) = \sum_{n-k \in \{0,1,2\}} h(n-k) R_X(k) \\ &= h(0) R_X(n) + h(1) R_X(n-1) + h(2) R_X(n-2) \\ &= (1 - 4\theta) R_X(n) + \theta (R_X(n-1) + R_X(n-2)) \end{aligned}$$

Exercice 15.16

Soit Y et Z des variables aléatoires indépendantes. On suppose que :

- la loi de Y admet la densité : $f_Y(y) = \frac{\pi}{2} \cos(\pi y) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(y)$
- Z est discrète à valeurs dans $\{-\pi, \pi\}$ de loi : $P(Z = -\pi) = P(Z = \pi) = \frac{1}{2}$.

1) On pose : $U = YZ$.

- Déterminer φ_U la fonction caractéristique de la loi de U .
- En déduire $E[\cos(U)]$ et $E[\cos(2U)]$.

On admet que : $\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)}{1 - \theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow -1} \frac{\cos\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)}{1 - \theta^2} = \frac{\pi}{4}.$

- 2) Soit H un signal analogique stationnaire au second ordre indépendant de Y et Z . Dans la suite on notera : μ_H , R_H , P_H et S_H la fonction moyenne, la fonction autocorrélation, la puissance et le spectre de puissance de H .

On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = \cos(U(\omega)) H(t, \omega).$$

- a) Montrer que X est stationnaire au second ordre.
- b) Calculer P_X la puissance de X .
- c) Déterminer S_X le spectre de puissance de X .

- 1) a) La fonction caractéristique de la loi de U est définie par :

$$\varphi_U(t) = E[e^{itU}] = E[E[e^{itYZ}|Z]]$$

Du fait que Y et Z sont indépendantes on :

$$\begin{aligned} E[e^{itYZ}|Z=z] &= E[e^{itYz}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ityz} f_Y(y) dy \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(\pi y) e^{ityz} dy = \pi^2 \frac{\cos\left(\frac{tz}{2}\right)}{\pi^2 - t^2 z^2} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\varphi_U(t) = E\left[\pi^2 \frac{\cos\left(\frac{tZ}{2}\right)}{\pi^2 - t^2 Z^2}\right] = \frac{\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{1 - t^2}$$

- 1) b) On a :

$$\begin{aligned} E[\cos(U)] &= \frac{1}{2} E[e^{iU} + e^{-iU}] = \frac{\varphi_U(1) + \varphi_U(-1)}{2} = \frac{\pi}{4} \\ E[\cos(2U)] &= \frac{1}{2} E[e^{2iU} + e^{-2iU}] = \frac{\varphi_U(2) + \varphi_U(-2)}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- 2) a) La fonction moyenne de X est définie par :

$$\mu_X = E[X(t, \omega)] = E[\cos(U(\omega)) H(t, \omega)] = E[\cos(U(\omega))] E[H(t, \omega)] = \frac{\pi}{4} \mu_H$$

Par hypothèse le signal H est stationnaire au second ordre, donc μ_H ne dépend pas du temps t , il en est donc de même de μ_X .

La fonction d'autocorrélation de X est définie par :

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E \left[X(t_1, \omega) \overline{X(t_2, \omega)} \right] = E \left[\cos(U(\omega)) H(t_1, \omega) \cos(U(\omega)) \overline{H(t_2, \omega)} \right] \\ &= E \left[\cos^2(U(\omega)) \right] E \left[H(t_1, \omega) \overline{H(t_2, \omega)} \right] \\ &= \frac{1}{2} (1 + E[\cos(2U(\omega))]) R_H(t_1, t_2) = \frac{2}{3} R_H(t_1, t_2) \end{aligned}$$

H étant stationnaire au second ordre, donc $R_H(t_1, t_2)$ ne dépend que de la différence : $t_1 - t_2$, il en est donc de même de $R_X(t_1, t_2)$. En particulier on a :

$$R_X(\tau) = R_X(t + \tau, t) = \frac{2}{3} R_H(t + \tau, t) = \frac{2}{3} R_H(\tau)$$

2) b) La puissance de X est définie par :

$$P_X = R_X(0) = \frac{2}{3} R_H(0) = \frac{2}{3} P_H$$

2) c) Le spectre de puissance de X est définie par :

$$S_X = \mathcal{F}(R_X) = \frac{2}{3} \mathcal{F}(R_H) = \frac{2}{3} S_H$$

Exercices d'entraînement

15.16 On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = Y(t + 1, \omega) - \cos(\pi U(\omega)) Y(t, \omega)$$

où Y est un processus à temps continu stationnaire au second ordre, U est une variable aléatoire continue de loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$ et indépendante de $Y(t, \omega)$. Dans la suite on notera : μ_Y , R_Y , P_Y et S_Y la moyenne de Y , la fonction autocorrélation, la puissance et le spectre de puissance de Y .

- a) Calculer $E[\cos(\pi U)]$ et $E[\cos^2(\pi U)]$.
- b) Montrer que X est stationnaire au second ordre.
- c) Exprimer P_X la puissance de X en fonction de P_Y .
- d) Exprimer S_X le spectre de puissance de X en fonction de S_Y .

15.17 On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = Y(t + 1, \omega) - e^{-2i\pi U(\omega)} Y(t, \omega)$$

où Y est un processus à temps continu stationnaire au second ordre, U est une variable aléatoire continue de densité f_U , de fonction caractéristique φ_U et indépendante de $Y(t, \omega)$.

Dans la suite on notera : μ_Y , R_Y , P_Y et S_Y la moyenne de Y , la fonction autocorrélation, la puissance et le spectre de puissance de Y .

- a) Montrer que X est stationnaire au second ordre.
- b) Exprimer P_X la puissance de X en fonction de P_Y , R_Y et φ_U .
- c) Exprimer S_X le spectre de puissance de X en fonction de S_Y et φ_U .

15.18 On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = Y(t, \omega) - e^{-2i\pi t} U(\omega)$$

où Y est un processus à temps continu stationnaire au second ordre, U est une variable aléatoire continue de loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$ et indépendante de $Y(t, \omega)$. Dans la suite on notera : μ_Y , R_Y , P_Y et S_Y la moyenne de Y , la fonction autocorrélation, la puissance et le spectre de puissance de Y .

- a) Montrer que X est stationnaire au second ordre.
- b) Exprimer P_X la puissance de X en fonction de P_Y .
- c) Exprimer S_X le spectre de puissance de X en fonction de S_Y .

15.19 On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = Y(t, \omega) e^{-2i\pi t}$$

où Y est un processus à temps continu centré et stationnaire au second ordre. Dans la suite on notera : R_Y , P_Y et S_Y la fonction autocorrélation, la puissance et le spectre de puissance de Y .

- a) Montrer que X est stationnaire au second ordre.
- b) Exprimer P_X la puissance de X en fonction de P_Y .
- c) Exprimer S_X le spectre de puissance de X en fonction de S_Y .

15.20 On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = Y(t + N, \omega) - \sum_{k=1}^{N-1} e^{-2i\pi k U(\omega)} Y(t + N - k, \omega)$$

où $N \geq 2$, Y est un processus à temps continu stationnaire au second ordre, U est une variable aléatoire continue de fonction caractéristique φ_U et indépendante de $Y(t, \omega)$. Dans la suite on notera : μ_Y , R_Y , P_Y et S_Y la moyenne de Y , la fonction autocorrélation, la puissance et le spectre de puissance de Y .

- a) Montrer que X est stationnaire au second ordre.
- b) Exprimer P_X la puissance de X en fonction de P_Y , R_Y et φ_U .
- c) Exprimer S_X le spectre de puissance de X en fonction de S_Y et φ_U .

15.21 On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N Y_k(t, \omega) e^{-2i\pi \theta_k t}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$, $Y_1, \dots, Y_N$ sont des processus à temps continu centrés, indépendants et stationnaires au second ordre suivant la même loi de fonction autocorrélation R_Y , de puissance P_Y et du spectre de puissance S_Y ; $\theta_1, \dots, \theta_N$ sont des réels.

- a) Montrer que X est stationnaire au second ordre.
- b) Exprimer P_X la puissance de X en fonction de P_Y .
- c) Exprimer S_X le spectre de puissance de X en fonction de S_Y .

Réponses

15.16 a) On a :

$$E[\cos(\pi U)] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos(\pi u) du = 0$$

$$E[\cos^2(\pi U)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[\cos(2\pi U)] = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } E[X(t, \omega)] = E[Y(t+1, \omega)] - E[\cos(\pi U)] E[Y(t, \omega)] = \mu_Y$$

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t+\tau, \omega) \overline{X(t, \omega)}] \\ &= (1 + E[\cos^2(\pi U)]) R_Y(\tau) \\ &\quad - E[\cos(\pi U)] (R_Y(\tau+1) + R_Y(\tau-1)) \\ &= \frac{3}{2} R_Y(\tau) \end{aligned}$$

$$\text{c) } P_X = R_X(0) = \frac{3}{2} R_Y(0) = \frac{3}{2} P_Y.$$

$$\text{d) } \forall \nu \in \mathbb{R}, S_X(\nu) = \mathcal{F}(R_X)(\nu) = \frac{3}{2} \mathcal{F}(R_Y)(\nu) = \frac{3}{2} S_Y(\nu).$$

15.17 a) $E[X(t, \omega)] = E[Y(t+1, \omega)] - E[e^{-2i\pi U(\omega)}] E[Y(t, \omega)]$

$$\text{Or, } E[e^{-2i\pi U(\omega)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi u} f_U(u) du = \varphi_U(1),$$

$$\text{d'où } E[X(t, \omega)] = (1 - \varphi_U(1)) \mu_Y.$$

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t+\tau, \omega) \overline{X(t, \omega)}] \\ &= 2 R_Y(\tau) - \varphi_U(-1) R_Y(\tau+1) - \varphi_U(1) R_Y(\tau-1) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P_X &= R_X(0) = 2 R_Y(0) - \varphi_U(-1) R_Y(1) - \varphi_U(1) R_Y(-1) \\ &= 2 P_Y - (\varphi_U(-1) + \varphi_U(1)) R_Y(1) \end{aligned}$$

c) $\forall \nu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_X(\nu) &= \mathcal{F}(R_X)(\nu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2 R_Y(\tau) - \varphi_U(-1) R_Y(\tau+1) - \varphi_U(1) R_Y(\tau-1)) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \\ &= 2 S_Y(\nu) - \varphi_U(-1) \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau+1) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \\ &\quad - \varphi_U(1) \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau-1) e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau \\ &= (2 - \varphi_U(-1) e^{2i\pi\nu} - \varphi_U(1) e^{-2i\pi\nu}) S_Y(\nu) \end{aligned}$$

15.18 a) $E[X(t, \omega)] = E[Y(t, \omega)] - E[e^{-2i\pi t}] E[U]$

Or, $E[U] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u du = 0$, d'où $E[X(t, \omega)] = \mu_Y$

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t + \tau, \omega) \overline{X(t, \omega)}] \\ &= R_Y(\tau) - (e^{2i\pi t} + e^{-2i\pi(t+\tau)}) \mu_Y E[U] + e^{-2i\pi t} E[U^2] \end{aligned}$$

Or, $E[U^2] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^2 du = \frac{1}{3}$, d'où $R_X(\tau) = R_Y(\tau) + \frac{1}{3} e^{-2i\pi\tau}$

b) $P_X = R_X(0) = R_Y(0) + \frac{1}{3} = P_Y + \frac{1}{3}$.

c) $\forall \nu \in \mathbb{R}$, $S_X(\nu) = \mathcal{F}(R_X)(\nu) = S_Y(\nu) + \frac{1}{3} \delta_{\{-1\}}(\nu)$.

15.19 a) $E[X(t, \omega)] = E[Y(t, \omega)] \times e^{-2i\pi t} = 0$

$$R_X(\tau) = E[X(t + \tau, \omega) \overline{X(t, \omega)}] = R_Y(\tau) e^{-2i\pi\tau}$$

b) $P_X = R_X(0) = R_Y(0)$.

c) $\forall \nu \in \mathbb{R}$, $S_X(\nu) = \mathcal{F}(R_X)(\nu) = S_Y(\nu + 1)$.

15.20 a) $E[X(t, \omega)] = \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_U(k)\right) \mu_Y$

$$R_X(\tau) = N R_Y(\tau) - \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi_U(k) R_Y(\tau - k) + \varphi_U(-k) R_Y(\tau + k)) \\ + \sum_{k \neq j} \sum \varphi_U(k - j) R_Y(\tau - k + j)$$

b) $P_X = N P_Y - \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi_U(k) + \varphi_U(-k)) R_Y(k) + \sum_{k \neq j} \sum \varphi_U(k - j) R_Y(k - j)$

c)

$$S_X(\nu) = S_Y(\nu) \left\{ N - \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi_U(k) e^{-2i\pi k\nu} + \varphi_U(-k) e^{2i\pi k\nu}) \right. \\ \left. + \sum_{k \neq j} \sum \varphi_U(k - j) e^{-2i\pi(k-j)\nu} \right\}$$

15.21 a)

$$E[X(t, \omega)] = 0, \quad R_X(\tau) = \frac{R_Y(\tau)}{N} \sum_{k=1}^N e^{-2i\pi\theta_k\tau}$$

b) $P_X = P_Y$

c) $S_X(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_Y(\nu + \theta_k).$

Index

A

abscisse de convergence 105
absolument convergente 2
autocorrélation 87, 99

C

changement d'échelle 86
coefficient de corrélation 273, 276, 282, 284
converge
 en probabilité 227
 en loi 227
 en moyenne quadratique 227
convergence
 dans $L^1(I)$ 20
 dans $L^2(I)$ 20
 des distributions 132
 dominée de Lebesgue 65
 en loi 252, 256, 259, 262
 en moyenne quadratique 20, 21
 ponctuelle 20, 21, 23
 presque partout 20
 uniforme 20, 21, 23
couronne de convergence 164, 200
covariance 273

D

densité 234
 de probabilité 82, 94
 spectrale d'énergie 87, 99
 spectrale de puissance 304, 308, 310, 321, 322
Dirichlet 46
distribution 108, 121, 122
 singulière 122
 causale 153
 paire 125
 régulière 122
 tempérée 162
 causale 163

durée de vie 265, 269

E

énergie 87
équation
 différentielle 111, 114
 intégrale 96
 intégral-différentielle 115
espérance conditionnelle 226

F

filtre linéaire 199
 causal 199, 200
 stable 200
filtre numérique linéaire 200
fonction 122, 161
 à décroissance rapide 161
 converge dans $\mathcal{S}$ 161
 localement sommable 122
fonction
 caractéristique 225, 250, 256, 259, 262, 272, 326
 causale 66
 covariance 303
 d'autocorrélation 303, 312, 318, 329
 de Bessel 111
 de répartition 220, 225, 246, 247, 254, 267, 271
 de répartition de la loi normale 234
 de transfert 199, 200, 203
 moyenne 303
 test 121
 variance 303
formule de Bayes 212, 218
formule de Poincaré 213
Fourier (transformée de) 85
Fourier (transformée de — inverse) 85
Fresnel 6
Fubini 2, 11

G

gaussienne 100
Gibbs 49
Gram-Schmidt 33

H

Hilbert 9
Hilbert (transformée de) 124

I

identité de Parseval 46, 86
inégalité de Bienaymé-Tchebychev 261
intercorrélation 87

J

Jacobien 2, 226, 239, 242

L

Laplace (transformée de) 105
Loi
 conditionnelle 226, 247, 266, 267, 271
 de Poisson 233, 257, 262
 exponentielle 238, 241, 254, 279, 281
 faible des grands nombres 227
 géométrique 232, 255
 marginale 247, 266, 272
 normale 227, 245, 265, 290
 normale tronquée 246
 uniforme 233, 259, 266, 267, 268, 283, 323
 uniforme discrète 228

M

matrice variance-covariance 279, 280, 289
meilleure approximation 31
modèle Auto-Régressif d'ordre 1 284

N

norme associée au produit scalaire 31

P

peigne de Dirac 125, 162
Pf 188
polynômes de Legendre 32, 34
polynômes de Tchebychev 38
presque partout 19

processus aléatoire 303
processus aléatoire stationnaire au second ordre 304
produit de convolution 66, 95
produit de convolution de distributions 132
produit scalaire 19, 31
projection orthogonale 31
pseudo-fonction 122, 126, 142, 155
puissance instantanée 304
Pythagore 31

R

réponse impulsionnelle 80, 199, 200, 203, 206
réponse indicielle 80, 203, 206
Riemann 1

S

Schwarz 19
Shannon 175
signal
 analogique 306, 307, 310, 314, 321, 322, 328
 analytique 179
 gaussien 99
 numérique 164, 305, 316, 317
 numérique causal 164
sommabilité 6, 15
sommable 19
spectre d'amplitude 87, 99
spectre de phase 87, 99
symétrie hermitienne 86

T

théorème
 de convergence dominée 146
 de Fubini 111
 de la valeur finale 106
 de la valeur initiale 106, 111, 116
 de Wiener-Kinchine 87
 Limite Central 227

V

valeur principale 8
variance 225
vecteur gaussien 290, 300
vecteur moyenne 289

Dariussh Ghorbanzadeh • Pierre Marry
Nelly Point • Denise Vial



3^e édition

MATHÉMATIQUES DU SIGNAL

Rappels de cours et exercices résolus

Cette nouvelle édition d'*Éléments de mathématiques du signal* s'adresse principalement aux élèves ingénieurs et aux étudiants en Master dans le domaine EEA.

Chaque chapitre s'ouvre sur un rappel des notions, théorèmes et notations les plus utilisés. Deux types d'exercices, dont beaucoup sont nouveaux dans cette 3^e édition, sont ensuite proposés : certains visent au maniement intellectuel des concepts fondamentaux, d'autres à l'utilisation de ces concepts dans le cadre d'applications pratiques.

DARIUSH GHORBANZADEH,
PIERRE MARRY,
DENISE VIAL

Sont maîtres de conférences
au Conservatoire National des
Arts et Métiers (CNAM, Paris).

NELLY POINT

est professeure au
Conservatoire National des
Arts et Métiers (CNAM, Paris).

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE

