

PROBLÈMES D'ÉLECTRICITÉ

AVEC COMMENTAIRES ET SOLUTIONS DÉVELOPPÉES

CLASSES PRÉPARATOIRES

P. PROVOST et A. PROVOST



MASSON et Cie

124 -

P. PROVOST

*Professeur au Lycée Louis-le-Grand
agrégé de l'Université*

A. PROVOST

*Ancien élève de l'École Normale Supérieure
agrégé de l'Université*

PROBLÈMES D'ÉLECTRICITÉ

avec

commentaires et solutions développées

Classes Préparatoires

MASSON et Cie

120, boulevard Saint-Germain, PARIS-6^e

1972

A LA MÊME LIBRAIRIE

OUVRAGES POUR LES CLASSES PRÉPARATOIRES
AUX GRANDES ÉCOLES SCIENTIFIQUES

TRAITÉ DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES, par G. CAGNAC, Inspecteur général de l'Instruction Publique, E. RAMIS, Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand et J. COMMEAU, Professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Kléber.

- I. — *Algèbre*. 1 vol. in-8° avec figures et exercices; broché.
- II. — *Analyse*. 1 vol. in-8° avec figures et exercices; broché.
- III. — *Géométrie*. 1 vol. in-8° avec figures et exercices; broché.
- IV. — *Application de l'analyse à la géométrie*. 1 vol. in-8° avec figures et exercices.

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES avec solutions développées, Classes Préparatoires A et B, Enseignement supérieur (1^{er} cycle), par E. RAMIS, Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

- Analyse*. 1 vol. broché fort.
- Géométrie et Cinématique*. 1 vol. broché fort.
- Algèbre*. 1 vol. broché fort.

COURS DE PHYSIQUE pour les Classes de Mathématiques Supérieures, par M. JOYAL, Professeur au Lycée Janson-de-Sailly et P. PROVOST, Professeur au Lycée Louis-le-Grand.

- Chaleur*. 1 vol. avec figures et exercices; broché.
- Électrocinétique*. 1 vol. avec figures et exercices; broché.
- Électrostatique*. 1 vol. avec figures et exercices; broché.
- Statique*. 1 vol. avec figures et exercices; broché.

CHIMIE, Classes de Mathématiques Supérieures, par P. PROVOST, Professeur au Lycée Louis-le-Grand.

COURS DE PHYSIQUE pour les Classes de Mathématiques Spéciales, par M. JOYAL, Professeur au Lycée Janson-de-Sailly et P. PROVOST, Professeur au Lycée Louis-le-Grand.

- I. — *Électricité*. 1 vol. avec figures et exercices.
- II. — *Dynamique*. 1 vol. avec figures et exercices.
- III. — *Thermodynamique*. 1 vol. avec figures et exercices.

PROBLÈMES DE MÉCANIQUE avec commentaires et solutions développées, Classes Préparatoires et Enseignement supérieur (1^{er} cycle), par P. PROVOST, Professeur au Lycée Louis-le-Grand et A. PROVOST, ancien élève de l'École Normale Supérieure.

CHIMIE, Classes de Mathématiques Spéciales A et A', par Ch. BRUNOLD, Directeur général au Ministère de l'Éducation Nationale et V. DELARUE, Professeur au Lycée Janson-de-Sailly.

PROBLÈMES DE CHIMIE avec réponses commentées et solutions complètes, Classes Préparatoires et Enseignement supérieur (1^{er} cycle), par V. DELARUE, Professeur au Lycée Janson-de-Sailly et J. CONTOUR, Professeur au Lycée Jacques Decour.

AVERTISSEMENT

L'ÉNONCÉ d'un problème est le résultat d'une activité fondamentale du physicien : elle consiste à partir d'une situation physique réelle dans la vie ou au laboratoire, et à bâtir un modèle schématique de cette situation qui est simplifiée par activité expérimentale (« liaisons imposées au système ») et par activité intellectuelle : élimination des facteurs négligeables, schématisation proprement dite. On se pose alors certaines questions relatives à l'évolution du modèle : le problème est posé.

Suit la résolution de ce problème : c'est l'activité que nous proposons à nos lecteurs.

Une troisième activité consiste à vérifier expérimentalement que les solutions du problème correspondent bien à la réalité physique c'est-à-dire que l'on ne s'est pas trompé et que le modèle est adéquat.

Ne pouvant offrir à nos lecteurs que la deuxième activité, nous les invitons cependant à se représenter, à travers le texte, les appareils, les phénomènes, comme s'ils étaient au laboratoire. Cela leur permettra de se mieux poser à eux-mêmes le problème, d'améliorer le texte, de suppléer à des manques d'information et parfois même à de petites erreurs comme il s'en glisse parfois dans les textes des concours.

Les lecteurs doivent aussi, dans une certaine mesure, se livrer à la troisième activité. S'ils ne peuvent réellement procéder à une vérification expérimentale, ils devront néanmoins y suppléer en faisant appel à leurs connaissances et vérifier que les valeurs numériques trouvées sont de l'ordre de grandeur de celles que l'on rencontre habituellement au laboratoire ou dans la vie.

Nous avons présenté certains problèmes — les plus difficiles en général — en deux étapes : dans une première étape le problème est posé avec un minimum d'indications ; la résolution du problème nécessite alors de solides connaissances, une bonne conception du problème et une certaine imagination créatrice. Le problème est ensuite rendu plus facile par des indications supplémentaires à l'usage de ceux qui n'auraient pas trouvé les solutions. Nous donnons enfin une solution détaillée. Ces problèmes sont indiqués par un astérisque.

Les problèmes proposés ont été sélectionnés, non seulement en raison de leur intérêt propre mais aussi pour illustrer de façon homogène l'étendue du

programme. La difficulté des problèmes proposés est également variable afin que chacun puisse trouver le problème qui lui convient.

Cet ouvrage est destiné aux élèves des classes préparatoires de première et de seconde année, ainsi qu'aux étudiants en électricité.

Nous souhaitons que nos lecteurs trouvent plaisir à travailler avec nous.

LES AUTEURS.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, au termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© 1971, Masson et C^{ie}, Paris

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Imprimé en France

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTROSTATIQUE



Faint, illegible text or markings located in the lower middle section of the page.

Faint, illegible text or markings located in the lower middle section of the page, to the right of the first block.



1. PHÉNOMÈNES FONDAMENTAUX DE L'ÉLECTROSTATIQUE

CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

1-1. — LOI DE COULOMB. — Deux boules conductrices identiques A et B, distantes de : $d = 50$ cm, portent respectivement les charges Q et $q = Q/4$. Une troisième boule C, identique aux deux autres, est mobile sans frottements sur la ligne droite qui les joint; primitivement neutre, elle est amenée en contact avec A puis abandonnée à elle-même.

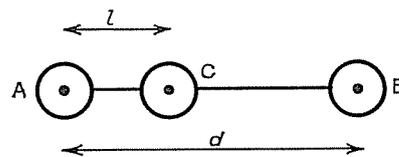


FIG. 1-1.

Déterminer sa position d'équilibre; cet équilibre est-il stable ?

— SOLUTION —

Les boules A et C, étant identiques, ont après leur contact la même charge q' ; la somme de leurs charges se conservant, cette charge q' est évidemment égale à :

$$q' = \frac{Q}{2}$$

La boule C sera en équilibre à la distance l de A si en ce point (certainement situé entre A et B) les forces de répulsion qu'exercent sur C les boules A et B s'équilibrent, c'est-à-dire si :

$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{Q}{2} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{Q}{4}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot l^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot (d-l)^2}$$

d'où nous déduisons :

$$l = (2 - \sqrt{2}) d$$

Application numérique.

$$l = (2 - 1,414) \cdot 50 = 29,3 \text{ cm.}$$

Un équilibre mécanique est stable si le système considéré, écarté quelque peu de sa position d'équilibre, est soumis à une force l'y ramenant. Orientons la

droite AB, par exemple de A vers B; la force \vec{f} qui s'exerce sur la boule C a pour mesure algébrique sur cet axe (pour $0 < l < d$) :

$$f(l) = \frac{Q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot l^2} - \frac{Q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot (d-l)^2} = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0} \left[\frac{2}{l^2} - \frac{1}{(d-l)^2} \right]$$

La dérivée de $f(l)$ par rapport à l prend au point $l_0 = (2 - \sqrt{2})d$ une valeur négative, ce qui implique effectivement que l'équilibre étudié est stable.

1-2. — Une tige cylindrique de section $S = 5 \text{ cm}^2$, convenablement lestée, flotte verticalement sur un liquide de masse volumique $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$. Elle porte à sa partie supérieure une petite boule A isolée et chargée (de charge : $q = 0,2 \text{ microcoulomb}$). A la hauteur $d = 4 \text{ cm}$ au-dessus de la position initiale de A, on place une autre boule B portant une charge opposée ($q' = -0,2 \mu\text{C}$).

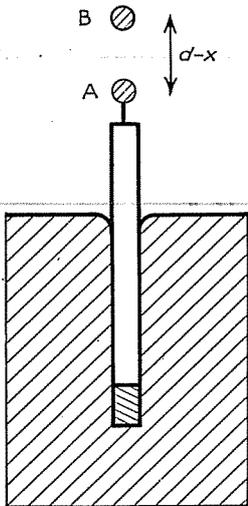


FIG. 1-2.

Déterminer la ou les positions d'équilibre de la tige et discuter la stabilité. (Les rayons des sphères A et B sont supposés très petits.)

Accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

— SOLUTION —

Appelons h la hauteur de tige immergée avant l'introduction de la boule B, et $(h-x)$ cette même hauteur après l'introduction. Les forces qui

s'exercent sur la tige sont :

- a) son poids, de module : P ,
- b) la poussée d'Archimède : $Sh\rho g$, puis : $S(h-x)\rho g$,
- c) la force de Coulomb : 0, puis : $\frac{|qq'|}{4\pi\epsilon_0(d-x)^2}$

On exprime l'équilibre de la tige en écrivant que la résultante de ces trois forces est nulle :

$$\left| \begin{array}{l} \text{avant : } P = Sh\rho g, \\ \text{après : } P = S(h-x)\rho g - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(d-x)^2} \end{array} \right.$$

La hauteur x dont s'est élevée la tige doit ainsi être une solution de l'équation suivante :

$$x = \frac{-qq'}{4\pi\epsilon_0 \cdot S\rho g (d-x)^2}$$

Cette équation est du troisième degré en x ; plutôt que de la résoudre exactement (ce qui conduirait à un calcul fastidieux), il est préférable de construire graphiquement la courbe d'équation cartésienne (orthonormée) :

$$y = -\frac{-qq'}{4\pi\epsilon_0 \cdot S\rho g (d-x)^2}$$

les intersections de cette courbe et de la droite d'équation $y = x$ ont pour abscisses les racines x cherchées; l'une des trois solutions ainsi trouvées, étant supérieure à d , est inacceptable physiquement.

Application numérique. — Si x et d sont exprimées en centimètres, l'équation précédente s'écrit :

$$x \cdot 10^{-2} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,8} \cdot \frac{1}{(d-x)^2 \cdot 10^{-4}}$$

$$\text{ou : } x \simeq \frac{5,4}{(d-x)^2}$$

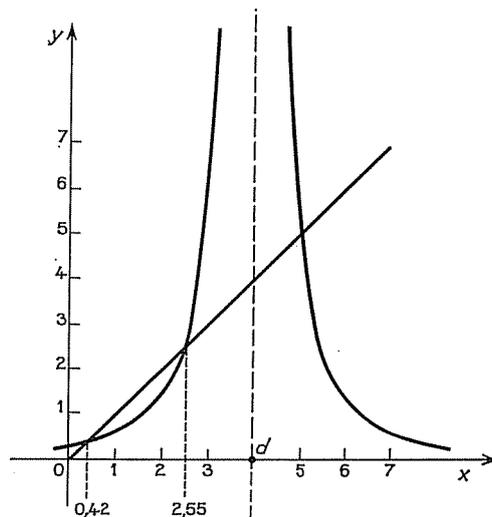


FIG. 1-2 bis.

La lecture du graphique ainsi construit (cf. figure) fournit deux positions d'équilibre acceptables :

$$x_1 \simeq 0,42 \text{ cm} \quad \text{et} \quad x_2 \simeq 2,55 \text{ cm.}$$

Si f est la mesure algébrique (sur une verticale dirigée vers le haut) de la résultante des forces appliquées à la tige, on peut également observer sur le graphique (plus commodément que par le calcul) que

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_1} < 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_2} > 0.$$

La première position ($x = x_1$, $AB = 3,58$ cm) est donc une position d'équilibre stable, et la seconde ($x = x_2$, $AB = 1,45$ cm) une position d'équilibre instable.

1-3*. — Deux fils parallèles infiniment longs, distants de $d = 2a$, portent des charges électriques de densités linéaires uniformes $+\lambda$ et $-\lambda$.

1° Calculer le potentiel électrostatique en un point M défini (à une translation parallèle aux fils près) par ses distances r_1 et r_2 aux deux fils.

2° En déduire la forme des surfaces équipotentielles et des lignes de champ.

INDICATION. — Rappelons, s'il en est besoin, comment se calcule le potentiel créé par une droite illimitée uniformément chargée : la symétrie axiale de ce système particulièrement simple implique que le potentiel ne dépende que de la distance r à la droite; soit alors une portion de cylindre équipotentiel de rayon r et de hauteur h , que l'on ferme par deux cercles de base (de plans normaux à l'axe); le théorème de Gauss appliqué à cette surface s'écrit simplement (le champ étant radial) :

$$\frac{\lambda h}{\epsilon_0} = 2\pi r h \cdot E$$

Connaissant ainsi le champ $\vec{E}(r) = -\text{grad } V$, nous en déduisons aisément le potentiel V :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Log } r + k$$

où k est une constante arbitraire.

— SOLUTION —

1° Le potentiel V au point M est la somme des potentiels V_1 et V_2 créés en M par les deux fils :

$$V_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Log } r_1 + k_1 \quad \text{et} \quad V_2 = +\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Log } r_2 + k_2.$$

Si les constantes k_1 et k_2 sont choisies telles que leur somme soit nulle, le potentiel V sera nul à l'infini, et, en un point M situé aux distances r_1 et r_2 des deux fils, sera égal à :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Log } \frac{r_2}{r_1}$$

2° Les surfaces équipotentielles sont les lieux géométriques des points dont le rapport r_2/r_1 est constant; ce sont donc des cylindres circulaires d'axes parallèles aux deux fils; dans un plan perpendiculaire aux fils, les sections de ces cylindres forment un faisceau linéaire de cercles dont les points de Poncelet sont les intersections O_1 et O_2 des fils et du plan. L'équipotentielle zéro ($r_2 = r_1$) est le plan médiateur des deux fils.

Les lignes de champ sont les lignes orthogonales des surfaces équipotentielles donc sont des arcs de cercles dont les plans sont perpendiculaires aux fils (dans un tel plan, les lignes de champ forment un faisceau linéaire de cercles à points de base $[O_1$ et $O_2]$, et que le champ électrostatique oriente du premier fil ($+\lambda$) vers le second ($-\lambda$).

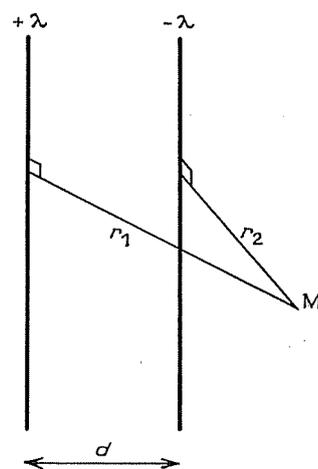


FIG. 1-3.

1-4*. — ATTRACTION GRAVITATIONNELLE. — *La force d'attraction gravitationnelle qui s'exerce entre deux masses ponctuelles m et m' est de la forme :*

$f = K \frac{mm'}{d^2}$, où K est la constante de gravitation et d la distance des deux masses.

Le globe terrestre est supposé sphérique de rayon R , homogène, et de masse totale M . Calculer l'accélération de la pesanteur g , en fonction de la distance r au centre de la terre (pour $r < R$, g est supposé mesuré à l'intérieur d'un puits vertical profond).

CONSEIL. — La force gravitationnelle s'exprime en fonction des masses et de la distance comme la force de Coulomb en fonction des charges et de la distance; les deux lois ayant la même forme mathématique, les résultats déjà démontrés dans le cas de l'attraction coulombienne se transposent aisément au cas de l'attraction gravitationnelle.

On exprimera en particulier le théorème de Gauss appliqué au flux du champ de gravitation \vec{g} à travers une surface fermée; l'application au cas du globe terrestre devient alors évidente.

— SOLUTION —

Le raisonnement qui a servi dans le cours à démontrer le théorème de Gauss peut être repris point par point; les masses m et m' remplacent les charges q et q' , la constante de gravitation K remplace la constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, le champ

gravitationnel \vec{g} remplace le champ électrostatique \vec{E} ; le théorème de Gauss s'écrit donc ici :

Le flux du champ gravitationnel \vec{g} sortant d'une surface fermée est égal au produit par $4\pi K$ de la somme des masses intérieures à cette surface.

Prenons alors pour surface fermée la sphère de rayon r centrée au centre de la terre; le flux de \vec{g} sortant de cette surface est égal à : $4\pi r^2 g$, mais c'est aussi, d'après le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} 4\pi K \cdot M & \quad \text{si} \quad r \geq R, \\ 4\pi K \cdot M \frac{r^3}{R^3} & \quad \text{si} \quad r \leq R. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$g = KM \frac{r}{R^3}$	si	$r \leq R$
$g = KM \frac{1}{r^2}$	si	$r \geq R$

1-5*. — Une ouverture circulaire, de centre O , de rayon R , est percée dans un plan uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ . En admettant que la répartition des charges sur le plan n'a pas été perturbée par cette opération (ce qui est le cas si, par exemple, le plan est fait d'une matière isolante), calculer le champ électrostatique en un point M de l'axe normal en O au plan, à une distance $OM = x$ du point O .

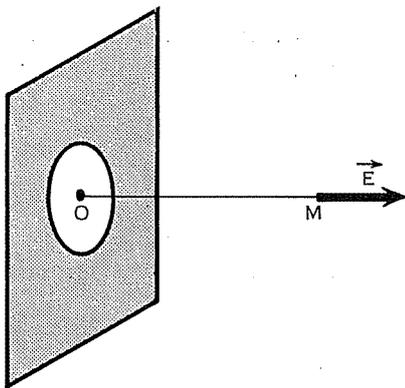


FIG. 1-5.

INDICATION. — Rappelons, s'il en est besoin, comment l'on peut calculer le champ créé en un point de son axe par un disque uniformément chargé : par raison de symétrie, le champ a pour direction l'axe OM du cercle; un élément de surface δS de centre A porte

la charge $\sigma \cdot \delta S$ et crée en M un champ élémentaire $d\vec{E}'$ dirigé suivant AM et dont l'intensité est, d'après la loi de Coulomb :

$$dE' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot \delta S}{AM^2}$$

La composante dE de ce champ suivant l'axe est :

$$dE = dE' \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot \delta S \cdot \cos \alpha}{AM^2}$$

Or $\frac{\delta S \cdot \cos \alpha}{AM^2}$ est l'angle solide sous lequel, de M , on voit l'élément de surface δS .
Soit $\delta\Omega$ cet angle solide élémentaire :

$$dE = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \delta\Omega$$

En faisant la somme des champs dE pour tous les éléments du cercle, nous obtenons le champ total d'intensité :

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \Omega = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi(1 - \cos \theta) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \theta)$$

où θ est le demi-angle au sommet du cône de révolution sous lequel on voit le disque du point M .

— SOLUTION —

Le raisonnement ci-dessus s'applique de façon analogue au calcul du champ sur l'axe du système proposé; la somme des champs dE pour tous les éléments de la surface proposée (plan moins cercle) fournit le champ total, d'intensité :

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

où Ω est l'angle solide sous lequel on voit, de M , la surface étudiée; cet angle solide est évidemment la différence de l'angle sous lequel on voit le plan entier (2π) et de l'angle sous lequel on voit l'ouverture circulaire ($2\pi(1 - \cos \theta)$) :

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} [2\pi - 2\pi(1 - \cos \theta)] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cos \theta$$

c'est-à-dire :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Nous aurions pu, plus simplement, utiliser les résultats déjà connus en remarquant que le système étudié est la superposition d'un plan uniformément chargé ($+\sigma$) et d'un disque circulaire uniformément chargé également, mais de densité surfacique opposée ($-\sigma$) :

$$E = \frac{+\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

1-6*. — CHAMP CRÉÉ PAR UN DISQUE UNIFORMÉMENT CHARGÉ. — 1° En un point H de son axe, un disque circulaire uniformément chargé crée un champ

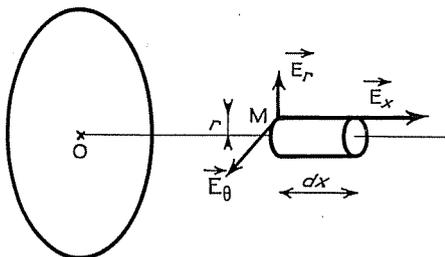


FIG. 1-6.

\vec{E} parallèle à l'axe; en un point M très proche de H, à une distance r de l'axe Ox (O étant le centre du disque), la composante E_r normale à l'axe Ox, est faible mais non nulle. Calculer l'intensité E_r de cette composante en fonction de r , de $\text{OH} = x$, de la densité surfacique de charges sur le disque et du rayon R de ce dernier.

2° Plus précisément, montrer comment l'on peut déterminer exactement, par un développement en série entière, le champ électrostatique \vec{E} en un point voisin de l'axe Ox du disque.

INDICATIONS. — 1° Pour déterminer en première approximation la composante du champ normale à l'axe, \vec{E}_r , on peut appliquer le théorème de Gauss à un petit cylindre de rayon r , de hauteur dx , et d'axe confondu avec Ox. On peut aussi, ce qui revient au même (puisque l'on traduit ainsi la même propriété mathématique du champ électrostatique), écrire que la divergence du champ \vec{E} en M est nulle, et faire les approximations convenables.

2° Comme il n'y a pas de charges dans le voisinage du point H ($\text{OH} = x \neq 0$) de l'axe, on peut espérer que les deux composantes E_θ et E_r y soient infiniment dérivables (la composante orthoradiale E_θ est nulle en raison de la symétrie du système: la circulation de \vec{E} le long d'un cercle centré sur l'axe, égale à $2\pi r \cdot E_\theta$, est nulle, donc aussi E_θ). Les deux composantes E_θ et E_r , fonctions de x et de r , sont développables en séries entières par rapport à r (les coefficients étant des fonctions de x), et l'on peut espérer que les rayons de convergence en sont non nuls.

Il ne reste plus qu'à exprimer les propriétés locales du champ électrostatique :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

Le calcul de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques n'est pas trop long, et donne :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \\ (\text{rot } \vec{E})_\theta &= \frac{\partial E_x}{\partial r} + \frac{E_\theta}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \\ (\text{rot } \vec{E})_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial E_x}{\partial x} \\ (\text{rot } \vec{E})_x &= \frac{\partial E_r}{\partial x} - \frac{\partial E_\theta}{\partial r} \end{aligned}$$

— SOLUTION —

1° **Emploi du théorème de Gauss.** — Considérons un petit cylindre de rayon r de hauteur h , d'axe confondu avec l'axe Ox du disque, et situé à la distance

x du centre O du disque. Les composantes axiale et radiale du champ \vec{E} sont des fonctions des deux variables x et r :

$$\vec{E}_x = \vec{E}_x(x, r) \quad \text{et} \quad \vec{E}_r = \vec{E}_r(x, r).$$

Le flux Ψ du champ électrostatique sortant du cylindre considéré est la somme du flux de \vec{E}_r sortant par la surface latérale et du flux de \vec{E}_x sortant par les deux faces du cylindre; il est exactement égal à :

$$\Psi(x, r, h) = \int_x^{x+h} E_r(x, r) \cdot 2\pi r \cdot dx + \int_0^r [E_x(x+h, r) - E_x(x, r)] \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Ce flux Ψ est nul puisqu'il n'y a pas de charges à l'intérieur du cylindre. Par dérivation par rapport à h au point $h=0$ (comme d'ordinaire en physique, nous nous accordons, par nécessité, le droit de dériver sous le signe somme), l'égalité ci-dessus devient :

$$0 = E_r(x, r) \cdot 2\pi r + \int_0^r \frac{\partial E_x(x, r)}{\partial x} 2\pi r \cdot dr$$

Remarquons que E_x , donc aussi $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, est une fonction paire de r . Si r est petit devant x (et devant R), nous pouvons remplacer $\frac{\partial E_x}{\partial x}(x, r)$ par $\frac{\partial E_x}{\partial x}(x, 0)$ au second ordre près par rapport à r :

$$0 \simeq E_r(x, r) \cdot 2\pi r + \frac{\partial E_x}{\partial x}(x, 0) \cdot \pi r^2$$

c'est-à-dire : $E_r(x, r) \simeq -\frac{r}{2} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x}(x, 0)$.

Nous savons (cf. exercice 1-5) que :

$$E_x(x, 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

Nous en déduisons que :

$$E_r(x, r) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \cdot \frac{rR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Le lecteur pourra aisément vérifier que ce résultat est valable *au troisième ordre près*.

2° Emploi de l'équation de Poisson. — La divergence en coordonnées semi-polaires (cylindriques) s'écrit ici :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}$$

Comme il n'y a pas de charges au point $M(x, r)$, l'équation de Poisson s'exprime simplement par :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Pour les raisons déjà indiquées, nous pouvons remplacer la valeur de $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ au point $M(x, r)$ par sa valeur au point $H(x, 0)$; si la dérivée partielle par rapport à r de E_r est continue au point H , les limites de $\frac{\partial E_r}{\partial r}$ et de $\frac{E_r}{r}$, quand r tend vers zéro, sont confondues et l'on peut remplacer la première de ces deux expressions par la seconde pourvu que r soit assez petit; quant à la composante orthoradiale E_θ , elle est nulle en raison de la symétrie du système :

$$0 = \operatorname{div} \vec{E} \simeq \frac{\partial E_x}{\partial x}(x, 0) + 2 \frac{E_r}{r}$$

ce qui conduit évidemment au même résultat que la méthode précédente.

3° Développement du champ en série entière. — Le raisonnement qui suit part de l'hypothèse que $E_x(x, r)$ et $E_r(x, r)$, composantes axiale et radiale du champ \vec{E} , sont développables en séries entières par rapport à r ; cette hypothèse, plausible *a priori* puisqu'il n'y a pas de charges dans le voisinage de H ou M , est vérifiable *a posteriori*.

L'axe Ox du disque est axe de symétrie du système, donc $E_x(x, r)$ est une fonction paire de r , et $E_r(x, r)$ une fonction impaire; leurs développements en série entière seront donc de la forme :

$$\begin{aligned} E_x(x, r) &= E_x(x, 0) + e_{x,2}(x) \cdot r^2 + e_{x,4}(x) \cdot r^4 + \dots + e_{x,2n}(x) \cdot r^{2n} + \dots \\ E_r(x, r) &= e_{r,1}(x) \cdot r + e_{r,3}(x) \cdot r^3 + e_{r,5}(x) \cdot r^5 + \dots + e_{r,2n+1}(x) \cdot r^{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

Les propriétés locales du champ électrostatique sont résumées par les deux relations :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En coordonnées semi-polaires (r, θ, x) , ces deux relations se traduisent, pourvu que $x \neq 0$, par :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_r}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire par :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{de_{r,1}}{dx} - 2e_{x,2} \right) \cdot r + \left(\frac{de_{r,3}}{dx} - 4e_{x,4} \right) \cdot r^3 \\ &\quad + \dots + \left(\frac{de_{r,2n-1}}{dx} - 2ne_{x,2n} \right) \cdot r^{2n-1} + \dots \\ 0 &= \left(2e_{r,1} + \frac{de_{x,0}}{dx} \right) + \left(4e_{r,3} + \frac{de_{x,2}}{dx} \right) \cdot r^2 \\ &\quad + \dots + \left((2n+2)e_{r,2n+1} + \frac{de_{x,2n}}{dx} \right) \cdot r^{2n} + \dots \end{aligned}$$

Comme une série entière n'est identiquement nulle que si tous les coefficients sont nuls, il devient évident que les coefficients $e_{x, 2n}$ et $e_{r, 2n+1}$ sont déterminables de proche en proche (le premier de ces coefficients, $e_{x, 0} = E_x(x, 0)$, nous étant déjà connu). Comme l'on pouvait d'ailleurs s'y attendre, le coefficient $e_{r, 1}$ coïncide avec la valeur approchée, divisée par r , de $E_r(x, r)$ trouvée précédemment.

REMARQUE. — On aurait pu employer également, pour résoudre le problème ci-dessus, la méthode utilisée au § 1^o : la détermination progressive des coefficients ne serait alors effectuée par applications successives (avec des approximations d'ordres croissants) de la conservation de la circulation et du flux (car $\rho = 0$) du vecteur champ \vec{E} . On aurait opéré, tantôt sur le petit cylindre déjà défini, tantôt sur le pourtour d'un rectangle de largeur $2r$, de longueur h , situé dans un plan contenant Ox , et dont les petits côtés auraient eu Ox pour médiatrice. Un tel artifice, extrêmement commode pour obtenir une valeur approchée, aurait en fait été trop lourd à manier.

1-7*. ÉQUILIBRE ISOTROPE. — *Quatre charges fixes $+q$ sont placées aux sommets d'un carré de côté $a\sqrt{2}$. Au centre du carré, on place une charge mobile $+q$, de masse m . Montrer que cette cinquième charge est en équilibre stable pour tout déplacement dans le plan des quatre autres, et calculer la ou les périodes d'oscillations autour de cette position d'équilibre.*

Discuter la stabilité de l'équilibre pour tout autre déplacement.

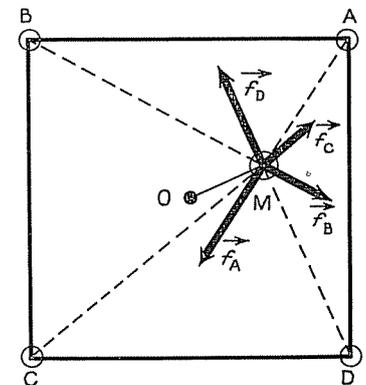


FIG. 1-7.

CONSEILS. — Avant toute chose, il faut se méfier des approximations faites *a priori* : on peut certes savoir, *avant le calcul*, que tel terme est plus petit que tel autre, mais on n'est pas toujours sûr de l'ordre de grandeur de l'approximation effectuée, on risque souvent de tenir compte (par exemple, après élimination mutuelle de termes plus importants) d'un terme plus grand que le terme négligé.

Il est bien préférable d'effectuer les approximations après coup, *sur une expression mathématique*, même si celle-ci semble trop compliquée, voire inélégante.

Bien évidemment, il n'est pas toujours possible d'entamer le calcul sans approximation préalable, et il faut alors se résigner aux approximations *a priori* ; dans ce cas, il est nécessaire d'effectuer une vérification *a posteriori* de l'approximation faite, cette dernière précaution n'étant d'ailleurs pas toujours suffisante, malheureusement.

Dans le cas présent, on peut exprimer exactement la force résultante qui s'exerce sur la charge centrale, et ceci, quel que soit le système de coordonnées employé ; une fois cette expression trouvée, on pourra observer que les seuls infiniment petits principaux sont les coordonnées du déplacement de la charge mobile ; il devient alors naturel de transformer l'expression trouvée (mal commode à manier) au moyen d'un développement limité par rapport à ces coordonnées.

On pourrait aussi travailler sur le potentiel électrostatique au point où se trouve la charge mobile; l'expression exacte du potentiel est plus simple que la précédente, mais le développement doit être limité à un ordre de plus (puisqu'on obtient la force, donc la période cherchée, par dérivation du potentiel par rapport aux coordonnées du déplacement).

— SOLUTION —

La force résultante qui s'exerce sur la charge mobile M est la somme géométrique des forces de Coulomb $\vec{f}_A, \vec{f}_B, \vec{f}_C$ et \vec{f}_D exercées par les quatre charges fixes A, B, C et D . Pour calculer ces forces de Coulomb, nous pouvons prendre comme axes de coordonnées, par exemple, les deux diagonales OAx et OBy du carré. Si \vec{i} et \vec{j} sont les vecteurs unitaires de ces axes, les forces $\vec{f}_A, \vec{f}_B, \vec{f}_C$ et \vec{f}_D s'expriment, en fonction des coordonnées x et y du déplacement \vec{OM} de la charge mobile, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\vec{f}_A &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{AM}}{AM^3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} \vec{i} + \frac{y}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} \vec{j} \right\} \\ \vec{f}_B &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{BM}}{BM^3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} \vec{i} + \frac{y-a}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} \vec{j} \right\} \\ \vec{f}_C &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{CM}}{CM^3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}} \vec{i} + \frac{y}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}} \vec{j} \right\} \\ \vec{f}_D &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{DM}}{DM^3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \vec{i} + \frac{y+a}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \vec{j} \right\}\end{aligned}$$

Comme nous nous intéressons essentiellement à l'équilibre de M au centre, il nous suffit de considérer des déplacements \vec{OM} petits, voire infinitésimaux. Il est alors commode d'utiliser un développement limité de

$$\vec{f} = \vec{f}_A + \vec{f}_B + \vec{f}_C + \vec{f}_D$$

par rapport aux infiniment petits x et y :

$$\begin{aligned}[(x-a)^2 + y^2]^{-3/2} &= \frac{1}{a^3} \left[1 + 3 \frac{x}{a} + \frac{3}{2a^2} (4x^2 - y^2) \right] \text{ au 3}^\text{e} \text{ ordre près} \\ [(x+a)^2 + y^2]^{-3/2} &= \frac{1}{a^3} \left[1 - 3 \frac{x}{a} + \frac{3}{2a^2} (4x^2 - y^2) \right] \text{ au 3}^\text{e} \text{ ordre près} \\ [x^2 + (y-a)^2]^{-3/2} &= \frac{1}{a^3} \left[1 + 3 \frac{y}{a} + \frac{3}{2a^2} (4y^2 - x^2) \right] \text{ au 3}^\text{e} \text{ ordre près} \\ [x^2 + (y+a)^2]^{-3/2} &= \frac{1}{a^3} \left[1 - 3 \frac{y}{a} + \frac{3}{2a^2} (4y^2 - x^2) \right] \text{ au 3}^\text{e} \text{ ordre près}\end{aligned}$$

Les quatre forces composantes ont alors pour développements limités, au

troisième ordre près :

$$\begin{aligned}\vec{f}_A &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a^3} \left\{ \left[-a - 2x + \frac{3}{2a}(y^2 - 2x^2) \right] \vec{i} + \left(y + 3 \frac{xy}{a} \right) \vec{j} \right\} \\ \vec{f}_B &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a^3} \left\{ \left(x + 3 \frac{xy}{a} \right) \vec{i} + \left[-a - 2y + \frac{3}{2a}(x^2 - 2y^2) \right] \vec{j} \right\} \\ \vec{f}_C &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a^3} \left\{ \left[+a - 2x + \frac{3}{2a}(2x^2 - y^2) \right] \vec{i} + \left(y - 3 \frac{xy}{a} \right) \vec{j} \right\} \\ \vec{f}_D &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a^3} \left\{ \left(x - 3 \frac{xy}{a} \right) \vec{i} + \left[+a - 2y + \frac{3}{2a}(2y^2 - x^2) \right] \vec{j} \right\}\end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi, toujours au troisième ordre près :

$$\vec{f} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot a^3} (-2x\vec{i} - 2y\vec{j}) = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 \cdot a^3} \cdot \vec{OM}$$

La charge mobile M, une fois écartée (légèrement) de sa position d'équilibre, est donc soumise à une force centrale attractive proportionnelle à la distance; nous savons (cf. Cours de mécanique) que son mouvement est alors un mouvement d'oscillation sinusoïdale, dont la période est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 \cdot a^3 m}{q^2}}$$

L'intérêt principal du résultat obtenu n'est pas la valeur de T trouvée, mais le fait que cette valeur ne dépend pas de la direction choisie pour le déplacement : l'équilibre de M au centre du carré est *isotrope* (en fait, l'effet obtenu pour un déplacement *non infinitésimal* n'est pas vraiment isotrope puisque l'expression de \vec{f} obtenue n'est acceptable qu'au troisième ordre près; cependant, le fait que l'isotropie existe pour les deux premiers ordres est déjà remarquable).

L'équilibre de la charge mobile M au centre du carré devient évidemment instable dès qu'on autorise les déplacements de M en dehors du plan des quatre charges fixes : en effet, si M n'est pas située dans le plan xOy, les composantes normales (selon Oz, troisième axe orthonormé) des quatre forces de Coulomb $\vec{f}_A, \vec{f}_B, \vec{f}_C, \vec{f}_D$ ont le même sens, donc ne sauraient se compenser.

1-8. POTENTIEL DE YUKAWA. — A une distance r d'un point O, le potentiel électrostatique créé par une certaine distribution de charges a pour expression :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} e^{-\frac{r}{a}}$$

où a est une constante homogène à une longueur, et q une constante positive homogène à une charge.

1° Calculer le champ \vec{E} à une distance r du point O et le flux Ψ de ce champ à travers une sphère de rayon r et de centre O . Que deviennent ces expressions quand r tend vers zéro? Interpréter.

2° Calculer la densité volumique de charge ρ à une distance r de O . Calculer la somme q' des charges négatives contenues dans la sphère de centre O et de rayon r . Que devient cette quantité lorsque r tend vers l'infini?

3° Étudier la variation, en fonction de r , de la grandeur $z = 4\pi\rho r^2$, appelée densité radiale de charge.

4° En admettant que le champ étudié est celui d'un atome d'hydrogène, interpréter les résultats précédents.

— SOLUTION —

1° Le champ électrostatique est égal à l'opposé du gradient du potentiel; comme ce dernier ne dépend que de r , \vec{E} est radial, et son intensité est :

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}$$

$$E(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-\frac{a}{r}} \left(-\frac{1}{ar} - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\frac{r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a} \right)$$

Le flux Ψ du champ \vec{E} sortant d'une sphère de centre O et de rayon r est :

$$\Psi = 4\pi r^2 \cdot E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} e^{-\frac{r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a} \right)$$

Quand r tend vers zéro, $E(r)$ tend vers l'infini, et il est équivalent à $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$.

Le flux Ψ tend vers $\frac{q}{\epsilon_0}$. Nous en concluons l'existence, parmi la distribution de charges étudiée, d'une charge positive $+q$ au point O (théorème de Gauss).

2° Le théorème de Gauss nous indique que le flux Ψ calculé ci-dessus est égal au quotient par ϵ_0 de la charge totale intérieure à la sphère considérée; si $\rho(l)$ est la densité volumique de charge à la distance l de O , et si $Q(r)$ est la somme des charges condensées (ponctuelles ou superficielles) contenues dans la sphère de rayon r , nous pouvons écrire :

$$\frac{q}{\epsilon_0} e^{-\frac{r}{a}} \left(1 + \frac{r}{a} \right) = \Psi(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_0^r \rho(l) \cdot 4\pi l^2 \cdot dl + Q(r) \right]$$

Comme ni le potentiel, ni le champ ne présentent de discontinuités pour

$r \neq 0$, $Q(r)$ se réduit à la seule charge ponctuelle $+q$ en 0. Dérivons l'équation ci-dessus par rapport à r ; nous obtenons :

$$\frac{q}{\varepsilon_0} e^{-\frac{r}{a}} \left(-\frac{1}{a} - \frac{r}{a^2} + \frac{1}{a} \right) = \frac{d\Psi(r)}{dr} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(r) \cdot 4\pi r^2$$

d'où nous déduisons :

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2} \cdot \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

Le même résultat aurait pu être obtenu en appliquant le théorème de Gauss à une pellicule sphérique de centre O et comprise entre les sphères de rayons r et $r + dr$.

La somme q' des charges négatives contenues dans la sphère de centre O et de rayon r est égale à l'intégrale :

$$q'(r) = \iiint_{l \leq r} \rho(l) \cdot dv = \int_0^r \rho(l) \cdot 4\pi l^2 \cdot dl$$

donc simplement :

$$q' = \varepsilon_0 \cdot \Psi - q.$$

Quand r tend vers l'infini, ρ tend vers zéro et q' vers $-q$.

3° La densité radiale de charge $z = 4\pi r \rho^2$ est égale à :

$$z = -\frac{q}{a^2} r \cdot e^{-\frac{r}{a}};$$

nous constatons que z est une fonction décroissante de 0 à $-\frac{q}{ea}$ pour $0 < r < a$, présente un minimum pour $r = a$, puis est croissante de $-\frac{q}{ea}$ à 0 pour r croissant de a à l'infini.

4° Le champ étudié ici représente celui d'un atome d'hydrogène; les résultats obtenus plus haut nous dépeignent cet atome comme composé d'une charge *ponctuelle* positive ($+q$) au centre (le noyau) et d'une charge négative opposée ($-q$) répartie en volume, de façon isotrope, *dans tout l'espace* (l'électron).

Cette vue n'est pas en contradiction avec la mécanique quantique, car la répartition des charges au sein d'un atome produit un champ électrostatique dépendant du temps et de l'espace; le potentiel de Yukawa, indépendant du temps, n'est qu'une valeur moyenne, *statistique*. Soit $p(M) \cdot dv$ la probabilité qu'a l'électron de se trouver, à l'instant considéré, dans l'élément de volume dv entourant le point M (si l'atome est dans un *état stationnaire*, $p(M)$ ne dépend pas du temps); la densité volumique de charge ρ n'est autre que le produit par $-q$ de la *densité de probabilité de présence* $p(M)$.

Notons un fait qui peut sembler paradoxal : c'est au centre, c'est-à-dire sur le noyau, que la probabilité de présence de l'électron est la plus grande; d'où l'intérêt porté à la *densité radiale* qui, elle, présente un maximum pour $r = a$: si le point le plus « fréquenté » par l'électron est bien le centre O , la distance de O à laquelle il se trouve « le plus fréquemment » est a (qui n'est autre que le *rayon de la première orbite de Bohr*, appelé plus simplement, quoique improprement « rayon de l'atome d'hydrogène »).

1-9*. DIPÔLE PLACÉ DANS UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE UNIFORME. — Dans un champ électrique uniforme \vec{E} , on place en un point O (où le potentiel est V_0) un dipôle électrostatique dont le moment \vec{P} est parallèle à \vec{E} et de même sens.

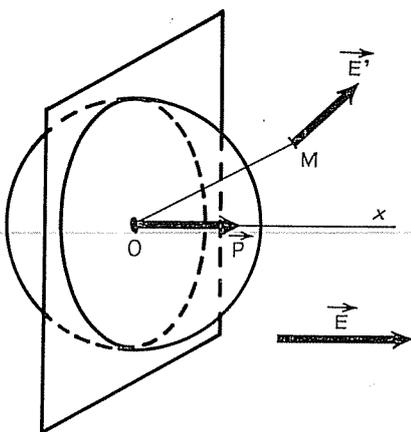


FIG. 1-9.

1° Trouver le potentiel en un point quelconque M ; montrer que le potentiel reste constant sur une certaine sphère que l'on déterminera.

2° Exprimer le champ électrostatique résultant \vec{E}' en M .

INDICATIONS. — Les lois permettant de déterminer champ et potentiel étant linéaires, le champ et le potentiel créés par une distribution de charges sont respectivement la somme vectorielle et la somme algébrique des champs et potentiels créés par chacune des charges composant la distribution. Dans le cas présent, l'emploi de

coordonnées polaires (origine O , axe Ox parallèle à \vec{E} et \vec{P} et de même sens) s'avère très commode (la seconde coordonnée angulaire φ , qui mesure les rotations autour de l'axe Ox , n'intervient évidemment pas dans ce problème).

— SOLUTION —

1° Appelons r et θ les coordonnées polaires (origine O , axe polaire Ox parallèle à \vec{E} et \vec{P} et de même sens) du point M . Le potentiel créé en M par le dipôle est égal (cf. cours d'électrostatique) à :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P} \cdot \vec{OM}}{OM^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P \cdot \cos \theta}{r^2}$$

Quant au potentiel V_2 dont dérive le champ uniforme \vec{E} , il se calcule aisément par la relation $\vec{E} = -\text{grad } V_2$, qui se résume ici à $E = -dV_2/dx$, d'où nous déduisons :

$$V_2 = V_0 - E \cdot x = V_0 - E \cdot r \cdot \cos \theta$$

Le potentiel résultant en M a donc simplement pour expression :

$$V = V_1 + V_2 = V_0 + \cos \theta \cdot \left(\frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^2} - Er \right).$$

Nous constatons que ce potentiel V est constant (égal à V_0) sur le plan d'équation $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ou : $x = 0$, plan médiateur du dipôle) ainsi que sur la sphère de centre O et de rayon :

$$R = \sqrt[3]{\frac{P}{4\pi\epsilon_0 \cdot E}}$$

2° Le champ résultant \vec{E}' en M est égal à l'opposé du gradient du potentiel V; ses composantes radiale et orthoradiale E'_r et E'_θ sont respectivement égales à :

$$E'_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = E \cdot \cos \theta + \frac{2P \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}$$

$$E'_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} = -E \cdot \sin \theta + \frac{P \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}$$

Nous constatons que ce champ est nul en tous les points du cercle d'équations : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = R$, fait que nous aurions pu déduire du § 1° puisque ce cercle est à l'intersection de deux surfaces équipotentielle et que le champ \vec{E}' doit être normal à toute équipotentielle passant par le point considéré.

1-10. INTERACTION CHARGE-DIPÔLE. — 1° Montrer que le champ $\vec{E}(\vec{r})$ créé par un dipôle (de moment \vec{P} et situé au point O) en un point quelconque M (OM = \vec{r}) peut s'écrire :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \left[\vec{P} - 3 \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} \right]$$

2° Déterminer le torseur des forces exercées sur le dipôle précédent par une charge ponctuelle q disposée en M. Calculer la force exercée réciproquement par le dipôle sur la charge.

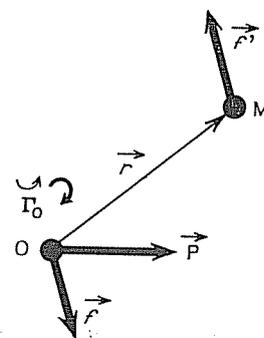


FIG. 1-10.

— SOLUTION —

1° Nous pouvons nous contenter de vérifier que l'expression de \vec{E} donnée par l'énoncé représente le même vecteur que les composantes calculées dans le cours; les composantes radiale et orthoradiale

de l'expression proposée sont respectivement égales à :

$$\vec{E}_r = \frac{\vec{E} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \left[\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} - 3 \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} \right] = \frac{2\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^5} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{E}_\theta = \vec{E} - \vec{E}_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \left[\vec{P} - 3 \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} + 2 \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} \right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \left[\vec{P} - \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} \right]$$

Leurs intensités sont égales à :

$$E_r = \frac{2P \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{P \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}$$

valeurs qui coïncident effectivement avec les expressions classiques du champ d'un dipôle.

Notons que l'expression ainsi calculée permet de retrouver aisément le résultat de l'exercice précédent : par la superposition d'un champ uniforme \vec{E}_0 (parallèle à \vec{P} et de même sens) au champ du dipôle, il se crée une surface équipotentielle sphérique; en effet, le champ résultant $\vec{E} + \vec{E}_0$ est parallèle à \vec{r} si $\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \vec{P}$ est parallèle à \vec{r} , et ceci ne peut avoir lieu quelle que soit la direction de \vec{r} (c'est-à-dire quel que soit $\frac{\vec{r}}{r}$) que si :

$$\vec{E}_0 // \vec{P} \quad \text{et} \quad r = R = \sqrt[3]{\frac{P}{4\pi\epsilon_0 \cdot E}}$$

auquel cas la sphère d'équation $r = R$ est bien surface équipotentielle puisque le champ lui est normal en chacun de ses points.

2° Soit \vec{E}_q le champ créé en O par la charge ponctuelle q disposée en M; les éléments de réduction en O du torseur des forces exercées sur le dipôle par une répartition de charges extérieures sont calculés dans tous les cours :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{P} \cdot \vec{E}_q) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_O = \vec{P} \wedge \vec{E}_q$$

Dans le cas présent :

$$\vec{E}_q = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Nous remarquons que $\vec{P} \cdot \vec{E}_q$ se trouve être égal formellement au produit par $-q$ du potentiel créé par le dipôle au point M ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$); la formule démontrée dans le § 1° nous évite de calculer le gradient de $\vec{P} \cdot \vec{E}_q$:

$$\vec{f} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \left[\vec{P} - 3 \cdot \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} \right]$$

quant au moment $\vec{\Gamma}_O$ en O, il est égal à :

$$\vec{\Gamma}_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} [\vec{r} \wedge \vec{P}]$$

La force exercée réciproquement par le dipôle sur la charge est simplement égale au produit par q du champ créé par le dipôle en M :

$$\vec{f}' = q \cdot \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} \left[\vec{P} - 3 \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} \right]$$

Il pourrait paraître paradoxal que l'action de la charge sur le dipôle comporte un couple alors qu'il n'en apparaît aucun dans la réaction du dipôle sur la charge. C'est qu'effectivement les torseurs d'action et de réaction sont opposés, mais que leurs éléments de réduction doivent être comparés *au même point*; leurs résultantes \vec{f} et \vec{f}' sont visiblement opposées, et le moment $\vec{\Gamma}_M$ en M est :

$$\vec{\Gamma}_M = \vec{\Gamma}_O + \vec{MO} \wedge \vec{f} = \vec{0} = -\vec{\Gamma}'_M$$

Cette loi d'action et de réaction aurait même pu nous permettre de calculer \vec{f} et $\vec{\Gamma}_O$ à partir de la seule connaissance de l'action du dipôle sur la charge, qui est visiblement plus simple à déterminer.

1-11*. RÉPARTITION SUPERFICIELLE DE DIPÔLES. — Calculer le champ créé en un point M de l'axe d'un disque de rayon R et d'épaisseur uniforme e sur lequel se trouve une double couche uniforme d'électricité; l'une des faces circulaires porte une densité surfacique uniforme σ , l'autre porte une densité surfacique uniforme $-\sigma$. On posera $p = \sigma \cdot e$ (moment dipolaire par unité de surface) et l'on désignera par x la distance du point M au centre O du disque. On supposera de plus que e est faible devant R et x.

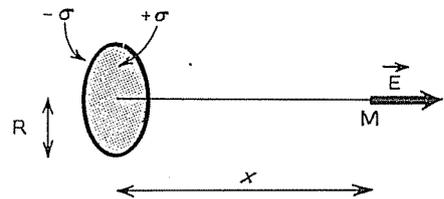


FIG. 1-11.

INDICATIONS. — Deux méthodes viennent assez naturellement à l'esprit, pour traiter ce problème. On peut utiliser les formules du champ créé par un disque uniformément chargé (cf. exercice 1-5) puis tenir compte de ce que e est petit devant R et x pour effectuer un développement limité. On peut aussi considérer le système proposé comme formé de la juxtaposition de petits dipôles parallèles $\vec{p} \cdot dS$ sur la surface

circulaire $S = \iint dS = \pi R^2$, il ne reste alors qu'à appliquer les formules habituelles du dipôle, puis à intégrer sur la surface du disque.

— SOLUTION —

1° Nous pouvons appliquer aux deux faces du disque la formule rappelée page 9; le champ résultant est égal à la somme vectorielle des deux champs composants \vec{E}_+ et \vec{E}_- ; il est porté par l'axe et son intensité est :

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{x - \frac{e}{2}}{\sqrt{\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + R^2}} \right] - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{x + \frac{e}{2}}{\sqrt{\left(x + \frac{e}{2}\right)^2 + R^2}} \right]$$

Si e est très faible devant R et x , nous pouvons écrire :

$$E \simeq \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} \left[\left(x + \frac{e}{2}\right) \left(1 - \frac{ex}{2(R^2 + x^2)}\right) - \left(x - \frac{e}{2}\right) \left(1 + \frac{ex}{2(R^2 + x^2)}\right) \right]$$

ou :

$$E \simeq \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{\sqrt{R^2 + x^2}} \left[1 - \frac{x^2}{R^2 + x^2} \right]$$

c'est-à-dire :

$$E \simeq \frac{p}{2\varepsilon_0 \cdot R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

Soit $P = \pi R^2 \cdot p$; le lecteur pourra vérifier que si R tend vers zéro, P restant non nul, la formule ainsi démontrée vient à se confondre avec la formule du champ créé en un point de son axe par un dipôle de moment dipolaire P .

2° Considérons un petit élément de surface dS entourant le point A (OA = $x \cdot \text{tg } \theta$) du disque, et désignons par θ l'angle (Ox, AM), le sens de Ox étant choisi de la face $-\sigma$ vers la face $+\sigma$ du disque. Au lieu de considérer que l'élément de surface dS présente deux faces de charges opposées, nous pouvons l'assimiler à un petit dipôle de moment $\vec{p} \cdot dS$ parallèle à Ox et de même sens. Ce petit dipôle crée en M un champ élémentaire \vec{dE}' dont

nous connaissons les composantes radiale et orthoradiale; comme le champ résultant sera porté par Ox, nous pouvons nous contenter de calculer la composante \vec{dE} de \vec{dE}' selon Ox :

$$dE = dE_r \cdot \cos \theta - dE_\theta \cdot \sin \theta$$

$$= \left[\frac{2p \cdot dS \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot \left(\frac{x}{\cos \theta}\right)^3} \right] \cos \theta - \left[\frac{p \cdot dS \cdot \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot \left(\frac{x}{\cos \theta}\right)^3} \right] \sin \theta$$

ou :

$$dE = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 \cdot x^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \cos^3 \theta \cdot dS$$

Il est naturel de regrouper tous les points A du disque situés à la même distance OA = x.tg θ du centre O, pour lesquels l'angle θ est identique, et de leur faire correspondre l'élément de couronne de surface

$$dS = 2\pi x \cdot \text{tg } \theta \cdot d(x \cdot \text{tg } \theta) = 2\pi x^2 \left(\frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \right) \cdot d\theta.$$

Le champ résultant E cherché se calcule alors par simple intégration :

$$E = \int_0^{\theta_0 = \text{Arc tg } \frac{R}{x}} \frac{p}{4\pi\epsilon_0 \cdot x^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \cos^3 \theta \cdot 2\pi x^2 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \cdot d\theta$$

$$E = \frac{p}{2\epsilon_0 \cdot x} \cdot \sin^2 \theta_0 \cdot \cos \theta_0 = \frac{p}{2\epsilon_0 \cdot x} \cdot \frac{R^2}{R^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{p}{2\epsilon_0 \cdot R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

Cette méthode présente assurément un aspect mathématique bien moins sympathique que la précédente; son intérêt physique est néanmoins grand car elle nous laisse entrevoir que nous saurions résoudre des problèmes de répartitions superficielles ou volumiques de dipôles; or de tels problèmes se posent effectivement au physicien, et plus encore au chimiste (dipôles au sein d'un liquide polaire, couches monomoléculaires de dipôles aux interfaces, etc.).

1-12. POLARISATION DES DIÉLECTRIQUES. — *Les molécules d'un diélectrique électriquement neutre sont assimilables à de petits dipôles, si bien qu'un élément de volume $d\tau$ entourant un point quelconque M du diélectrique est assimilable à un dipôle élémentaire de moment dipolaire :*

$$\vec{dp} = \vec{P}(M) \cdot d\tau,$$

le vecteur $\vec{P}(M)$ étant défini en tout point du diélectrique.

1° Montrer qu'une portion de diélectrique crée le même champ électrique que des charges réparties dans tout le volume \mathcal{V} occupé par le diélectrique [densité

volumique : $\rho_f(M)$, ainsi que sur la surface S limitant cette portion [densité

surfactive : $\sigma_f(M)$], les densités ρ_f et σ_f ainsi définies étant égales à :

$$\rho_f = -\operatorname{div} \vec{P} \quad \text{et} \quad \sigma_f = \vec{P} \cdot \vec{n},$$

où \vec{n} désigne le vecteur unitaire normal sortant de la surface S au point considéré.

2° On définit le vecteur induction électrique \vec{D} par la relation :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

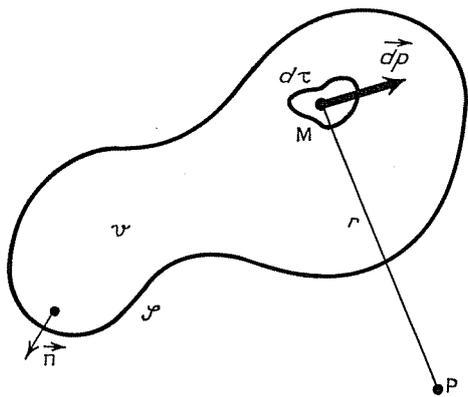


FIG. 1-12.

Montrer que la composante normale de \vec{D} se conserve à la traversée de la surface d'un diélectrique non chargé. Cas général?

3° Diélectrique linéaires homogènes et isotropes. — La densité volumique de moment dipolaire $\vec{P}(M)$ définie ci-dessus est, dans le cas de certains diélectriques, proportionnelle au champ électrique :

$$\vec{P}(M) = \epsilon_0 \chi_e \cdot \vec{E}(M),$$

où χ_e est une constante caractéristique du milieu (susceptibilité diélectrique).

Montrer que toutes les formules valables dans le vide sont transposables à un tel milieu diélectrique (sans tenir compte de la présence des dipôles constituant le milieu), à condition d'y remplacer le coefficient ϵ_0 par une autre constante ϵ , caractéristique du milieu, que l'on calculera en fonction de χ_e .

— SOLUTION —

1° Le potentiel électrostatique que crée en un point quelconque P le dipôle élémentaire de moment $\vec{d\vec{p}}$ placé au point M , est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{MP} \cdot \vec{d\vec{p}}}{MP^3},$$

c'est-à-dire, posant : $\vec{r} = \vec{PM}$.

$$dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P}(M) \cdot \vec{r}}{r^3} \cdot d\bar{v}$$

Le potentiel électrostatique $V(P)$ que crée au point P l'ensemble des dipôles

contenus dans la portion de diélectrique considérée, est :

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \cdot d\mathcal{V}$$

Le potentiel que créerait au même point P la répartition de charges proposée par l'énoncé, est :

$$V'(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho_f}{r} \cdot d\mathcal{V} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_S \frac{\sigma_f}{r} \cdot dS$$

$$V'(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\iiint_{\mathcal{V}} \frac{-\operatorname{div} \vec{P}}{r} \cdot d\mathcal{V} + \iint_S \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{r} \cdot dS \right]$$

L'intégrale de surface ci-dessus n'est autre que le flux de $\vec{P}(M)$ sortant de la surface S ($\vec{n} \cdot dS = d\vec{S}$), elle peut donc être transformée en intégrale triple par application du théorème d'Ostrogradsky :

$$V'(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\iiint_{\mathcal{V}} \frac{-\operatorname{div} \vec{P}}{r} \cdot d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) \cdot d\mathcal{V} \right]$$

Or :

$$\operatorname{div}(a \cdot \vec{b}) = a \cdot \operatorname{div} \vec{b} + \vec{b} \cdot \operatorname{grad} a$$

c'est-à-dire ici :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) = \frac{1}{r} \cdot \operatorname{div} \vec{P} + \vec{P} \cdot \frac{-\vec{r}}{r^3},$$

d'où nous déduisons :

$$V'(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{-\operatorname{div} \vec{P}}{r} + \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{r} - \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \cdot d\mathcal{V} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \cdot d\mathcal{V},$$

les potentiels $V(P)$ et $V'(P)$ coïncident donc en tout point P , ce qui démontre la proposition indiquée par l'énoncé.

2° On ne peut guère donner du champ électrique \vec{E} une définition expérimentale, au sein d'un diélectrique (une charge introduite au sein d'un diélectrique solide n'y est pas mobile, à moins qu'elle ne soit introduite dans une cavité vide ou pleine d'air, ce qui change la répartition et l'orientation des dipôles; de même, au sein d'un diélectrique liquide, il faut bien tenir compte des effets de surface au contact des corps immergés); cependant, calculé au moyen de la relation :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V,$$

il peut être exprimé en fonction du champ de vecteur $\vec{P}(M)$, donc aussi au moyen des charges fictives de densités ρ_f (volumique) et σ_f (surfactive); il vérifiera donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} \text{ au sein du diélectrique,} \\ \Delta E_n = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \text{ à la traversée de la surface du diélectrique.} \end{array} \right.$$

Il est naturel de poser : $\vec{P}(M) = \vec{0}$ à l'extérieur du diélectrique (absence de dipôles). De la définition de l'induction électrique :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P},$$

nous déduisons la variation ΔD_n de la composante normale de l'induction, à la traversée de la surface du diélectrique (de l'intérieur vers l'extérieur)

$$\Delta D_n = \epsilon_0 \cdot \Delta E_n + (0 - P_n)$$

Nous avons vu ci-dessus que : $\Delta E_n = \sigma_f / \epsilon_0$, et que, par définition même de σ_f : $P_n = \sigma_f$, il en résulte que :

$$\Delta D_n = 0$$

CAS GÉNÉRAL. — S'il se trouve dans l'espace des charges autres que les dipôles constituant le diélectrique (à l'extérieur du diélectrique aussi bien qu'à l'intérieur), le champ électrique \vec{E} est la somme du champ créé par ces charges et du champ créé par les dipôles, il est donc égal au champ créé par la réunion des charges vraies et des charges fictives introduites au § 1^o, et l'on pourra écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho + \rho_f}{\epsilon_0} \text{ en tout point de l'espace où la densité volumique de charges} \\ \text{vraies est } \rho, \\ \Delta E_n = \frac{\sigma + \sigma_f}{\epsilon_0} \text{ à la traversée d'une surface chargée avec la densité surfa-} \\ \text{cique } \sigma. \end{array} \right.$$

avec : $\rho_f = -\text{div } \vec{P}$, $\sigma_f = \vec{P} \cdot \vec{n}$; le vecteur \vec{P} est nul à l'extérieur d'un diélectrique, et généralement non nul à l'intérieur. De la définition du vecteur induction électrique \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

il résulte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{D} = \rho \text{ en tout point (densité volumique de charges vraies : } \rho), \\ \Delta D_n = \sigma \text{ à la traversée de toute surface (densité surfacique de charges} \\ \text{vraies : } \sigma). \end{array} \right.$$

Les phénomènes électrostatiques sont donc représentables par les équations suivantes :

$\text{rot } \vec{E} = 0$	$\text{div } \vec{D} = \rho$	(1)
$\Delta E_t = 0$	$\Delta D_n = \sigma$	

les vecteurs \vec{D} et \vec{E} étant liés par une loi dépendant du milieu où se déroulent

les phénomènes étudiés (le vecteur \vec{P} dépend généralement de E et de la nature et l'état du milieu : état physique, température, etc.).

3° Si dans un milieu les vecteurs \vec{P} et \vec{E} sont liés par :

$$\vec{P}(M) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(M),$$

les relations démontrées au § 2° :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_f}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \Delta E_n = \frac{\sigma + \sigma_f}{\epsilon_0}$$

deviennent :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho - \epsilon_0 \chi_e \cdot \operatorname{div} \vec{E}}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \Delta E_n = \frac{\sigma - \epsilon_0 \chi_e \cdot \Delta E_n}{\epsilon_0}$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \Delta E_n = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad (2)$$

à condition de poser :

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_0 \cdot (1 + \chi_e)}$$

Les relations (2) sont formellement identiques aux relations fondamentales définissant le champ électrique dans le vide, au remplacement près de la constante ϵ_0 par la constante ϵ . Toutes les relations qui en sont des conséquences (loi de Coulomb, formule du dipôle, etc.) seront également formellement identiques à celles démontrées dans le vide, au même remplacement près.

Dans un tel milieu, les vecteurs \vec{D} et \vec{E} sont également colinéaires :

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}.$$

REMARQUE. — On dit souvent que la loi de Coulomb n'est valable que dans le vide et qu'il faut la remplacer, dans un milieu matériel, par une loi analogue :

$$|\vec{f}| = \frac{qq'}{4\pi\epsilon \cdot r^2},$$

c'est une erreur de conception, la loi de Coulomb reste valable, à condition de tenir compte de toutes les charges présentes (donc aussi des dipôles du milieu qui se créent ou s'orientent lors de l'introduction des charges q et q'); on trouve simplement commode de ne considérer que les charges introduites, et l'on utilise la formule ci-dessus; il importe de noter qu'elle n'est valable que dans certains milieux (dits « linéaires, homogènes et isotropes ») tandis que la loi de Coulomb est valable partout (en électromagnétisme non relativiste).

2. ÉQUILIBRE DES CONDUCTEURS CAPACITÉ ET ÉNERGIE

2-1* **PRESSION ÉLECTROSTATIQUE.** — *Un conducteur sphérique, éloigné de tout autre corps, est porté au potentiel : $V = 10\,000$ volts. Calculer la force de répulsion qui s'exerce entre les deux hémisphères obtenus en coupant la sphère par un plan diamétral, et maintenus en contact.*

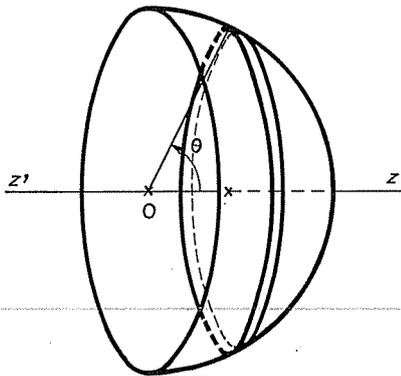


FIG. 2-1.

INDICATION. — La force qui s'exerce sur l'un des hémisphères est la résultante des forces élémentaires \vec{df} qui s'exercent sur chaque élément de sa surface.

Si σ est la densité surfacique de charges sur l'élément considéré, \vec{df} est égale au produit de $d\vec{S}$ (vecteur normal à l'élément de surface, et de module égal à l'aire de cet élément) par la pression électrostatique :

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

où ε_0 est la permittivité diélectrique du vide.

— SOLUTION —

La sphère, de rayon R , est chargée uniformément (car elle est éloignée de tout autre corps) avec une densité surfacique de charges :

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

La charge totale Q de la sphère étant égale au produit du potentiel V par la capacité $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, la pression électrostatique est :

$$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{(4\pi\varepsilon_0 R)^2 V^2}{2\varepsilon_0 (4\pi R^2)^2} = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2R^2}$$

Soit $z'z$ l'axe du grand cercle de section; nous pouvons partager l'une des surfaces hémisphériques en une infinité d'anneaux (de révolution autour de $z'z$) d'angles polaires (par rapport à $z'z$) compris entre θ et $\theta + d\theta$ (θ variant, pour l'ensemble des anneaux, de 0 à $\frac{\pi}{2}$).

La force $d\vec{f}$ qui s'exerce sur chacun de ces éléments est portée par $z'z$ et a pour module :

$$df = p \cdot (dS) \cdot \cos \theta = \frac{\epsilon_0 V^2}{2R^2} \cdot (2\pi R^2 \sin \theta \cdot d\theta) \cdot \cos \theta$$

La résultante \vec{f} cherchée, c'est-à-dire la force exercée sur l'hémisphère considéré par l'autre hémisphère, est également portée par $z'z$ et a pour module :

$$f = \int df = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \epsilon_0 V^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

$$= \pi \epsilon_0 V^2 \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \epsilon_0 V^2}{2} = 4\pi \epsilon_0 \frac{V^2}{8}$$

Application numérique :

$$4\pi \epsilon_0 = (9 \cdot 10^9)^{-1} \quad \text{donc} \quad f = \frac{10^8}{72 \cdot 10^9} \simeq 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ newton}$$

$$V = 10^4 \text{ volts}$$

2-2*. ÉQUILIBRE D'UNE BULLE DE SAVON. — Une bulle de savon de rayon R , faite d'un liquide (conducteur) dont le coefficient de tension superficielle (par rapport à l'air) est A , est portée au potentiel V . Calculer, en fonction des données et de la pression atmosphérique p_0 , l'accroissement ΔR du rayon de la bulle. On admettra que ΔR est très petit devant R et que l'air est un gaz parfait.

CONSEIL. — Le plus simple est sans doute d'écrire l'équilibre de la bulle avant et après l'intervention de l'expérimentateur, ce qui fournit l'expression de la pression interne p_1 (c'est-à-dire la pression de l'air emprisonné par la bulle) avant et après. En écrivant que cet air intérieur est un gaz parfait, l'on obtiendra l'expression de ΔR cherchée.

— SOLUTION —

Avant l'intervention de l'expérimentateur, la bulle est en équilibre si les forces de pression interne (p_1) d'une part, les forces de pression atmosphérique et les forces de tension superficielle de l'autre, se compensent exactement :

$$p_1 = p_0 + \frac{4A}{R}$$

Après l'intervention, à la pression interne ($p_1 + \Delta p_1$) s'ajoute la pression électrostatique :

$$p_2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[\frac{4\pi\epsilon_0(R + \Delta R)V}{4\pi(R + \Delta R)^2} \right]^2 = \frac{\epsilon_0 V^2}{2(R + \Delta R)^2}$$

Le nouvel équilibre se traduit donc par :

$$p_1 + \Delta p_1 + \frac{\epsilon_0 V^2}{2(R + \Delta R)^2} = p_0 + \frac{4A}{R + \Delta R}$$

Si l'air est effectivement un gaz parfait, le produit de la pression interne par le volume interne n'aura pas varié :

$$\left(p_0 + \frac{4A}{R}\right) \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \left(p_0 + \frac{4A}{R + \Delta R} - \frac{\epsilon_0 V^2}{2(R + \Delta R)^2}\right) \cdot \frac{4}{3} \pi (R + \Delta R)^3$$

ce qui peut s'écrire :

$$p_0[(R + \Delta R)^3 - R^3] + 4A[(R + \Delta R)^2 - R^2] - \frac{\epsilon_0 V^2}{2}[R + \Delta R] = 0$$

ou, si ΔR est très petit devant R :

$$p_0[3R^2 \cdot \Delta R] + 4A[2R \cdot \Delta R] - \frac{\epsilon_0 V^2}{2}[R + \Delta R] = 0$$

d'où nous déduisons :

$$\Delta R = \frac{\epsilon_0 V^2 R}{6p_0 R^2 + 16AR - \epsilon_0 V^2}$$

2-3. — Au sommet d'une sphère conductrice de rayon R on pose un petit

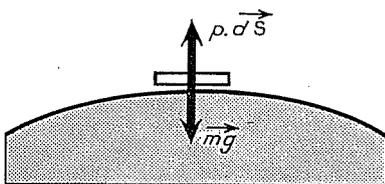


FIG. 2-3.

disque conducteur de rayon $r = \frac{R}{10}$ et de masse $m = 1$ gramme. On élève progressivement le potentiel V de la sphère.

Calculer la valeur de V pour laquelle le disque se soulève. $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.

— SOLUTION —

La charge totale de la sphère étant égale à $4\pi R^2 \sigma$, et à $4\pi \epsilon_0 R V$, la pression électrostatique est égale à :

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_0 V}{R}\right)^2 = \frac{\epsilon_0 V^2}{2R^2}$$

Le disque se soulève au moment précis où la force de pression électrostatique équilibre le poids du disque, c'est-à-dire pour la valeur de V telle que :

$$mg = \pi r^2 \cdot \frac{\epsilon_0 V^2}{2R^2}$$

c'est-à-dire pour :

$$V = \frac{R}{r} \sqrt{\frac{8 mg}{4\pi\epsilon_0}}$$

Application numérique :

$$\left. \begin{array}{l} R/r = 10 \\ m = 10^{-3} \text{ kg} \\ g = 10 \text{ ms}^{-2} \\ 4\pi\epsilon_0 = (9 \cdot 10^9)^{-1} \end{array} \right\} \text{ donc } V = 10 \sqrt{8 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10^9} = 268 \text{ 000 volts}$$

2-4. TRAVAIL DES FORCES ÉLECTROSTATIQUES. — *Calculer le travail des forces électrostatiques dans le rapprochement de deux disques conducteurs circulaires (d'épaisseurs négligeables) identiques de même capacité C. Les disques, isolés, sont d'abord infiniment éloignés puis, dans l'état final, accolés de façon à ne plus former qu'un seul disque. On fera le calcul dans les trois cas suivants :*

1° L'un des disques porte la charge + Q, l'autre la charge - Q.

2° L'un des disques porte la charge + Q, l'autre une charge nulle.

3° Les deux disques portent la même charge + Q.

On décrira la répartition des charges et l'aspect des lignes de champ lorsque les disques ne sont plus séparés que par une distance infiniment petite par rapport à leurs rayons.

— SOLUTION —

Le plus simple, pour calculer le travail des forces électrostatiques, est d'écrire qu'il est égal à l'opposé de la variation de l'énergie électrostatique du système :
 $W = \epsilon_i - \epsilon_f$.

$$1^\circ W_1 = \epsilon_{i1} - \epsilon_{f1} = \left[\frac{(+Q)^2}{2C} + \frac{(-Q)^2}{2C} \right] - 0 = + \frac{Q^2}{C}$$

$$2^\circ W_2 = \epsilon_{i2} - \epsilon_{f2} = \left[\frac{(+Q)^2}{2C} + 0 \right] - \frac{(+Q)^2}{2C} = 0$$

$$3^\circ W_3 = \epsilon_{i3} - \epsilon_{f3} = \left[\frac{(+Q)^2}{2C} + \frac{(+Q)^2}{2C} \right] - \frac{(+2Q)^2}{2C} = - \frac{Q^2}{C}$$

Lorsque les deux disques se rapprochent, ils s'influencent mutuellement et, quand leur distance respective devient infiniment petite par rapport à leurs rayons, l'influence peut devenir totale.

1° Quand les disques sont infiniment éloignés l'un de l'autre, les deux faces du premier disque portent chacune la charge $+\frac{Q}{2}$, les deux faces du second portant chacune la charge $-\frac{Q}{2}$.

Quand les deux disques se rapprochent, la charge interne de chacun (c'est-à-dire celle qui se trouve en face de l'autre disque) augmente (par influence électrostatique) au détriment de la charge externe.

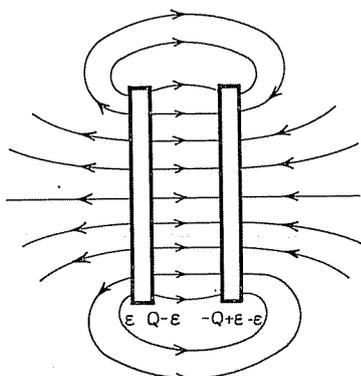


FIG. 2-4-1°.

Quand les deux disques se trouvent infiniment rapprochés, les effets de bords deviennent négligeables, le système devient un simple condensateur plan : charges externes nulles, charges internes égales respectivement à $+Q$ et à $-Q$, lignes de champ rectilignes et parallèles dirigées du premier vers le deuxième disque (cf. figure).

2° Quand les disques sont infiniment éloignés l'un de l'autre, les deux faces du premier disque portent chacune la charge $+\frac{Q}{2}$, les deux faces du second portant chacune une charge nulle.

Quand les deux disques se rapprochent, l'influence électrostatique du premier disque sur le second se traduit par l'apparition d'une charge interne négative (plus généralement: du signe de $-Q$) et d'une charge externe opposée à la précédente.

Quand les deux disques se trouvent infiniment rapprochés, les effets de bords deviennent négligeables, et l'on peut admettre que les densités surfaciques de charges des quatre faces deviennent uniformes. En effectuant le calcul du champ électrostatique à l'intérieur des deux disques (calcul très simple que nous laissons à la sagacité du lecteur) et en écrivant que ce champ y est nul (équilibre des conducteurs), nous aboutissons à la conclusion que les charges externes des deux disques, ainsi que la charge interne du premier, sont égales à $+\frac{Q}{2}$, et que la charge interne du second disque est égale à $-\frac{Q}{2}$. Le spectre des lignes de champ a le même aspect, entre les deux disques, que dans

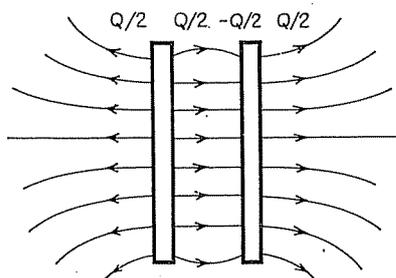


FIG. 2-4-2°.

le cas précédent; à l'extérieur du système, il présente le même aspect que le spectre d'un disque seul dans l'espace (cf. figure).

3° Quand les disques sont infiniment éloignés l'un de l'autre, les quatre faces des deux disques portent chacune la charge $+\frac{Q}{2}$.

Quand les deux disques se rapprochent, l'influence électrostatique tend à diminuer les charges internes au profit des charges externes.

Quand les deux disques se trouvent infiniment rapprochés, un calcul semblable au précédent montre que les charges internes s'annulent, les charges externes devenant ainsi égales chacune à $+Q$. Les lignes de champ issues des faces internes (tant que leurs charges restent non nulles) semblent se repousser (cf. figure), tandis que celles issues des faces externes gardent l'aspect des lignes de champ issues d'un disque chargé seul dans l'espace.

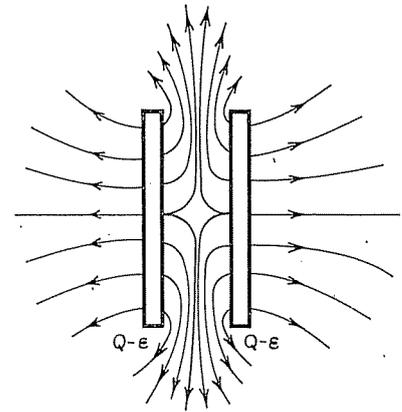


FIG. 2-4-3°.

2-5*. RAYON DU PROTON. — *Bien que les dimensions d'une particule élémentaire ne constituent pas des grandeurs physiques bien définies, il peut être intéressant dans certains cas de se faire une idée de l'« encombrement » d'une telle particule.*

Essayer, dans cette perspective, de définir puis de calculer le « rayon » d'un proton, sachant que sa masse au repos est : $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, et que sa charge est : $q = 1,60 \cdot 10^{-19}$ coulomb. Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8$ ms⁻¹.

INDICATION. — Pour traduire l'encombrement du proton, il est naturel de l'assimiler à une sphère conductrice de rayon r , et d'admettre que toute son énergie au repos (égale, comme l'on sait, à m_0c^2) se trouve sous forme électrostatique.

— SOLUTION —

L'énergie électrostatique d'une sphère conductrice de rayon r (donc de capacité : $C = 4\pi\epsilon_0 r$) possédant la charge q est égale à $q^2/2C = q^2/8\pi\epsilon_0 r$. Admettre que toute l'énergie au repos d'un proton est sous forme électrostatique, c'est admettre que :

$$q^2/8\pi\epsilon_0 r = m_0c^2$$

Nous définissons ainsi le rayon du proton comme étant égal à :

$$r = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot m_0 c^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb} \\ m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI} \\ c = 3 \cdot 10^8 \cdot \text{ms}^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow r = \frac{2,56 \cdot 10^{-38} \cdot 9 \cdot 10^9}{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \text{ m.}$$

Nous trouvons ainsi :

$$r = 7,66 \cdot 10^{-19} \text{ mètre.}$$

2-6*. CAPACITÉ D'UNE SPIRE CONDUCTRICE. — *A l'aide d'un fil conducteur fin de section circulaire on forme un anneau circulaire. Déterminer la capacité C de ce conducteur (supposé seul dans l'espace) en fonction du rayon intérieur a de l'anneau et du rayon b (b ≪ a) de la section du fil.*

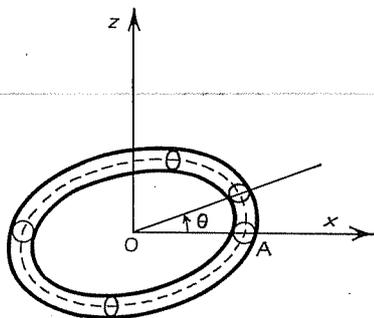


FIG. 2-6.

INDICATIONS. — 1° L'anneau étant fin, on peut confondre, au voisinage de sa surface, le champ électrostatique dû à sa charge avec le champ qui serait créé par la même charge répartie uniformément sur la ligne axiale de l'anneau.

Soit A un point de la surface de l'anneau; le potentiel V_A en A se calcule alors par la formule :

$$V_A = \oint \frac{\lambda \cdot ds}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

où λ est la densité linéaire des charges sur la ligne axiale, ds un élément de longueur sur la ligne axiale (s est l'abscisse curviligne sur cette ligne), et r la distance séparant l'élément considéré du point A. L'intégration est faite le long de la ligne axiale.

2° Pour effectuer le calcul du potentiel V_A , il peut être commode de rapporter l'anneau à un système de coordonnées cylindriques $\{r, \theta, z\}$ approprié, dans lequel il est défini par l'inéquation :

$$[r - (a + b)]^2 + z^2 \leq b^2$$

L'intégrale curviligne devient une intégrale simple (variable d'intégration : θ). Cette intégrale n'étant pas calculable au moyen des fonctions élémentaires habituelles, on pourra chercher une valeur approchée de l'intégrale en divisant l'intervalle d'intégration $[-\pi, +\pi]$ en deux intervalles distincts : $[|\theta| \leq \theta_0]$ et $[|\theta| > \theta_0]$, sur lesquels on effectuera des approximations convenables.

— SOLUTION —

Dans un système de coordonnées cylindriques approprié (origine O au centre du tore, axe polaire Ox dans le plan médiateur, axe des cotes Oz suivant l'axe du tore), l'anneau peut être défini par l'inéquation :

$$[r - (a + b)]^2 + z^2 \leq b^2$$

Soit A le point de coordonnées cylindriques $(a + 2b, 0, 0)$; ce point est situé sur la surface du conducteur, et son potentiel V_A n'est autre que le potentiel de l'anneau. Soit q la charge de l'anneau ($q = C \cdot V_A$); comme l'anneau est fin, nous pouvons admettre que le champ électrostatique en A est identique à celui que créerait la même charge q répartie uniformément sur la ligne axiale, donc avec une densité linéaire de charges égale à :

$$\lambda = \frac{q}{2\pi \cdot (a + b)}$$

Le potentiel V_A peut ainsi se calculer par :

$$V_A = \oint \frac{\lambda \cdot ds}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2\pi(a + b)} \oint \frac{ds}{r}$$

où ds est l'élément de longueur sur la ligne axiale, et r la distance qui sépare A de cet élément.

$$\begin{aligned} ds &= (a + b) \cdot d\theta \\ r &= \sqrt{[(a + 2b) - (a + b) \cos \theta]^2 + [(a + b) \sin \theta]^2} \\ &= \sqrt{(a + b)^2 - 2(a + b)(a + 2b) \cos \theta + (a + 2b)^2} \end{aligned}$$

d'où nous déduisons la capacité cherchée :

$$C = \frac{8\pi^2 \cdot \epsilon_0}{\int \frac{d\theta}{\sqrt{(a + b)^2 - 2(a + b)(a + 2b) \cos \theta + (a + 2b)^2}}}$$

L'intégrale I ci-dessus, qui peut s'écrire :

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 + 2(a + b)(a + 2b)(1 - \cos \theta)}}$$

n'est pas calculable exactement au moyen des fonctions élémentaires habituelles. Comme il est impossible de trouver, pour la fonction à intégrer, une approximation qui soit bonne à la fois pour θ petit et pour θ grand, nous sommes amenés à introduire un angle θ_0 suffisamment petit pour qu'on puisse confondre $1 - \cos \theta_0$ et $\theta_0^2/2$ (ainsi, naturellement, que θ_0 , $\sin \theta_0$ et $\text{tg } \theta_0$),

1. On aboutit aussi à cette approximation (faite ici *a priori*) quand dans le calcul exact de V_A on néglige b devant a , et que simultanément on admet que la charge q est répartie uniformément sur le tore : ces deux approximations simultanées sont toutes deux d'autant meilleures que le rapport b/a est plus petit.

mais suffisamment grand pour qu'on puisse négliger le rapport b/a devant lui (ce qui est possible si, comme l'indique l'énoncé, le fil est suffisamment fin). Nous écrivons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{pour } |\theta| \leq \theta_0 : \\ I_1 = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 + 2(a+b)(a+2b)(1-\cos \theta)}} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \simeq 2 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 + (a+b)(a+2b)\theta^2}} \\ \rightarrow \text{pour } |\theta| > \theta_0 : \\ I_2 = \int_{|\theta| > \theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{b^2 + 2(a+b)(a+2b)(1-\cos \theta)}} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \simeq \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+2b)}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{1-\cos \theta} \end{array} \right.$$

Ces deux approximations se justifient très naturellement : nous avons choisi θ_0 tel qu'on puisse confondre $1 - \cos \theta_0$ et $\theta_0^2/2$, donc, *a fortiori*, nous pouvons confondre $1 - \cos \theta$ et $\theta^2/2$ pour tous les angles inférieurs à θ_0 (en valeur absolue), donc remplacer $1 - \cos \theta$ par $\theta^2/2$ dans l'intégrale I_1 .

Par contre, comme nous avons choisi θ_0 grand devant le rapport b/a , nous sommes sûrs que le rapport $b^2/2a^2$, donc aussi le rapport $b^2/2(a+b)(a+2b)$, est négligeable devant $1 - \cos \theta_0$, donc, *a fortiori*, devant $1 - \cos \theta$ pour $|\theta| > \theta_0$. Nous pouvons ainsi supprimer dans l'intégrale I_2 le terme b^2 du dénominateur.

Comme les domaines de validité de nos deux approximations semblent se recouvrir (et ce d'autant plus que le fil est plus fin), nous pouvons espérer que le résultat final ne dépendra pas trop de θ_0 (*a priori* arbitraire).

Le calcul se poursuit ainsi :

$$\begin{aligned} I_1 &\simeq \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+2b)}} \left[\text{Log} \left| \theta \sqrt{(a+b)(a+2b)} + \sqrt{b^2 + \theta^2(a+b)(a+2b)} \right| \right]_0^{\theta_0} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+2b)}} \text{Log} \frac{\theta_0 \sqrt{(a+b)(a+2b)} + \sqrt{b^2 + \theta_0^2(a+b)(a+2b)}}{b} \\ &\simeq \frac{2}{a} \text{Log} \frac{2a\theta_0}{b} \\ I_2 &\simeq \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+2b)}} \left[\text{Log} \left| \text{tg} \frac{\theta}{4} \right| \right]_{\theta_0}^{\pi} = - \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+2b)}} \text{Log} \left| \text{tg} \frac{\theta_0}{4} \right| \\ &\simeq \frac{2}{a} \text{Log} \frac{4}{\theta_0} \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi l'intégrale I égale à :

$$I = I_1 + I_2 \simeq \frac{2}{a} \text{Log} \frac{8a}{b}$$

d'où finalement la capacité C cherchée :

$$C \simeq \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot 2\pi}{\text{Log} \frac{8a}{b}} = \frac{4\pi^2\epsilon_0 \cdot a}{\text{Log} \frac{8a}{b}}$$

2-7. IMAGES ÉLECTRIQUES : ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION ALLONGÉ. — 1° Un segment de droite AB , de milieu O , est uniformément chargé (densité linéaire de charge : λ) Montrer que les surfaces équipotentielles sont des ellipsoïdes de révolution dont les foyers sont A et B .

2° Sur un ellipsoïde équipotentiel de demi-axes a et b on considère deux points P et Q situés respectivement aux distances a et b du point O . Montrer que les intensités E_P et E_Q des champs \vec{E}_P et \vec{E}_Q en P et Q sont dans le rapport :

$$\frac{E_P}{E_Q} = \frac{a}{b}$$

3° Calculer la capacité d'un ellipsoïde de révolution allongé (demi-axes : a et b) seul dans l'espace.

INDICATIONS. — 1° Le plus simple est de montrer que le champ \vec{E} créé en un point quelconque M est porté par la bissectrice intérieure de l'angle (\vec{MA}, \vec{MB}) .

2° On peut par exemple écrire que les circulations de \vec{E}_P et \vec{E}_Q entre deux équipotentielles voisines sont égales.

3° Soient A et B les foyers de l'ellipsoïde considéré; on pourra montrer que le champ à l'extérieur de l'ellipsoïde est le même que celui que créerait, en l'absence du conducteur, le segment de droite AB chargé uniformément avec une densité linéaire de charge que l'on déterminera. Il faudra de plus montrer que la charge réelle de l'ellipsoïde est égale à la charge du segment chargé fictif.

— SOLUTION —

1° Prenons pour origine le point H , projection orthogonale du point M où nous voulons connaître le champ ($HM = h$), sur la droite support de AB . Un point P de AB sera ainsi repéré, soit par son abscisse $\overline{HP} = x$, soit par le paramètre angulaire $(\vec{MH}, \vec{MP}) = \theta$ (cf. figure).

L'élément PP' , de longueur dx , vu du point M sous l'angle $d\theta$, porte la charge

$$\delta Q = \lambda \cdot dx$$

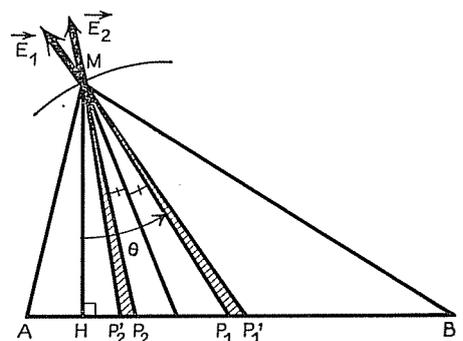


FIG. 2-7 (1°).

il crée au point M un champ électrique \vec{dE} de module :

$$dE = \frac{\lambda \cdot dx}{4\pi\epsilon_0 \cdot MP^2} = \frac{\lambda \cdot d(h \cdot \operatorname{tg} \theta)}{4\pi\epsilon_0 \cdot \left(\frac{h}{\cos \theta}\right)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 \cdot h} \cdot d\theta$$

Nous constatons que le module du champ créé en M par un élément linéaire chargé de AB ne dépend que de l'angle sous lequel on le voit du point M. Le segment AB peut être décomposé, dans sa totalité et sans répétition, en couples d'éléments $P_1P'_1$ et $P_2P'_2$ à l'aide d'angles élémentaires $d\theta_1$ et $d\theta_2$ symétriques par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle (\vec{MA}, \vec{MB}) . Les vecteurs \vec{dE}_1 et \vec{dE}_2 respectivement dus aux éléments $P_1P'_1$ et $P_2P'_2$ sont de même module et symétriques par rapport à la bissectrice; il en va de même pour les champs créés par tous les couples d'éléments. Leur résultante \vec{E}_M , champ créé par le segment chargé AB en M, est donc portée par la bissectrice de l'angle (\vec{MA}, \vec{MB}) .

La méridienne de la surface équipotentielle qui passe par M possède par conséquent la propriété suivante : toute normale à cette courbe en un point est bissectrice intérieure de l'angle obtenu en joignant ce point à deux points fixes A et B : c'est une ellipse dont A et B sont les foyers; les surfaces équipotentielles sont donc des ellipsoïdes homofocaux de foyers A et B et de révolution autour de AB.

2° Sur une équipotentielle (potentiel : V) de demi-axes a et b, considérons deux points P et Q situés respectivement aux distances a et b de O; l'équipotentielle de potentiel $V + dV$ a pour demi-axes: $a + da$ et $b + db$; $-dV$ est égal à la circulation du vecteur champ sur une ligne de champ quelconque joignant les deux équipotentielles, en particulier :

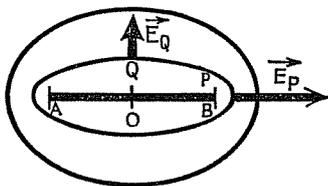


FIG. 2-7 (2°).

$$-dV = E_P \cdot da = E_Q \cdot db.$$

Or $c^2 = a^2 - b^2 = AB^2/4$ a la même valeur pour toutes les équipotentielles, donc, après différentiation : $0 = 2a \cdot da - 2b \cdot db$.

Le résultat proposé par l'énoncé est alors évident :

$$\frac{E_P}{E_Q} = \frac{a}{b}$$

3° Notons au préalable que sur une équipotentielle des paragraphes 1° et 2°, le potentiel est facile à calculer; il suffit de le calculer en un des deux points

où la droite support de AB rencontre l'équipotentielle :

$$V = \int_{x=a-c}^{x=a+c} \frac{\lambda \cdot dx}{4\pi\epsilon_0 \cdot x} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{Log} \frac{a+c}{a-c} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{Log} \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Venons-en maintenant à la solution de la troisième question, apparemment sans rapport avec les précédentes. La surface de l'ellipsoïde conducteur est une surface équipotentielle, de potentiel V . Remarquons que cette surface resterait une équipotentielle de potentiel V si l'on remplaçait l'ellipsoïde conducteur par un segment chargé AB joignant les foyers A et B, et portant une densité linéaire de charge uniforme (cf. ci-dessus) :

$$\lambda = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot V}{\operatorname{Log} \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}}$$

Le potentiel à l'infini resterait également nul. Le théorème d'unicité (dont une démonstration sera esquissée plus bas) nous indique alors que le potentiel resterait inchangé *en tout point extérieur à l'équipotentielle* V , il en serait donc évidemment de même pour le champ : *A l'extérieur de l'ellipsoïde, le champ est le même, qu'il soit créé par l'ellipsoïde conducteur porté au potentiel V ou par le segment AB portant la densité linéaire de charge λ .*

Considérons une équipotentielle de potentiel V' supérieur à V . Le flux du champ $\vec{E}_{E'}$ sortant de cette équipotentielle est égal à Q/ϵ_0 (théorème de Gauss);

— si le champ est créé par l'ellipsoïde conducteur, Q est la charge de ce conducteur,

— si le champ est créé par le segment AB, Q est la charge portée par ce segment.

Ainsi la charge Q portée effectivement par l'ellipsoïde est-elle égale à la charge que porterait le segment AB :

$$Q = \lambda \cdot 2c = 2\lambda \cdot \sqrt{a^2 - b^2}$$

La capacité cherchée est par définition le rapport $C = Q/V$, donc est égale à :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{8\pi\epsilon_0 \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{\operatorname{Log} \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}}$$

Appendice : théorème d'unicité. — On démontre souvent le théorème d'unicité dans le cas d'un ensemble de conducteurs, cette restriction est inutile, la démon-

tration faite dans ces conditions n'étant ni plus simple, ni plus rigoureuse que la démonstration générale.

Une portion d'espace \mathcal{V} est limitée par une surface fermée \mathcal{S} et contient des charges dont la répartition est connue : densité volumique ρ en chaque point de \mathcal{V} . Le problème est de savoir si, connaissant certaines *conditions aux limites* sur la surface, on sera capable ou non de déterminer le potentiel V en tout point de la portion d'espace considérée, sachant que ce potentiel vérifie l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Comme conditions aux limites, on peut par exemple se donner les valeurs du potentiel V en chaque point de \mathcal{S} (*conditions de Dirichlet*) ou celles du champ \vec{E} (*conditions de Neumann*), ou bien encore celles de V et \vec{E} en chaque point de \mathcal{S} (*conditions de Cauchy*); on peut encore se donner les valeurs de V en certains points de \mathcal{S} et celles de \vec{E} en tous les autres points de \mathcal{S} (*conditions mixtes Neumann-Dirichlet*).

Nous ne chercherons pas à démontrer qu'il existe une solution de l'équation de Poisson, mais nous allons démontrer l'unicité de la solution éventuelle. Soit donc une portion d'espace \mathcal{V} (dans laquelle la répartition des charges est connue), limitée par une surface fermée \mathcal{S} (en chaque point de laquelle on connaît, soit la valeur du potentiel, soit celle du champ); le potentiel électrostatique vérifie l'équation (1). Supposons trouvées deux solutions V_1 et V_2 ; leur différence $V_1 - V_2 = U$ est solution de :

$$\nabla^2 U = 0 \quad (2)$$

On connaît en chaque point de \mathcal{S} la valeur du potentiel ou celle du champ, donc on sait qu'en chaque point de \mathcal{S} l'une au moins des grandeurs $U (= V_1 - V_2)$ ou $\vec{\text{grad}} U (= \vec{E}_2 - \vec{E}_1)$ est nulle, donc *a fortiori* que :

$$\iint_{\mathcal{S}} U \cdot \vec{\text{grad}} U \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3)$$

La relation générale :

$$\text{div} (a \cdot \vec{b}) = a \cdot \text{div} \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{\text{grad}} a$$

s'écrit ici :

$$\text{div} (U \cdot \vec{\text{grad}} U) = U \cdot \nabla^2 U + (\vec{\text{grad}} U)^2$$

Appliquant le théorème d'Ostrogradsky, nous déduisons de l'égalité (3) :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\text{grad}} U)^2 \cdot d\vec{v} = 0$$

ce qui montre que la différence $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)$ est nulle en tout point de \mathcal{V} . On démontre par ailleurs l'existence d'une solution, ce qui permet d'énoncer :

Une portion d'espace \mathcal{V} étant limitée par une surface fermée \mathcal{S} , le potentiel V et le champ électrostatique \vec{E} sont définis de manière unique en tout point de \mathcal{V} , par la donnée de :

- la répartition des charges à l'intérieur de \mathcal{V} ,
- la valeur de V ou \vec{E} en chaque point de \mathcal{S} .

Ce théorème appelle quelques remarques :

- Sont ainsi suffisantes les conditions de Dirichlet, ou celles de Neumann ou les conditions mixtes.
- Les conditions de Cauchy sont excessives : la donnée du potentiel en chaque point de \mathcal{S} d'une part, celle du champ d'autre part, conduisent séparément à deux solutions bien définies de l'équation de Poisson, solutions qui n'ont *a priori* aucune raison de coïncider.
- Notons que les conditions de Neumann définissent le champ de manière unique, mais ne définissent en fait le potentiel qu'à une constante additive près.
- La surface fermée peut être formée de plusieurs morceaux (c'est le cas par exemple pour l'intérieur d'une couronne sphérique, limitée par deux surfaces sphériques).
- On pourrait songer à se donner les valeurs de V ou \vec{E} en chaque point d'une surface *ouverte* (par exemple en chaque point d'un disque); on montre alors que les conditions de Dirichlet ou de Neumann sont insuffisantes, tandis que celles de Cauchy conduisent généralement à des résultats physiquement inacceptables.
- Le problème se pose de savoir dans quelle mesure on peut considérer l'infini comme formant une surface fermée. On le peut effectivement dans tous les cas réels, où toutes les charges présentes se trouvent à distance finie (potentiel et champ nuls à l'infini). Dans le cas cependant de certains modèles où l'on admet l'existence de charges à l'infini, il pourra arriver que la solution de l'équation de Poisson ne soit plus unique.

2-8. THÉORÈME D'EARNSHAU. — Démontrer qu'un système de conducteurs chargés ne peut pas être en équilibre stable sans l'intervention d'autres forces que les forces électrostatiques.

— SOLUTION —

Toute charge q soumise à l'action d'un champ électrostatique \vec{E} est soumise à la force de Coulomb :

$$\vec{f} = q \cdot \vec{E}$$

Cette charge ne peut être en équilibre sous l'action des seules forces électrostatiques que si le champ \vec{E} est nul, et l'équilibre n'est stable que si le potentiel V est minimal au point considéré. Le champ électrique à proximité des charges superficielles d'un conducteur chargé est strictement non nul; aucun équilibre (stable) n'est possible, puisque le potentiel V n'a pas de minimum à distance finie: les charges superficielles d'un conducteur ne peuvent être en équilibre que parce que les électrons sont maintenus au sein du réseau métallique par des forces non électrostatiques. Des raisonnements semblables s'appliquent aux phénomènes décrits par l'électromagnétisme classique: ainsi pouvait-on, dès avant la découverte des phénomènes quantiques, prévoir l'existence de phénomènes ne dépendant pas des forces alors connues.

3. SYSTÈMES DE CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE

INFLUENCE-CONDENSATEURS

3-1*. INFLUENCE D'UNE CHARGE PONCTUELLE SUR UN PLAN. — Une charge ponctuelle $+q$ est placée à une distance d d'un plan conducteur illimité maintenu au potentiel zéro.

1° Calculer la densité superficielle σ des charges développées par influence sur le conducteur, à une distance x du centre de symétrie des charges développées sur le plan. Calculer la charge totale portée par le plan.

2° Calculer la force \vec{f} exercée par le conducteur sur la charge ponctuelle.

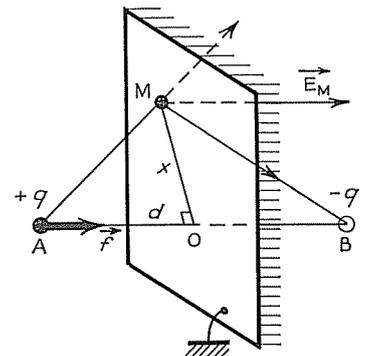


FIG. 3-1.

INDICATIONS. — 1° Rappelons ici la théorie des images électriques, théorie qui n'est pas du programme mais qui est fort utile, voire nécessaire, pour la résolution de nombreux exercices. Cette méthode a pour but de ramener les systèmes proposés à des systèmes plus simples ou déjà connus. Elle est fondée sur une étude mathématique de l'équation de Poisson $\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ qui a été ébauchée plus haut

(problème 2-7, appendice), et qui aboutit au théorème d'unicité :

Le potentiel à l'intérieur d'un volume \mathcal{V} est déterminé sans ambiguïté par la donnée des charges qui s'y trouvent et des valeurs que prend le potentiel (ou le champ) sur la surface fermée qui le limite.

Notons que le théorème continue de s'appliquer quand la surface limite est partiellement ou entièrement à l'infini; dans le cas où la surface limite est celle d'un conducteur, il suffit même de se donner la charge totale dudit conducteur (*id est* on n'a pas besoin de préciser la répartition des charges sur le conducteur pour que le potentiel soit bien déterminé). La méthode des images électriques consiste à chercher des charges (on cherchera leurs valeurs et leurs emplacements), appelées images électriques des charges effectivement déposées par l'expérimentateur, qui, si elles remplaçaient le ou les conducteurs considérés, laisseraient les potentiels de leurs surfaces inchangés. Le théorème d'unicité rappelé ci-dessus nous assure que le champ réel créé en tout point extérieur aux conducteurs par ces mêmes conducteurs peut être calculé aux moyen des images. L'échange est en général tout à fait avantageux, et permet même de calculer la répartition des charges sur les conducteurs : il suffit de calculer, au moyen des images, le champ sur les surfaces des conducteurs (plus rigoureusement, en des points extérieurs aux conducteurs, mais infiniment rapprochés de ceux-ci).

2° La force \vec{f} qu'exerce le plan sur la charge $+q$ est égale au produit par $+q$ du champ créé par le plan à l'emplacement de la charge; elle est donc tout simplement égale à la force qu'exercerait sur $+q$ l'image électrique trouvée au § 1°.

— SOLUTION —

1° L'image électrique de la charge $+q$ par rapport au plan (de potentiel zéro) est évidemment une charge ponctuelle $-q$ symétrique de la précédente par rapport au plan. Dans le demi-espace contenant la charge $+q$, le champ électrostatique est la superposition du champ créé par $+q$ et du champ créé par son image $-q$; en particulier, en un point M infiniment rapproché du plan :

$$\vec{E}_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{AM}}{AM^3} - \frac{\vec{BM}}{BM^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{AB}}{AM^3}$$

La densité superficielle σ des charges développées par influence sur le plan est égale au produit par $-\epsilon_0$ de l'intensité E_M du champ précédent :

$$\sigma = -\epsilon_0 \cdot E_M = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{-2d}{(x^2 + d^2)^{3/2}} = -\frac{q}{2\pi d^2} \left(1 + \frac{x^2}{d^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

où x est la distance de M à la projection H de A sur le plan (la distribution σ est évidemment de révolution autour de H).

La charge totale portée par le plan est égale à la charge image $-q$ car le flux du champ sortant du plan (ou, plus rigoureusement, d'une surface infiniment proche, du côté de la charge réelle $+q$) est le même, que le champ soit créé par le plan conducteur ou qu'il soit créé par l'image électrique; il est d'ailleurs facile de retrouver ce résultat en sommant les charges portées réellement par le plan :

$$\begin{aligned} q' &= \iint_{\text{plan}} \sigma \cdot dS = \int_0^\infty \frac{-q}{2\pi d^2} \left(1 + \frac{x^2}{d^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\pi x \cdot dx \\ &= q \left[\left(1 + \frac{x^2}{d^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^\infty = -q \end{aligned}$$

2° La force \vec{f} qu'exerce le plan sur la charge $+q$ est égale au produit par $+q$ du champ créé par le plan en A , donc est égale à la force qu'exercerait la charge image sur la charge réelle; c'est une force d'attraction, portée par AB et de même sens, dont l'intensité est :

$$f = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot (2d)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 \cdot d^2}$$

3-2*. INFLUENCE D'UNE CHARGE PONCTUELLE SUR UNE SPHÈRE. — Une sphère conductrice S de rayon $R = 10$ cm a son centre O à 20 cm d'une charge électrique ponctuelle $q = \frac{1}{30}$ microcoulomb placée au point A .

1° La sphère S est maintenue au potentiel zéro. Déterminer la densité superficielle de charge σ' en chaque point de S due à l'influence de q sur S . Calculer la charge de S .

2° La sphère S est maintenant supposée isolée et primitivement neutre. Calculer la densité superficielle σ'' en chaque point de S . Déterminer sur S la ligne neutre et calculer les charges q'' et $-q''$ qui apparaissent sur S par influence de la charge q .

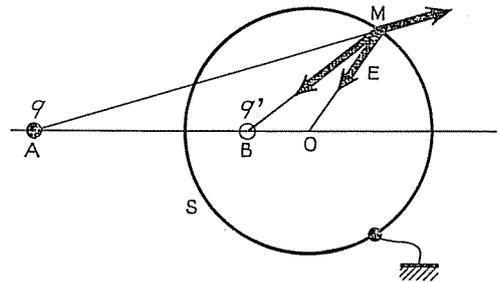


FIG. 3-2.

INDICATIONS. — 1° Nous ne reviendrons plus dorénavant sur la théorie des images électriques développée à propos des problèmes 2-7 et 3-1. L'idée est toujours de chercher si la figure géométrique \mathcal{F} constituée par la surface du ou des conducteurs n'a pas déjà été rencontrée comme équipotentielle d'un système de charges déjà étudié, ou, sinon, s'il n'est pas possible d'imaginer un système de charges assez simple dont la figure \mathcal{F} serait une équipotentielle. Le système de charges trouvé doit comporter, d'une part les charges réelles (autres que celles portées par les conducteurs) du problème proposé, d'autre part des charges, dites images, situées dans la portion d'espace occupée réellement par les conducteurs.

Dans le cas présent, le lecteur vérifiera aisément qu'une image électrique de la charge $+q$ est constituée par une charge q' (que l'on calculera) placée au conjugué harmonique B de A par rapport à la sphère S .

2° Quelles que soient les charges développées par influence sur la sphère S , ces charges ont une somme algébrique nulle et créent un potentiel nul au centre O de S ; le potentiel de S est donc égal au potentiel créé en O par la charge q . On peut alors considérer l'équilibre étudié maintenant comme la superposition de deux équilibres : d'une part l'équilibre étudié précédemment (§ 1°), d'autre part l'équilibre d'une sphère portée au potentiel V et seule dans l'espace.

— SOLUTION —

1° Soit B le conjugué harmonique de A par rapport à S . Le point B est situé entre A et O , à la distance $OB = R^2/OA = R/2$ de O . La sphère S est alors l'ensemble des points dont le rapport des distances à A et B est égal à 2; le potentiel en ces points est nul si l'on remplace le conducteur par une charge $q' = -\frac{1}{2}q$ placée en B . La théorie des images électriques nous indique que le champ créé par S à l'extérieur de celle-ci est identique à celui que créerait la charge q' .

En particulier, le champ électrostatique en un point M de la surface de S est :

$$\vec{E}_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{AM}}{AM^3} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{BM}}{BM^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{AM} - 4 \cdot \vec{BM}}{AM^3} = -\frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{OM}}{AM^3}$$

La densité superficielle de charge σ'_M en M est :

$$\sigma'_M = \epsilon_0 \cdot \bar{E}_M = -\frac{3qR}{4\pi \cdot AM^3} \quad (\bar{E}_M \text{ est compté positivement si } \vec{E}_M \text{ sort de S})$$

Application numérique :

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{1}{30} \text{ microcoulomb} = \frac{10^{-7}}{3} \text{ coulomb} \\ R = 10 \text{ cm} = 10^{-1} \text{ m} \\ AM \text{ mesuré en mètres} \end{array} \right| \Rightarrow \sigma'_M = -\frac{10^{-8}}{4\pi \cdot AM^3} \text{ MKS}$$

La théorie des images électriques nous indique que la charge totale de la sphère S est égale à la charge image $q' = -\frac{1}{2} q$; il est d'ailleurs facile de retrouver ce résultat en intégrant la densité trouvée sur S.

2° L'équilibre de la sphère S initialement neutre et isolée peut être considéré comme la superposition de deux équilibres (*théorème de superposition des états d'équilibre*: la superposition de deux états d'équilibre est un état d'équilibre; *théorème d'unicité*: si les conditions aux limites de cet état d'équilibre coïncident avec celles du système étudié, c'est l'état d'équilibre cherché):

- d'une part l'équilibre précédemment étudié : charge $+q$ en A, sphère de charge q' , au potentiel zéro;
- d'autre part l'équilibre constitué par S centrée en O, seule dans l'espace, portant la charge $-q'$.

La densité superficielle de charge σ''_M en un point quelconque M de la surface de S est la somme algébrique des densités σ'_M et σ_M des deux équilibres composants :

$$\sigma''_M = \sigma'_M + \sigma_M = -\frac{3qR}{4\pi \cdot AM^3} + \frac{-q'}{4\pi \cdot R^2} = \frac{q}{8\pi \cdot R^2} \cdot \frac{AM^3 - 6 \cdot R^3}{AM^3}$$

Application numérique :

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{1}{30} \text{ microcoulomb} = \frac{10^{-7}}{3} \text{ coulomb} \\ R = 10 \text{ cm} = 10^{-1} \text{ m} \\ AM \text{ exprimé en m} \end{array} \right| \Rightarrow \sigma''_M = \frac{10^{-5}}{24 \cdot \pi} \left(1 - \frac{6 \cdot 10^{-3}}{AM^3} \right) \text{ MKS}$$

La ligne neutre est par définition l'ensemble des points M où la densité σ''_M est nulle, c'est donc un cercle défini par : $AM = R\sqrt[3]{6}$, dont le centre H est situé sur le segment OA, à 4,25 cm de O.

La ligne neutre partage la sphère S en deux zones de charges opposées, l'une, de charge négative $-q''$, du côté de la charge influençante positive q , l'autre, $+q''$, positive, de l'autre côté. Le calcul de q'' se fait en intégrant la densité

surfaique trouvée sur l'une ou l'autre des deux zones; par exemple, sur la première :

$$-q'' = \iint_{R \leq AM \leq R\sqrt[3]{6}} \sigma_M'' \cdot dS$$

Il est naturel de regrouper les points M de même densité σ_M'' , situés à la même distance de A. L'élément d'aire correspondant est l'élément de couronne sphérique : $dS = 2\pi R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta$, où θ est l'angle $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$. Dans le triangle AOM l'on peut écrire :

$$AM^2 = OA^2 + OM^2 - 2 \cdot OA \cdot OM \cdot \cos \theta = 5R^2 - 4R^2 \cdot \cos \theta$$

d'où nous déduisons :

$$dS = 2\pi R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \pi \cdot AM \cdot d(AM).$$

$$-q'' = \int_R^{R\sqrt[3]{6}} \frac{q}{8\pi R^2} \cdot \left(1 - 6 \frac{R^3}{AM^3}\right) \cdot \pi \cdot AM \cdot d(AM)$$

donc :

$$-q'' = \frac{q}{8R^2} \left[AM^2 \right]_R^{R\sqrt[3]{6}} - \frac{3qR}{4} \left[-\frac{1}{AM} \right]_R^{R\sqrt[3]{6}}$$

c'est-à-dire :

$$q'' = \frac{q}{16} (-3\sqrt[3]{36} + 13)$$

Application numérique :

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{30} \text{ microcoulomb} = \frac{10^{-7}}{3} \text{ coulomb} \\ \sqrt[3]{36} &\simeq 3,30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow q'' \simeq 6,44 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

3-3. INFLUENCE D'UN FIL CHARGÉ SUR UN PLAN. — Un fil rectiligne illimité porte une charge $+\lambda$ par unité de longueur; il est placé à la distance d d'un plan conducteur illimité maintenu au potentiel zéro, et parallèlement à ce plan.] Calculer la répartition des charges développées par influence sur ce plan.

— SOLUTION —

La recherche d'une image électrique du fil chargé, déjà facile sans aide extérieure, nous est rendue triviale par la résolution du problème 1-3 : [l'image cherchée est

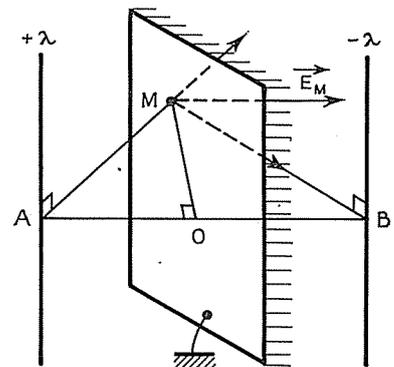


FIG. 3-3.

un fil rectiligne illimité symétrique du précédent par rapport au plan P, et portant la charge $-\lambda$ par unité de longueur.

Le système étudié est invariant par une translation quelconque parallèle aux fils; le champ \vec{E}_M en un point M du plan P ne dépend que de sa distance x au plan des deux fils. Calculons le champ \vec{E}_M en un point M infiniment rapproché du plan P dans le demi-espace où se trouve le fil réel:

$$\vec{E}_M = \frac{+\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{AM}}{AM^2} + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{BM}}{BM^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{AB}}{AM^2}$$

où A et B sont les projections de M sur le fil réel et le fil image respectivement.

La densité surfacique σ_M en M cherchée est égale, d'après le théorème de Coulomb, au produit par ϵ_0 de la mesure algébrique \vec{E}_M de \vec{E}_M (comptée positivement si \vec{E}_M sort de la surface du conducteur, et négativement dans le cas contraire) :

$$\sigma_M = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_M = \epsilon_0 \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-2d}{x^2 + d^2} = -\frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{d}{x^2 + d^2}$$

Il est facile de constater, par intégration de σ_M , que le plan P porte une charge $-\lambda$ par unité de hauteur (comptée parallèlement au fil).

3-4*. — *Montrer que parmi un nombre fini de conducteurs chargés seuls dans l'espace, dont la somme des charges est nulle, au moins un des conducteurs est chargé partout positivement et au moins un chargé partout négativement.*

INDICATION. — Parmi les n potentiels V_1, V_2, \dots, V_n des conducteurs C_1, C_2, \dots, C_n en nombre fini, il existe évidemment au moins un maximum V_a et au moins un minimum V_b . On pourra montrer préalablement que V_a est positif ou nul et V_b négatif ou nul.

On pourra ensuite étudier les lignes de champ qui partent de C_a et C_b ou y aboutissent.

— SOLUTION —

Montrons que les potentiels V_1, V_2, \dots, V_n des n conducteurs ne sont pas tous strictement positifs ni tous strictement négatifs; en effet, la somme totale des charges Q_1, Q_2, \dots, Q_n est égale à :

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum_{i=1}^n C_{1i} \cdot V_i + \sum_{i=1}^n C_{2i} \cdot V_i + \dots + \sum_{i=1}^n C_{ni} \cdot V_i \\ &= V_1 \cdot \sum_{j=1}^n C_{j1} + V_2 \cdot \sum_{j=1}^n C_{j2} + \dots + V_n \cdot \sum_{j=1}^n C_{jn} \end{aligned}$$

Il est démontré dans tous les cours que les sommes $\sum_{j=1}^n C_{ji}$ sont positives ou nulles, et qu'une au moins d'entre elles (une seule dans le cas où un conducteur entoure complètement tous les autres, toutes dans le cas où aucun conducteur n'en entoure complètement aucun autre) est strictement positive. Il devient alors évident que si tous les potentiels V_1, V_2, \dots, V_n étaient strictement positifs ou strictement négatifs, Q serait également strictement positive ou strictement négative respectivement, ce qui est en contradiction avec l'énoncé.

Parmi les n potentiels V_1, V_2, \dots, V_n il existe nécessairement un maximum V_a et un minimum V_b , d'ailleurs distincts (sinon, d'après ce qui précède, tous les potentiels V_1, V_2, \dots, V_n seraient nuls, le champ serait nul partout, et les charges portées par les conducteurs seraient toutes nulles, non seulement globalement, mais même localement). En accord avec ce qui précède, nous pouvons affirmer que V_a est positif ou nul et que V_b est négatif ou nul. Soit alors C_a le conducteur (ou l'un des conducteurs) dont le potentiel est V_a ; si en un point de la surface de C_a la densité superficielle de charge était négative, il y arriverait une ligne de champ provenant nécessairement d'un point (à distance finie ou non) où le potentiel serait supérieur à V_a , ce qui est impossible puisque d'une part il n'y a nulle part de charge condensée autre que les charges portées par les conducteurs et que d'autre part V_a est supérieur ou égal à V_i quel que soit i , ainsi qu'au potentiel zéro de l'infini. C_a est donc bien chargé partout positivement.

Nous démontrerions de même, en étudiant les lignes de champ partant de C_b , que le ou les conducteurs de potentiel V_b sont chargés partout négativement.

3-5*. DÉTERMINATION D'UNE MATRICE DES CAPACITÉS. — *Trois sphères conductrices de même rayon $r = 1$ cm ont leurs centres O_1, O_2 , et O_3 aux sommets d'un triangle équilatéral de côté $d = 10$ cm. On admettra que l'action d'une sphère à une distance égale à 10 fois son rayon est la même que si toute sa charge était au centre.*

1° Calculer les capacités et les coefficients d'influence de ce système de conducteurs.

2° Déterminer les charges des trois sphères si la première est portée au potentiel

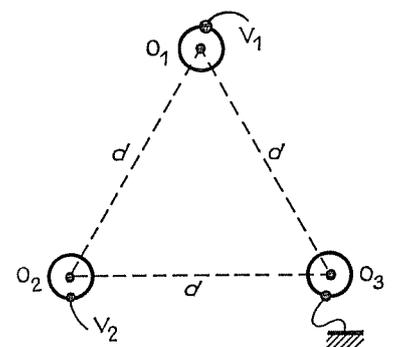


FIG. 3-5.

$V_1 = 6\,000$ volts, la seconde au potentiel $V_2 = 3\,000$ volts, et la troisième est mise au sol. Quelle est alors l'énergie du système ?

CONSEIL. — Il est beaucoup plus commode de calculer directement les potentiels en fonction des charges que de faire l'inverse car le potentiel créé au centre d'une sphère par sa propre charge nous est connu, ainsi que celui créé par une charge ponctuelle (à laquelle on assimile, pour ce qui est de l'action sur la sphère considérée, chacune des deux autres). Il ne reste plus qu'à inverser la matrice ainsi trouvée.

— SOLUTION —

1° Quand les trois sphères sont portées aux potentiels V_1, V_2, V_3 , elles acquièrent respectivement les charges Q_1, Q_2, Q_3 , chacune fonction linéaire de V_1, V_2, V_3 .

Cherchons par exemple à calculer le potentiel V_1 de la première sphère S_1 , lequel est égal à la somme des potentiels V_{11}, V_{12} et V_{13} créés par les charges Q_1, Q_2, Q_3 . Le conducteur S_1 étant un volume équipotentiel, nous pouvons calculer V_1 en n'importe lequel des points de S_1 , mais le point où le calcul sera le plus simple est son centre O_1 :

— Le potentiel V_{11} créé en son centre par les charges situées sur la surface de S_1 est égal à :

$$V_{11} = \iint \frac{\sigma_1 \cdot dS_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \iint \sigma_1 \cdot dS_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

— Le potentiel créé en O_1 par les charges situées sur la surface de la seconde sphère S_2 est égal à :

$$V_{12} = \iint \frac{\sigma_2 \cdot dS_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot d_{12}}$$

où d_{12} est la distance séparant O_1 du point courant M_2 de la surface de S_2 . Si d est très grand devant r , on peut négliger dans l'intégrale ci-dessus les variations de d_{12} , ce qui revient à admettre que l'action d'une sphère à une distance égale à 10 fois son rayon est la même que si toute sa charge était au centre, moyennant quoi V_{12} s'écrit simplement :

$$V_{12} \simeq \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot d}$$

— Le potentiel créé en O_1 par les charges situées sur la surface de la troisième sphère S_3 est de même égal à :

$$V_{13} = \iint \frac{\sigma_3 \cdot dS_3}{4\pi\epsilon_0 \cdot d_{13}} \simeq \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 \cdot d}$$

Nous obtenons ainsi le potentiel V_1 de S_1 sous la forme :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{d} + \frac{Q_3}{d} \right)$$

et, de même :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{d} + \frac{Q_2}{r} + \frac{Q_3}{d} \right)$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{d} + \frac{Q_2}{d} + \frac{Q_3}{r} \right)$$

ou, matriciellement :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{r} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la matrice des capacités, il suffit maintenant d'inverser la matrice ainsi trouvée; le calcul d'inversion ne présente aucun intérêt pour le physicien, qui trouve :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot rd}{(2r+d)(d-r)} \begin{pmatrix} r+d & -r & -r \\ -r & r+d & -r \\ -r & -r & r+d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Numériquement, les capacités et coefficients d'influence ont pour valeurs :
capacités :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{10^{-3} \cdot 1,1 \cdot 10^{-1}}{9 \cdot 10^9 \cdot 1,2 \cdot 10^{-1} \cdot 0,9 \cdot 10^{-1}} \simeq + 1,13 \cdot 10^{-12} \text{ farad.}$$

coefficients d'influence :

$$C_{12} = C_{23} = C_{32} = \frac{-10^{-5}}{9 \cdot 10^9 \cdot 1,2 \cdot 10^{-1} \cdot 0,9 \cdot 10^{-1}} \simeq - 0,103 \cdot 10^{-12} \text{ farad.}$$

2° Si les potentiels V_1, V_2, V_3 sont respectivement égaux à 6 000 volts, 3 000 volts et zéro, les charges Q_1, Q_2, Q_3 sont respectivement égales à :

$$Q_1 = C_{11} \cdot V_1 + C_{12} \cdot V_2 + C_{13} \cdot V_3 = 10^{-12} \cdot (+ 1,13 \cdot 6\,000 - 0,103 \cdot 3\,000) \\ = + 6,48 \cdot 10^{-9} \text{ coulomb,}$$

$$Q_2 = C_{21} \cdot V_1 + C_{22} \cdot V_2 + C_{23} \cdot V_3 = 10^{-12} \cdot (- 0,103 \cdot 6\,000 + 1,13 \cdot 3\,000) \\ = + 2,79 \cdot 10^{-9} \text{ coulomb,}$$

$$Q_3 = C_{31} \cdot V_1 + C_{32} \cdot V_2 + C_{33} \cdot V_3 = 10^{-12} \cdot (- 0,103 \cdot 6\,000 - 0,103 \cdot 3\,000) \\ = - 0,927 \cdot 10^{-9} \text{ coulomb.}$$

L'énergie du système que nous étudions est :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (Q_1 \cdot V_1 + Q_2 \cdot V_2 + Q_3 \cdot V_3)$$

donc, numériquement :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (6,48 \cdot 6\,000 + 2,79 \cdot 3\,000) \cdot 10^{-9} = 2,36 \cdot 10^{-5} \text{ joule.}$$

3-6. — Un conducteur C comporte une cavité sphérique S_1 de rayon a . A l'intérieur de cette cavité est placée une sphère conductrice creuse S_2 de rayon b . A l'intérieur de la cavité, supposée sphérique de rayon c , de la sphère S_2 est placée une troisième sphère conductrice S_3 , de rayon d ($d < c < b < a$).

On réalise un condensateur en prenant pour armatures, d'une part la sphère S_2 , d'autre part le conducteur C et la sphère S_3 réunis. Calculer la capacité C de ce condensateur, sachant que les sphères S_1, S_2, S_3 sont concentriques.

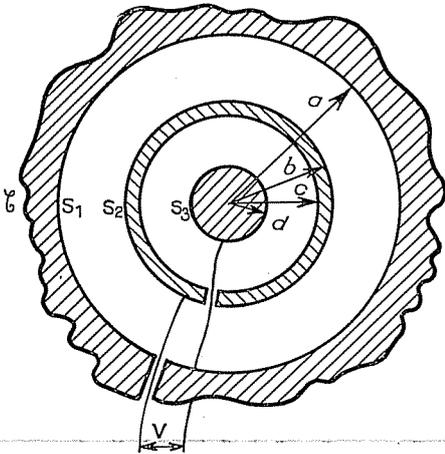


FIG. 3-6.

— SOLUTION —

Appelons par exemple Q la charge portée par la sphère S_3 , et Q' celle que porte la cavité sphérique du conducteur C . La sphère S_2 porte alors, par application du théorème des éléments correspondants, la charge $-Q$ sur sa face interne, et la charge $-Q'$ sur sa face externe.

Dans les espaces laissés libres par les trois conducteurs, le champ \vec{E} est évidemment radial de centre O , centre commun de S_1, S_2, S_3 . Sa mesure $E(r)$ est facile à calculer par application du théorème de Gauss à une sphère de centre O et de rayon r :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{— si } d < r < c : 4\pi r^2 \cdot E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{donc } E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \\ \text{— si } b < r < a : 4\pi r^2 \cdot E(r) = \frac{Q - Q - Q'}{\epsilon_0} = -\frac{Q'}{\epsilon_0} \quad \text{donc } E(r) = \frac{-Q'}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \end{array} \right.$$

La différence de potentiel V existant entre les deux armatures de notre condensateur peut se calculer de deux façons, comme égale à la circulation du vecteur champ, soit de S_3 à S_2 , soit de C à S_2 :

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c} \right) = \int_d^c E(r) \cdot dr = V = \int_a^b E(r) \cdot dr = \frac{-Q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

La capacité C cherchée est par définition égale au rapport de la charge du condensateur à la différence de potentiel existant entre les deux armatures :

$$C = \frac{Q + Q'}{V} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{cd}{c-d} + \frac{ab}{a-b} \right)$$

REMARQUE. — Pour calculer la capacité C , nous nous sommes contentés d'en utiliser la définition; il aurait été beaucoup plus simple, et beaucoup plus rapide, de

remarquer que la sphère S_3 et la face interne de la sphère S_2 d'une part, le conducteur C et la face externe de la sphère S_2 d'autre part, forment deux condensateurs sphériques disposés en parallèle; la formule obtenue ci-dessus aurait alors été obtenue sans le moindre calcul.

3-7*. CONDENSATEUR ELLIPSOÏDAL. — *Les surfaces en regard d'un condensateur de première espèce sont deux ellipsoïdes de révolution allongés homofocaux. Calculer la capacité C de ce condensateur en fonction de la distance $2c$ des foyers et des demi-grands axes a_1 et a_2 .*

INDICATION. — Dans le cas où les potentiels V_1 et V_2 imposés respectivement aux armatures intérieure et extérieure sont dans le rapport :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\text{Log} \frac{a_1 + c}{a_1 - c}}{\text{Log} \frac{a_2 + c}{a_2 - c}}$$

une image électrique du système proposé nous est fournie par la résolution du problème 2-7 : charge répartie uniformément sur le segment de droite joignant les foyers. Le rapport de cette charge à la différence $[V_1 - V_2]$ est la capacité cherchée

— SOLUTION —

Lorsque le potentiel V_1 de l'armature intérieure et le potentiel V_2 de l'armature extérieure sont dans le rapport :

$$\frac{V_1}{V_2} = \text{Log} \left(\frac{a_1 + c}{a_1 - c} \cdot \frac{a_2 - c}{a_2 + c} \right)$$

il ressort de la résolution du problème 2-7 que le champ entre les deux armatures est le même que s'il était créé par une charge Q répartie uniformément sur le segment de droite joignant les deux foyers, avec une densité linéaire de charge :

$$\lambda = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot V_1}{\text{Log} \frac{a_1 + c}{a_1 - c}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot V_2}{\text{Log} \frac{a_2 + c}{a_2 - c}}$$

Les potentiels V_1 et V_2 des deux armatures sont alors égaux respectivement à :

$$V_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \text{Log} \frac{a_1 + c}{a_1 - c} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \text{Log} \frac{a_2 + c}{a_2 - c}$$

et la capacité C cherchée est simplement égale, par définition, à :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{2c}{\text{Log} \left(\frac{a_1 + c}{a_1 - c} \cdot \frac{a_2 - c}{a_2 + c} \right)}$$

REMARQUE. — Nous ne devons pas être gênés par le fait que nous n'avons pu calculer la charge Q du condensateur (égale à la charge de l'armature intérieure, donc à la charge image) que dans un cas très particulier. En effet, la capacité une fois calculée, la théorie des condensateurs nous enseigne que le rapport $\frac{Q}{V_1 - V_2}$ est un invariant; peu importe dans quel cas particulier l'on a calculé cet invariant.

3-8. CONDENSATEUR DIÉDRIQUE. — *Un condensateur est formé de deux armatures rectangulaires ABCD et A'B'C'D', appartenant aux deux demi-plans d'un dièdre de rectiligne α . Les côtés AB et A'B', de longueur commune a , sont parallèles à l'arête du dièdre, et situés à une distance d de celle-ci; les côtés CD et C'D', également parallèles à l'arête et de longueur a , sont situés à la distance $d + b$ de l'arête; le rectangle A'B'C'D' se déduit de ABCD par une rotation α autour de l'arête du dièdre.*

Calculer la capacité du condensateur ainsi formé, en admettant que le champ entre les armatures a la symétrie de révolution autour de l'arête du dièdre, et que le champ est nul au dehors.

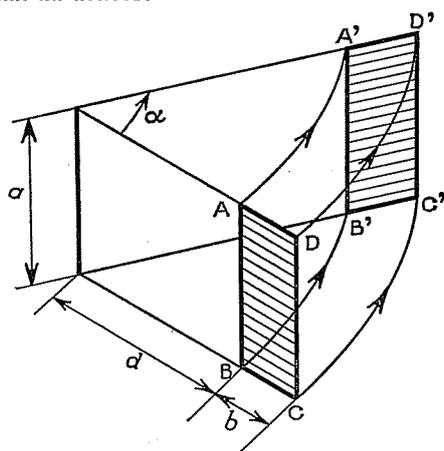


FIG. 3-8.

— SOLUTION —

L'énoncé suppose que le champ a la symétrie de révolution autour de l'arête du dièdre; comme, au niveau des deux condensateurs, le champ est normal

à leurs surfaces, nous en déduisons que les lignes de champ sont, entre les armatures, des arcs de cercles d'axe l'arête du dièdre. L'intensité E du champ \vec{E} est constante le long d'une ligne de champ et ne dépend que du rayon r de celle-ci.

La différence $V - V'$ des potentiels des deux armatures est égale à la circulation du champ le long d'une ligne de champ MM' :

$$V - V' = \int_{MM'} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} E(r) \cdot r \cdot d\theta = E(r) \cdot r \alpha.$$

Du résultat ci-dessus nous déduisons la densité superficielle de charge sur l'armature ABCD, à la distance r de l'arête du dièdre :

$$\sigma(r) = \epsilon_0 \cdot E(r) = \frac{\epsilon_0}{r \cdot \alpha} (V - V')$$

La charge du condensateur, égale à la charge portée par l'armature ABCD, s'obtient par intégration de la densité surfacique σ :

$$Q = \iint_{ABCD} \sigma \cdot dS = \int_{r=d}^{r=d+b} \frac{\epsilon_0}{r \cdot \alpha} (V - V') \cdot a \cdot dr = \frac{\epsilon_0 \cdot a}{\alpha} (V - V') \operatorname{Log} \frac{d+b}{d}$$

La capacité C cherchée est par définition égale au rapport de la charge Q à la différence $V - V'$ des potentiels des deux armatures :

$$C = \frac{Q}{V - V'} = \frac{\epsilon_0 \cdot a}{\alpha} \cdot \operatorname{Log} \left(1 + \frac{b}{d} \right)$$

On remarquera que lorsque α tend vers 0, d vers l'infini, le produit $d \cdot \alpha$ restant constant et égal à e , l'expression ci-dessus tend vers celle :

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{e}$$

de la capacité d'un condensateur plan ($S = a \cdot b$).

3-9*. CONDENSATEUR CONIQUE. — 1^o L'espace est rapporté à un repère ortho-normé $Oxyz$; calculer le potentiel électrostatique en un point M de coordonnées sphériques r, θ, ψ , sachant que la demi-droite Oz est chargée uniformément avec une densité linéaire de charge $+\lambda$ et que la demi-droite $z'O$ est chargée uniformément avec la densité $-\lambda$.

2^o Calculer la capacité du condensateur formé par un plan conducteur illimité sur lequel on pose un cône conducteur de demi-angle au sommet θ , d'axe normal

au plan et de hauteur h . Le cône repose sur le plan par sa pointe, et on suppose, bien entendu, que l'extrémité du cône comporte une très petite région non conductrice. On négligera les effets de bords à l'extrémité libre du cône.

INDICATIONS. — 1° Il est aisé de constater que les potentiels en deux points symétriques par rapport au plan xOy sont opposés. Considérons par exemple un point M dont l'azimut θ est inférieur à $\pi/2$, et soit H la projection de ce point sur Oz , puis O' le point défini par : $\overline{OO'} = 2\overline{OH}$. Les potentiels créés en M par les demi-droites chargées $z'O$ et $O'z$ se compensent, le potentiel $V(M)$ en M est celui créé par un segment de longueur $2r \cdot \cos \theta$ dont la charge est répartie uniformément avec la densité $+\lambda$, potentiel dont le calcul a déjà été fait lors de la résolution du problème 2-7.

2° Dans le cas où le potentiel imposé au plan conducteur est nul, un système d'images électriques évident nous est suggéré par la première partie : demi-droite chargée convenablement, confondue avec l'axe du cône, demi-droite de charge opposée et symétrique de la précédente par rapport au plan conducteur.

— SOLUTION —

1° Soit M un point d'azimut θ inférieur à $\pi/2$, soit H sa projection sur Oz , et soit O' le symétrique de O par rapport à H . Les demi-droites

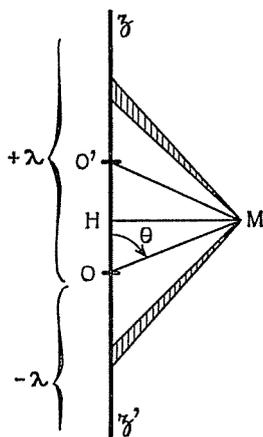


FIG. 3-9 1°.

$z'O$ et $O'z$, symétriques par rapport à HM , et de charges opposées, créent un potentiel nul en M . Le potentiel $V(M)$ en M est créé par le segment de droite OO' , chargé uniformément avec la densité $+\lambda$. Le calcul d'un tel potentiel a déjà été fait lors de la résolution du problème 2-7; nous avons trouvé :

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \text{Log} \frac{a+c}{a-c}$$

où a et c sont respectivement le demi-grand axe et la demi-distance focale de l'ellipse de foyers O et O' passant par M . En l'occurrence, ces longueurs sont respectivement égales à :

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = OM = r \quad \text{et} \quad c = OH = r \cdot \cos \theta.$$

Le potentiel $V(M)$ cherché est donc égal à :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \text{Log} \left| \cotg \frac{\theta}{2} \right|.$$

2° Dans le cas où le potentiel V_2 du plan conducteur est nul et où le potentiel V_1 du cône ne l'est pas, et si de plus nous négligeons les effets de bords près de l'extrémité libre du cône, un système d'images électriques, pour le

calcul du champ à l'extérieur des deux conducteurs nous est suggéré par la résolution de la première partie de ce problème : une demi-droite confondue avec l'axe du cône et chargée uniformément avec la densité linéaire :

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot V_1}{\text{Log} \left| \cotg \frac{\theta}{2} \right|}$$

et la demi-droite symétrique de la précédente par rapport au plan conducteur, chargée uniformément avec la densité linéaire $-\lambda$, auraient précisément pour surfaces équipotentielles de potentiels V_1 et $V_2 = 0$ les deux armatures de notre condensateur.

Selon la théorie des images électriques (cf. 2-7 et 3-1, 3-2), la charge Q portée effectivement par l'armature conique intérieure est égale à la somme des charges images (fictives) correspondantes. Ces charges images sont celles d'où partent, dans le § 1^o, les lignes de champ qui, dans le § 2^o, partent en fait de l'armature intérieure (théorème des éléments correspondants); comme ces lignes sont des arcs de cercle de centre O , à l'armature interne de hauteur h se trouve associée la longueur :

$$l = \frac{h}{\cos \theta}$$

de droite image, et la charge Q cherchée est :

$$Q = \lambda \cdot l = \frac{\lambda \cdot h}{\cos \theta}$$

La capacité C cherchée est par définition égale au rapport de la charge Q ainsi calculée à la différence de potentiels $V_1 - V_2$:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 \cdot h}{\cos \theta \cdot \text{Log} \left| \cotg \frac{\theta}{2} \right|}$$

En réalité, on ne peut vraiment négliger les effets de bords que si l'on dispose, prolongeant l'armature interne, un anneau de garde suffisamment grand, et porté au même potentiel.

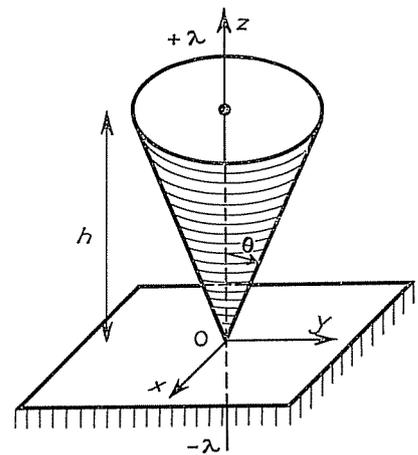


FIG. 3-9 2°.

3-10*. CONDENSATEUR BIFILAIRE. — Calculer la capacité par unité de longueur du condensateur (de seconde espèce) formé par deux conducteurs cylindriques de rayons R_1 et R_2 , et dont les axes sont situés à une distance d l'un de l'autre.

INDICATION. — L'étude d'un condensateur de seconde espèce (c'est-à-dire dont aucune armature n'entoure l'autre) se fait exactement comme celle d'un condensateur de première espèce, et la capacité a la même définition.

Comme dans les problèmes précédents, nous allons chercher des images électriques du système proposé; or nous avons déjà rencontré des équipotentielle cylindriques d'axes parallèles lors de la résolution du problème 1-3. Quand les potentiels V_1 et V_2 des deux fils sont convenables, les images électriques cherchées sont deux fils parallèles infinis partant des charges uniformément réparties avec des densités linéaires opposées $+\lambda$ et $-\lambda$; ces deux fils seront situés chacun à l'intérieur de l'un des deux conducteurs réels, mais il reste, pour pouvoir calculer la capacité c par unité de longueur, à déterminer λ et l'emplacement exact des deux fils-images.

— SOLUTION —

1° Nous avons vu, lors de la résolution du problème 1-3, que deux fils rectilignes, parallèles, infiniment longs, chargés avec des densités uniformes $+\lambda$ et $-\lambda$ ($\lambda > 0$), créaient en un point quelconque M le potentiel :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \text{Log} \frac{r_2}{r_1}$$

où r_1 est la distance de M au fil chargé positivement, et r_2 sa distance à l'autre fil.

Les équipotentielles sont les cylindres d'équations $r_2/r_1 = \text{constante}$; considérons les équipotentielles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de potentiels V_1 ($V_1 > 0$) et V_2 ($V_2 < 0$), de rayons R_1 et R_2 ; soit d ($d > R_1 + R_2$) la distance de leurs axes O_1z_1 et O_2z_2 . Ces deux équipotentielles entourent, l'une le fil F_1 , l'autre le fil F_2 .

Désignons par exemple par x_1 la distance de l'axe O_1z_1 au fil F_1 , et par x_2

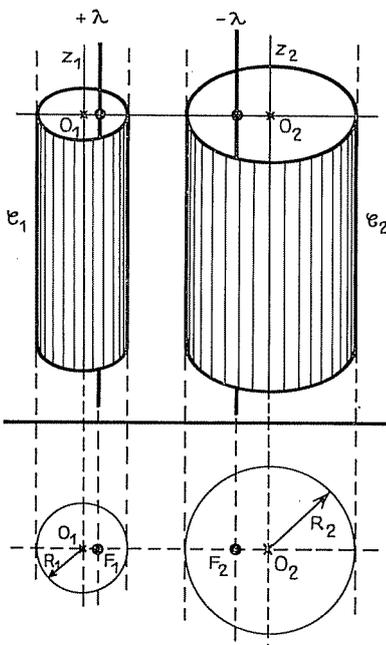


FIG. 3-10.

la distance de l'axe O_2z_2 au fil F_2 ; pour calculer x_1 et x_2 en fonction de R_1 , R_2 et d , il suffit d'exprimer que sur \mathcal{C}_1 comme sur \mathcal{C}_2 , le rapport

r_2/r_1 est constant, et en particulier qu'il prend la même valeur sur les deux génératrices situées dans le plan des deux fils de chacun de ces deux cylindres :

— sur \mathcal{C}_1 ,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{d - R_1 - x_2}{R_1 - x_1} = \frac{d + R_1 - x_2}{R_1 + x_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{d - x_2}{R_1} = \frac{R_1}{x_1}$$

— sur \mathcal{C}_2 ,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2 - x_2}{d + R_2 - x_1} = \frac{R_2 + x_2}{d + R_2 - x_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{d - x_1} = \frac{x_2}{R_2}$$

Des formules ainsi démontrées nous déduisons les expressions de x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{1}{2} \left[d - \frac{R_2^2 - R_1^2}{d} - \sqrt{d^2 - 2(R_1^2 + R_2^2) + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{d^2}} \right]$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left[d + \frac{R_2^2 - R_1^2}{d} - \sqrt{d^2 - 2(R_1^2 + R_2^2) + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{d^2}} \right]$$

Les longueurs x_1 et x_2 sont obtenues comme racines d'équations du second degré; pour choisir entre les deux racines de chaque équation, on remarque que x_1 et x_2 doivent être trouvés inférieurs respectivement à R_1 et R_2 , et l'on tient compte de ce que d est supérieur à la somme $R_1 + R_2$.

2° Venons-en maintenant à l'étude du système de conducteurs considéré par l'énoncé. Dans le cas où les potentiels V_1 et V_2 des deux conducteurs sont dans le rapport :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\text{Log} \frac{R_1}{x_1}}{\text{Log} \frac{x_2}{R_2}}$$

où x_1 et x_2 ont les expressions ci-dessus, la théorie des images électriques (cf. 2-7, 3.1 et 3-2) nous enseigne que l'on peut remplacer, pour le calcul du champ à l'extérieur des conducteurs, les deux conducteurs par deux fils F_1 et F_2 infiniment longs, d'axes parallèles aux axes des deux cylindres, situés respectivement à la distance x_1 de l'axe du premier cylindre et à la distance x_2 de l'axe du second, et portant des charges réparties uniformément avec les densités linéaires respectives $+\lambda$ et $-\lambda$, où λ est égal à :

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{V_1}{\text{Log} \frac{R_1}{x_1}} = 2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{V_2}{\text{Log} \frac{x_2}{R_2}} = 2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{V_1 - V_2}{\text{Log} \frac{R_1 R_2}{x_1 x_2}}$$

Le théorème de Gauss, appliqué à une surface infiniment proche de la surface du premier conducteur (chargé positivement), nous montre que la charge q par unité de longueur portée effectivement par ce conducteur, c'est-à-dire en définitive la charge du condensateur (de seconde espèce) étudié, est égale à la charge image par unité de longueur située à l'intérieur dudit conducteur, donc à $+\lambda$.

La capacité c par unité de longueur cherchée est par définition égale au rapport de la charge q par unité de longueur du condensateur à la différence de potentiel $V_1 - V_2$ des deux armatures :

$$c = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Log} \frac{R_1 R_2}{x_1 x_2}}$$

$$= \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Log} \frac{2 R_1 R_2}{d^2 - (R_1^2 + R_2^2) - d \sqrt{d^2 - (R_1^2 + R_2^2) + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{d^2}}}}$$

Le lecteur vérifiera aisément que ce résultat, en apparence compliqué, peut être écrit sous la forme :

$$c = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Arg ch} \frac{d^2 - (R_1^2 + R_2^2)}{2 R_1 R_2}}$$

Ce résultat permet également de calculer la capacité c' par unité de longueur du condensateur formé par un cylindre de rayon R situé à la distance h ($h > R$) d'un plan conducteur : il suffit d'appliquer la formule ci-dessus, en posant $R_1 = R$, $d = h + R_2$, et en passant à la limite pour $R_2 \rightarrow \infty$; on obtient ainsi :

$$c' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Arg ch} \frac{h}{R}}$$

Un raisonnement analogue au précédent aurait d'ailleurs permis de calculer c' directement.

3-11*. CONDENSATEUR CYLINDRIQUE EXCENTRÉ. — Un condensateur de première espèce est constitué par deux armatures dont les surfaces en regard sont deux

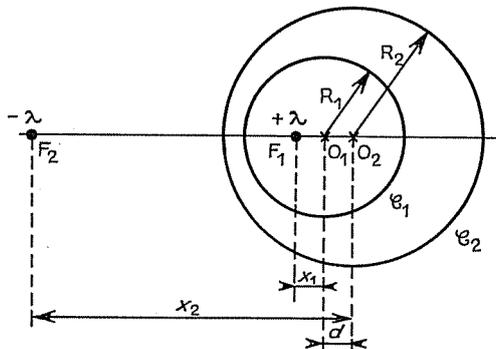


FIG. 3-11.

cylindres de révolution de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) dont les axes, parallèles, sont distants de d ($d < R_2 - R_1$).

Les deux cylindres étant supposés infiniment longs, calculer la capacité par unité de longueur c du condensateur ainsi constitué.

CONSEIL. — Il est bon de remarquer que les images électriques utilisées dans le problème précédent peuvent aussi être mises à profit dans celui-ci; la différence entre les deux systèmes se traduira essentiellement par le fait qu'ici, les deux équipotentiels entoureront le même fil F_1 . Les calculs seront semblables à ceux des pages précédentes.

— SOLUTION —

1° Comme dans le problème précédent, nous allons étudier préalablement les équipotentiels du champ créé par deux fils rectilignes infiniment longs F_1 et F_2 chargés uniformément avec les densités linéaires $+\lambda$ et $-\lambda$ respectivement ($\lambda > 0$).

Considérons les équipotentiels c_1 et c_2 de potentiels V_1 et V_2 ($0 < V_1 < V_2$), cylindres de révolution de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) dont les axes O_1z_1 et O_2z_2 , parallèles, sont distants de d ($d < R_2 - R_1$); l'équipotentielle c_1 entoure le fil F_1 , et l'équipotentielle c_2 entoure l'équipotentielle c_1 .

Désignons par exemple par x_1 la distance de l'axe O_1z_1 au fil F_1 , et par x_2 la distance de l'axe O_2z_2 au fil F_2 ; pour calculer x_1 et x_2 en fonction de R_1 , R_2 et d , il suffit d'exprimer que sur c_1 comme sur c_2 , le rapport r_2/r_1 est constant, et en particulier qu'il prend la même valeur sur les deux génératrices situées dans le plan des deux fils, de chacun de ces deux cylindres :

— sur c_1 ,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R_1 + d - x_2}{-R_1 + x_1} = \frac{R_1 - d + x_2}{R_1 + x_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{x_2 - d}{R_1} = \frac{R_1}{x_1}$$

— Sur c_2 ,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2 - x_2}{-R_2 + d + x_1} = \frac{R_2 + x_2}{R_2 + d + x_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{x_1 + d} = \frac{x_2}{R_2}$$

Des formules ainsi démontrées nous déduisons les expressions de x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{d} - d - \sqrt{d^2 - 2(R_1^2 + R_2^2) + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{d^2}} \right]$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{d} + d + \sqrt{d^2 - 2(R_1^2 + R_2^2) + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{d^2}} \right]$$

Les longueurs x_1 et x_2 sont obtenues comme racines de deux équations du second degré; pour choisir entre les deux racines de chaque équation, on remarque que x_1 doit être trouvé inférieur à R_1 et x_2 supérieur à R_2 , et l'on tient compte de ce que d est inférieur à la différence $R_2 - R_1$.

2° Venons-en maintenant à l'étude du système de conducteurs considéré par l'énoncé. Dans le cas où les potentiels V_1 et V_2 des deux conducteurs sont dans le rapport :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\text{Log } \frac{R_1}{x_1}}{\text{Log } \frac{x_2}{R_2}}$$

où x_1 et x_2 ont les expressions ci-dessus, la théorie des images électriques nous enseigne que l'on peut remplacer, pour le calcul du champ à l'intérieur du condensateur, c'est-à-dire dans l'espace compris entre les deux armatures, les deux conducteurs par deux fils F_1 et F_2 infiniment longs, d'axes parallèles aux axes des deux cylindres, situés respectivement à la distance x_1 de l'axe du premier cylindre et à la distance x_2 de l'axe du second, et portant des charges réparties uniformément avec les densités linéaires respectives $+\lambda$ et $-\lambda$, où λ est égal à :

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{V_1}{\text{Log } \frac{R_1}{x_1}} = 2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{V_2}{\text{Log } \frac{x_2}{R_2}} = 2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{V_1 - V_2}{\text{Log } \frac{R_1 R_2}{x_1 x_2}}$$

La théorie des images électriques nous apprend de plus que la charge q par unité de longueur portée par la surface du premier conducteur (de potentiel V_1), c'est-à-dire en définitive la charge du condensateur étudié, est égale à la charge image par unité de longueur située à l'intérieur dudit conducteur, donc à $+\lambda$.

La capacité c par unité de longueur cherchée est par définition égale au rapport de la charge q par unité de longueur à la différence de potentiel $V_1 - V_2$ des deux armatures :

$$c = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Log } \frac{R_1 R_2}{x_1 x_2}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Log } \frac{2 R_1 R_2}{(R_1^2 + R_2^2) - d^2 - d \sqrt{d^2 - 2(R_1^2 + R_2^2) + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{d^2}}}}$$

Le lecteur vérifiera aisément que ce résultat, en apparence assez compliqué, peut être écrit sous la forme :

$$c = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Arg ch } \frac{(R_1^2 + R_2^2) - d^2}{2 R_1 R_2}}$$

L'expression ci-dessus, appliquée au cas où $d = 0$, devient simplement celle de la capacité (par unité de longueur) d'un condensateur cylindrique ordinaire (non excentré).

En posant $R_1 = R$, et $d = R_2 - h$, puis en passant à la limite pour $R_2 \rightarrow \infty$, on retrouve la capacité c' par unité de longueur constitué par un cylindre de révolution de rayon R dont l'axe est situé à la distance h d'un plan conducteur, capacité que nous avons déjà calculée à la fin du problème précédent.

3-12. ÉLECTROMÈTRE DIÉDRIQUE. — *L'une des armatures du condensateur diédrique étudié dans le problème 3-8 est fixe, et l'autre peut tourner autour de l'arête du dièdre. Calculer le couple exercé sur l'armature mobile.*

— SOLUTION —

La capacité C du condensateur diédrique considéré a été trouvée égale à :

$$C = \frac{\epsilon_0 a}{\alpha} \text{Log} \left(1 + \frac{b}{d} \right)$$

où a , b , et d sont les longueurs définies dans l'énoncé du problème 3-8. Nous en déduisons l'énergie électrostatique E du condensateur :

$$E = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\epsilon_0 a}{2\alpha} \cdot \text{Log} \left(1 + \frac{b}{d} \right) \cdot V^2.$$

où V désigne la différence des potentiels des deux armatures.

En écrivant que, lors de la variation élémentaire $d\alpha$ du rectiligne α du dièdre, la variation dE de l'énergie du condensateur est égale à la somme du travail $d\mathcal{E}$ de l'opérateur et de l'apport d'énergie dE' fourni par les sources, il est démontré dans tous les cours que le couple exercé sur le conducteur mobile a pour expression :

$$c = + \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha} \right)_V$$

où la dérivée partielle de E par rapport à α est prise à potentiels constants. En l'occurrence :

$$c = \frac{1}{2} \cdot V^2 \cdot \frac{dC}{d\alpha} = - \epsilon_0 \frac{aV^2}{2\alpha^2} \text{Log} \frac{d+b}{d}$$

L'on constate que ce couple, négatif, tend à rapprocher les deux armatures, fait qui était évident *a priori*.

3-13. ÉLECTROMÈTRE A PLATEAUX. — *L'armature supérieure d'un condensateur plan est suspendue à un ressort de raideur k . Lorsque la différence de potentiel*

est nulle, la distance entre l'armature supérieure mobile et l'armature inférieure fixe est x_0 ; lorsqu'on applique une différence de potentiel V entre les deux armatures, l'écartement devient x .

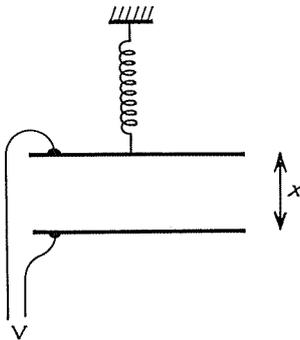


FIG. 3-13.

Établir la relation qui existe entre x et V . On désignera par S la surface commune des armatures. A quelle condition l'équilibre est-il stable ?

— SOLUTION —

A l'armature supérieure sont appliquées trois forces : d'une part la tension \vec{T} exercée par le ressort, verticale et dirigée vers le haut, d'autre part le poids \vec{p} de l'armature mobile et la force électrostatique \vec{f} exercée par l'armature fixe, qui sont deux forces verticales et dirigées vers le bas.

A l'équilibre, la somme vectorielle de ces trois forces s'annule, et leurs intensités T, p, f sont reliées par :

$$T = p + f$$

En l'absence de force électrostatique ($V = 0$), l'équilibre s'écrit en particulier :

$$T_0 = p$$

L'intensité f de \vec{f} est, comme l'on sait, égale, au signe près, à la dérivée partielle de l'énergie électrostatique E du condensateur par rapport au déplacement x , cette dérivée partielle étant prise à potentiels constants :

$$f = \left| \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)_V \right| = \left| \frac{1}{2} V^2 \cdot \frac{dC}{dx} \right| = \left| \frac{1}{2} V^2 \cdot \left(-\frac{\epsilon_0 S}{x^2} \right) \right| = \frac{\epsilon_0 \cdot S \cdot V^2}{2x^2}$$

La tension en charge T du ressort est d'autre part reliée à sa tension initiale T_0 par :

$$T - T_0 = k(x_0 - x).$$

En reportant ces résultats dans la relation exprimant l'équilibre de l'armature mobile, nous obtenons :

$$T_0 + k(x_0 - x) = T_0 + \frac{\epsilon_0 \cdot S \cdot V^2}{2x^2}$$

dont nous déduisons la relation entre V et x cherchée :

$$\boxed{V^2 = \frac{2k(x_0 - x)x^2}{\epsilon_0 \cdot S}} \quad (1)$$

On sait que l'équilibre mécanique d'un système est stable s'il existe un voisinage de la position d'équilibre dans lequel les forces appliquées au système tendent à le ramener à sa position d'équilibre.

En l'occurrence, la résultante \vec{R} des forces appliquées à l'armature supérieure a pour mesure algébrique, sur un axe vertical dirigé vers le haut :

$$\bar{R} = T - p - f = k \cdot (x_0 - x) - \frac{\epsilon_0 \cdot SV^2}{2x^2}$$

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité, \bar{R} étant une fonction continue dérivable de x , est que la dérivée de \bar{R} par rapport à x soit négative au point d'équilibre (ou plutôt, pour être tout à fait rigoureux, que la première dérivée $n^{\text{ième}}$ de \bar{R} non nulle au point d'équilibre soit d'ordre impair et négative) :

$$\frac{d\bar{R}}{dx} = -k + \frac{\epsilon_0 \cdot SV^2}{x^3}$$

Si x est l'écartement à l'équilibre, la dérivée ci-dessus prend la forme :

$$\frac{d\bar{R}}{dx} = -k + 2k \frac{x_0 - x}{x}$$

Compte tenu des remarques précédentes, sur la stabilité nous concluons que la position d'équilibre x est une position d'équilibre stable si x est supérieur à $2x_0/3$, et que c'est une position d'équilibre instable quand x est inférieur à $2x_0/3$. Le lecteur vérifiera aisément que la position d'équilibre $x = 2x_0/3$, qui correspond, d'après la relation (1), au potentiel :

$$|V_1| = \sqrt{\frac{8}{27} \cdot \frac{kx_0^3}{\epsilon_0 S}}$$

est également une position d'équilibre instable.

Un problème plus intéressant est de chercher si à une différence de potentiel V entre les armatures donnée correspond une ou des positions d'équilibre de l'armature mobile, et, le cas échéant, d'en chercher la stabilité. L'étude de la relation (1) liant V et x , nous indique que si $|V|$ est supérieur à V_1 , aucun équilibre n'est possible; par contre, à toute valeur de $|V|$ inférieure à V_1 correspondent deux positions d'équilibre, l'une $\left(0 < x \leq \frac{2}{3} x_0\right)$ instable et l'autre $\left(\frac{2}{3} x_0 < x \leq x_0\right)$ stable.

3-14. — Trois condensateurs c_1, c_2, c_3 d'armatures A_{11} et A_{12}, A_{21} et A_{22}, A_{31} et A_{32} sont montés en série, suivant le schéma :

$$A_{11} - c_1 - A_{12} - A_{21} - c_2 - A_{22} - A_{31} - c_3 - A_{32}$$

1° Connaissant les capacités C_1, C_2, C_3 des trois condensateurs, calculer la capacité équivalente du groupement ainsi constitué.

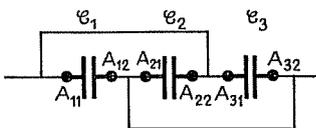


FIG. 3-14.

2° On relie les armatures A_{11} et A_{22} - A_{31} par un fil métallique de capacité négligeable, ainsi que les armatures A_{12} - A_{21} et A_{32} . Calculer la capacité équivalente de ce nouveau groupement.

— SOLUTION —

1° Les trois condensateurs étant disposés en série, la capacité équivalente cherchée est telle que :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

donc :

$$C = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}$$

2° Les fils introduits ayant une capacité négligeable, les points A_{11} , A_{22} et A_{31} sont au même potentiel, et de même les points A_{12} , A_{21} et A_{32} sont à un même potentiel; les tensions de charge des trois condensateurs sont égales, C_1, C_2, C_3 se retrouvent simplement montés en parallèle, donc :

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

3-15*. — La première armature d'un condensateur est constituée par trois quarts de plan métalliques formant un trièdre trirectangle $Oxyz$; la seconde armature de ce condensateur est constituée par une sphère métallique S intérieure au trièdre. Le trièdre $Oxyz$ étant supposé orthonormé, on désignera par x_0, y_0, z_0 ($x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$) les coordonnées du centre Ω de la sphère,

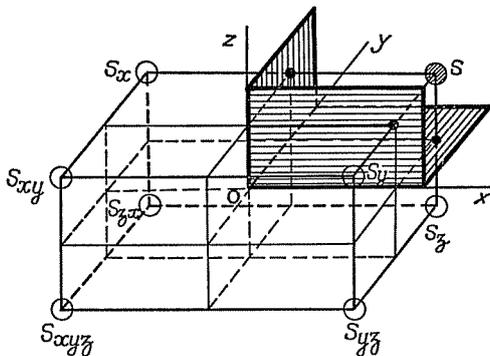


FIG. 3-15.

et par r son rayon; calculer la capacité du condensateur ainsi constitué, dans l'hypothèse où r est faible devant la plus petite des trois coordonnées x_0, y_0, z_0 .

INDICATION. — Dans le cas où le trièdre métallisé est porté au potentiel zéro, on pourra chercher des images électriques puis s'inspirer de la solution du problème 3-5.

— SOLUTION —

Si l'armature triédrique est portée au potentiel zéro, et la sphère S à un potentiel V , la charge portée par la sphère est : $Q = C.V$, où C est la capacité cherchée; cette charge n'est pas répartie uniformément sur la surface de S , mais suivant une certaine répartition caractérisée par la fonction $\sigma(x, y, z)$: densité surfacique de charges au point M (situé sur S) de coordonnées x, y, z .

Imaginons un système dans lequel l'armature triédrique serait supprimée et remplacée par :

— trois sphères S_x, S_y, S_z de rayon r centrées aux points $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ de coordonnées respectives : $(-x_0, y_0, z_0), (x_0, -y_0, z_0), (x_0, y_0, -z_0)$.

— trois sphères S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} de rayon r , centrées aux points $\Omega_{xy}, \Omega_{yz}, \Omega_{zx}$ de coordonnées respectives : $(-x_0, -y_0, z_0), (x_0, -y_0, -z_0), (-x_0, y_0, -z_0)$.

— une sphère S_{xyz} de rayon r , centrée au point Ω_{xyz} de coordonnées $(-x_0, -y_0, -z_0)$.

Si les densités surfaciques de charges $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ et σ_{xyz} sur ces sept sphères sont liées à la densité σ sur S par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &= -\sigma(-x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) &= -\sigma(x, -y, z) \\ \sigma_z(x, y, z) &= -\sigma(x, y, -z) \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= +\sigma(-x, -y, z) \\ \sigma_{yz}(x, y, z) &= +\sigma(x, -y, -z) \\ \sigma_{zx}(x, y, z) &= +\sigma(-x, y, -z) \\ \sigma_{xyz}(x, y, z) &= -\sigma(-x, -y, -z),\end{aligned}$$

les huit sphères $S, S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}$ et S_{xyz} ainsi chargées créent un champ tel que les trois plans xOy, yOz, zOx soient au potentiel zéro. Les sept sphères introduites et chargées comme l'indiquent les relations ci-dessus constituent les images électriques de S à travers l'armature triédrique; le champ électrostatique créé effectivement par la sphère S (portée au potentiel V) et l'armature triédrique (portée au potentiel zéro) dans l'octant positif (huitième d'espace caractérisé par : $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) est donc identique à celui qui créeraient dans la même portion d'espace les huit sphères ainsi définies.

Le potentiel de S , que l'on sait être égal à $\frac{Q}{C}$, peut d'autre part être calculé comme le potentiel créé au point Ω par les huit sphères $S, S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_y^z, S_{zx}, S_{xyz}$ de charges respectives $Q, -Q, -Q, -Q, Q, Q, Q, -Q$. Si l'on admet que r est faible devant la plus petite des coordonnées x_0, y_0 et z_0 , nous pouvons confondre dans ce calcul de V les sphères $S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}$ et S_{xyz} avec des charges ponctuelles $-Q, -Q, -Q, +Q, +Q, +Q$ et $-Q$ placées aux points $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, \Omega_{xy}, \Omega_{yz}, \Omega_{zx}$ et Ω_{xyz} :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{2\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{1}{2\sqrt{z^2 + x^2}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

La capacité cherchée est donc :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot l,$$

où l , homogène à une longueur, est l'inverse de l'expression contenue dans le crochet ci-dessus.

3-16. IDENTITÉ DE GAUSS. — 1° Un nombre n de charges ponctuelles q_1, q_2, \dots, q_n placées aux points A_1, A_2, \dots, A_n , créent aux points A'_1, A'_2, \dots, A'_n les potentiels V_1, V_2, \dots, V_n . Un même nombre n de charges ponctuelles q'_1, q'_2, \dots, q'_n placées aux points A'_1, A'_2, \dots, A'_n , créeraient aux points A_1, A_2, \dots, A_n les potentiels V'_1, V'_2, \dots, V'_n . Montrer que :

$$q_1 \cdot V'_1 + q_2 \cdot V'_2 + \dots + q_n \cdot V'_n = q'_1 \cdot V_1 + q'_2 \cdot V_2 + \dots + q'_n \cdot V_n$$

2° Un nombre N de conducteurs c_1, c_2, \dots, c_n sont portés aux potentiels V_1, V_2, \dots, V_N , leurs charges à l'équilibre sont respectivement Q_1, Q_2, \dots, Q_N . Dans un second état d'équilibre, les potentiels des N conducteurs sont V'_1, V'_2, \dots, V'_N , et leurs charges sont Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N . Montrer que :

$$Q_1 \cdot V'_1 + Q_2 \cdot V'_2 + \dots + Q_N \cdot V'_N = Q'_1 \cdot V_1 + Q'_2 \cdot V_2 + \dots + Q'_N \cdot V_N$$

— SOLUTION —

1° Le potentiel V'_i créé au point A_i par les charges q'_1, q'_2, \dots, q'_n placées aux points A'_1, A'_2, \dots, A'_n , est égal à :

$$V'_i = \frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot A_i A'_1} + \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot A_i A'_2} + \dots + \frac{q'_n}{4\pi\epsilon_0 \cdot A_i A'_n}$$

ce qui peut s'écrire :

$$V'_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{q'_j}{A_i A'_j}$$

De même le potentiel V_j créé au point A'_j par les charges q_1, q_2, \dots, q_n placées aux points A_1, A_2, \dots, A_n , est égal à :

$$V_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{A'_j A_i}$$

Comparons les deux sommes :

$$S = q_1 \cdot V'_1 + q_2 \cdot V'_2 + \dots + q_n \cdot V'_n \quad \text{et} \quad S' = q'_1 \cdot V_1 + q'_2 \cdot V_2 + \dots + q'_n \cdot V_n$$

Elles s'écrivent :

$$S = \sum_{i=1}^n q_i \cdot V'_i = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{q'_j}{A_i A'_j} \right)$$

et :

$$S' = \sum_{j=1}^n q'_j \cdot V_j = \sum_{j=1}^n q'_j \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{A'_j A_i} \right)$$

Nous les trouvons donc toutes deux égales à :

$$S = S' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{q_i \cdot q'_j}{A_i A'_j}$$

Il est donc bien vrai que :

$$\boxed{q_1 \cdot V'_1 + q_2 \cdot V'_2 + \dots + q_n \cdot V'_n = q'_1 \cdot V_1 + q'_2 \cdot V_2 + \dots + q'_n \cdot V_n}$$

2° Considérons une surface \mathcal{G} (éventuellement formée de plusieurs morceaux). Si cette surface est chargée avec une densité surfacique $\sigma(M)$ en chaque point M de \mathcal{G} , le potentiel $V(P)$ en tout point P de \mathcal{G} peut être calculé comme l'intégrale de surface :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_{\mathcal{G}} \frac{\sigma(M) \cdot dS}{MP}$$

Une autre distribution de charges caractérisée par la densité surfacique $\sigma'(P)$ en chaque point P de S créerait en un point quelconque M de S le potentiel :

$$V'(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iint_{\mathcal{G}} \frac{\sigma'(P) \cdot dS}{PM}$$

Nous pouvons visiblement démontrer comme ci-dessus l'égalité des deux intégrales de surface suivantes :

$$I = \iint_{\mathcal{G}} \sigma(M) \cdot V'(M) \cdot dS \quad \text{et} \quad I' = \iint_{\mathcal{G}} \sigma'(P) \cdot V(P) \cdot dS$$

Dans le cas d'un système de conducteurs, la surface \mathcal{G} est la réunion de surfaces $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_N$ disjointes et sur lesquelles le potentiel est constant, ce qui permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \sum_{i=1}^N V_i \cdot \iint_{\mathcal{G}_i} \sigma(M) \cdot dS = \sum_{i=1}^N Q_i \cdot V_i \\ I' = \sum_{j=1}^N V_j \cdot \iint_{\mathcal{G}_j} \sigma'(P) \cdot dS = \sum_{j=1}^N Q'_j \cdot V_j \end{array} \right.$$

L'égalité de I et I' s'écrit bien ainsi :

$$Q_1 \cdot V_1 + Q_2 \cdot V_2 + \dots + Q_N \cdot V_N = Q'_1 \cdot V_1 + Q'_2 \cdot V_2 + \dots + Q'_N \cdot V_N$$

REMARQUES. — 1° L'égalité des intégrales I et I' ne correspond pas exactement à l'égalité des sommes S et S' , car on s'interdisait dans le § 1° d'identifier les points A_i et A'_i , le potentiel ne restant pas fini au niveau d'une charge ponctuelle. Une forme générale de l'identité de Gauss pour des charges superficielles serait : si des charges réparties sur une surface \mathcal{G} [densité surfacique : $\sigma(M)$] créent en chaque point M' d'une surface \mathcal{G}' le potentiel $V(M')$, des charges réparties sur la surface \mathcal{G}' [densité surfacique : $\sigma'(M')$] créent en chaque point M de la surface \mathcal{G} le potentiel $V'(M)$ tel que :

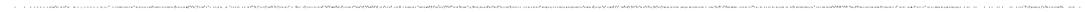
$$\oint_{\mathcal{G}} \sigma(M) \cdot V'(M) \cdot dS = \oint_{\mathcal{G}'} \sigma'(M') \cdot V(M') \cdot dS'$$

L'application au cas où \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont confondues est particulièrement intéressante car elle permet de comparer deux équilibres d'un même système.

2° L'identité de Gauss appliquée à des conducteurs permet de démontrer rapidement que la matrice des capacités est symétrique (on compare un premier équilibre dans lequel le i^{me} conducteur est au potentiel V_i et les autres au potentiel zéro, à un second équilibre dans lequel le j^{me} conducteur est au potentiel V_j , tous les autres étant au potentiel zéro). Elle permet de retrouver également de nombreux autres résultats.

DEUXIÈME PARTIE

ÉLECTROCINÉTIQUE



4. LOIS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE LOIS D'OHM, DE JOULE, DE POUILLET

4-1*. RÉFRACTION DE LA DENSITÉ DE COURANT. — *La surface S de séparation de deux milieux conducteurs non diélectriques est traversée par un courant électrique continu. Montrer que cette surface est chargée avec une densité superficielle σ de charges électriques statiques égale à :*

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot i_n \cdot (\rho_2 - \rho_1)$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les résistivités des deux milieux (au point de S considéré), i_n est la composante normale à S du vecteur densité de courant \vec{i} (comptée positivement si \vec{i} traverse S du premier milieu vers le second), et ε_0 est la permittivité diélectrique du vide.

Que se passerait-il si les deux milieux avaient des permittivités diélectriques relatives ε_1 et ε_2 différentes de l'unité ?

INDICATIONS. — Par « conducteurs non diélectriques », nous entendons des milieux conducteurs dans lesquels les équations du champ électrostatique sont les mêmes que dans le vide, ou, si l'on préfère, des milieux dont la constante diélectrique (ou permittivité diélectrique relative) est égale à l'unité.

Dans un tel milieu, en régime permanent, la densité volumique de charges est constante; pour trouver la densité superficielle de charges cherchée, il suffit d'exprimer la discontinuité de la composante normale à S du champ électrique \vec{E} .

— SOLUTION —

Les données ne nous permettent pas de trouver la densité volumique de charges mobiles; nous savons seulement qu'en régime permanent, elle ne dépend pas du temps, car des charges électriques ne peuvent s'accumuler (ou se raréfier) dans un volume limité sans créer des champs très intenses qui s'opposent à l'entrée (ou au départ) de nouvelles charges dans ce volume; cependant, si chacun des deux milieux est homogène, la densité volumique de charges mobiles

est partout nulle, car de : $\text{div } \vec{i} = 0$ nous pouvons alors déduire : $\text{div } \vec{E} = 0$. De même, en régime permanent, la densité superficielle de charges σ sur la surface de séparation S est constante donc la composante normale à S de la densité de courant \vec{i} est continue; soit i_n la mesure de cette composante. La composante \vec{E}_n normale à S du champ électrique \vec{E} est, elle, discontinue; on démontre dans le cours d'électrostatique que la discontinuité ΔE_n de cette composante à la traversée de S est égale à :

$$\Delta E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Comme d'autre part, dans chacun des deux milieux, $\vec{E} = \rho \cdot \vec{i}$, où ρ est la résistivité du milieu, il vient en définitive :

$$\sigma = \epsilon_0 \cdot i_n \cdot (\rho_2 - \rho_1)$$

Si l'on suppose maintenant que les constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2 des deux milieux ne sont pas égales à l'unité, la discontinuité ΔE_n n'est plus égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, mais à :

$$\Delta E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right)$$

Pour établir la formule ci-dessus, il suffit de remarquer que seul le champ créé par les charges de S situées à proximité immédiate subit une discontinuité; or ce champ est égal à $\frac{\sigma}{2\epsilon_1 \cdot \epsilon_0}$ d'un côté de la surface S , et à $\frac{\sigma}{2\epsilon_2 \cdot \epsilon_0}$ de l'autre côté. Nous en déduisons alors la densité superficielle de charges cherchée :

$$\sigma = 2\epsilon_0 \cdot (\rho_2 - \rho_1) \cdot i_n \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

On peut remarquer que, puisque la composante tangentielle \vec{E}_t du champ \vec{E} est continue, la composante tangentielle \vec{i}_t de \vec{i} ne l'est pas : il y a réfraction des lignes de courant à la traversée de S .

4-2. PUISSANCE DISSIPÉE PAR EFFET JOULE DANS UN MILIEU CONDUCTEUR. — *Dans un milieu conducteur ohmique on plonge n électrodes $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ maintenues aux potentiels constants V_1, V_2, \dots, V_n . Calculer la puissance \mathcal{P} dissipée par effet Joule dans le milieu, sachant que les courants sortant de $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ ont pour intensités respectives I_1, I_2, \dots, I_n .*

On pourra supposer que le conducteur, de volume fini, est entouré par une matière parfaitement isolante.

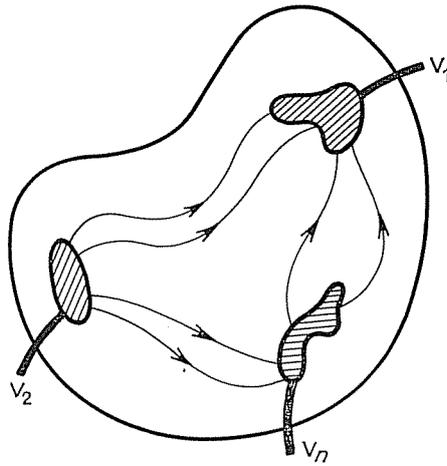


FIG. 4-2.

— SOLUTION —

Nous savons (cf. Cours d'Électrocinétique) que la puissance dissipée par unité de volume du conducteur est égale au produit scalaire $\vec{E} \cdot \vec{i}$ du champ électrostatique par la densité de courant.

La puissance \mathcal{P} cherchée est donc égale à l'intégrale de volume :

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}_0} \vec{E} \cdot \vec{i} \, dv$$

étendue à tout le volume occupé par le conducteur.

Soit V le potentiel électrostatique; compte tenu de ce que, en régime permanent, $\text{div } \vec{i} = 0$, il vient :

$$\vec{E} \cdot \vec{i} = -i \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V = V \cdot \text{div } \vec{i} - \text{div} (V \cdot \vec{i}) = -\text{div} (V \cdot \vec{i})$$

donc :

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}_0} \text{div} (V \cdot \vec{i}) \, dv = \iint_{\mathcal{S}} V \cdot \vec{i} \cdot \vec{dS}$$

La puissance \mathcal{P} cherchée est ainsi, par application du théorème d'Ostrogradsky, égale au flux du vecteur $V \cdot \vec{i}$ sortant de la surface limitant le conducteur. Sur la limite extérieure du conducteur, la composante normale \vec{i}_n de la densité de courant \vec{i} est nulle, puisqu'il ne passe aucun courant dans l'entou-

rage isolant; sur la surface S_i limitant la i^{me} électrode \mathcal{E}_i , le potentiel V est constant ($V = V_i$) et le flux de i sortant du milieu conducteur est égal à l'opposé de l'intensité I_i ; nous en déduisons :

$$\mathcal{E} = V_1 \cdot I_1 + V_2 \cdot I_2 + \dots + V_n \cdot I_n.$$

Il est intéressant de noter que le résultat ainsi démontré s'applique aussi bien à un milieu conducteur ne vérifiant pas la loi d'Ohm, puisque seule est intervenue l'hypothèse du régime permanent; ce résultat est également généralisable au cas d'un milieu conducteur illimité dans les trois directions de l'espace.

4-3*. CATHODE ÉMISSIVE. — Deux plaques métalliques planes parallèles C et A, séparées par une distance l , sont respectivement portées aux potentiels $V_C = 0$ et $V_A = U$.

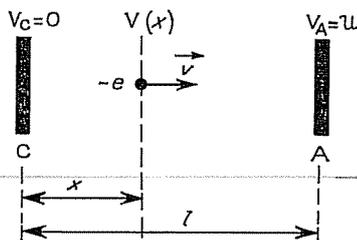


FIG. 4-3.

Des électrons émis à vitesse nulle par la plaque C (cathode), puis accélérés par le champ électrostatique régnant entre les deux plaques, et recueillis par la plaque A (anode), constituent un courant de densité \vec{i} . Calculer cette densité de courant \vec{i} lorsque le régime permanent est atteint.

INDICATIONS. — On peut admettre (en négligeant les effets de bords) que le déplacement des électrons s'effectue normalement aux deux plaques. En un point M situé à la distance x ($0 \leq x \leq l$) de C, le potentiel électrostatique est $V(x)$, la densité de courant est : $\vec{i} = \rho \cdot \vec{v}$ (ρ : densité volumique des charges mobiles;

\vec{v} : vitesse des électrons lors de leur passage en M); $\text{div } \vec{i} = 0$, donc le module $i = \rho \cdot v$ de \vec{i} ne dépend pas de x .

La densité volumique des charges mobiles ρ est liée au potentiel $V(x)$ par l'équation de Laplace; la vitesse $v(x)$ des électrons étant d'autre part liée au potentiel $V(x)$ par application du théorème de l'énergie cinétique, le problème posé revient à chercher la fonction $V(x)$.

— SOLUTION —

Soit ρ la densité volumique de charges mobiles, c'est-à-dire le produit $-n \cdot e$ du nombre n d'électrons mobiles par unité de volume par la charge $-e$ de l'électron, et soit \vec{v} la vitesse des électrons; ρ et v dépendent de la distance x du point M où nous les calculons, à la plaque C, mais leur produit $i = \rho \cdot v$ (cf. Cours d'Électrocinétique) n'en dépend pas, en régime permanent tout au moins (car alors $\text{div } \vec{i} = \frac{di}{dx} = 0$).

L'énergie cinétique acquise par un électron entre la cathode C (où sa vitesse

est nulle) et le point M est égale au travail de la force électrostatique qu'il subit :

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = (-e) \cdot (-V) = e \cdot V(x).$$

Dans l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

nous pouvons remplacer ρ par l'expression :

$$\rho = \frac{i}{v} = i \cdot V^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{m}{2e}}, \quad \text{où } i \text{ ne dépend pas de } x.$$

L'équation de Laplace peut alors s'écrire :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{i}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot V^{-\frac{1}{2}}$$

ou :

$$2 \frac{dV}{dx} \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2i}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot V^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dV}{dx}$$

En $x = 0$, le potentiel $V(x)$ est nul, ainsi que sa première dérivée $\frac{dV}{dx}$, car la vitesse v des électrons en $x = 0$ est nulle par hypothèse; il vient, après une première intégration :

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = -4 \frac{i}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot V^{\frac{1}{2}}$$

ou :

$$dx = V^{-\frac{1}{4}} \cdot dV \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{-4i} \sqrt{\frac{2e}{m}}}$$

d'où nous déduisons, après une seconde intégration :

$$x = \frac{4}{3} V^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{-4i} \sqrt{\frac{2e}{m}}}$$

Écrivons que sur l'anode A, c'est-à-dire en $x = l$, le potentiel est égal à U , valeur imposée par l'expérimentateur et donnée par l'énoncé :

$$l = \frac{4}{3} U^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{-4i} \sqrt{\frac{2e}{m}}}$$

La densité de courant i cherchée a donc en définitive la valeur suivante :

$$i = -\frac{4\epsilon_0}{9} \cdot \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{U^{\frac{3}{2}}}{l^2}$$

Il est naturel de trouver une densité de courant i négative : le sens attribué au courant créé par des particules négatives en mouvement est opposé au sens de la vitesse réelle des particules.

4-4*. — Une sphère isolante de rayon R est recouverte par une couche métallique mince de résistivité ρ et d'épaisseur uniforme e ($e \ll R$). Calculer la résistance \mathcal{R} de cette couche métallique, sachant que le courant arrive et part par les extrémités d'un diamètre AB , et que les fils se raccordent à la sphère selon deux petites électrodes en forme de disques, de centres respectifs A et B , et de rayon r ($r \ll R$).

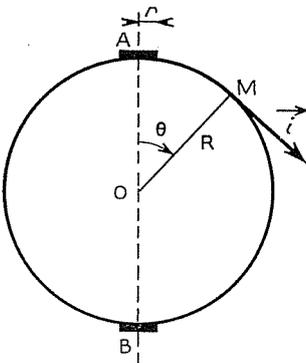


FIG. 4-4.

INDICATIONS. — Le diamètre AB est un axe de symétrie de révolution du système physique considéré : le vecteur densité de courant \vec{i} en un point M quelconque de la couche métallique est normal au rayon OM (O : centre de la sphère), et son intensité i ne dépend que de l'angle $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$.

Si l'on sait calculer i en fonction de l'intensité totale I et de l'angle θ , il suffira, pour obtenir la résistance \mathcal{R} cherchée, d'exprimer que la différence de potentiel $V_A - V_B$ est égale à la circulation du vecteur champ $\vec{E} = \rho \cdot \vec{i}$ le long d'une ligne de champ.

— SOLUTION —

Le diamètre AB étant axe de symétrie et axe de révolution du système physique considéré, les lignes de courant seront de révolution autour de AB ; en particulier, les arcs de grands cercles de diamètre AB et de rayons R ou $R + e$ seront certainement des lignes de courant, puisque sur la surface d'un conducteur le vecteur \vec{i} doit lui être parallèle (aucune particule chargée ne s'échappe vers l'isolant). Si l'épaisseur e est petite devant R , comme l'indique l'énoncé, il est naturel d'admettre que toutes les lignes de champ seront des arcs de grands cercles (de rayons compris entre R et $R + e$). Dans ces conditions, les surfaces équipotentielles seront situées sur des cônes de révolution de sommet O (centre de la sphère).

Soit M un point quelconque de la couche métallique, et soit θ l'angle $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$. Nous savons (cf. Cours d'Électrocinétique) qu'en régime permanent, le flux du vecteur densité de courant \vec{i} est conservatif; or le module i de ce vecteur ne dépend que de l'angle θ ; écrivons que le flux de \vec{i} traversant l'équipotentielle passant par M est égal à l'intensité totale I du

courant qui traverse la couche conductrice étudiée :

$$i \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot e = I$$

ou :

$$i = \frac{I}{2\pi R e \sin \theta}$$

Une ligne de champ (ou de courant), demi-grand cercle de diamètre AB, est formé d'un segment d'électrode AA' (supposée de résistance nulle) suivi par un arc de grand cercle A'B' (situé dans la couche de résistivité ρ), puis d'un segment d'électrode B'B (de résistance nulle).

$$(\vec{OA}, \vec{OA'}) = \alpha \simeq \frac{r}{R} \quad \text{et} \quad (\vec{OA}, \vec{OB'}) = \pi - \alpha \simeq \pi - \frac{r}{R}.$$

La différence des potentiels V_A et V_B en A et B est égale à la circulation du champ électrostatique \vec{E} le long d'une ligne de champ joignant ces deux points :

$$V_A - V_B = V_{A'} - V_{B'} = \int_{A'B'} \vec{\rho} i \cdot d\vec{l} = \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\rho I}{2\pi \cdot e} \cdot \frac{d\theta}{\sin \theta}$$

Nous trouvons ainsi :

$$V_A - V_B = -\frac{\rho \cdot I}{\pi \cdot e} \cdot \text{Log} \left| \text{tg} \frac{\alpha}{2} \right|.$$

La résistance \mathcal{R} cherchée est par définition égale au rapport $\frac{V_A - V_B}{I}$; nous l'obtenons donc, compte tenu de ce que $\alpha \simeq \frac{r}{R}$, sous la forme :

$$\mathcal{R} \simeq \frac{\rho}{\pi \cdot e} \text{Log} \frac{2R}{r}$$

Nous aurions pu déterminer \mathcal{R} par une toute autre méthode : les points M de la couche métallique étudiée étant repérés par leurs coordonnées sphériques l, θ, φ , nous aurions pu considérer la couche comme la juxtaposition de volumes élémentaires de dimensions linéaires $e, R \cdot d\theta, R \cdot \sin \theta \cdot d\varphi$, et de résistances $\frac{\rho}{\sin \theta} \cdot \frac{d\theta}{e \cdot d\varphi}$. Ces volumes élémentaires, montés en série (à φ constant) et parallèle (à θ constant), forment alors un réseau bipolaire (cf. chapitre 5) dont il est aisé de trouver la résistance \mathcal{R} . Le principe aurait été différent de celui que nous avons adopté ici, mais les calculs auraient été très semblables.

4-5. RÉSISTANCE D'UNE PRISE DE TERRE. — 1° L'espace compris entre les deux armatures (supposées de résistivité nulle) d'un condensateur est rempli d'une substance de permittivité diélectrique relative ϵ et de résistivité élevée ρ . Supposant connue la capacité C du condensateur, exprimer sa résistance \mathcal{R} (appelée : « résistance de fuite »).

2° Calculer la résistance d'un conducteur de résistivité ρ , remplissant complètement la cavité comprise entre deux électrodes équipotentiellles hémisphériques de même centre et de rayons r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$).

3° En déduire la résistance d'une prise de terre constituée par une électrode hémisphérique enterrée, de rayon r , son plan diamétral affleurant à la surface du sol. On désignera par ρ la résistivité du sol.

— SOLUTION —

1° L'existence d'une relation entre la capacité C et la résistance de fuite R du condensateur découle naturellement du fait que le flux du champ électrostatique \vec{E} , proportionnel à la charge Q du condensateur (théorème de Gauss), est aussi à l'intensité I du courant de fuite (loi d'Ohm); or $\frac{Q}{I} = \frac{V}{I} \cdot \frac{Q}{V}$ est égal au produit $R.C$.

Soit en effet \vec{E} le champ électrostatique entre les armatures aux potentiels V_1 et V_2 portant les charges $+Q$ et $-Q$.

Le théorème de Gauss, appliqué à une surface fermée \mathcal{G} (tout entière située dans le diélectrique) qui entoure l'armature interne, nous donne :

$$\iint_{\mathcal{G}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{C \cdot (V_1 - V_2)}{\epsilon\epsilon_0}.$$

L'intensité I du courant de fuite qui circule de l'armature interne vers l'armature externe étant d'autre part donnée par :

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \iint_{\mathcal{G}} i \cdot \vec{dS},$$

la loi d'Ohm $\vec{E} = \rho \cdot i$ se traduit ici par :

$$\frac{C \cdot (V_1 - V_2)}{\epsilon\epsilon_0} = \rho \frac{V_1 - V_2}{R}$$

d'où nous déduisons la relation cherchée :

$$\boxed{C \cdot R = \rho \cdot \epsilon\epsilon_0}$$

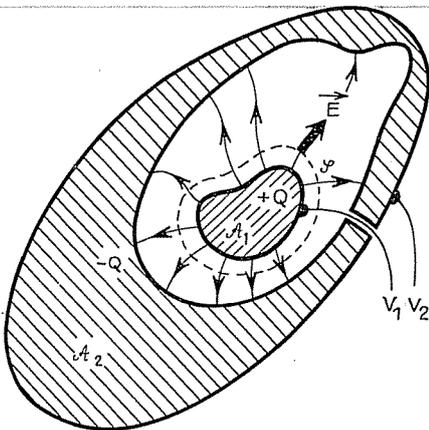


FIG. 4-5.

2° Nous pouvons admettre qu'entre les deux armatures hémisphériques, le champ électrostatique \vec{E} est radial; si nous négligeons les effets de bords dus à la présence d'un champ électrique en dehors de la substance considérée (donc si nous négligeons la charge portée par la face plane de chaque électrode), la capacité du condensateur formé par les deux électrodes et la substance qui les sépare est la moitié de celle d'un condensateur sphérique de même rayon :

$$C = 2\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Le résultat démontré précédemment s'écrit ici :

$$R = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, cette formule n'est qu'approximative en raison de l'existence des effets de bords : toutefois, si la permittivité diélectrique relative ϵ de la substance emplissant le condensateur est nettement supérieure à l'unité, l'approximation est excellente (nous savons que l'énergie du condensateur est alors localisée dans le diélectrique : il y a « condensation de l'électricité »).

3° Il est assez naturel de considérer la prise de terre décrite par l'énoncé comme la forme limite que prend le dispositif précédent quand $r_1 = r$, et r_2 tend vers l'infini; la résistance R de la prise de terre est donc égale à la limite, quand $r_1 = r$ et $r_2 \rightarrow \infty$, de l'expression démontrée ci-dessus :

$$R = \frac{\rho}{2\pi r}$$

4-6*. RÉSISTANCE D'UN CÂBLE COAXIAL. — *Un câble coaxial est formé de deux cylindres métalliques coaxiaux de même longueur l de rayons r_1 et r_2 ($r_2 > r_1$) séparés par un diélectrique imparfait de résistivité ρ ; le courant entre dans le câble, à une extrémité, par l'armature intérieure, puis en sort, à la même extrémité, par l'autre armature.*

1° On suppose négligeable la résistance des conducteurs métalliques; calculer la résistance R du câble coaxial.

2° On suppose maintenant que la résistance de chaque électrode métallique est k par unité de

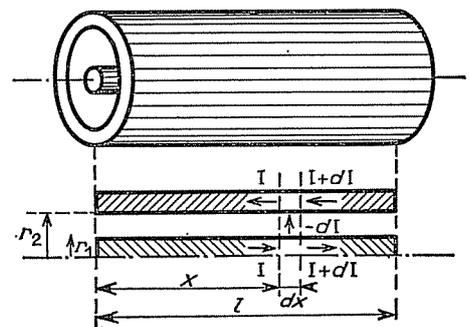


FIG. 4-6.

longueur; calculer de nouveau la résistance R du câble coaxial; cas où l est infini?

3° La résistance par unité de longueur des électrodes étant toujours supposée égale à k , on réunit, à l'autre extrémité du câble, les deux armatures par une résistance R_i . Calculer la nouvelle résistance R' du système; on montrera en particulier qu'il existe une résistance R_i (« résistance itérative ») telle que, si $R_i = R_i$, la résistance du système est égale à R_i , ceci quelle que soit la longueur l du câble coaxial interposé entre la source de courant et la résistance de fonctionnement R_i disposée à l'extrémité du câble.

INDICATIONS. — 1° La résistance R du câble coaxial, dans le cas où la résistance des armatures est négligeable, est directement liée à la capacité d'un condensateur cylindrique par la formule établie dans le problème précédent; il est évidemment possible de se passer de ce résultat, et de calculer R directement.

2° Si la résistance k par unité de longueur des conducteurs métalliques n'est plus négligeable, nous ne pouvons plus considérer les armatures comme des volumes équipotentiels : la différence $V = V_1 - V_2$ des potentiels des deux armatures est fonction de la position de la tranche de câble considérée. Il en est de même de l'intensité I du courant qui circule le long de chaque armature. Il pourra être commode, pour déterminer V et I en chaque point du câble, de considérer une tranche de câble d'épaisseur élémentaire dx , située à la distance x de l'une des deux extrémités du câble, par exemple de celle par laquelle on fait entrer et sortir le courant.

3° Dans le cas précédent, nous savions qu'à l'extrémité libre du câble, en $x = l$, le courant $I(l)$ circulant le long de chaque armature était nul; maintenant qu'à cette extrémité les deux armatures ont été réunies par une résistance R_i , nous savons seulement que les valeurs $V(l)$ et $I(l)$ de V et I en $x = l$ ont pour rapport R_i .

— SOLUTION —

1° Si la résistance des conducteurs métalliques est négligeable, les armatures sont des volumes équipotentiels, et la résistance R cherchée n'est autre que la résistance de fuite d'un condensateur cylindrique de révolution de longueur l , et de rayons r_1 et r_2 . Un tel condensateur a pour capacité :

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot l}{\text{Log} \frac{r_2}{r_1}}$$

Il suffit alors, pour obtenir la résistance de fuite, d'écrire la relation établie dans le problème précédent :

$$R = \frac{\rho\epsilon\epsilon_0}{C} = \frac{\rho}{2\pi l} \text{Log} \frac{r_2}{r_1}.$$

La connaissance du résultat démontré dans le problème précédent n'est évidemment pas indispensable : nous aurions pu calculer directement R par intégration, ou bien encore considérer la substance séparant les armatures comme l'association en série de résistances élémentaires en forme de pellicules cylindriques.

2° Si la résistance des conducteurs métalliques n'est pas négligeable, il n'est plus possible de considérer les armatures comme des volumes équipotentiels. Les lignes de courant, confondues avec les lignes de champ, sont les trajectoires orthogonales des surfaces équipotentiels : elles n'ont donc plus aucune raison d'être radiales à l'intérieur du diélectrique. Toutefois, la résistivité d'un métal étant toujours beaucoup plus faible que celle d'un mauvais isolant, nous pouvons penser que le vecteur champ \vec{E} sera peu incliné sur le rayon : nous continuerons à confondre les lignes de courants avec les normales à l'axe du câble. En toute rigueur, il faudrait prouver que l'erreur ainsi commise ne rend pas illusoire la correction effectuée, par introduction de k , sur le calcul de R .

Soit M_1 un point de l'axe du câble, situé à la distance x de l'extrémité du câble par laquelle entre et sort le courant, et soit N_1 un autre point de l'axe, d'abscisse $x + dx$, dx étant un accroissement élémentaire de x , très petit devant r_1 (sur la figure, cette inégalité n'est pas respectée pour des raisons de clarté). En M_1 , le potentiel est $V_1(x)$ et l'intensité du courant dans l'armature interne est $I(x)$; en N_1 , ces grandeurs sont respectivement égales à

$$V_1(x + dx) = V_1(x) + \frac{dV_1}{dx} \cdot dx \quad \text{et} \quad I(x + dx) = I(x) + \frac{dI}{dx} \cdot dx.$$

La loi d'Ohm appliquée au conducteur formant l'armature intérieure s'écrit :

$$V_1(x) - V_1(x + dx) = (k \cdot dx) \cdot I(x)$$

ou :

$$\frac{dV_1}{dx} = -k \cdot I(x).$$

Sur la section droite du câble passant par M_1 et sur celle passant par N_1 , choisissons respectivement les points M_2 et N_2 , tous deux situés dans l'armature extérieure. En M_2 , le potentiel est $V_2(x)$ et le courant dans l'armature externe (de sens opposé à celui qui circule dans l'armature interne) a pour intensité $I(x)$; en N_2 , ces grandeurs sont respectivement égales à

$$V_2(x + dx) = V_2(x) + \frac{dV_2}{dx} \cdot dx \quad \text{et} \quad I(x + dx) = I(x) + \frac{dI}{dx} \cdot dx.$$

La loi d'Ohm appliquée au conducteur formant l'armature externe s'écrit :

$$V_2(x + dx) - V_2(x) = (k \cdot dx) \cdot I(x),$$

ou :

$$\frac{dV_2}{dx} = +k \cdot I(x).$$

Pour obéir à la loi de conservation des charges, nous devons admettre qu'un

courant d'intensité $-dI$ (d'ailleurs positive) circule de l'armature interne vers l'armature externe, à travers la portion de diélectrique imparfait limitée par les deux armatures et les sections droites passant par M_1 et N_1 . La différence $V = V_1 - V_2$ des potentiels des deux armatures est liée à cette intensité $-dI$ par la loi d'Ohm $V = -\mathcal{R}.dI$; plus dx est petit, plus les variations dV_1 et dV_2 de V_1 et V_2 le long de M_1N_1 et M_2N_2 respectivement sont négligeables devant la différence de potentiel $V = V_1 - V_2$, et plus l'approximation faite au § 1^o est convenable, pour cette portion de diélectrique: la résistance R est celle calculée au § 1^o, mais où dx remplace la longueur l . Il vient ainsi :

$$V = V_1 - V_2 = -\frac{\rho}{2\pi} \text{Log} \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{dI}{dx}.$$

REMARQUE. — Il est toujours désagréable de devoir écrire des termes tels que $\mathcal{R} = \frac{a}{dx}$, où a est fini et dx un terme différentiel; de telles écritures sont susceptibles de deux justifications :

— ou bien l'on se dit que dx n'est pas vraiment un terme différentiel, mais simplement un terme très petit tel qu'on confonde tout rapport du type $\frac{dy}{dx}$ avec la dérivée de y par rapport à x ;

— ou bien l'on considère effectivement dx comme un terme différentiel, mais l'on s'autorise à le manipuler comme un nombre ordinaire, par commodité, en sachant bien que l'ensemble du calcul revient à effectuer une ou plusieurs dérivations, et qu'une formulation correcte, quoique plus lourde ou moins naturelle, serait alors possible.

Des relations ainsi démontrées :

$$\frac{dV}{dx} = -2k \cdot I(x) \quad \text{et} \quad V = -\frac{\rho}{2\pi} \text{Log} \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{dI}{dx}$$

nous déduisons :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\lambda^2 \cdot V(x) \quad \text{et} \quad \frac{d^2I}{dx^2} = -\lambda^2 \cdot I(x)$$

où le scalaire λ a l'expression :

$$\lambda = + \sqrt{\frac{4\pi k}{\rho \cdot \text{Log} \frac{r_2}{r_1}}}$$

De telles équations différentielles ne présentent aucune difficulté, les fonctions $I(x)$ et $V(x)$ cherchées sont certainement de la forme :

$$I(x) = I_+ \cdot e^{+\lambda \cdot x} + I_- \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

et :

$$V(x) = \frac{2k}{\lambda} \cdot (-I_+ \cdot e^{+\lambda \cdot x} + I_- \cdot e^{-\lambda \cdot x})$$

où I_+ et I_- sont des constantes qu'il nous reste à déterminer par examen des conditions aux limites $x = 0$ et $x = l$.

$$x = 0 : \begin{cases} I_+ + I_- = I(0) \\ -\frac{2k}{\lambda} \cdot I_+ + \frac{2k}{\lambda} \cdot I_- = V(0) \end{cases}$$

$$x = l : \begin{cases} e^{+\lambda \cdot l} \cdot I_+ + e^{-\lambda \cdot l} \cdot I_- = I(l) \\ -\frac{2k}{\lambda} \cdot e^{+\lambda \cdot l} \cdot I_+ + \frac{2k}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot l} \cdot I_- = V(l) \end{cases}$$

Dans le cas présent, à l'extrémité libre du câble, en $x = l$, le courant $I(l)$ est nul (les électrons ne sauraient s'échapper dans l'air), et la relation entre I_+ et I_- qui en découle permet le calcul de la résistance R cherchée :

$$e^{+\lambda l} \cdot I_+ + e^{-\lambda l} \cdot I_- = 0$$

$$\frac{2k}{\lambda} \cdot \frac{I_- - I_+}{I_- + I_+} = \frac{V(0)}{I(0)} = R$$

donc :

$$R = \frac{2k}{\lambda} \coth(\lambda l)$$

Quand k tend vers zéro, la résistance R ci-dessus tend bien, comme l'on pouvait s'y attendre, vers la valeur approchée calculée au § 1°. Quand l tend vers l'infini, la résistance R calculée ci-dessus tend vers une valeur finie R_∞ non nulle :

$$R_\infty = \frac{2k}{\lambda} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi}} k \cdot \text{Log} \frac{r_2}{r_1}$$

3° Maintenant qu'à l'extrémité précédemment libre du câble (en $x = l$) on a relié les deux armatures par une résistance R_t , le courant $I(l)$ n'est plus obligatoirement nul, et nous savons simplement que le rapport $\frac{V(l)}{I(l)}$ est égal à R_t . La relation entre I_+ et I_- qui l'exprime suffit à nous permettre la détermination de la résistance R' cherchée qui, elle, est égale par définition, comme précédemment, au rapport $\frac{V(0)}{I(0)}$:

$$\frac{2k}{\lambda} \cdot \frac{-e^{+\lambda l} \cdot I_+ + e^{-\lambda l} \cdot I_-}{e^{+\lambda l} \cdot I_+ + e^{-\lambda l} \cdot I_-} = \frac{V(l)}{I(l)} = R_t$$

$$\frac{2k}{\lambda} \cdot \frac{-I_+ + I_-}{I_+ + I_-} = \frac{V(0)}{I(0)} = R'$$

Il vient ainsi :

$$R' = \frac{2k}{\lambda} \cdot \frac{R_i + \frac{2k}{\lambda} \cdot \text{th}(\lambda l)}{R_i \cdot \text{th}(\lambda l) + \frac{2k}{\lambda}}$$

Il est facile de voir sur la formule ci-dessus que $R' = R_i$ si et seulement si R_i a la valeur :

$$R_i = \frac{2 \cdot k}{\lambda} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi} k \cdot \text{Log} \frac{r_2}{r_1}} = R_\infty$$

Cette résistance R_i , appelée « *résistance itérative* », est la caractéristique principale d'un câble coaxial, son intérêt provenant essentiellement de ce qu'elle est indépendante de la longueur l de câble utilisée (cf. problème sur les quadripôles : 5-7).

5. RÉSEAUX DE CONDUCTEURS

LOIS DE KIRCHHOFF ET COURANTS DE MAILLES. — La résolution des problèmes de réseaux repose, comme l'on sait, sur les lois de Kirchhoff : *la somme des intensités des courants qui se dirigent vers un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui s'en éloignent* (« loi aux nœuds ») et : *la somme algébrique le long d'une maille des forces électromotrices est égale à la somme algébrique des chutes ohmiques de potentiel le long des conducteurs qui la forment* (« loi aux mailles »).

D'un réseau l'on connaît généralement la constitution : la résistance de chaque conducteur, sa force électromotrice, sa force contre-électromotrice, et l'on cherche généralement les intensités des courants qui passent dans le réseau. Il est peut-être utile de rappeler qu'il existe principalement trois méthodes permettant de résoudre ce type de problème¹.

1° Méthode classique. — Soit à chercher les p intensités d'un réseau comportant n nœuds; il est possible d'écrire $(n - 1)$ équations aux nœuds indépendantes, et il suffit alors d'écrire $(p - n + 1)$ équations aux mailles indépendantes pour obtenir un système de p équations linéaires à p inconnues, dont les solutions sont les intensités cherchées.

2° Méthode des mailles. — Soit à chercher comme précédemment les p intensités d'un réseau comportant n nœuds; plutôt que de chercher directement ces intensités, on considère le réseau comme formé de la juxtaposition de circuits, ou mailles, parcourus chacun par un courant fermé, qu'on appelle courant de maille ou courant de Maxwell (le même pour toute la maille). L'intensité vraie i_{AB} d'une branche AB du réseau, commune à deux mailles « 1 » et « 2 », est la somme algébrique (somme ou différence selon le choix des orientations des mailles « 1 » et « 2 ») des courants de Maxwell i_1 et i_2 de ces deux mailles. $(p - n + 1)$ mailles indépendantes étant choisies, on écrit pour chaque maille « a » l'équation correspondante $\sum_b E_{ab} = \left(\sum_b R_b \right) i_a$ où $\sum_b E_{ab}$ est la somme algébrique (selon l'orientation choisie) des f.é.m. des branches qui forment la maille « a », $\sum_b R_b$ la somme des résistances de ces branches, et i_a le courant de Maxwell de la maille « a ». Les $(p - n + 1)$

1. Consulter par exemple à ce sujet : JOYAL-PROVOST, *Électricité*, classe de Mathématiques spéciales, Masson et Cie.

équations linéaires obtenues déterminent les $(p - n + 1)$ courants de Maxwell, d'où l'on déduit les intensités vraies.

Cette méthode revient, si on la compare à la méthode classique, à faire un changement de variables; son principal intérêt est de réduire le nombre des équations à résoudre, car les lois de Kirchhoff aux nœuds se trouvent automatiquement satisfaites. Pour que les $(p - n + 1)$ mailles choisies soient indépendantes, il faut qu'elles fassent intervenir au moins une fois chaque résistance et chaque f.é.m. On choisit ces mailles extérieures les unes aux autres, quand c'est possible, et, dans ce cas, il est commode de choisir le même sens d'orientation pour toutes les mailles.

3° Méthode des nœuds. — Le principe de cette méthode est assez voisin de celui de la précédente; on choisit comme inconnues les potentiels des n nœuds du réseau, ce qui fait $(n - 1)$ inconnues puisqu'on peut toujours prendre égal à zéro le potentiel de l'un quelconque des nœuds du réseau. Les équations de Kirchhoff aux mailles se trouvent alors automatiquement satisfaites, et l'écriture des $(n - 1)$ équations aux nœuds fournit un système d'équations linéaires dont le déterminant est symétrique, comme dans la méthode précédente. Le choix de l'une de ces trois méthodes dépend évidemment du réseau qu'on étudie; très généralement, la méthode des mailles est préférable quand le réseau est compliqué, ne présente pas de symétries particulières ou est le support d'une application numérique compliquée (problèmes réels); la première et la troisième méthode sont au contraire à préférer quand le réseau étudié est simple ou comporte des symétries importantes (exercices « à taupins »).

5-1. PONT DE WEATSTONE DÉSÉQUILIBRÉ. — **1° Théorème de superposition des régimes permanents :** *montrer que si, dans un réseau de conducteurs de résistances données, l'on superpose plusieurs systèmes de générateurs, l'intensité du courant dans chaque branche est la somme (algébrique) des intensités des courants engendrés par chacun des systèmes de générateurs supposé seul.*

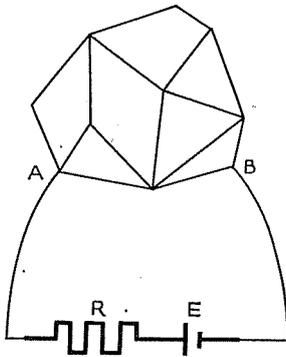


FIG. 5-1 2°

2° Théorème de Thévenin : *montrer qu'un réseau dipolaire de pôles A et B est équivalent à un générateur de f.é.m. e et de résistance intérieure r telles que : e est égale à la différence de potentiel $V_A - V_B$ existant entre les pôles A et B en l'absence de circuit extérieur, et r est la résistance équivalente du réseau dipolaire considéré.*

3° Un pont de Wheatstone est un réseau formé de quatre nœuds A, B, C, D, et des six

branches AB (résistance : R_1), BC (résistance : R_2), CD (résistance : R_3), DA (résistance : R_4), AC (résistance : g) et BD (résistance : r , f.é.m. : E). Calculer, dans le cas où $r = 0$, l'intensité du courant qui passe dans la branche AC.

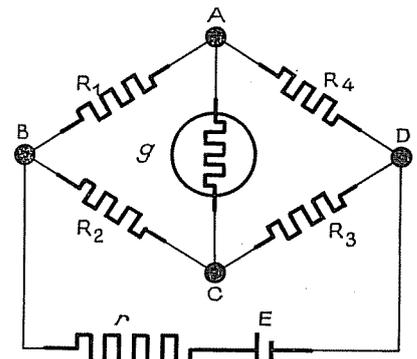


FIG. 5-1 3°

4° Méthode triangle-étoile : montrer qu'un réseau tripolaire passif ABC (branche AB de résistance R_C , branche BC de résistance R_A , branche CA de résistance R_B) est équivalent au réseau tripolaire abc de branches ai, bi et ci (de résistances respectives r_a, r_b, r_c), pourvu que les résistances r_a, r_b, r_c aient des valeurs que l'on déterminera en fonction de R_A, R_B, R_C .

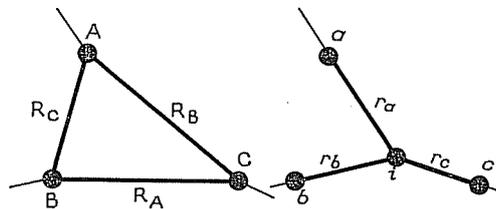


FIG. 5-1 4°

5° Pont de Weatstone déséquilibré : Déterminer l'intensité du courant qui passe dans la branche AC du pont défini au § 3°, dans le cas général où la résistance r n'est pas nulle.

— SOLUTION —

1° Le théorème de superposition des régimes permanents, encore appelé théorème d'Helmholtz, est une conséquence immédiate de la linéarité des équations de l'électrocinétique (lois d'Ohm, de Pouillet, de Kirchhoff), par rapport à l'ensemble des intensités et des forces électromotrices. Plus précisément, la matrice colonne [\dot{a} ($p-n+1$) composantes] des intensités des ($p-n+1$) courants de mailles indépendants est égale au produit de la matrice colonne des f.é.m. et f.c.é.m. par une matrice carrée dont les éléments ne dépendent que des résistances des branches du réseau :

$$(i) = (R)^{-1}(E)$$

Le théorème proposé devient sous cette forme évident : la superposition de

deux distributions de f.é.m. et f.c.é.m. [caractérisées respectivement par les matrices colonnes (E') et (E'')] est caractérisée par la matrice colonne (E) = (E') + (E''). La matrice colonne (i) des intensités des courants de mailles sera également la somme des matrices colonnes (i') et (i'') des intensités engendrées respectivement par les deux systèmes (E') et (E'') de f.é.m. et f.c.é.m., ce qui est équivalent à l'énoncé du théorème proposé.

2° Considérons un réseau dipolaire de pôles A et B; ce réseau est défini, d'une part par la donnée de sa constitution géométrique et des résistances des diverses branches, de l'autre par la donnée des générateurs et récepteurs qu'on y a disposé. On relie les pôles A et B de ce réseau par une chaîne de conducteurs dont la résistance totale est R et la force électromotrice E (somme algébrique des f.é.m. et f.c.é.m. de la chaîne, le sens choisi étant par exemple de B vers A); cette chaîne constitue le « circuit d'utilisation ». Nous cherchons l'intensité I du courant qui apparaît dans le circuit d'utilisation.

Considérons deux états du réseau total ainsi constitué :

a) réseau dipolaire (A, B) muni de ses générateurs et récepteurs, circuit d'utilisation muni d'un générateur de f.é.m. $E_a = -(V_A - V_B)$. L'état du réseau dipolaire (A, B) est le même qu'en l'absence de circuit d'utilisation, et l'intensité du courant passant dans le circuit d'utilisation est nulle.

b) réseau dipolaire (A, B) démuné de ses générateurs et récepteurs (donc devenu passif), circuit d'utilisation muni d'un générateur de f.é.m. $E_b = E - E_a$.

Il passe alors dans le circuit d'utilisation un courant d'intensité :

$$i = \frac{E_b}{R + r},$$

où r est la résistance équivalente du réseau dipolaire (A, B), déjà définie par ailleurs.

La superposition des états (a) et (b) constitue un état identique à l'état considéré initialement, il passe alors dans le circuit d'utilisation un courant d'intensité :

$$I = 0 + i = \frac{E + (V_A - V_B)}{R + r},$$

ce qui montre bien que le réseau dipolaire (A, B) actif est équivalent à un générateur de f.é.m. : $e = V_A - V_B$ et de résistance intérieure r.

3° Soit (A, C) le réseau dipolaire formé des branches AB, BC, CD, DA et BD. La branche AC peut être considérée comme le circuit d'utilisation du réseau dipolaire (A, C), selon le théorème démontré ci-dessus, l'intensité cherchée est donc :

$$i_g = \frac{V_A - V_C}{g + R},$$

où R est la résistance équivalente du dipôle (A, C), et $(V_A - V_C)$ la différence des potentiels aux pôles A et C en l'absence de circuit d'utilisation.

a) *Calcul de $(V_A - V_C)$.* — En l'absence de toute branche AC, on a :

$$\begin{cases} V_A - V_B = \frac{R_1}{R_1 + R_4} (V_D - V_B) = -\frac{R_1}{R_1 + R_4} \cdot E \\ V_C - V_B = \frac{R_2}{R_2 + R_3} (V_D - V_B) = -\frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot E \end{cases}$$

donc :

$$V_A - V_C = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right) \cdot E = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_1 + R_4) \cdot (R_2 + R_3)} \cdot E$$

b) *Calcul de R .* — Le réseau dipolaire (passif) dont il faut calculer la résistance équivalente R est formé des branches AB, BC, CD et DA, ainsi que d'une branche BD démunie de générateur, et dont la résistance r est nulle. Les points B et D sont donc au même potentiel, et la résistance R est la même que s'ils étaient confondus.

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}} + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_4 (R_2 + R_3) + R_2 R_3 (R_1 + R_4)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}$$

L'intensité i_g du courant circulant dans la branche AC d'un pont de Wheatstone déséquilibré est donc égale à :

$$i_g = \frac{V_A - V_C}{g + R} = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{g(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_1 R_4 (R_2 + R_3) + R_2 R_3 (R_1 + R_4)}$$

4° Lorsqu'un réseau tripolaire est relié à d'autres conducteurs, formant ainsi un autre réseau plus « large », il se trouve alimenté en A, B, C par trois courants d'intensités I_A , I_B et I_C telles que :

$$I_A + I_B + I_C = 0 \quad (\text{en régime permanent}).$$

Un tel état peut toujours être trouvé comme la superposition de régimes permanents pour lesquels l'une des trois intensités I_A , I_B ou I_C est nulle.

Il en résulte que deux réseaux tripolaires ABC et abc sont équivalents si et seulement si les réseaux dipolaires correspondants (A, B) et (a, b), (B, C) et (b, c), (C, A) et (c, a) sont respectivement équivalents. Dans le cas de réseaux tripolaires passifs, ceci se réduit à l'égalité respective des résistances équivalentes des réseaux dipolaires correspondants. Un réseau tripolaire « triangle »

ABC et un réseau tripolaire « étoile » *abc* sont donc équivalents si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_A + R_B}} = r_a + r_b \\ \frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B + R_C}} = r_b + r_c \\ \frac{1}{\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C + R_A}} = r_c + r_a \end{array} \right.$$

ce qui permet de calculer r_a , r_b et r_c :

$$\boxed{r_a = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C} \quad r_b = \frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C} \quad r_c = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}}$$

Réciproquement on obtiendrait :

$$R_A = \frac{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}{r_a}, \quad R_B = \frac{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}{r_b}, \quad R_C = \frac{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}{r_c}$$

Toutes ces formules peuvent être rassemblées sous la forme :

$$\boxed{r_a R_A = r_b R_B = r_c R_C = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \frac{R_A R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}}$$

5° L'intensité i_g du courant passant dans la branche AC est toujours égale à :

$$i_g = \frac{V_A - V_C}{g + R},$$

où R est la résistance équivalente du dipôle (A, C), et $(V_A - V_C)$ la différence des potentiels aux pôles A et C en l'absence de la branche AC.

a) Calcul de $(V_A - V_C)$. — Le calcul de la différence de potentiel $(V_A - V_C)$ en l'absence de toute branche AC est presque aussi simple qu'au § 3°, et donne :

$$V_A - V_C = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + r(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)} \cdot E$$

b) Calcul de R . — Le calcul de R est un peu plus compliqué qu'au § 3°. Nous devons calculer la résistance équivalente R d'un réseau dipolaire (A, C) constitué des branches AB, BC, CD, DA et BD de résistances respectives R_1, R_2, R_3, R_4 et r . Pour cela nous pouvons remplacer, ainsi qu'on a vu ci-dessus, le triangle ABD de branches AB, BD et DA par une étoile ABD de branches Ai, Bi et Di dont les résistances respectives r_a, r_b, r_d sont données par :

$$r_a = \frac{R_4 R_1}{r + R_1 + R_4}, \quad r_b = \frac{R_1 r}{r + R_1 + R_4} \quad \text{et} \quad r_d = \frac{r R_4}{r + R_1 + R_4}$$

La résistance équivalente R cherchée est alors égale à :

$$R = r_a + \frac{1}{\frac{1}{r_b + R_2} + \frac{1}{r_d + R_3}},$$

c'est-à-dire à :

$$R = \frac{R_4 R_1}{r + R_1 + R_4} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{R_1 r}{r + R_1 + R_4} + R_2} + \frac{1}{\frac{r R_4}{r + R_1 + R_4} + R_3}}$$

L'intensité cherchée est :

$$i_g = \frac{V_A + V_G}{g + R} = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{[(R_1 + R_4) \cdot (R_2 + R_3) + r \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)] \cdot (g + R)} \cdot E$$

mais nous ne pousserons pas plus loin les calculs...

5-2*. — *Les arêtes d'un cube sont formées de douze conducteurs filiformes identiques ayant chacun une résistance r. Calculer la résistance équivalente R du cube lorsqu'il est alimenté par deux sommets.*

INDICATION. — Le calcul sera différent selon la position respective des deux sommets : aux extrémités d'une arête, d'une diagonale de face ou d'une diagonale du cube. Dans chacun de ces trois cas, il est important de mettre à profit les symétries du système proposé avant de s'engager dans le calcul.

— SOLUTION —

Désignons par exemple par A, B, C, D, A', B', C', D' les sommets du cube; le problème se présente différemment selon que les sommets choisis comme pôles sont situés aux extrémités d'une arête (exemple A, B), d'une diagonale d'une face (exemple : A, B') ou d'une diagonale du carré (exemple : A, C').

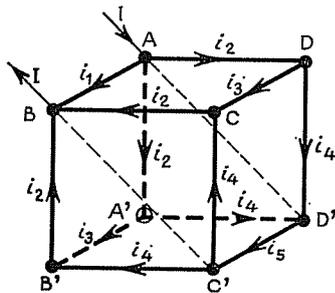
1° Sommets contigus (exemple: A, B). — Le plan ABC'D' est plan de symétrie, et d'autre part l'intensité rentrant en A est égale à l'intensité sortant en B; ceci entraîne l'égalité des intensités sur certaines arêtes. Posons en conséquence :

$$\begin{aligned} I_{AB} &= i_1 \\ I_{AD} = I_{AA'} = I_{CB} = I_{B'B} &= i_2 \\ I_{DC} = I_{A'B'} &= i_3 \\ I_{DD'} = I_{A'D'} = I_{C'C} = I_{C'B'} &= i_4 \\ I_{D'C'} &= i_5 \end{aligned}$$

On peut exprimer de proche en proche tous ces courants en fonction de i_5 seulement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{loi de Kirchhoff en D'} : i_5 = 2 \cdot i_4 \quad \Rightarrow i_4 = \frac{i_5}{2} \\ \text{loi d'Ohm appliquée au} \\ \text{circuit DD'C'D} : r \cdot (i_4 + i_5 + i_4 - i_3) = 0 \Rightarrow i_3 = 2 i_5 \\ \text{loi de Kirchhoff en D} : i_2 = i_3 + i_4 \quad \Rightarrow i_2 = \frac{5}{2} \cdot i_5 \\ \text{loi d'Ohm appliquée au} \\ \text{circuit ADCBA} : r \cdot (i_2 + i_3 + i_2 - i_1) = 0 \Rightarrow i_1 = 7 \cdot i_5 \end{array} \right.$$

En A arrive un courant d'intensité I; la loi de Kirchhoff appliquée au nœud A s'écrit :



$$I = i_1 + 2 i_2$$

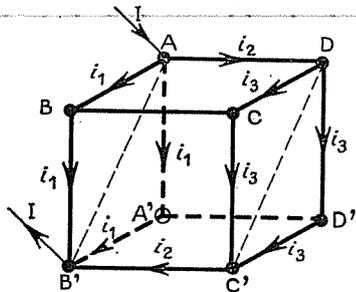
ou :

$$I = 12 i_5$$

Il vient ainsi en particulier : $i_1 = \frac{7}{12} \cdot I$

La loi d'Ohm appliquée à l'arête AB s'écrit :

$$V_A - V_B = r \cdot i_1 = \frac{7r}{12} \cdot I,$$



ce qui montre que la résistance équivalente cherchée est :

$$R = \frac{7}{12} \cdot r$$

2° Sommets aux extrémités d'une diagonale d'une face (exemple: A, B'). — Le plan $AB'C'D$ est plan de symétrie, et d'autre part l'intensité I rentrant en A est égale à l'intensité sortant en B'; ceci entraîne l'égalité des intensités sur certaines arêtes. Posons en conséquence :

$$I_{AB} = I_{AA'} = I_{BB'} = I_{A'B'} = i_1$$

$$I_{AD} = I_{C'B'} = i_2$$

$$I_{DC} = I_{DD'} = I_{CC'} = I_{D'C'} = i_3$$

Les intensités I_{BC} et $I_{A'D'}$ sont alors évidemment nulles. On peut exprimer de

proche en proche i_1 et i_2 en fonction de i_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{loi de Kirchhoff en D} : i_2 = 2i_3 \\ \text{loi d'Ohm appliquée au circuit ADCBA} : r \cdot (i_2 + i_3 - i_1) = 0 \Rightarrow i_1 = 3i_3 \\ \text{loi de Kirchhoff en A} : I = 2i_1 + i_2 \quad \Rightarrow I = 8i_3 \end{array} \right.$$

L'intensité i_1 est donc égale à $\frac{3}{8}I$, et la loi d'Ohm appliquée au chemin ABB' s'écrit :

$$V_A - V_{B'} = 2r \cdot i_1 = \frac{3r}{4} \cdot I,$$

ce qui montre que la résistance équivalente cherchée est :

$$R = \frac{3}{4} \cdot r$$

3° Sommets opposés (exemple: A, C'). — L'axe AC' est axe de symétrie ternaire, les plans $ABC'D'$, $AA'C'C$ et $ADC'B'$ sont plans de symétrie et d'autre part l'intensité I rentrant en A est égale à l'intensité sortant en C' ; ceci entraîne l'égalité des intensités sur certaines arêtes. Posons en conséquence :

$$\begin{aligned} I_{AB} = I_{AA'} = I_{AD} = I_{B'C'} = I_{CC'} = I_{D'C'} = i_1 \\ I_{BB'} = I_{BC} = I_{A'B'} = I_{A'D'} = I_{DC} = I_{DD'} = i_2 \end{aligned}$$

L'application de la loi de Kirchhoff aux nœuds A et B montre que :

$$I = 3i_1 \quad \text{et} \quad i_1 = 2i_2$$

La loi d'Ohm appliquée au chemin $ABB'C'$ s'écrit :

$$V_A - V_{C'} = r \cdot (i_1 + i_2 + i_1) = \frac{5r}{6} \cdot I,$$

ce qui montre que la résistance équivalente cherchée est :

$$R = \frac{5}{6} \cdot r$$

5-3*. — N points de l'espace sont reliés deux à deux par des conducteurs ohmiques de même résistance r . Calculer la résistance équivalente R de ce réseau entre deux quelconques des N points.

INDICATION. — Il faut savoir découvrir derrière l'absence de symétrie géométrique du système matériel proposé, les symétries réelles du problème *physique*.

— SOLUTION —

Soient A_1 et A_2 les deux pôles choisis, A_3, A_4, \dots, A_N les $(N-2)$ points restants. Ces $(N-2)$ points jouent absolument le même rôle, donc sont au

même potentiel : les intensités des courants circulant dans les branches $A_i A_j$ ($i > 2, j > 2$) sont nulles. La résistance équivalente cherchée est donc la même que si tous ces $(N-2)$ points étaient confondus, où si l'on préfère, que si tous les fils $A_i A_j$ ($i > 2, j > 2$) étaient coupés. La résistance équivalente R est donc la résistance d'un réseau dipolaire formé d'un fil de résistance r (le fil « direct » $A_1 A_2$) et de $(N-2)$ fils de résistance $2r$ (les fils $A_1 A_i A_2$), ces $(N-1)$ fils étant disposés en parallèle :

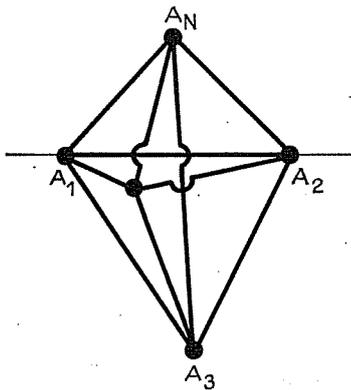


FIG. 5-3.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{N-2}{2r}$$

d'où nous déduisons :

$$R = \frac{2r}{N}$$

5-4. — Un circuit est constitué par quatre résistances identiques AB, BC, CD et DA égales à r ; en dérivation entre C et D on monte un fil homogène CMD de milieu M et de résistance $2r$. Un courant d'intensité $I = 11$ ampères arrive par A et sort par M . Calculer la résistance équivalente R du réseau dipolaire de bornes A et M . Calculer les intensités dans les différentes branches du circuit.

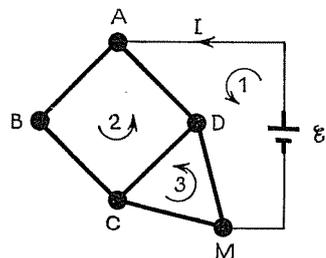


FIG. 5-4.

— SOLUTION —

Le courant I est par exemple dû à la présence d'un générateur \mathcal{E} de résistance intérieure nulle et de f.é.m. : $E = RI$, branché entre les bornes A et M du réseau. Numérotions (1), (2), (3) les mailles $ADM\mathcal{E}$, $ABCD$ et CMD , et soient i_1, i_2, i_3 les courants de maille correspondants. La loi de Pouillet généralisée aux mailles s'écrit :

$$\begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

Le déterminant $|R|$ de la matrice des résistances est égal à $13r^3$, le mineur M_{11} du premier élément de cette matrice est égal à $11r^2$, donc la résistance équivalente cherchée est :

$$R = \frac{|R|}{M_{11}} = \frac{13}{11} r$$

Les trois courants de maille i_1 , i_2 et i_3 sont égaux à :

$$i_1 = \frac{11}{13 \cdot r} \cdot E = I, \quad i_2 = \frac{4}{13 \cdot r} \cdot E = \frac{4}{11} \cdot I, \quad i_3 = \frac{5}{13 \cdot r} \cdot E = \frac{5}{11} \cdot I$$

Les intensités cherchées sont donc égales à :

$$I_{AB} = I_{BC} = i_2 = \frac{4}{11} \cdot I = 4 \text{ ampères}$$

$$I_{AD} = i_1 - i_2 = \frac{7}{11} \cdot I = 7 \text{ ampères}$$

$$I_{CD} = i_2 - i_3 = -\frac{1}{11} \cdot I = -1 \text{ ampère}$$

$$I_{CM} = i_3 = \frac{5}{11} \cdot I = 5 \text{ ampères}$$

$$I_{DM} = i_1 - i_3 = \frac{6}{11} \cdot I = 6 \text{ ampères}$$

5-5. — Un fil métallique, dont la résistance est r par unité de longueur, a la forme d'une circonférence de rayon a . Deux points diamétralement opposés C et D sont réunis par un fil rectiligne de même résistance linéique. Un courant d'intensité I arrive en un point A du cercle et sort au point B diamétralement opposé. Désignant par θ l'angle des diamètres AB et CD, calculer les intensités des courants dans les différentes branches.

Application numérique : $r = 1 \Omega/m$,
 $a = 1 m$, $I = 10 A$, $\theta = 0$ puis 90° .

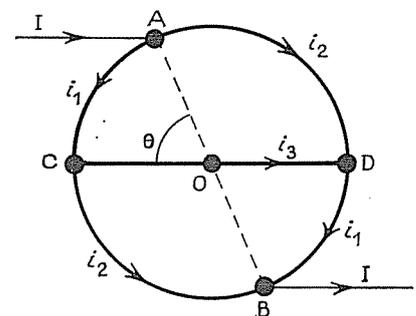


FIG. 5-5.

— SOLUTION —

Par raison de symétrie, les intensités des courants circulant dans les branches AC et DB sont égales, il en est de même pour les branches AD et CB.

Posons par exemple :

$$\begin{aligned} I_{AC} &= I_{DB} = i_1 \\ I_{AD} &= I_{CB} = i_2 \\ I_{CD} &= i_3 \end{aligned}$$

L'application des lois de Kirchhoff aux nœuds A et C fournit deux relations :

$$\begin{cases} \text{en A : } I = i_1 + i_2 \\ \text{en C : } i_1 = i_2 + i_3 \end{cases}$$

Calculant de deux façons différentes la différence de potentiel $(V_A - V_D)$ il vient :

$$[(a \cdot \theta) \cdot r] i_1 + [(2a) \cdot r] i_3 = [a(\pi - \theta)r] i_2$$

ou :

$$\theta i_1 + 2i_3 = (\pi - \theta) i_2$$

d'où nous déduisons :

$$\boxed{i_1 = \frac{\pi + 2 - \theta}{\pi + 4} \cdot I \quad i_2 = \frac{\theta + 2}{\pi + 4} \cdot I \quad i_3 = \frac{\pi - 2\theta}{\pi + 4} \cdot I}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} I = 10 \text{ A} \quad \theta = 0 & \Rightarrow i_1 = 7,2 \text{ A}; \quad i_2 = 2,8 \text{ A}; \quad i_3 = 4,4 \text{ A} \\ I = 10 \text{ A} \quad \theta = \pi/2 & \Rightarrow i_1 = 5 \text{ A}; \quad i_2 = 5 \text{ A}; \quad i_3 = 0 \text{ A} \end{aligned}$$

Les cas $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ peuvent être traités directement : dans ces deux cas le réseau bipolaire (A, B) est équivalent à des résistances en parallèle.

5-6. — Un rectangle dont la largeur est les $2/3$ de la longueur est divisé en six carrés égaux; le côté de chaque carré a pour résistance r . On alimente le réseau ainsi obtenu par deux sommets opposés de la diagonale du rectangle. Calculer la résistance équivalente R de ce réseau dipolaire.

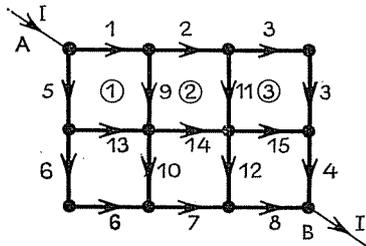


FIG. 5-6.

— SOLUTION —

Numérotions arbitrairement de 1 à 15 les intensités des courants circulant dans les différentes branches, par exemple comme il est indiqué sur la figure. Nous pouvons

d'ores et déjà écrire les relations suivantes, pour des raisons de symétrie :

$$i_1 = i_8, \quad i_2 = i_7, \quad i_3 = i_6, \quad i_4 = i_5, \quad i_9 = i_{12}, \quad i_{10} = i_{11}, \quad i_{13} = i_{15}.$$

Dans le but de réduire le nombre des inconnues, nous chercherons à exprimer chaque intensité i_n en fonction des intensités d'indice inférieur; ceci sera obtenu en appliquant les lois de Kirchhoff aux nœuds :

$$\begin{array}{l}
 i_{15} = i_{13} \\
 i_{14} = i_9 + i_{13} - i_{10} \\
 i_{13} = i_5 - i_6 \\
 i_{12} = i_8 - i_7 \\
 i_{11} = i_2 - i_3 \\
 i_{10} = i_7 - i_6 \\
 i_9 = i_1 - i_2 \\
 i_8 = I - i_4 \\
 i_7 = i_2 \\
 i_6 = i_3 \\
 i_5 = I - i_1 \\
 i_4 = I - i_1
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 i_{15} = I - i_1 - i_3 \\
 i_{14} = I - 2i_2 \\
 i_{13} = I - i_1 - i_3 \\
 i_{12} = i_1 - i_2 \\
 i_{11} = i_2 - i_3 \\
 i_{10} = i_2 - i_3 \\
 i_9 = i_1 - i_2 \\
 i_8 = i_1 \\
 i_7 = i_2 \\
 i_6 = i_3 \\
 i_5 = I - i_1 \\
 i_4 = I - i_1
 \end{array}$$

Nous avons ainsi réduit le nombre des inconnues à trois : i_1 , i_2 et i_3 . La loi de Pouillet appliquée aux carrés (1), (2), (3) fournit trois relations supplémentaires :

$$\begin{cases}
 4i_1 - i_2 + i_3 = 2I \\
 i_1 - 5i_2 + i_3 = -I \\
 i_1 - i_2 + 4i_3 = I
 \end{cases}$$

d'où nous déduisons :

$$i_1 = \frac{37}{69} \cdot I, \quad i_2 = \frac{8}{23} \cdot I, \quad i_3 = \frac{14}{69} \cdot I$$

La différence de potentiel aux bornes du réseau dipolaire étudié (A, B) est :

$$V_A - V_B = RI = r \cdot (i_1 + i_2 + i_3 + i_4) = r \frac{121}{69} \cdot I$$

La résistance équivalente cherchée est donc :

$$\boxed{R = \frac{121}{69} \cdot r}$$

REMARQUE. — La méthode des mailles aurait pu être utilisée, mais il aurait fallu introduire 7 mailles, nous aurions écrit :

$$R = \frac{|R|}{M_{11}},$$

où $|R|$ est le déterminant de la matrice des résistances et M_{11} le mineur de son premier élément; mais on n'aime guère calculer des déterminants 7-7 ou 6-6... Ici nous avons quinze inconnues au départ, mais avec un peu de méthode on se ramène à un problème simple.

5-7. QUADRIPOLES.

1° Théorème de réciprocité. — On considère deux branches B_1 et B_2 d'un réseau passif. Si l'on introduit dans la branche B_1 un générateur de f.é.m. E , il apparaît dans la branche B_2 un courant d'intensité I_2 ; si le même générateur est introduit dans la branche B_2 , il apparaît un courant d'intensité I_1 dans la branche B_1 . Montrer que $I_1 = I_2$.

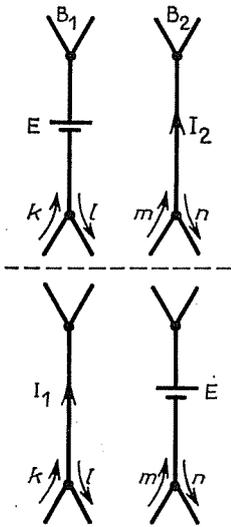


FIG. 5-7 1°.

2° On appelle quadripôle la donnée d'un réseau électrique et de deux couples (A_1, B_1) et (A_2, B_2) de ses nœuds; un quadripôle permet de fermer deux circuits C_1 (« circuit d'entrée ») et C_2 (« circuit de sortie »). L'état d'un quadripôle est défini par les

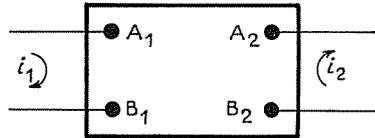


FIG. 5-7 2°.

tensions aux bornes :

$$V_1 = V_{A_1} - V_{B_1} \quad \text{et} \quad V_2 = V_{A_2} - V_{B_2},$$

ainsi que les intensités i_1 et i_2 des courants circulant dans C_1 et C_2 , ces quatre grandeurs étant reliées par deux relations linéaires :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Montrer que l'on a, dans le cas d'un quadripôle passif : $a_{12} + a_{21} = 0$.

3° On définit de même une matrice-résistance $[R]$ et une matrice de transfert $[T]$ par :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Exprimer les coefficients de ces deux matrices en fonction de ceux de la matrice-conductance $[A]$ déjà définie. Montrer qu'un quadripôle passif vérifie les relations :

$$r_{12} + r_{21} = 0 \quad \text{et} \quad t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1$$

Nous ne considérerons plus désormais que des quadripôles passifs.

4° Un quadripôle est dit symétrique si l'on ne change rien aux circuits C_1 et C_2 en intervertissant les couples (A_1, B_1) et (A_2, B_2) . Quelles relations supplé-

mentaires entre les coefficients a_{ij} , r_{ij} et t_{ij} peut-on écrire dans le cas d'un quadripôle symétrique ?

5° Le circuit de sortie C_2 étant réduit à une résistance R_2 , l'ensemble formé par le quadripôle et le circuit de sortie constitue un réseau dipolaire. Calculer la résistance équivalente R_1 de ce réseau dipolaire. Montrer qu'il existe au maximum une valeur de R_2 telle que $R_1 = R_2$ (« résistance itérative »).

6° Déterminer la matrice de transfert et la résistance itérative des quadripôles suivants :

a) quadripôle formé d'un conducteur A_1A_2 de résistance r et d'un conducteur B_1B_2 de résistance nulle.

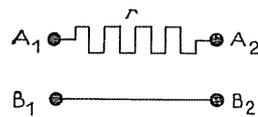


FIG. 5-7 3°.

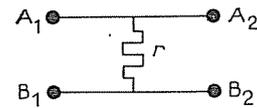


FIG. 5-7 4°.

b) Quadripôle formé d'une résistance r , les pôles A_1 et A_2 étant confondus avec une extrémité de la résistance, les pôles B_1 et B_2 avec l'autre.

c) Un rhéostat est formé d'un bobinage AB de résistance R , sur lequel se déplace un curseur C (la résistance de la portion AC est : $r = x \cdot R$, $x \in [0, 1]$); ce rhéostat peut être considéré comme un quadripôle, le pôle A_1 étant confondu avec A , les pôles B_1 et B_2 avec B , et le pôle A_2 avec C .

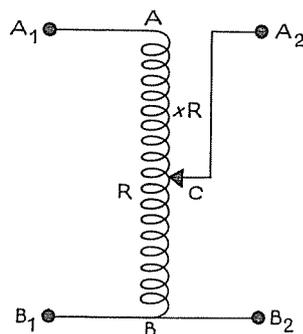


FIG. 5-7 5°.

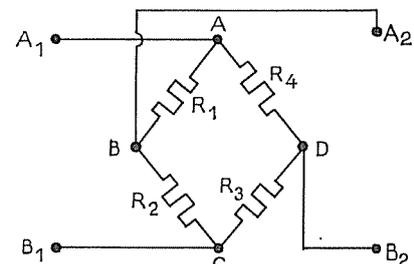


FIG. 5-7 6°.

d) Quadripôle constitué par un pont de wheatstone $ABCD$ ($A_1 = A$, $A_2 = B$, $B_1 = C$, $B_2 = D$). On se contentera dans ce cas d'indiquer comment pourrait être obtenue la matrice de transfert.

— SOLUTION —

1° L'état du réseau est défini par les intensités i_1, i_2, \dots, i_N des N courants de maille, ces intensités étant liées aux f.é.m. E_1, E_2, \dots, E_N des mailles

du réseau par la relation matricielle:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_N \end{bmatrix}$$

La matrice [A] ainsi introduite est l'inverse de la matrice des résistances [R], donc est également symétrique. La branche B₁ est *a priori* commune à deux mailles numérotées *k* et *l*, et la branche B₂ à deux mailles numérotées *m* et *n*. Le réseau étant primitivement passif, si l'on introduit dans la branche B₁ un générateur de f.é.m. E, les éléments de la matrice colonne [E] sont tous nuls sauf le *k*^{ième} (E_k = E) et le *l*^{ième} (E_l = -E), il apparaît dans la branche B₂ un courant d'intensité :

$$I_2 = i_m - i_n = (a_{mk}E - a_{ml}E) - (a_{nk}E - a_{nl}E)$$

Si le générateur est introduit dans la branche B₂, les f.é.m. E₁, E₂, ..., E_N sont nulles sauf la *m*^{ième} et la *n*^{ième} (E_m = E, E_n = -E), et il apparaît dans la branche B₁ un courant d'intensité :

$$I_1 = i_k - i_l = (a_{km}E - a_{kn}E) - (a_{lm}E - a_{ln}E)$$

La matrice [A] étant symétrique, les coefficients intervenant ci-dessus sont liés par les relations :

$$a_{km} = a_{mk}, \quad a_{kn} = a_{nk}, \quad a_{lm} = a_{ml}, \quad \text{et} \quad a_{ln} = a_{nl}$$

d'où il résulte bien que :

$$I_1 = I_2.$$

2° Considérons un quadripôle passif dont l'entrée et la sortie sont en court-circuit; un tel ensemble constitue un réseau passif auquel on peut appliquer le théorème de réciprocité :

— Intercalons un générateur de f.é.m. E et de résistance intérieure nulle dans le circuit d'entrée (V_{A1} - V_{B1} = E), il apparaît dans le circuit de sortie un courant d'intensité I₂.

— Intercalons le même générateur dans le circuit de sortie (V_{A2} - V_{B2} = -E), il apparaît dans le circuit d'entrée un courant d'intensité I₁.

La relation générale :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

montre que :

$$I_1 = -a_{12} \cdot E \quad \text{et} \quad I_2 = +a_{21} \cdot E$$

Or le théorème de réciprocité indique que I₁ = I₂, il en résulte bien que, pour un quadripôle passif :

$$a_{12} + a_{21} = 0 \quad (2)$$

3° La relation (1) exprime les intensités i_1 et i_2 en fonction des différences de potentiel V_1 et V_2 ; dans le cas général où deux quelconques de ces quatre variables ne sont pas linéairement dépendantes, on peut résoudre le système d'équations (1) par rapport à deux quelconques des quatre variables, par exemple par rapport à V_1 et V_2 (inversion de la matrice [A]), ou par rapport à V_2 et i_2 :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Les coefficients des matrices [A], [R] et [T] ainsi définies sont liées par ces relations linéaires simples, que l'on peut résumer sous la forme :

$$\begin{aligned} [R] &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{t_{21}} \cdot \begin{bmatrix} -t_{22} & 1 \\ -|T| & t_{11} \end{bmatrix} \\ [T] &= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{r_{12}} \cdot \begin{bmatrix} r_{22} & -|R| \\ 1 & -r_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{12}} \cdot \begin{bmatrix} -a_{11} & 1 \\ -|A| & a_{22} \end{bmatrix} \\ [A] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{t_{12}} \cdot \begin{bmatrix} -t_{11} & 1 \\ -|T| & t_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|R|} \cdot \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où |A|, |R| et |T| représentent les déterminants respectifs des matrices [A], [R] et [T]. On peut remarquer que :

$$a_{12} + a_{21} = \frac{1 - |T|}{t_{12}} = -\frac{r_{12} + r_{21}}{|R|}$$

Un quadripôle passif, vérifiant la relation (2), vérifie donc aussi les suivantes :

$$t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1 \quad \text{et} \quad r_{12} + r_{21} = 0 \quad (4)$$

4° Un quadripôle est symétrique si, quels que soient les circuits d'entrée et de sortie, l'état électrique du système n'est pas modifié quand on échange les couples (A_1, B_1) et (A_2, B_2) du quadripôle, ou, ce qui revient au même, quand on échange les circuits c_1 et c_2 d'entrée et de sortie.

Ceci s'exprime par l'invariance des relations (1) et (3) quand on procède à l'échange de variables :

$$\begin{aligned} V_1 &\leftrightarrow V_2 \\ i_1 &\leftrightarrow -i_2 \\ i_2 &\leftrightarrow -i_1 \end{aligned}$$

(Le signe provenant de la convention de signe prise pour les intensités des circuits c_1 et c_2). Il faut donc que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -i_2 \\ -i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i_2 \\ -i_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ces équivalences se traduisent par les relations suivantes :

$$\begin{array}{|l|l|} \hline t_{11} = t_{22} & |T| = 1 \\ \hline a_{11} = -a_{21} & a_{12} = -a_{22} \\ \hline r_{11} = -r_{12} & r_{21} = -r_{22} \\ \hline \end{array}$$

5° Si l'on pose : $R_2 = \frac{V_2}{i_2}$ dans les équations (1) ou (3), le rapport $\frac{V_1}{i_1}$ est calculable en fonctions des coefficients des matrices [A], [R] ou [T], et trouvé égal à :

$$R_1 = \frac{a_{22}R_2 - 1}{|A| \cdot R_2 - a_{11}} = \frac{r_{11}R_2 - |R|}{R_2 - r_{22}} = \frac{t_{12} - t_{22} \cdot R_2}{t_{21} \cdot R_2 - t_{11}} \quad (5)$$

Si le circuit de sortie c_2 est réduit à une résistance R_2 , la tension de sortie V_2 est égale à $R_2 \cdot i_2$, et la tension d'entrée V_1 est égale à $R_1 \cdot i_1$, où R_1 à l'expression ci-dessus, R_1 est la résistance équivalente cherchée. Par exemple :

$$\begin{array}{l} R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{a_{11}} = \frac{|R|}{r_{22}} = -\frac{t_{12}}{t_{11}} \\ R_2 \infty \Rightarrow R_1 = \frac{a_{22}}{|A|} = r_{11} = -\frac{t_{22}}{t_{21}} \end{array}$$

Les deux résistances R_1 et R_2 sont égales si et seulement si R_2 (ou R_1) vérifie l'une des trois équations suivantes (ces équations, équivalentes, n'en forment en fait qu'une seule) :

$$\left\{ \begin{array}{l} |A| \cdot R^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot R + 1 = 0 \\ R^2 - (r_{11} + r_{22}) \cdot R + |R| = 0 \\ t_{21} \cdot R^2 - (t_{11} - t_{22}) \cdot R - t_{12} = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Dans le cas où cette équation possède deux racines réelles, montrons qu'une seule est physiquement acceptable : Si R est résistance itérative du quadripôle, les matrices colonnes

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$$

sont colinéaires : $\begin{pmatrix} V_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$, λ est valeur propre de la matrice de transfert T , donc vérifie l'équation :

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - (t_{11} + t_{22}) \cdot \lambda + |T| = 0,$$

équation qui admet deux solutions λ_1 et λ_2 positives, l'une supérieure et

l'autre inférieure à l'unité, car $|T| = 1$. La puissance P_1 fournie à l'ensemble [quadripôle — circuit de sortie] par le circuit d'entrée est liée à la puissance P_2 fournie au circuit de sortie, par la relation :

$$P_2 = V_2 \cdot i_2 = (\lambda \cdot V_1) \cdot (\lambda \cdot i_1) = \lambda^2 (V_1 \cdot i_1) = \lambda^2 \cdot P_1;$$

rappelons que les quadripôles considérés depuis le § 4^o sont passifs, donc ne peuvent que consommer de la puissance :

$$P_2 \leq P_1 \quad \text{donc} \quad \lambda^2 \leq 1,$$

seule la racine λ_1 inférieure à l'unité doit donc être retenue, et par conséquent aussi la seule racine R_{i_1} de l'équation (6) qui lui correspond.

6^o Examinons successivement les quadripôles proposés.

a) *Résistance série:*

$$\left. \begin{array}{l} i_2 = i_1 \\ V_1 = V_2 + r \cdot i_1 \end{array} \right| \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il n'y a pas à proprement parler de résistance itérative ($R_i \infty$), ce qui tient à ce que la matrice résistance ne peut être définie (un tel quadripôle ne correspond pas tout à fait à la définition des quadripôles vue au § 1^o, car il ne constitue pas à lui tout seul un réseau).

b) *Résistance dérivation:*

$$\left. \begin{array}{l} V_2 = V_1 \\ i_1 = i_2 + \frac{V_1}{r} \end{array} \right| \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_i = 0$$

c) *Rhéostat:*

On peut écrire :

$$\begin{cases} V_2 = V_1 - xRi_1 \\ V_1 = (xR) \cdot i_1 + (1 - x) \cdot R \cdot (i_1 - i_2) \end{cases}$$

dont on déduit :

$$[T] = \begin{bmatrix} +1 & -xR \\ -\frac{1}{(1-x) \cdot R} & +\frac{1}{1-x} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_i = \frac{R}{2} [x + \sqrt{x(4-3x)}]$$

d) *Pont de Wheatstone:* Le quadripôle constitué par un pont de Wheatstone est assez compliqué; comme il n'y a que quatre coefficients à déterminer, on pourra chercher les valeurs de V_1, V_2, i_1, i_2 dans le cas de quatre utilisations particulières indépendantes. Dans le cas, par exemple, qui a été étudié dans le problème 5-1 (§ 5^o), on a su calculer l'intensité i_1 (appelée i_g dans le problème 5-1) en fonction des données g, r et E ; la différence de potentiel V_1 est égale à $g \cdot i_1$; il resterait à calculer l'intensité i_2 en fonction des mêmes

données, et V_2 serait alors égal à : $V_2 = E - r \cdot i_2$. Les relations linéaires représentées par la matrice de transfert ne dépendant que de R_1, R_2, R_3, R_4 (et non de g, E, r), cette matrice sera dès lors aisée à expliciter.

5-8*. MÉTHODE DE MANCE. — Les branches AB, BC et CD d'un pont de Wheatstone ont pour résistances respectives R_1, R_2 et R_3 ; la branche AC est constituée par un galvanomètre G de résistance g ; entre les points B et D l'on branche en série une résistance R et un interrupteur I, et entre les points A et D une pile de résistance intérieure r inconnue.

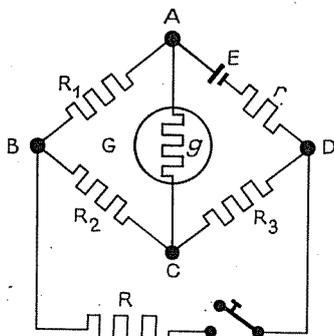


FIG. 5-8.

Montrer que si l'indication du galvanomètre G ne varie pas quand on ouvre ou ferme l'interrupteur I, la résistance r est égale à :

$$r = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

INDICATION. — On peut, connaissant (ou supposant connue) la force électromotrice E de la pile, calculer l'intensité du courant traversant le galvanomètre : i_1 ou i_2 selon que l'interrupteur I est ouvert ou fermé. On cherchera ensuite à quelle condition ces deux valeurs i_1 et i_2 sont égales.

Il est préférable cependant d'éviter tout calcul par application du théorème de superposition des régimes permanents (cf problème 5-1).

— SOLUTION —

Lors d'une première expérience (1), l'interrupteur I est ouvert, et il passe dans le galvanomètre un courant d'intensité i_1 (un sens positif sur AC étant choisi, de A vers C par exemple); ce faisant, il apparaît entre les points B et D une différence de potentiel :

$$V_B - V_D = U.$$

Lors d'une seconde expérience (2), l'interrupteur I est fermé, l'intensité du courant traversant le galvanomètre est i_2 , la f.é.m. de la pile restant la même que dans l'expérience (1); soit E cette f.é.m.

Il n'est pas très commode de comparer ces deux expériences, vu que le réseau n'est pas à proprement parler le même dans les deux cas (absence ou existence de la branche BD). Considérons le réseau passif formé des branches AB, BC, CD, DA, AC, BD de résistances respectives R_1, R_2, R_3, r, g, R , et imaginons deux expériences (1 bis) et (2 bis).

Dans une première expérience (1 *bis*) on dispose dans la branche AD un générateur de f.é.m. E (et de résistance intérieure nulle), et dans la branche BD un générateur de f.é.m. U. Comparant cette expérience à l'expérience (1) citée plus haut on s'aperçoit qu'un régime permanent dans lequel le courant traversant BD est nul (on aura alors : $V_B - V_D = U$), et celui traversant AC égal à i_1 , est possible; d'après l'unicité de la solution des équations de Kirchhoff (pour le réseau formé des branches AB, BC, CD, DA et AC), c'est effectivement le régime qui s'instaure lors de l'expérience (1 *bis*).

Dans une seconde expérience (2 *bis*) on dispose dans la branche AD un générateur de f.é.m. — E (et de résistance intérieure nulle), et on laisse les autres branches telles quelles (sans générateur). Comparant cette expérience à l'expérience (2) citée plus haut on conclut que le galvanomètre est traversé par un courant d'intensité $-i_2$.

La superposition des régimes permanents obtenus lors des expériences (1 *bis*) et (2 *bis*) constitue un régime permanent dans lequel le système étudié se réduit à un pont de Wheatstone usuel (branches AB, BC, CD, DA, AC et BD de résistances R_1, R_2, R_3, r, g et R, générateur de f.é.m. U dans la branche BD). La branche AC de ce pont de Wheatstone est traversée par un courant d'intensité :

$$i = i_1 - i_2$$

Si dans les expériences (1) et (2) citées par l'énoncé les intensités mesurées i_1 et i_2 sont égales, l'intensité i ci-dessus est nulle, et le pont de Wheatstone correspondant est équilibré, ce qui implique que :

$$R_1 R_3 = R_2 r$$

5-9*. — Étant donné un repère orthonormé $Oxyz$ et une distance a , on considère tous les points dont chaque coordonnée est un multiple entier (positif, négatif ou nul) de a . On constitue un réseau électrique en reliant chacun de ces points à ses 6 voisins immédiats par des conducteurs de même résistance r .

Calculer la résistance équivalente R de ce réseau, prise entre deux noeuds voisins (distants de a).

INDICATION. — Deux nœuds voisins ayant été choisis, le calcul direct de la résistance équivalente R est difficile, la symétrie du réseau étant fortement diminuée par le rôle privilégié donné à ces deux points. Il est bien plus facile de chercher à représenter le régime permanent étudié comme la superposition de deux régimes permanents dans lesquels un seul des points aurait été distingué (le retour du courant s'effectuant par l'infini).

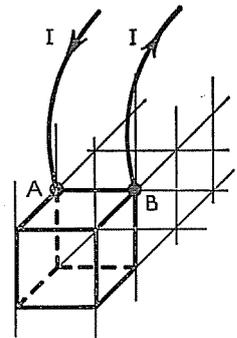


FIG. 5-9.

— SOLUTION —

Considérons un réseau semblable à celui défini dans l'énoncé, mais limité par une sphère métallique \mathcal{G} de rayon \mathcal{R} , et deux nœuds contigus A et B choisis dans ce réseau. Imaginons deux expériences réalisables :

— dans l'une on porte la sphère \mathcal{G} et le nœud A à des potentiels tels qu'il circule entre A et \mathcal{G} un courant d'intensité I (de \mathcal{G} vers A); la branche AB du réseau véhicule en particulier un courant d'intensité I_1 .

— dans l'autre on porte la sphère \mathcal{G} et le nœud B à des potentiels tels qu'il circule entre B et \mathcal{G} un courant d'intensité I (de B vers \mathcal{G}), dont la fraction I_2 se trouve véhiculée par la branche AB du réseau.

Par superposition de ces deux régimes permanents nous obtenons un autre régime permanent, dans lequel un courant d'intensité I circule de A vers B, aucun courant n'entrant ni ne sortant du réseau par la surface \mathcal{G} . La branche AB du réseau est parcourue par un courant d'intensité : $I_{AB} = I_1 + I_2$, et la différence des potentiels V_A et V_B des nœuds A et B peut être écrite de deux manières différentes (par application de la loi d'Ohm, ou d'après la définition de la résistance équivalente) :

$$V_A - V_B = R' \cdot I = r \cdot (I_1 + I_2),$$

où R' représente la résistance équivalente du réseau considéré, prise entre les nœuds A et B :

$$R' = r \cdot \frac{I_1 + I_2}{I}$$

Il est naturel de considérer le réseau proposé par l'énoncé comme la forme limite d'un tel réseau quand \mathcal{R} tend vers l'infini, et R' tend dans ces conditions vers la résistance équivalente R cherchée :

$$R = r \cdot \lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} \frac{I_1 + I_2}{I}$$

Dans la première expérience imaginée ci-dessus, les six branches du réseau partant du nœud A tendent à jouer le même rôle quand \mathcal{R} tend vers l'infini; il en est de même pour les six branches issues de B dans la seconde expérience :

$$\lim \frac{I_1}{I} = \lim \frac{I_2}{I} = \frac{1}{6}$$

d'où nous déduisons la résistance équivalente cherchée :

$$\boxed{R = \frac{r}{3}}$$

TROISIÈME PARTIE

ÉLECTROMAGNÉTISME



6. LOIS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ÉQUATIONS DE MAXWELL

Les équations de Maxwell ne sont généralement pas enseignées en Classes Préparatoires, et il faut bien reconnaître qu'elles sont rarement utiles pour résoudre les problèmes de type purement taupinal. Ces équations présentent cependant l'avantage de permettre une vue globale concise et satisfaisante des phénomènes électromagnétiques, ainsi que de faciliter le lien avec la mécanique relativiste et l'optique. Notre approche de la théorie se fera ainsi en quatre temps :

1. — Pour prévoir comment se fera l'interaction d'une particule avec le milieu extérieur, il est nécessaire de connaître un certain nombre de grandeurs caractéristiques des deux partenaires de l'interaction :

— la particule sera caractérisée par un certain nombre de grandeurs mécaniques (masse, impulsion, etc.) et par sa *charge*, laquelle est un invariant relativiste. De la notion de charge on déduit, au niveau macroscopique, la définition d'autres grandeurs telle que la densité volumique de charge ρ ou la densité volumique de courant \vec{j} .

— le milieu extérieur sera caractérisé par un certain nombre de grandeurs de champ; on est ainsi amené à introduire quatre vecteurs-champs :

$$\left. \begin{array}{l} \text{le champ électrique } \vec{E} \\ \text{l'induction électrique } \vec{D} \\ \text{le champ magnétique } \vec{H} \\ \text{l'induction magnétique } \vec{B} \end{array} \right\}$$

2. — La forme de l'interaction considérée peut alors être prévue; la particule se trouve soumise à l'action de la force de Lorentz :

$$\boxed{\vec{f} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})} \quad (1)$$

3. — Les grandeurs de champ introduites ci-dessus ne sont pas quelconques;

dans chaque repère galiléen, elles sont assujetties à vérifier les équations suivantes :

$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(2)
$\text{div } \vec{D} = \rho$	(3)
$\text{rot } \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	(4)
$\text{div } \vec{B} = 0$	(5)

Ces équations constituent les équations de Maxwell, elles sont universelles, valables dans tous les milieux. Elles permettent de définir deux nouvelles grandeurs de champ, le potentiel scalaire V et le potentiel vecteur \vec{A} tels que :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = - \text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

La force de Lorentz s'écrit ainsi :

$$\vec{f} = q \cdot \left(- \text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{A} \right)$$

4. — Dans un milieu donné (ou de nature donnée), les vecteurs \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} et \vec{B} sont liés par des relations supplémentaires dépendant de la nature du milieu. Par exemple, dans un milieu dit « linéaire, homogène et isotrope », ces relations sont :

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Les coefficients ϵ et μ sont des constantes caractéristiques du milieu; le vide peut être considéré comme un tel milieu, les coefficients correspondants ϵ_0 et μ_0 sont des grandeurs universelles, et l'on démontre que :

$$\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$$

Dans un conducteur ohmique, les vecteurs \vec{i} et \vec{E} sont de même linéairement liés :

$$\vec{i} = \gamma \cdot \vec{E}$$

Les potentiels \vec{A} et V ne sont pas définis de manière unique par les relations vues précédemment; dans le cas d'un milieu linéaire, homogène et isotrope, on peut de plus les choisir tels que :

$$\text{div } \vec{A} + \epsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

6-1*. PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

1° Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope sont répartis des charges électriques (densité volumique : ρ) et des courants (densité volumique : i). Montrer que les potentiels \vec{A} et V satisfont aux équations de propagation suivantes :

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{i}$$

$$\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

2° Dans le même milieu, déterminer à quelles équations de propagation satisfont les vecteurs-champs \vec{E} et \vec{H} .

3° Le milieu étant rapporté à un repère cartésien orthonormé $Oxyz$, on suppose maintenant que le milieu est vide de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{i} = \vec{0}$), et que de plus les vecteurs \vec{E} et \vec{H} ne sont fonctions que de la côte z et du temps t (on dit alors avoir affaire à des ondes planes). Quelle est alors la solution la plus générale des équations de propagation trouvées précédemment ?

4° Une solution particulière, parmi celles trouvées ci-dessus, est :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \quad \text{où} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

montrer qu'une telle onde est transversale (c'est-à-dire que les composantes E_z et H_z sont nulles). Montrer que les vecteurs \vec{E} et \vec{H} sont perpendiculaires, et que leurs mesures E et H sont dans un rapport constant que l'on déterminera.

INDICATIONS. — 1° Les équations cherchées se déduisent des équations de Maxwell (4) et (3) en y remplaçant les vecteurs-champs par leurs expressions en fonction des potentiels. On se rappellera que l'équation (6) est valable dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (ou dans le vide).

2° Les équations de propagations auxquelles satisfont les vecteurs \vec{E} et \vec{H} se déduisent des équations de Maxwell (2) et (4); elles ont une forme voisine de celles établies au paragraphe 1°.

3° Le moyen le plus rapide de déterminer la solution générale cherchée est d'effectuer dans les équations de propagations le changement de variable $(z, t) \rightarrow (a, b)$ où :

$$a = t + \frac{z}{v}, \quad b = t - \frac{z}{v} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

4° Le fait que l'onde soit transversale est une conséquence des équations de Maxwell (3) et (5). Les autres résultats demandés sont des conséquences de l'équation de Maxwell (2).

— SOLUTION —

1° Exprimons l'équation de Maxwell (4) au moyen des potentiels A et V ; nous obtenons ainsi :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = i + \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon \cdot \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right]$$

or :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} A) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Il vient ainsi :

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div } \vec{A} + \epsilon \mu \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu i$$

L'équation (6) étant valable dans le milieu considéré, l'équation ci-dessus se réduit à :

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu i$$

Exprimons de même l'équation de Maxwell (3) au moyen des potentiels :

$$\text{div} \left[\epsilon \cdot \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right] = \rho$$

compte tenu de ce que :

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} V) = \nabla^2 V \quad \text{et} \quad \text{div} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } A),$$

il vient :

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

or, d'après l'équation (6) :

$$\text{div } \vec{A} = -\epsilon \mu \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

nous obtenons ainsi :

$$\nabla^2 V - \epsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

2° Partant de l'équation de Maxwell (2), calculons le rotationnel du rotationnel du champ électrique \vec{E} :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H})$$

Comme :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

et que [(3) et (4)] :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = i + \frac{\partial (\epsilon \cdot \vec{E})}{\partial t}$$

il vient :

$$\frac{1}{\epsilon} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial i}{\partial t} - \epsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

ou :

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \mu \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

Partant de l'équation de Maxwell (4), nous écrivons de même :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$$

ou :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = \overrightarrow{\text{rot}} i + \epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$$

or :

$$\text{div} \vec{H} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

donc :

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\overrightarrow{\text{rot}} \vec{i}$$

3° Dans le cas où $\rho = 0$ et $\vec{i} = 0$, les quatre équations de propagation trouvées précédemment prennent des formes analogues; si l'on note \square l'opérateur :

$$\square = \nabla^2 - \epsilon \mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{opérateur d'Alembertien}),$$

elles s'écrivent :

$$\square V = 0, \quad \square \vec{A} = \vec{0}, \quad \square \vec{E} = \vec{0}, \quad \square \vec{H} = \vec{0} \quad (7)$$

Posons :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (\text{quantité homogène à une vitesse}).$$

Si les grandeurs considérées ne dépendent que de z , l'opérateur d'Alembertien se réduit à :

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

On peut alors remarquer que toute fonction de $\left(t - \frac{z}{v}\right)$, de même que

toute fonction de $\left(t + \frac{z}{v}\right)$, est solution des équations (7). Pour chercher la solution la plus générale de ces équations, effectuons le changement de variable :

$$a = t + \frac{z}{v}, \quad b = t - \frac{z}{v};$$

Le calcul est élémentaire, on trouve que :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial b} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial a} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial b} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial a}$$

donc que :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial b^2} - 2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial b \cdot \partial a} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial a^2} \right)$$

et :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial b^2} + 2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial b \cdot \partial a} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial a^2}$$

l'équation de propagation du champ électrique se réduit ainsi à :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial b \cdot \partial a} = \vec{0}$$

La solution la plus générale d'une telle équation différentielle est :

$$\vec{E} = \vec{f}(a) + \vec{g}(b),$$

où \vec{f} et \vec{g} sont deux fonctions vectorielles quelconques. Les grandeurs \vec{A} , V , \vec{H} peuvent de même s'écrire sous la forme :

$$\vec{A} = \vec{f}_A \left(t + \frac{z}{v} \right) + \vec{g}_A \left(t - \frac{z}{v} \right)$$

$$V = f_V \left(t + \frac{z}{v} \right) + g_V \left(t - \frac{z}{v} \right)$$

$$\vec{H} = \vec{f}_H \left(t + \frac{z}{v} \right) + \vec{g}_H \left(t - \frac{z}{v} \right)$$

Toutes ces fonctions ne sont cependant pas indépendantes, vues les relations de Maxwell liant \vec{E} et \vec{H} , et les relations liant \vec{E} et \vec{H} aux potentiels A et V .

4° La solution proposée par l'énoncé convient visiblement puisqu'elle est une fonction de $\left(t - \frac{z}{v}\right)$. Le champ \vec{E} ne dépendant que de z , l'équation

de Maxwell (3) se réduit ici à :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

La composante E_z est donc constante, ce qui n'est compatible avec :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

que si : $E_z = 0$. De l'équation de Maxwell (5) nous déduisons de même que : $H_z = 0$. Les vecteurs \vec{E} et \vec{H} sont donc bien perpendiculaires à la direction de propagation (*onde transversale*).

Explicitons l'équation de Maxwell (2) au moyen des coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \cdot \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ +\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \cdot \frac{\partial H_y}{\partial t} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_x}{\partial t} = +\frac{\omega}{\mu v} E_{0y} \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\omega}{\mu v} E_{0x} \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \end{array} \right.$$

Explicitons de même l'équation de Maxwell (4) au moyen des coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = +\epsilon \omega \cdot \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ +\frac{\partial H_x}{\partial z} = +\epsilon \omega \cdot \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_x}{\partial z} = -\epsilon \omega \cdot E_{0y} \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = +\epsilon \omega \cdot E_{0x} \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \end{array} \right.$$

Compte tenu de ce que $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$, le champ \vec{H} est ainsi la somme d'une constante pseudo-vectorielle (sans intérêt pour nous car elle ne correspond à aucun phénomène de propagation) et d'une fonction alternative sinusoïdale de $\left(t - \frac{z}{v} \right)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_y \\ H_y = +\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E_x \end{array} \right.$$

La solution correspondante \vec{H} vérifie bien :

$$\boxed{\vec{E} \cdot \vec{H} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{H}{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}}$$

La solution (\vec{E}, \vec{H}) ainsi étudiée constitue une onde lumineuse de pulsation ω se propageant dans le sens positif de l'axe Oz à la vitesse v . Les vecteurs \vec{E} et \vec{H} vibrent en phase dans le plan d'onde, ils sont perpendiculaires, et le produit vectoriel $\vec{E} \wedge \vec{H}$ a le sens de la propagation. La vitesse v dépend du milieu, et, dans ce milieu, de la pulsation ω ; dans le vide, $\epsilon = \epsilon_0$ et $\mu = \mu_0$ sont des constantes universelles (indépendantes de ω) et v est égal à la célérité c de la lumière dans le vide.

6-2*. POTENTIELS RETARDÉS.

1° Sachant que le potentiel scalaire $V(\vec{r}, t)$ vérifie l'équation de propagation (cf. exercice précédent) :

$$\nabla^2 V - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon},$$

où $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ et ρ , densité volumique de charges, est fonction du temps et de

l'espace : $\rho = \rho(M, t)$, montrer qu'une solution satisfaisante est :

$$V(O, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{\mathcal{V}_0} \frac{\rho\left(M, t - \frac{r}{v}\right)}{r} d\mathcal{V}$$

L'élément d'intégration $d\mathcal{V}$ de l'intégrale ci-dessus est un élément de volume entourant le point M , r est la distance OM séparant ce point courant M du point O où l'on calcule le potentiel $V(O, t)$ à l'instant t .

2° Trouver de même l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(O, t)$, connaissant la densité volumique de courant $\vec{i}(M, t)$ en chaque point M ($\vec{OM} = \vec{r}$) et à chaque instant t .

INDICATIONS. — 1° Le potentiel cherché est la somme des potentiels créés par les divers éléments de volume $d\mathcal{V}$, le problème consiste donc en fait à déterminer le potentiel créé par la charge $dq = \rho(M, t) \cdot d\mathcal{V}$ entourant le point M . Or ce potentiel est sûrement à symétrie sphérique de centre M , et l'équation de propagation est résoluble, sachant que le laplacien en coordonnées sphériques a dans ce cas pour expression :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2}$$

On pourra montrer que quand $r \rightarrow 0$, le potentiel ainsi trouvé doit tendre vers le potentiel électrostatique habituel.

2° Il n'est pas nécessaire de refaire le raisonnement complet dans le cas du potentiel vecteur, et la formule demandée se déduira de la comparaison des deux équations de propagations (cf. exercice précédent).

— SOLUTION —

1° L'équation de propagation étant linéaire en V et ρ , le potentiel cherché est la somme des potentiels créés par toutes les charges réparties dans l'espace. Si $dV(O, t)$ est le potentiel créé au point O et à l'instant t par la charge $dq = \rho(M, t) \cdot d\tau$ portée par l'élément de volume $d\tau$ entourant le point M , le potentiel cherché sera :

$$V(O, t) = \iiint_{\mathcal{V}} dV(O, t),$$

cette intégrale étant étendue à tout l'espace; il est important de noter qu'*a priori* le potentiel $dV(O, t)$ dû à l'élément de volume $d\tau$ dépend non seulement de $\rho(M, t)$, mais de toutes les valeurs prises par $\rho(M, t)$ au cours du temps (vitesse de propagation finie).

Le problème est donc de déterminer quel potentiel dV une charge dq centrée en M crée dans tout l'espace et à tout instant. Un tel potentiel vérifie l'équation de propagation :

$$\nabla^2 \cdot dV - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2(dV)}{\partial t^2} = 0$$

en tout point extérieur à l'élément de volume $d\tau$ entourant M .

Si nous utilisons les coordonnées sphériques r, θ, φ de centre M , le laplacien prend la forme :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Le potentiel dV considéré ici a visiblement la symétrie sphérique autour de M , ne dépend donc que de r et t , et l'équation de propagation devient :

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \cdot \frac{\partial(dV)}{\partial r} \right] - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2(dV)}{\partial t^2} = 0$$

ou bien encore :

$$\frac{\partial^2(r \cdot dV)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2(r \cdot dV)}{\partial t^2} = 0.$$

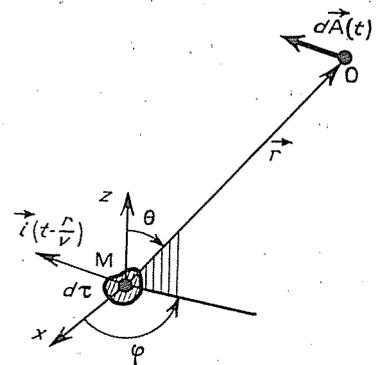


FIG. 6-2.

Nous avons déjà rencontré (cf. exercice précédent) une telle équation différentielle, nous avons vu que la solution générale était :

$$r \cdot dV = f\left(t - \frac{r}{v}\right) + g\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

où f et g sont des fonctions quelconques. Il reste à déterminer de façon précise les fonctions f et g , en tenant compte des diverses équations de Maxwell, et des conditions aux limites (charge dq en M). Il est plus rapide de raisonner indirectement.

a) Le premier terme correspond à un phénomène se propageant à partir de M avec la vitesse v , le second à un phénomène se propageant vers M à la même vitesse. Notre théorie initiale postulant que les charges sont à l'origine des phénomènes électromagnétiques, nous ne garderons que le premier terme :

$$dV(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$$

b) Quand r tend vers zéro, le terme $r \cdot dV(r, t)$ a pour limite $f(t)$; d'autre part le *temps de propagation* $\frac{r}{v}$ devient faible, l'importance des phénomènes de propagation tend à s'annuler, le problème tend à devenir un problème électrostatique, pour lequel on trouve :

$$dV_0(r) = \frac{dq}{4\pi\epsilon r}$$

Si l'on admet ce passage des phénomènes électrostatiques aux phénomènes électromagnétiques (ce qui revient à admettre que les équations précédentes tendent à s'identifier, quand r tend vers zéro, aux équations de Poisson), on écrit que la limite de $r \cdot dV(r, t)$, quand r tend vers zéro, est :

$$\lim_{r \rightarrow 0} [r \cdot dV(r, t)] = \frac{\rho(M, t)}{4\pi\epsilon} \cdot d\tau$$

La fonction f cherchée est donc :

$$f(t) = \frac{\rho(M, t)}{4\pi\epsilon} \cdot d\tau$$

et :

$$dV(r, t) = \frac{\rho\left(M, t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon r} \cdot d\tau$$

Le potentiel créé en O , à l'instant t , par la charge portée par $d\tau$ dépend ainsi, non pas de la valeur de la charge dq portée par $d\tau$ à l'instant t ,

mais de la valeur que prenait cette charge à l'instant antérieur $t - \frac{r}{v}$: l'effet de la charge dq n'est pas instantané, il se propage à la vitesse v .

Le potentiel total $V(O, t)$ au point O et à l'instant t est la somme (étendue à tout l'espace) de ces potentiels dV , ce qui s'écrit :

$$V(O, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho\left(M, t - \frac{r}{v}\right)}{r} \cdot d\bar{v}$$

2° Le potentiel vecteur \vec{A} est solution de l'équation de propagation :

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \cdot \vec{i}$$

elle se décompose en trois équations scalaires semblables à celle dont V , potentiel scalaire, était solution : les composantes de \vec{i} remplacent ρ , et μ remplace $\frac{1}{\epsilon}$. La formule magnétostatique déterminant \vec{A} est d'autre part :

$$d\vec{A}_0(r) = \frac{\mu \cdot \vec{i}(M, t)}{4\pi} \cdot d\bar{v}$$

Tout le raisonnement et tous les calculs faits dans le § 1° s'appliquent en remplaçant $\{V, \rho, \epsilon\}$ par $\left\{A_x, i_x, \frac{1}{\mu}\right\}$, $\left\{A_y, i_y, \frac{1}{\mu}\right\}$ et $\left\{A_z, i_z, \frac{1}{\mu}\right\}$ successivement, et nous obtiendrons ainsi :

$$\vec{A}(O, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{i}\left(M, t - \frac{r}{v}\right)}{r} \cdot d\bar{v}$$

Les potentiels V et \vec{A} calculés ci-dessus portent le nom de *potentiels retardés*. Les potentiels en un point dépendent des états antérieurs des charges réparties dans l'espace, et ceci de manière différente selon leur éloignement, un peu comme l'aspect du ciel est dû à des rayons émis à des dates différentes par des étoiles différemment éloignées.

Remarquons que les équations de propagation employées ici ne sont pas les conséquences des seules équations de Maxwell, mais aussi celles de l'équation (6) laquelle est en quelque sorte une convention. Les solutions trouvées ici ne sont donc acceptables que si elles vérifient effectivement :

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Le calcul n'est point trop compliqué, l'équation ci-dessus est une conséquence, dans ce cas précis, de ce que :

$$\operatorname{div} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

6-3*. VECTEUR DE POYNTING.

1° Une portion d'espace (vide ou milieu linéaire, homogène et isotrope) ne renferme ni charges, ni courants. Admettant que les énergies électrique et magnétique sont localisées dans le milieu avec les densités volumiques $w_e = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$ et $w_m = \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2}$, démontrer le théorème suivant :

La puissance électromagnétique rayonnée à travers une surface fermée est égale au flux sortant, à travers cette surface, du vecteur :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (\text{vecteur de Poynting})$$

2° Dans le cas de l'onde plane progressive sinusoïdale étudiée dans l'exercice 6-1 (§ 4°), calculer la densité moyenne d'énergie dans la portion d'espace traversée par l'onde. Calculer le vecteur de Poynting et la puissance moyenne rayonnée à travers une surface plane normale à l'axe de propagation.

3° Montrer que le théorème démontré au § 1° reste vrai dans un milieu contenant des charges et des courants.

INDICATIONS. — 1° La puissance rayonnée à travers la surface fermée \mathcal{S} est la puissance perdue par le volume \mathcal{V} qu'elle limite, elle est donc égale à :

$$\mathcal{P} = -\frac{dW}{dt},$$

où W représente l'énergie électromagnétique contenue dans le volume V à l'instant considéré t . Sachant que $w_e = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$ et $w_m = \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2}$, on démontre aisément que :

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\tau$$

(intégrale étendue au volume \mathcal{V}). Le théorème demandé s'en déduit alors par application des équations de Maxwell (2) et (4).

2° On peut étendre le théorème précédent sous la forme suivante : le flux du vecteur \vec{P} à travers une surface \mathcal{S} (ouverte ou fermée) est égal à l'énergie traversant cette surface par unité de temps.

3° Quand un milieu renferme des charges et des courants, il y a lieu de compter dans l'énergie électromagnétique, non seulement les énergies propres électrique (W_e) et magnétique (W_m) du milieu (énergies liées à la présence des champs), mais aussi l'énergie acquise ou transportée par les charges mobiles (l'énergie acquise se manifestant, soit par l'accroissement de leur énergie cinétique, soit, dans le cas d'un conducteur matériel, par une production de chaleur par effet Joule).

— SOLUTION —

1° Considérons le volume \mathcal{V} limité par une surface fermée \mathcal{S} . Entre les instants t et $t + dt$, les champs \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} varient en chaque point M de $\delta\vec{E}(M)$, $\delta\vec{D}(M)$, $\delta\vec{H}(M)$, $\delta\vec{B}(M)$. L'énergie électromagnétique W contenue dans le volume \mathcal{V} , égale à :

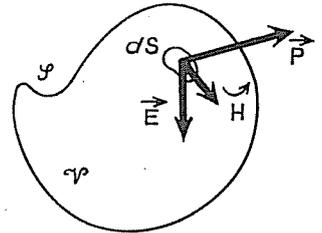


FIG. 6-3.

$$W = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \cdot d\tau,$$

varie de :

$$dW = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\vec{E} \cdot \delta\vec{D} + \vec{D} \cdot \delta\vec{E} + \vec{H} \cdot \delta\vec{B} + \vec{B} \cdot \delta\vec{H}}{2} \cdot d\tau,$$

ce qui peut s'écrire plus simplement (puisque \vec{E} et \vec{D} d'une part, \vec{H} et \vec{B} d'autre part, sont proportionnels) :

$$dW = \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{E} \cdot \delta\vec{D} + \vec{H} \cdot \delta\vec{B}) \cdot d\tau = dt \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\tau.$$

Dans le cas où il n'y a ni charges, ni courants, les équations de Maxwell (2) et (4) permettent d'écrire dW sous la forme :

$$dW = dt \cdot \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E}) \cdot d\tau$$

ce qu'on peut écrire :

$$\frac{dW}{dt} = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot d\tau.$$

D'où nous déduisons (théorème d'Ostrogradsky) la puissance rayonnée \mathcal{P} cherchée :

$$\mathcal{P} = - \frac{dW}{dt} = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{S},$$

ce qui est bien le flux sortant du vecteur de Poynting : $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$.

Nous avons utilisé la linéarité du milieu, mais le théorème ici démontré reste valable dans un milieu quelconque (sans charges ni courants), car ce sont en fait les formules :

$$\delta w_e = \vec{E} \cdot \delta\vec{D} \quad \text{et} \quad \delta w_m = \vec{H} \cdot \delta\vec{B}$$

qui ont une valeur générale, et non les formules :

$$w_e = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \quad \text{et} \quad w_m = \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2},$$

lesquelles ne sont vraies que si précisément $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$.

2° Rappelons les résultats du problème 6-1 (§ 4°) : les vecteurs \vec{E} et \vec{H} d'une onde progressive sinusoïdale vibrent en phase dans le plan d'onde, ils sont perpendiculaires à l'axe Oz (axe de propagation) et perpendiculaires entre eux; le produit $\vec{E} \wedge \vec{H}$ a le sens de la propagation, et :

$$E = E_0 \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right], \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E = H_0 \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

La densité d'énergie en un point d'abscisse z est à l'instant t :

$$w = w_e + w_m = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}}{2} = \epsilon E_0^2 \cdot \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \\ = \mu H_0^2 \cdot \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right]$$

La densité moyenne est la même en tout point :

$$\bar{w} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w \cdot dt = \frac{\epsilon E_0^2}{2} = \frac{\mu H_0^2}{2}$$

Le vecteur de Poynting $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ est parallèle à Oz, de même sens (si $v > 0$), et a pour mesure :

$$P = E \cdot H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot E^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot H^2$$

Sa valeur moyenne est la même en tout point :

$$\bar{P} = \frac{E_0^2}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{H_0^2}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

On observe que la densité d'énergie w est une fonction périodique de z (période : $Z = \frac{\pi v}{\omega}$) et de t (période : $T = \frac{\pi}{\omega}$); elle est fonction de $t - \frac{z}{v}$ donc correspond à un phénomène de propagation, elle se propage à la vitesse v . On peut alors dire d'une portion de surface S plane et normale à Oz qu'elle est *traversée* par de l'énergie, ou que de l'énergie est *rayonnée* à travers elle. Entre les instants t et $t + \Delta t$, la portion de surface S et de côté z est traversée par l'énergie :

$$\Delta W = S \cdot \int_{z-v \cdot \Delta t}^z w(z, t) \cdot dz$$

La puissance moyenne rayonnée est alors :

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Comme $w(z, t)$ est périodique, nous pouvons écrire plus simplement :

$$\mathcal{P} = \frac{S}{T} \cdot \int_{z-Z}^z w(z, t) \cdot dz$$

Or w peut s'écrire sous la forme :

$$w = \bar{w} \cdot \left\{ 1 + \cos \left[2\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \right\}$$

La puissance moyenne rayonnée est donc égale à :

$$\mathcal{P} = \frac{S}{T} \cdot \bar{w} \cdot Z = v \cdot \bar{w} \cdot S$$

Remarquons que cette puissance \mathcal{P} est égale au flux du vecteur de Poynting moyen $\bar{\vec{P}}$, et ce n'est certes pas une coïncidence. Ce résultat n'est toutefois pas une conséquence directe du § 1°, qui ne concernait que le flux de \vec{P} sortant d'une surface fermée. De toute façon, il est souvent délicat de parler de flux énergétique (il est préférable d'éviter cette notion quand il y a, non seulement propagation, mais également conversion d'énergie), il est alors plus satisfaisant de considérer seulement l'énergie d'un système fermé, bien délimité (une telle énergie est une grandeur extensive, liée à l'état d'un système plutôt qu'aux échanges d'une surface).

3° Dans un milieu contenant des charges et des courants, calculons le flux Φ du vecteur de Poynting $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ sortant d'une surface fermée \mathcal{V} (limitant le volume \mathcal{V}) :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\mathcal{S}} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{\tau} \\ \Phi &= \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}) \cdot d\vec{\tau} \end{aligned}$$

Appliquant les équations de Maxwell (2) et (4) nous obtenons :

$$\Phi = \iiint_{\mathcal{V}} \left(-\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j} \right) \cdot d\vec{\tau}$$

Nous avons vu au § 1° que, pendant le temps infinitésimal dt , l'énergie électromagnétique dW contenue dans l'élément de volume $d\vec{\tau}$ variait de :

$$\delta(dW) = (\vec{E} \cdot \delta \vec{D} + \vec{H} \cdot \delta \vec{B}) \cdot d\vec{\tau} = \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\tau} \cdot dt,$$

donc que la puissance \mathcal{P} perdue par le volume \mathcal{V} était :

$$\mathcal{P} = -\frac{dW}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} -\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\tau}$$

Nous pouvons écrire maintenant cette puissance \mathcal{P} sous la forme :

$$\mathcal{P} = \tilde{\Phi} + \iiint_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{i} \cdot d\tau$$

Nous connaissons déjà la signification de cette intégrale dans le cas d'un milieu conducteur résistant de conductivité γ (vérifiant la loi d'Ohm : $\vec{i} = \gamma \cdot \vec{E}$) : $\vec{E} \cdot \vec{i}$ est la puissance dissipée par effet Joule dans l'unité de volume du milieu. Examinons quelle peut en être la signification dans le cas de particules chargées soumises aux seules forces électromagnétiques. Soit $\rho(M, t)$ la densité volumique de charges; l'élément de volume $d\tau$ contient à l'instant t une charge $dq = \rho(M, t) \cdot d\tau$ de vitesse \vec{v} telle que : $\vec{i} = \rho(M, t) \cdot \vec{v}$.

Le produit :

$$d\mathcal{P}_c = \vec{E} \cdot \vec{i} \cdot d\tau$$

peut s'écrire :

$$d\mathcal{P}_c = dq \cdot \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Or la charge dq est soumise à la force électromagnétique de Lorentz :

$$d\vec{f} = dq \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

donc :

$$d\mathcal{P}_c = d\vec{f} \cdot \vec{v}$$

Le terme $d\mathcal{P}_c$ est ainsi la puissance fournie à la charge dq par la force $d\vec{f}$, et l'intégrale :

$$\mathcal{P}_c = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{i} \cdot d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} d\vec{f} \cdot \vec{v}$$

représente la puissance fournie aux charges mobiles contenues dans le volume \mathcal{V} .

La puissance électromagnétique \mathcal{P} perdue par le volume \mathcal{V} est donc la somme du flux $\tilde{\Phi}$ du vecteur de Poynting \vec{P} , et de la puissance fournie aux charges mobiles (puissance se traduisant par un accroissement de l'énergie cinétique des charges si celles-ci sont libres, puissance transmise au milieu sous forme d'énergie calorifique si les charges circulent à vitesse constante du fait de la résistance du milieu).

Le flux $\tilde{\Phi}$ représente ainsi la puissance fournie par le volume \mathcal{V} au milieu qui l'entoure, elle s'interprète (de même qu'au § 1^o) comme la puissance rayonnée à travers la surface \mathcal{S} , et le théorème démontré au § 1^o reste donc vrai.

7. PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUES INDÉPENDANTS DE TEMPS. CHAMPS MAGNÉTIQUES PRODUITS PAR LES COURANTS. ACTIONS EXERCÉES PAR LES CHAMPS MAGNÉTIQUES SUR LES COURANTS

7-1. CHAMP CRÉÉ PAR UN CIRCUIT POLYGONAL PLAN.

1° Une portion rectiligne XY (de longueur l) d'un circuit est parcourue par un courant continu d'intensité I . Calculer l'induction magnétique \vec{B} créée par cette portion XY en un point A situé à la distance $AH = h$ (H : projection de A sur la droite XY), en fonction des longueurs l et h , et des angles α_1 et α_2 sous lesquels on voit respectivement de A les segments HY et HX .

2° Un circuit électrique plan a la forme d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R . Calculer l'induction magnétique \vec{B} créée par ce circuit (parcouru par un courant d'intensité I) en un point P de son axe ($OP = x$).

3° Dans le cas particulier où $n = 4$, déterminer l'induction magnétique en un point M du plan du circuit, situé sur la médiatrice d'un côté du carré ($OM = x$ sera supposé grand devant R).

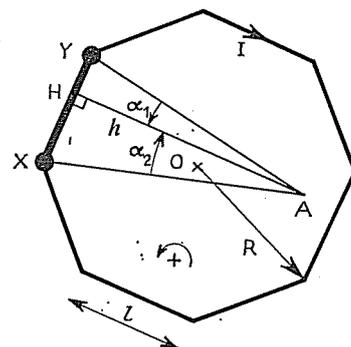


FIG. 7-1.

— SOLUTION —

1° Nous utiliserons la formule de Biot et Savart, tout en remarquant qu'elle ne constitue qu'un procédé de calcul : un élément de circuit isolé et parcouru

par un courant n'existe pas; le résultat que nous obtiendrons ne devra être utilisé que pour calculer l'induction magnétique produite par un circuit fermé. L'induction magnétique créée en A par chaque élément MM' de courant (de longueur ds) pris sur XY est un vecteur normal au plan contenant A et la droite XY, de même sens que le vecteur $I \cdot \vec{XY} \wedge \vec{HA}$; il suffit donc, pour calculer l'induction \vec{B} cherchée, de sommer arithmétiquement les inductions créées en A par tous ces éléments :

$$B = \int_{s=0}^{s=l} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{|\vec{MM}' \wedge \vec{MA}|}{MA^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{s=0}^{s=l} \frac{\sin \theta}{AM^2} ds$$

L'intégration est rendue plus commode si l'on prend comme variable d'intégration l'angle $\alpha = (\vec{AM}, \vec{AH})$: $s = h \cdot \text{tg } \alpha$, $\sin \theta = \cos \alpha$, et $AM = \frac{h}{\cos \alpha}$. Il vient :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos \alpha}{h} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

2° Chacun des côtés du polygone crée en P une induction \vec{b} dont l'intensité est calculable par la formule démontrée ci-dessus, où :

$$h = \sqrt{x^2 + R^2 \cos^2 \frac{\pi}{n}}, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 = \text{Arc sin } \frac{R \cdot \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Nous en déduisons :

$$b = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{R \cdot \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{(x^2 + R^2) \left(x^2 + R^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{n} \right)}}$$

Les composantes parallèles au plan du circuit, des inductions \vec{b} créées par les n côtés se compensent exactement, tandis que leurs composantes normales s'ajoutent numériquement : l'induction totale \vec{B} cherchée est portée par l'axe OA, et a pour mesure $B = nb \cdot \cos \varphi$, où φ est l'angle que fait chacun des vecteurs \vec{b} avec l'axe. Il est aisé de voir que $\cos \varphi$ est égal à :

$$\cos \varphi = \frac{R \cdot \cos \frac{\pi}{n}}{\sqrt{x^2 + R^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{n}}}$$

donc que l'induction B a pour mesure :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{nR^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}}{\left(x^2 + R^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{n} \right) \sqrt{x^2 + R^2}}$$

Comme on pouvait s'y attendre, l'expression ci-dessus tend, quand n tend vers l'infini, vers: $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)^3$, expression bien connue de l'induction créée en un point de son axe par une spire circulaire de rayon R .

3° Soient A, B, C et D les sommets d'un carré de côté $2a$, parcouru par un courant d'intensité I (dans le sens positif: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$), et soit M un point du plan du circuit, situé sur la médiatrice de AB, à la distance $OM = x$ du centre O du carré ($x \gg a$). Chacun des côtés du carré crée en M une induction normale au plan du carré; l'induction B_1 créée en M par le côté AB a le sens du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AM}$, les inductions B_2, B_3, B_4 créées en M par les côtés BC, CD et DA ont le sens contraire. L'induction

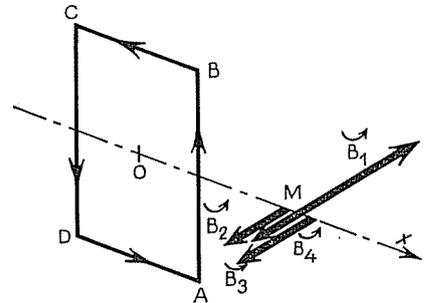


FIG. 7-1 2°.

totale B cherchée est normale au plan du carré, et sa mesure est

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

(B_1 sera comptée positivement et B_2, B_3, B_4 , négativement). Pour calculer B_1, B_2, B_3, B_4 , il suffit d'appliquer la formule démontrée au § 1°; si nous posons $a = \varepsilon \cdot x$ ($\varepsilon \ll 1$), il vient ainsi :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(x-a)} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + (x-a)^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + (x-a)^2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cdot \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)\sqrt{1-2\varepsilon+2\varepsilon^2}}$$

$$B_2 = \frac{-\mu_0 I}{4\pi a} \left(-\frac{x-a}{\sqrt{a^2 + (x-a)^2}} + \frac{x+a}{\sqrt{a^2 + (x-a)^2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cdot \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon \cdot \sqrt{1-2\varepsilon+2\varepsilon^2}} - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon \cdot \sqrt{1+2\varepsilon+2\varepsilon^2}} \right)$$

$$B_3 = \frac{-\mu_0 I}{4\pi(x+a)} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + (x+a)^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + (x+a)^2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cdot \frac{-2\varepsilon}{(1+\varepsilon)\sqrt{1+2\varepsilon+2\varepsilon^2}}$$

$$B_4 = \frac{-\mu_0 I}{4\pi a} \left(\frac{x+a}{\sqrt{a^2 + (x+a)^2}} - \frac{x-a}{\sqrt{a^2 + (x-a)^2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cdot \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon \cdot \sqrt{1-2\varepsilon+2\varepsilon^2}} - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon \cdot \sqrt{1+2\varepsilon+2\varepsilon^2}} \right)$$

Au troisième ordre près (ε^3), nous trouvons :

$$\begin{cases} B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (2\varepsilon + 4\varepsilon^2) \\ B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (-2\varepsilon^2) \\ B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (-2\varepsilon + 4\varepsilon^2) \\ B_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (-2\varepsilon^2) \end{cases}$$

Nous trouvons ainsi l'induction B égale, au troisième ordre près, à :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cdot 4\varepsilon^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{B = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\mu_0 I a^2}{x^3}}$$

Comme nous le verrons plus bas, le calcul ci-dessus est en fait inutile : à grande distance du centre du carré, le circuit est équivalent à un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$ porté par l'axe du carré, et de mesure $\mathcal{M} = 4 a^2 \cdot I$, et l'induction \vec{B} en M a pour mesure : $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathcal{M}}{x^3}$.

7-2. Champ magnétique créé par une spire circulaire. — Une spire circulaire de rayon R est parcourue par un courant d'intensité I .

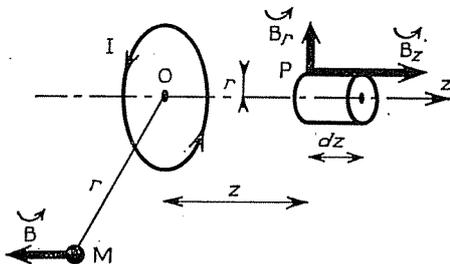


FIG. 7-2.

1° Rappeler ou calculer l'induction magnétique créée par cette spire en un point H de son axe, à la distance z du centre O de la spire. Calculer au même point le potentiel vecteur ainsi que le potentiel scalaire.

2° L'induction magnétique créée en un point P proche du précédent (distance de P à l'axe : $PH = r \ll z$) a une composante \vec{B}_r normale à l'axe qui est faible mais non nulle : calculer une valeur approchée de B_r .

3° Calculer l'induction magnétique créée en un point M du plan de la spire, en faisant des approximations convenables, dans les deux cas suivants :

$$OM = r \ll R \quad \text{et} \quad OM = r \gg R.$$

— SOLUTION —

1° Nous ne traiterons pas en détail le calcul de l'induction \vec{B} créée en un point M de l'axe, ce calcul étant dans tous les cours. Rappelons simplement que le plus commode est de calculer \vec{B}_H comme l'opposé du gradient du potentiel scalaire $\mathcal{V} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega$, où Ω est l'angle solide sous lequel on voit, de H, le circuit considéré, ou, plus précisément (l'angle solide étant algébrique) sa face sud : $\Omega = -2\pi(1 - \cos \alpha) = -2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$. Il vient ainsi (\vec{n} étant le vecteur unitaire sur l'axe Oz de la spire) :

$$\vec{B}_H = -\text{grad } \mathcal{V} = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \sin^3 \alpha \cdot \vec{n} = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2} \cdot n$$

Le potentiel vecteur \vec{A} en H se calcule par intégration, le long du circuit formé par la boucle, de l'élément :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}$$

où $d\vec{l}$ est l'élément d'arc sur la boucle, et r sa distance à H; comme H est sur l'axe, $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ est le même pour tous les éléments $d\vec{l}$, et $\vec{A} = \vec{0}$.

2° On connaît, grâce au calcul précédent, l'induction en un point quelconque de l'axe; pour déterminer l'induction en un point voisin de l'axe, il suffit de connaître les propriétés locales du champ magnétique, lesquelles sont parfaitement déterminées par les deux équations : $\text{div } \vec{B} = 0$, et $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$ (la densité de courant étant nulle dans un volume fermé contenant H et P). Il est remarquable que ces propriétés locales sont identiques à celles du champ électrostatique en absence de charges volumiques : le problème posé ici est formellement identique à celui que nous avons résolu pages 10 à 13 (problème 1-6), et nous pouvons écrire, sans calcul supplémentaire :

$$B_r \simeq -\frac{r}{2} \cdot \frac{dB_H}{dz} = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{3rz}{2R^2} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-5/2}$$

3° Pour calculer l'induction magnétique \vec{B} en un point M du plan de la spire, on peut appliquer la formule de Biot et Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_e \frac{\vec{u} \wedge d\vec{l}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_e \frac{\vec{r} \wedge d\vec{l}}{r^3},$$

\vec{r} désignant le vecteur \vec{Mm} joignant M au point courant m sur la spire. Il est commode de prendre comme axes cartésiens orthonormés, outre l'axe Oz de la spire (orienté suivant la convention usuelle, compte tenu du sens du courant dans la spire), l'axe Ox parallèle au vecteur \vec{OM} , et de même

sens, ainsi que l'axe perpendiculaire Oy choisi tel que le trièdre $Oxyz$ soit direct ; les vecteurs \vec{r} et \vec{dl} ont alors respectivement pour composantes : $[R \cdot \cos \theta - r, R \cdot \sin \theta, 0]$ et $[-R \cdot \sin \theta \cdot d\theta, +R \cdot \cos \theta \cdot d\theta, 0]$, où θ désigne l'angle (\vec{OM}, \vec{Om}) .

$$\begin{vmatrix} R \cdot \cos \theta - r & -R \cdot \sin \theta \cdot d\theta & 0 \\ R \cdot \sin \theta & +R \cdot \cos \theta \cdot d\theta & 0 \\ 0 & 0 & (R^2 - rR \cdot \cos \theta) \cdot d\theta \end{vmatrix} \wedge$$

L'induction magnétique \vec{B} cherchée est parallèle à l'axe Oz , et sa mesure algébrique est, sur cet axe :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{R^3 - rR^2 \cdot \cos \theta}{(R^2 + r^2 - 2rR \cdot \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$

L'intégrale ci-dessus n'étant pas calculable au moyen des fonctions usuelles, nous chercherons une valeur approchée de B , dans chacun des deux cas envisagés par l'énoncé : dans le premier cas où r est petit devant R , nous poserons $r = \varepsilon \cdot R$ ($\varepsilon \ll 1$) et nous calculerons B comme un développement limité par rapport à l'infiniment petit ε ; dans le second cas, nous opérerons de même, en posant $R = \varepsilon \cdot r$.

1^{er} cas : $r \ll R$

Si nous posons $r = \varepsilon \cdot R$, il vient :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 - 2\varepsilon \cdot \cos \theta + \varepsilon^2)^{3/2}} d\theta$$

au 3^e ordre près :

$$\frac{1 - \varepsilon \cos \theta}{(1 - 2\varepsilon \cdot \cos \theta + \varepsilon^2)^{3/2}} = 1 + 2\varepsilon \cdot \cos \theta + \frac{9 \cos^2 \theta - 3}{2} \varepsilon^2$$

donc, au 3^e ordre près :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[2\pi + \left(\frac{9\pi}{2} - 3\pi \right) \varepsilon^2 \right]$$

c'est-à-dire :

$$B \simeq \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2}{R^2} \right)$$

2^e cas : $r \gg R$

Si nous posons $R = \varepsilon \cdot r$, il vient :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon \cos \theta}{(1 - 2\varepsilon \cdot \cos \theta + \varepsilon^2)^{3/2}} d\theta$$

au 3^e ordre près :

$$\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon \cos \theta}{(1 - 2\varepsilon \cdot \cos \theta + \varepsilon^2)^{3/2}} = -\varepsilon \cdot \cos \theta + (1 - 3 \cdot \cos^2 \theta) \cdot \varepsilon^2$$

donc, au 3^e ordre près :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (2\pi - 3\pi) \varepsilon^2$$

c'est-à-dire :

$$B \simeq -\frac{\mu_0 I}{4} \cdot \frac{R^2}{r^3}$$

Le résultat obtenu ci-dessus dans le cas où r est très grand devant R n'est qu'un cas particulier de la formule du dipôle magnétique: $B = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathcal{M}}{r^3}$

(\vec{M} est le moment magnétique de la spire, porté par l'axe Oz, et de mesure $M = \pi R^2 \cdot I$); cette formule sera démontrée ci-dessous (problème 7-4). Un raisonnement semblable aux précédents permettrait de calculer l'induction en un point M proche du fil, dans le plan de la spire (r , proche de R, serait écrit égal à $R(1 + \varepsilon)$); toutefois, le résultat obtenu ne serait pas valable, en toute rigueur, très près du fil, là où ce dernier ne peut plus être considéré comme infiniment mince, la répartition du courant au sein du fil n'étant pas forcément uniforme.

7-3*. DISTRIBUTIONS SUPERFICIELLES DE COURANTS. — On définit la densité surfacique \vec{j} d'une distribution superficielle de courants de manière analogue à ce qu'on fait pour la densité de courant \vec{i} d'une distribution volumique : une bande de courant de largeur dl est parcourue par une intensité $dI = |\vec{j}| \cdot dl$, et \vec{j} est tangent aux lignes de courant (et de même sens).

1° Une surface \mathcal{G} est parcourue par de tels courants superficiels, dont on connaît la densité surfacique \vec{j} . Supposant connue l'induction magnétique \vec{B} en un point M très proche de la surface \mathcal{G} , déterminer l'induction magnétique \vec{B}' en un point M' très proche de M, mais situé de l'autre côté de la surface \mathcal{G} .

2° Montrer que le potentiel vecteur \vec{A} et l'induction magnétique \vec{B} créés en un point M par une distribution superficielle de courants, peuvent être calculés comme les intégrales de surface :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\mathcal{G}} \frac{\vec{j}}{r} \cdot dS \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\mathcal{G}} \frac{\vec{r} \wedge \vec{j}}{r^3} \cdot dS,$$

où \vec{r} est le vecteur \overrightarrow{MP} joignant M au point courant P sur la surface \mathcal{G} .

3° Une surface plane illimitée est parcourue par des courants dont la densité surfacique \vec{j} est uniforme. Montrer que l'induction magnétique en tout point de l'espace est donnée par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \vec{j} \wedge \vec{n},$$

\vec{n} étant le vecteur unitaire normal au plan, dirigé vers le demi-espace où se trouve le point considéré.

4° Une surface cylindrique illimitée est sillonnée par des lignes de courant normales aux génératrices du cylindre, avec une densité surfacique de courant \vec{j} de module constant. Montrer que le champ d'induction est nul à l'extérieur, et qu'il est donné à l'intérieur du cylindre par la formule :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{n} \wedge \vec{j}$$

où n est un vecteur unitaire normal à la surface et dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

5° Une surface cylindrique illimitée de section droite circulaire est parcourue par des courants dont la densité surfacique \vec{j} , de module constant, est constamment parallèle aux génératrices du cylindre. Montrer que le champ d'induction magnétique est nul à l'intérieur et qu'à l'extérieur il est le même que si le courant total parcourait l'axe du cylindre.

INDICATIONS. — 1° Le résultat demandé dans cette première question est une conséquence des relations fondamentales concernant le rotationnel et la divergence de \vec{B} . Le maniement de ces relations est cependant délicat en classes préparatoires, notamment quand se posent des problèmes de discontinuités. Il est plus commode, donc préférable, d'appliquer les théorèmes correspondants : théorème d'Ampère et conservation du flux d'induction, et ce pour les trois composantes de \vec{B} (composante normale à \mathcal{G} , composante tangentielle parallèle à \vec{j} , composante tangentielle normale à \vec{j}).

2° Il n'est pas nécessaire de faire une démonstration complète, on peut se contenter de remarquer que l'élément de courant $\vec{j} \cdot dS$ (dS : élément de surface où la densité superficielle est \vec{j}) joue le même rôle que l'élément $\vec{i} \cdot d\mathcal{C}$ d'une distribution volumique, ou que l'élément de courant $I \cdot d\vec{l}$ d'un circuit filiforme.

3° On peut appliquer les formules démontrées au § 2°, ou bien tenir compte de la symétrie du système étudié, et appliquer le résultat du § 1°.

4° La formule cherchée s'obtient assez simplement par application des formules démontrées au § 2°.

5° Le plus simple est sans doute de mettre à profit la symétrie du système étudié, et d'appliquer le théorème d'Ampère.

— SOLUTION —

1° Aux lignes de courant sur \mathcal{G} correspond une famille de courbes qui leur sont orthogonales. Soit A un point de \mathcal{G} , AA_x un élément de ligne de champ (de longueur dx) et AA_y un élément de courbe orthogonale (de longueur dy); la ligne de courant passant par A_y et la courbe orthogonale passant par A_x se coupent en un point A_{xy} .

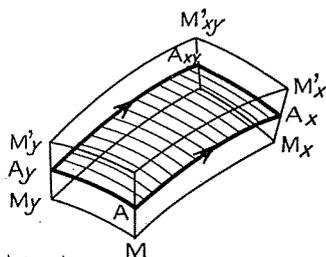


FIG. 7-3 1°.

Considérons, sur les normales en A , A_x , A_y et A_{xy} à \mathcal{G} , des points M et M' , M_x et M'_x , M_y et M'_y , M_{xy} et M'_{xy} respectivement très proches de A , A_x , A_y , A_{xy} (par « très proches » nous entendons que les distances AM , AM' , A_xM_x , $A_xM'_x$, A_yM_y , $A_yM'_y$, $A_{xy}M_{xy}$, $A_{xy}M'_{xy}$ sont toutes petites devant dx et dy); les points M , M_x , M_y et M_{xy} sont tous situés d'un même côté de la surface \mathcal{G} , les points M' , M'_x , M'_y et M'_{xy} sont tous situés de

l'autre. Pour comparer les inductions magnétiques \vec{B} et \vec{B}' en M et en M' , comparons leurs composantes B_x, B_y, B_z et B'_x, B'_y, B'_z sur un trièdre trirectangle $Axyz$ tel que Ax soit tangent à AA_x , que Ay soit tangent à AA_y , et que Az soit normal à \mathcal{G} .

a) Cherchons à calculer le flux d'induction $d\Phi$ sortant de la surface limitant le volume $MM_xM_yM_{xy}M'_xM'_yM'_{xy}$. Vu le choix des dimensions de ce parallépipède curviligne, le flux $d\Phi$ se réduit pratiquement à :

$$d\Phi = (B_z - B'_z) dx dy$$

Le flux d'induction sortant d'une surface fermée étant nul (conséquence de ce que $\text{div } \vec{B} = 0$), nous concluons que :

$$B'_z = B_z$$

b) Cherchons à calculer la circulation $d\mathcal{C}_x$ de l'induction magnétique le long du contour $MM_xM'_xM'M$. Cette circulation se réduit pratiquement à :

$$d\mathcal{C}_x = (B_x - B'_x) dx$$

La bande $MM_xM'_xM'$ n'étant traversée par aucun courant, la circulation $d\mathcal{C}_x$ est nulle (théorème d'Ampère), nous concluons que :

$$B'_x = B_x$$

c) Cherchons à calculer la circulation $d\mathcal{C}_y$ de l'induction magnétique le long du contour $MM_yM'_yM'M$. Cette circulation se réduit pratiquement à :

$$d\mathcal{C}_y = (B_y - B'_y) dy$$

La bande $MM_yM'_yM'$ est traversée par un courant d'intensité $dI = -j \cdot dy$; le théorème d'Ampère (conséquence de ce que $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \cdot i$) s'écrit :

$$d\mathcal{C}_y = \mu_0 dI,$$

d'où nous concluons que :

$$B'_y = B_y + \mu_0 \cdot j$$

Soit \vec{n} le vecteur unitaire normal à \mathcal{G} en A , et dirigé de A vers M ; nous pouvons regrouper les résultats précédents sous la forme :

$$\boxed{\vec{B}' - \vec{B} = -\mu_0 \cdot \vec{j} \wedge \vec{n}}$$

REMARQUE. — Les calculs ci-dessus ne sont pas d'une rigueur à toute épreuve, comme d'ailleurs tous les calculs où, en physique, l'on considère des petits bouts de diverses grandeurs, pompeusement dénommés « éléments infinitésimaux ». On les manipule

généralement comme des grandeurs ordinaires (on n'hésite guère par exemple à écrire des rapports tels que $\frac{a}{dx}$), on effectue des approximations (on dit parfois qu'on « néglige les termes du second ordre »), puis on finit par obtenir des formules où ces « éléments infinitésimaux » ont disparu ou se sont gentiment rangés en rapport dénommés « dérivées ». Les formules obtenues se révèlent alors exactes (malgré les approximations); ce n'est pas un hasard, le manque de rigueur n'est qu'apparent et provient plutôt d'abus dans le langage que de failles dans le raisonnement.

a) Il serait plus rigoureux de parler en termes de développements limités, ou de limites. Ainsi, au lieu de dire que x est petit devant 1, y devant x , et z devant y , puis faire les approximations correspondantes, il vaudrait mieux faire un calcul exact et complet, puis chercher la limite de l'expression obtenue quand x , $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{y}$ tendent vers zéro.

b) Il serait également plus rigoureux de parler en termes de différentielles. Ainsi, la différentielle du produit $x \cdot y$ est $x \cdot dy + y \cdot dx$, et non pas la différence $(x + dx) \cdot (y + dy) - xy$. Il est bien souvent plus commode d'utiliser ce genre de notation, mais dire qu'« on néglige $dx \cdot dy$ parce qu'il est du second ordre » n'a alors aucun sens.

De toute façon, le calcul rigoureux, utilisant des structures mathématiques bien définies est plus long au moins facile à comprendre, et n'apporte que le réconfort moral. Il ne faut pas craindre, pour gagner du temps et avancer dans l'étude d'un phénomène, d'utiliser des notations commodes, tout en sachant qu'on fait en définitive un calcul de limite, ou une différentiation. Il est essentiel cependant d'utiliser un langage rigoureux dès que l'efficacité n'en pâtît pas.

2° Nous connaissons déjà les expressions du potentiel vecteur \vec{A} et de l'induction magnétique \vec{B} dans le cas d'une distribution volumique de courants :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{i} \cdot d\vec{v}}{r} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{r} \wedge \vec{i}}{r^3} \cdot d\vec{v},$$

et dans le cas d'un courant filiforme :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \cdot d\vec{l}}{r} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{r} \wedge d\vec{l}}{r^3} \cdot I.$$

Nous laisserons au lecteur le soin de montrer comment une distribution superficielle de courants peut être considérée comme la limite d'une distribution volumique, ou comme la limite d'une juxtaposition de courants filiformes.

Nous nous contenterons de remarquer que les éléments de courant $\vec{i} \cdot d\vec{v}$, $\vec{j} \cdot dS$, $I \cdot d\vec{l}$ jouent le même rôle, ce qui nous permet d'écrire directement le potentiel vecteur \vec{A} et l'induction magnétique \vec{B} sous la forme :

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{j} \cdot dS}{r}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{r} \wedge \vec{j}}{r^3} \cdot dS.}$$

Dans ces expressions, \vec{r} représente le vecteur \overrightarrow{MP} joignant le point M où l'on calcule \vec{A} et \vec{B} , au point courant P (centre de l'élément d'intégration : $d\vec{c}$, dS ou $d\vec{l}$ selon les cas). Les éléments de courant $\vec{i} \cdot d\vec{c}$, $\vec{j} \cdot dS$ et $I \cdot d\vec{l}$ se correspondent comme en électrostatique les charges élémentaires $\rho \cdot d\vec{c}$, $\sigma \cdot dS$ et $\lambda \cdot d\vec{l}$ (en magnétostatique cependant on écrit $I \cdot d\vec{l}$ dans le cas d'un circuit filiforme; c'est une simple question d'habitude et de définition : on pourrait tout aussi bien définir un vecteur densité linéaire de courant \vec{I} et écrire le même élément de courant $\vec{I} \cdot d\vec{l}$).

3° Soit M un point extérieur au plan, soit H sa projection sur ce plan, et soit \vec{n} le vecteur unitaire sur HM :

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{HM}}{HM}$$

L'induction magnétique en M est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iint_S \frac{\vec{r} \wedge \vec{j}}{r^3} \cdot dS$$

Le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$ joignant M au point courant P du plan peut être écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP} = (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HP}$$

et :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[\vec{n} \wedge \vec{j} \cdot \iint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} \cdot dS + \left(\iint_S \frac{\overrightarrow{HP}}{r^3} \cdot dS \right) \wedge \vec{j} \right]$$

Il est aisé de voir que la seconde intégrale est nulle (deux éléments de surface symétriques par rapport à H contribuent à cette intégrale par deux termes opposés); la première est l'opposée (à cause du choix du sens de \vec{n}) de l'angle solide Ω sous lequel on voit le plan depuis le point M, elle est donc égale à -2π , d'où :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \vec{j} \wedge \vec{n}$$

Nous aurions pu obtenir directement ce résultat en remarquant que, vue la symétrie du système étudié, les inductions magnétiques de part et d'autre du plan devaient être normales à \vec{j} , parallèles au plan, et opposées. L'application du théorème d'Ampère

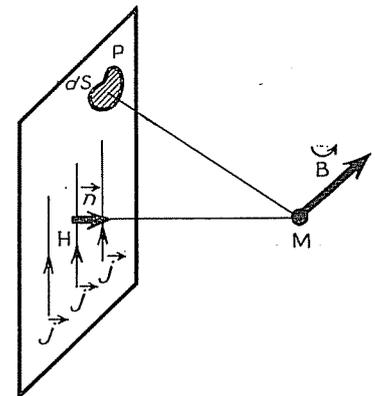


FIG. 7-3 3°.

à un contour rectangulaire normal à \vec{j} de côtés respectivement parallèle et normal au plan aurait aussitôt conduit aux deux résultats suivants :

a) l'induction est uniforme dans chaque demi-espace limité par le plan;

b) d'après le résultat du § 1°, $\vec{B} = \frac{1}{2} [\mu_0 \cdot \vec{j} \wedge \vec{n}]$.

4° Cherchons à calculer l'induction magnétique \vec{B} en un point M non situé sur la surface cylindrique \mathcal{G} (extérieur ou intérieur) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iint \frac{\vec{r} \wedge \vec{j}}{r^3} \cdot d\vec{S}$$

Au sens de rotation sur le cylindre défini par le sens de \vec{j} associons un sens d'orientation correspondant sur les génératrices (gadgets habituels du physicien : bonhomme d'Ampère, tirebouchon de Maxwell, etc.), soit \vec{k} le vecteur unitaire sur les génératrices orientées, soit $d\vec{S}$ le vecteur élément de surface orienté de l'intérieur vers l'extérieur. Nous pouvons écrire :

$$\vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot \vec{k} \wedge d\vec{S}$$

et :

$$\vec{r} \wedge \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot [(\vec{r} \cdot d\vec{S}) \cdot \vec{k} - (\vec{r} \cdot \vec{k}) \cdot d\vec{S}]$$

L'induction magnétique \vec{B} s'écrit maintenant :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot j}{4\pi} \cdot \left[\vec{k} \cdot \iint_{\mathcal{G}} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} - \iint_{\mathcal{G}} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{k}}{r^3} \right) \cdot d\vec{S} \right]$$

La seconde intégrale est nulle car deux éléments de surface symétriques par rapport au plan de section droite passant par M y contribuent par deux termes opposés; la première est l'angle solide (algébrique) sous lequel on voit la face intérieure de \mathcal{G} , elle est donc égale à 0 si M est extérieur au cylindre, et à 4π s'il est intérieur, d'où :

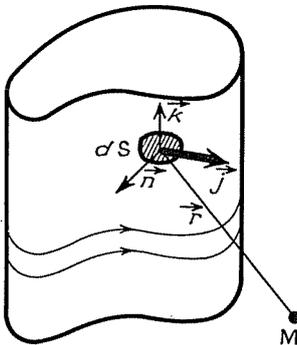


FIG. 7-3 4°.

M extérieur au cylindre $\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$
M intérieur au cylindre $\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 j \cdot \vec{k}$

Soit P un point quelconque de la surface cylindrique, et soit \vec{n} le vecteur unitaire normal en ce point, dirigé de l'intérieur vers l'extérieur; nous pouvons écrire en ce point :

$$j \cdot \vec{k} = \vec{n} \wedge \vec{j}$$

donc écrire \vec{B} à l'intérieur du cylindre sous la forme :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot n \wedge \vec{j}$$

5° Le système étudié est invariant par une rotation quelconque autour de l'axe du cylindre circulaire, ainsi que par une translation quelconque parallèle à l'axe, il en est donc de même pour l'induction magnétique. Considérons un point quelconque M et sa projection H sur l'axe. Soit P le point courant sur la surface, le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$ peut s'écrire: $\vec{r} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP}$, et l'induction magnétique \vec{B} s'écrit:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\overrightarrow{MH} \wedge \vec{j} \cdot \iint_g \frac{dS}{r^3} + \left(\iint_g \frac{\overrightarrow{HP}}{r^3} \cdot dS \right) \wedge \vec{j} \right]$$

La seconde intégrale est nulle car deux éléments de surface symétriques par rapport à M, y contribuent par deux termes opposés. L'induction \vec{B} est donc normale à \overrightarrow{MH} et à \vec{j} , c'est-à-dire orthoradiale, les lignes de champ sont des cercles ayant même axe que le cylindre, et sur ces cercles le module de \vec{B} est constant.

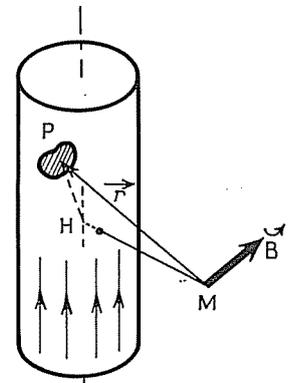


FIG. 7-3 5°.

L'application du théorème d'Ampère à l'une quelconque de ces lignes de champ circulaires (de rayon r) donne :

$$2\pi r \cdot B = \begin{cases} 0 & \text{si le cercle est intérieur au cylindre.} \\ \mu_0 \cdot (2\pi R \cdot j) & \text{si le cercle est extérieur au cylindre.} \end{cases}$$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

M intérieur au cylindre $\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$
M extérieur au cylindre $\Rightarrow \vec{B}$ est orthoradial et : $B = \mu_0 \frac{R}{r} \cdot j$

L'intensité totale passant le long du cylindre étant : $I = 2\pi R \cdot j$, l'induction magnétique à l'extérieur est bien la même, comme l'indique l'énoncé, que si le courant total parcourait l'axe du cylindre :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

7-4*. DIPOLES MAGNÉTIQUES. — Un circuit filiforme \mathcal{C} est parcouru par un courant d'intensité I . Soit \mathcal{S} une surface (ouverte) s'appuyant sur le contour \mathcal{C} ,

orientée selon le sens du courant (suivant les conventions habituelles); on appelle moment magnétique du circuit l'intégrale de surface :

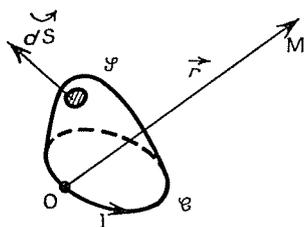


FIG. 7-4.

$$\vec{M} = \iint_{\mathcal{S}} I \cdot d\vec{S}$$

1° Montrer que le vecteur \vec{M} ainsi défini ne dépend pas du choix de la surface \mathcal{S} .

2° Soit O un point quelconque du circuit. Posant $\vec{OM} = \vec{r}$, montrer que le potentiel magnétique scalaire \mathcal{V} en un point M fort éloigné du circuit est sensiblement égal à :

$$\mathcal{V} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

3° On appelle dipôle magnétique toute répartition de courants, caractérisée par la donnée d'un point O et d'un vecteur axial \vec{M} , telle que le potentiel magnétique en tout point M soit donné par la formule ci-dessus. Calculer en fonction de \vec{M} l'induction magnétique \vec{B} et le potentiel vecteur \vec{A} créés par un tel dipôle magnétique en un point quelconque M.

4° Montrer que l'induction magnétique \vec{B} peut être écrite sous la forme :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[-\frac{\vec{M}}{r^3} + 3(\vec{M} \cdot \vec{r}) \cdot \frac{\vec{r}}{r^5} \right]$$

INDICATIONS. — 1° L'intensité I étant constante, démontrer l'unicité de la définition de \vec{M} revient à résoudre un problème élémentaire d'analyse vectorielle.

2° Le potentiel magnétique scalaire \mathcal{V} créé en un point M par un circuit filiforme est égal à :

$$\mathcal{V} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \Omega,$$

où Ω représente l'angle solide sous lequel on voit, du point M, la face sud du circuit. Quand le point M est éloigné du circuit (nous entendons par là que sa plus petite distance à un point du circuit est grande devant la plus grande dimension du circuit), sa distance r au point courant du circuit peut être considérée comme constante, et la formule proposée s'en déduit aisément.

3° L'induction magnétique \vec{B} est l'opposé du gradient de \mathcal{V} , le potentiel vecteur \vec{A} est tel que : $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. La recherche de \vec{B} et \vec{A} à partir de ces formules peut être faite au moyen des coordonnées, ou par un raisonnement vectoriel direct.

4° L'expression de \vec{B} trouvée au § 3° peut être transformée en tenant compte de ce que :

$$\begin{aligned} \text{div}(a \cdot \vec{b}) &= a \cdot \text{div } \vec{b} + \vec{b} \cdot \text{grad } a \\ \text{grad}(a \cdot b) &= a \cdot \text{grad } b + b \cdot \text{grad } a. \end{aligned}$$

On peut également chercher à identifier la formule trouvée au § 3° et la formule proposée ici, au moyen des coordonnées.

— SOLUTION —

1° Soit \mathcal{G}' une surface (ouverte) s'appuyant également sur le contour \mathcal{C} et n'ayant aucun autre point commun avec \mathcal{G} ; ces deux surfaces \mathcal{G} et \mathcal{G}' limitent un volume V , et permettent a priori de définir deux moments magnétiques distincts \vec{m} et \vec{m}' :

$$\vec{m} = I \cdot \iint_{\mathcal{G}} \vec{dS} \quad \text{et} \quad \vec{m}' = I \cdot \iint_{\mathcal{G}'} \vec{dS}$$

La différence de ces deux vecteurs est :

$$\vec{m}' - \vec{m} = I \iint_{\mathcal{G} \cup \mathcal{G}'} \vec{dS}$$

La composante de ce vecteur sur un axe quelconque de vecteur unitaire \vec{u} est :

$$I \cdot \iint_{\mathcal{G} \cup \mathcal{G}'} \vec{u} \cdot \vec{dS} = I \cdot \iiint_V \operatorname{div} \vec{u} \cdot d\tau = 0 \quad (\vec{u} \text{ est uniforme}),$$

donc :

$$\vec{m}' = \vec{m}$$

On démontrerait de même plus généralement la conséquence suivante du théorème d'Ostrogradsky :

$$\iint_{\text{surface fermée}} a \cdot \vec{dS} = \iiint_{\text{volume limité}} \operatorname{grad} a \cdot d\tau$$

2° Appelons par exemple P le point courant sur la surface \mathcal{G} ; l'angle solide Ω sous lequel on voit, du point M , la face sud du circuit est :

$$\Omega = \iint_{\mathcal{G}} \frac{\vec{MP} \cdot \vec{dS}}{MP^3},$$

Le potentiel magnétique scalaire est :

$$v = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \Omega = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \iint_{\mathcal{G}} \frac{\vec{MP} \cdot \vec{dS}}{MP^3}$$

Si le point M est très éloigné du circuit, nous pouvons considérer le vecteur \vec{MP} comme constant quand le point courant P parcourt la surface \mathcal{G} , donc écrire :

$$v = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \iint_{\mathcal{G}} \frac{\vec{MO} \cdot \vec{dS}}{MO^3} = +\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{OM}}{OM^3} \cdot \iint_{\mathcal{G}} I \cdot \vec{dS},$$

où O est un point quelconque du circuit. Posons : $\vec{OM} = \vec{r}$, il vient :

$$\boxed{v = +\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}} \quad (1)$$

Le potentiel scalaire φ n'est bien sûr défini, comme toujours, qu'à une constante additive multiple entière de $\mu_0 I$ près (l'angle solide Ω n'est défini qu'à 4π près).

3° L'induction magnétique \vec{B} et le potentiel vecteur \vec{A} peuvent être définis par :

$$\vec{B} = -\text{grad } \varphi \quad \text{et} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

le potentiel vecteur \vec{A} devant de plus vérifier si possible : $\text{div } \vec{A} = 0$.

Le moyen le plus naturel d'introduire des coordonnées pour le calcul de \vec{B} et \vec{A} est d'employer des coordonnées cylindriques d'axe Oz parallèle à $\vec{\mathcal{M}}$ (le potentiel scalaire φ est en effet invariant par toute rotation autour de Oz). Néanmoins, l'application du théorème d'Ampère au cercle d'axe Oz passant par M montre que l'induction \vec{B} est située dans le plan $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{OM})$; il est donc commode, pour le calcul de \vec{B} , d'employer dans le plan $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{OM})$ les coordonnées polaires d'axe Oz :

$$\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{r^2}$$

$$B_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3}$$

N'appréciant guère la lourdeur des calculs scalaires, nous proposerons plutôt un calcul vectoriel de l'induction \vec{B} et du potentiel vecteur \vec{A} . Le point O étant choisi comme origine, nous pouvons écrire l'expression (1) sous la forme (compte tenu de ce que $\vec{\mathcal{M}}$ est constant quand M varie) :

$$\varphi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \text{div} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} \right)$$

d'où nous déduisons l'induction magnétique :

$$\vec{B} = -\text{grad } \varphi = +\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \text{grad} \left(\text{div} \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} \right),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\vec{B} = +\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[\text{rot} \left(\text{rot} \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} \right) + \nabla^2 \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} \right]$$

Comme $\vec{\mathcal{M}}$ est constant et que le laplacien de $\frac{1}{r}$ est nul, ceci s'écrit simplement :

$$\boxed{\vec{B} = +\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \text{rot} \left(\text{rot} \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} \right)},$$

et le potentiel vecteur est :

$$\vec{A} = + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}}}{r} \right)$$

Sous cette forme nous vérifions que le potentiel vecteur trouvé satisfait à la condition : $\text{div } \vec{A} = 0$. Sachant que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(a \cdot \vec{b}) = a \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{b} + \overrightarrow{\text{grad}} a \wedge \vec{b},$$

et tenant compte de ce que $\vec{\mathcal{M}}$ est constant quand M varie, nous pouvons écrire :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \wedge \vec{\mathcal{M}} = + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

4° Reprenons l'expression initiale de l'induction magnétique :

$$\vec{B} = - \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left(\overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

Sachant que :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(a \cdot b) = a \cdot \overrightarrow{\text{grad}} b + b \cdot \overrightarrow{\text{grad}} a,$$

nous pouvons transformer l'expression de \vec{B} en écrivant :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^2} \right) + \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r} \right) + \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}) + (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}) = \vec{\mathcal{M}} \text{ car } \vec{\mathcal{M}} \text{ est un vecteur constant.}$$

Ces termes regroupés, nous obtenons pour \vec{B} l'expression demandée :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[- \frac{\vec{\mathcal{M}}}{r^3} + 3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}) \cdot \frac{\vec{r}}{r^5} \right]$$

Une méthode de résolution moins esthétique, mais au moins aussi rapide, aurait été d'exprimer dans le plan $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{OM})$ les coordonnées polaires (l'axe

polaire étant parallèle à \vec{M} et de même sens) de l'expression ci-dessus, et de montrer qu'elles s'identifient aux coordonnées de \vec{B} déjà trouvées :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\vec{M}\cos\theta}{r^2} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{M}\sin\theta}{r^2}$$

Remarquons que les formules exprimant \vec{B} et \mathcal{V} sont formellement identiques à celles exprimant le champ électrostatique \vec{E} et le potentiel V créés par un dipôle électrostatique, le moment magnétique \vec{M} jouant le rôle du moment dipolaire \vec{P} . D'où le nom de dipôle magnétique (bien qu'il n'existe pas de « pôles » magnétiques jouant le rôle des charges électriques).

La notion de dipôle magnétique ne se limite pas au domaine des circuits filiformes. On démontre qu'à grande distance d'une portion d'espace parcourue par une répartition volumique de courants (la densité de courant \vec{i} étant nulle à l'extérieur de cette portion d'espace), le potentiel magnétique scalaire \mathcal{V} , le potentiel vecteur \vec{A} et l'induction magnétique \vec{B} sont donnés par les mêmes formules que ci-dessus, à condition de définir cette fois le moment magnétique \vec{M} par :

$$\vec{M} = \iiint_V \frac{\vec{OP} \wedge \vec{i}}{2} \cdot d\tau,$$

où P est le point courant du volume V et O un point fixe arbitraire de ce volume. On peut de plus montrer que cette définition est compatible avec celle donnée ici pour des courants filiformes.

7-5*. — 1° Un fil rectiligne illimité est parcouru par un courant constant d'intensité I . Montrer qu'une forme correcte du potentiel vecteur est :

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \text{Log } r \cdot \vec{k},$$

\vec{k} étant un vecteur unitaire parallèle au fil, dans le sens du courant, et r la distance du point considéré au fil. Déterminer le potentiel magnétique scalaire \mathcal{V} .

2° Soit une induction magnétique uniforme \vec{B} et une origine O . Montrer qu'une forme correcte du potentiel vecteur en M est :

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{OM} \wedge \vec{B},$$

Déterminer le potentiel magnétique scalaire.

INDICATIONS. — Les deux systèmes proposés par l'énoncé ont ceci de commun qu'ils ne correspondent pas à un système physique réalisable, qu'ils supposent la présence

de courants à l'infini. Ils ne constituent de bons modèles de la réalité physique que *localement* : à proximité d'un conducteur filiforme, à l'intérieur d'un solénoïde.

Or les formules donnant directement les divers potentiels (V , \mathcal{V} et \vec{A}) tiennent compte de toutes les charges ou de tous les courants, les potentiels sont trouvés sous forme d'intégrales qui ne convergent que s'il n'y a pas à l'infini de charges (pour V) ou de courants (pour \mathcal{V} et \vec{A}). Il n'y a pas là faillite de la méthode de calcul des potentiels, mais limitation de la validité du modèle proposé. Néanmoins, de tels modèles sont précieux et l'on prendra arbitrairement pour potentiel nul, non plus le potentiel à l'infini, mais le potentiel en un point quelconque où il n'y a ni charges, ni courants.

Deux méthodes sont utilisables :

- a) soit calculer les potentiels à partir des champs (\vec{E} pour V , \vec{B} pour \mathcal{V} et \vec{A});
- b) soit considérer les modèles proposés comme la limite de modèles physiquement acceptables, les potentiels cherchés seront la limite des potentiels correspondants.

— SOLUTION —

1° Une formule étant proposée par l'énoncé, il suffit de montrer qu'elle satisfait aux équations de définition du potentiel vecteur \vec{A} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \text{rot}(\text{Log } r \cdot \vec{k}) \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \text{grad}(\text{Log } r) \wedge \vec{k} \end{aligned}$$

ou :

$$\text{rot } \vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{\vec{HM}}{r^2} \wedge \vec{k} = \vec{B},$$

où H est la projection de M sur le fil. Il est en effet aisé de voir que $\text{rot } \vec{A}$, donné par la formule ci-dessus, est orthoradial et de module :

$$|\text{rot } \vec{A}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Calculons de même la divergence de l'expression proposée par l'énoncé :

$$\text{div } \vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \text{div}(\text{Log } r \cdot \vec{k}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \text{grad}(\text{Log } r) \cdot \vec{k}$$

Le vecteur $\text{grad}(\text{Log } r)$ est colinéaire à HM donc normal à \vec{k} , et l'on vérifie ainsi qu'effectivement :

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

Pour le calcul du potentiel magnétique scalaire, l'emploi des coordonnées

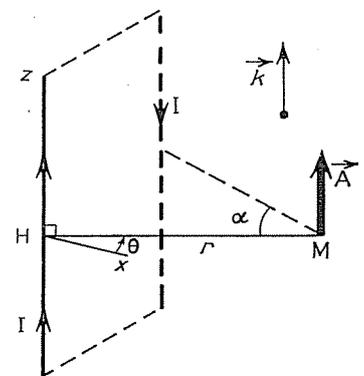


FIG. 7-5 1°.

cylindriques semble s'imposer; nous cherchons une fonction $\mathcal{V}(r, \theta, z)$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Nous trouvons ainsi :

$$\mathcal{V} = \text{constante} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \theta$$

Outre le choix arbitraire de la constante (origine des potentiels), le potentiel magnétique scalaire ainsi trouvé n'est défini qu'à $k\mu_0 I$ près ($k \in \mathbf{Z}$), puisque l'angle θ n'est lui-même défini qu'à $2k\pi$ près.

Nous aurions pu trouver les potentiels \vec{A} et \mathcal{V} en cherchant un système de courants physiquement acceptable dont le modèle proposé soit la limite quand un certain paramètre tend lui-même vers une certaine limite. Un tel système est par exemple celui formé par deux fils rectilignes infinis parallèles et parcourus par des courants constants d'intensités opposées I et $-I$. Le potentiel magnétique scalaire est alors égal à :

$$\mathcal{V} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega,$$

où Ω est l'angle solide sous lequel on voit la face sud du circuit ainsi constitué; c'est l'angle solide d'un dièdre de rectiligne α :

$$\Omega = 2\alpha$$

Si le fil où l'intensité est I reste fixe et si la distance des deux fils augmente indéfiniment (le plan des deux fils restant fixe), ce système tend vers le modèle proposé par l'énoncé. L'angle α tend vers :

$$\alpha_{\text{limite}} = \frac{\pi}{2} + \theta,$$

où θ est l'angle défini précédemment, et l'on retrouve bien la même expression du potentiel magnétique scalaire. Il en serait de même pour le potentiel vecteur.

2° L'énoncé propose pour le potentiel vecteur l'expression :

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{B}$$

Il suffit de vérifier que $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$; en l'absence de formule générale simple

exprimant le rotationnel d'un produit vectoriel, nous sommes obligés d'en passer par un calcul de coordonnées. Soient donc un axe Oz parallèle à \vec{B} et deux axes Ox et Oy tels que le trièdre $Oxyz$ soit orthonormé et direct; les coordonnées de M par rapport à ce trièdre sont x, y et z , celles de \vec{B} sont $0, 0$ et B , donc celles de \vec{A} sont $-B \frac{y}{2}, B \frac{x}{2}$ et 0 . Le rotationnel de \vec{A} est donc :

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -B \frac{y}{2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & +B \frac{x}{2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \vec{B}$$

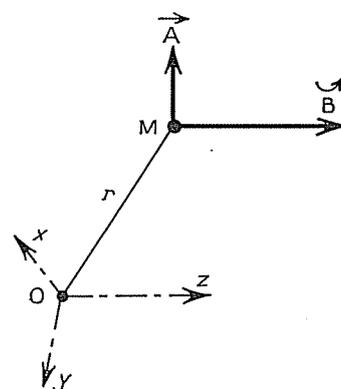


FIG. 7-5 2°.

La forme proposée du potentiel vecteur convient donc, et ceci d'autant mieux que :

$$\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{2} \text{div} (\vec{OM} \wedge \vec{B}) = -\frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{OM} - \vec{OM} \cdot \text{rot } \vec{B}) = 0$$

Le potentiel magnétique scalaire φ , étant défini par : $\vec{B} = -\text{grad } \varphi$, doit être tel que :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = B \end{cases}$$

nous trouvons donc :

$$\varphi = \text{constante} - B \cdot z$$

REMARQUE. — Le calcul fait ci-dessus au moyen des coordonnées cartésiennes est tout à fait trivial, mais l'allure du problème nous encouragerait à utiliser les coordonnées cylindriques. L'étudiant moyen répugne fortement à l'emploi de coordonnées cylindriques ou sphériques lorsqu'interviennent des opérations aussi complexes que le rotationnel ou le produit vectoriel, et nous ne saurions lui en tenir rigueur; ceci nous est cependant une occasion d'exhiber les formules du rotationnel en coordonnées cylindriques, lesquelles peuvent ailleurs se révéler nécessaires...

$$\begin{cases} (\text{rot } \vec{A})_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ (\text{rot } \vec{A})_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\text{rot } \vec{A})_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{cases}$$

Les coordonnées cylindriques de M étant r, θ et z , et celles de \vec{B} étant $0, 0$ et B , le vecteur \vec{A} est visiblement orthoradial ($A_r = 0, A_\theta = -\frac{Br}{2}$ et $A_z = 0$), et les formules ci-dessus montrent bien que $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$.
 Les formules donnant le rotationnel en coordonnées sphériques r, θ, φ sont un peu plus compliquées :

$$\begin{cases} (\text{rot } \vec{A})_r = \frac{1}{r \cdot \sin \varphi} \cdot \frac{\partial(A_\theta \cdot \sin \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \\ (\text{rot } \vec{A})_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \\ (\text{rot } \vec{A})_\varphi = \frac{1}{r \cdot \sin \varphi} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \end{cases}$$

Ces formules, contrairement à ce qu'on pourrait penser, sont très faciles à obtenir, en considérant le volume élémentaire défini par les trois intervalles : $[r, r + dr]$, $[\theta, \theta + d\theta]$, et $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, et en appliquant le théorème de Stokes aux trois contours se présentant alors naturellement à l'esprit...

7-6. — Un circuit électrique a la forme d'un losange vertical plan articulé ABCD de côté $a = 4 \text{ cm}$; son sommet supérieur A est fixe, son sommet inférieur C est mobile, mais reste sur la verticale de A; chaque côté du losange a pour masse $m = 1 \text{ g}$.

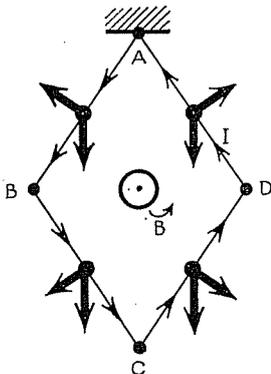


FIG. 7-6.

Le circuit, dans lequel on fait passer un courant d'intensité $I = 10 \text{ A}$, est placé normalement aux lignes d'induction d'un champ magnétique uniforme d'induction $B = 0,1 \text{ T}$. Déterminer la forme du losange à l'équilibre (on prendra l'accélération g de la pesanteur égale à 10 ms^{-2}).

— SOLUTION —

Nous pouvons d'ores et déjà prévoir que si le moment magnétique \vec{M} du circuit et l'induction magnétique uniforme \vec{B} n'ont pas le même sens, l'équilibre ne pourra pas avoir lieu sous la seule influence des forces électromagnétiques et des poids : les poids comme les forces de Laplace tendent à allonger la diagonale AC jusqu'à annuler l'angle au sommet 2θ du losange en A; l'équilibre pourra alors se produire (pour θ voisin de zéro) du fait de l'intervention d'autres forces (forces mécaniques de contact des branches AB et AD venant à se toucher).

Si par contre les vecteurs \vec{M} et \vec{B} sont de même sens, les forces de Laplace appliquées aux quatre branches du circuit tendent à augmenter le flux Φ de \vec{B} à travers le circuit (donc à augmenter la surface du losange), tandis que les

quatre poids tendent à abaisser le centre de gravité de l'ensemble (donc à diminuer la surface) : un équilibre sera peut-être possible.

Le système est en équilibre si et seulement si le torseur des forces appliquées à *chaque* côté du losange est nul. De telles conditions sont difficiles à exprimer (nécessité de faire intervenir les interactions des côtés, au niveau des articulations), il est préférable d'écrire que la position d'équilibre correspond à un minimum énergétique, ou, ce qui revient au même, d'appliquer le théorème des déplacements virtuels :

Soit θ le demi-angle au sommet A du losange; quand cet angle varie de $d\theta$, le centre de gravité G du losange ($AG = a \cdot \cos \theta$) s'abaisse (algébriquement) de : $dG = -a \cdot \sin \theta \cdot d\theta$, et le travail des quatre poids est alors :

$$\delta\mathcal{C}_p = (4m) \cdot g \cdot (-a \cdot \sin \theta \cdot d\theta) = -4 \, mag \cdot \sin \theta \cdot d\theta;$$

la surface S du losange ($S = a^2 \cdot \sin 2\theta$) augmente (algébriquement) de : $dS = 2a^2 \cdot \cos 2\theta \cdot d\theta$, et le travail des quatre forces de Laplace est alors :

$$\delta\mathcal{C}_{em} = I \cdot \delta\Phi = I \cdot B \cdot dS = 2IBa^2 \cdot \cos 2\theta \cdot d\theta$$

d'où :

$$\delta\mathcal{C}_p + \delta\mathcal{C}_{em} = \left(\cos 2\theta - \frac{2mg}{IBa} \sin \theta \right) \cdot 2IBa^2 \cdot d\theta$$

Le théorème des travaux virtuels indique que l'équilibre est atteint si et seulement si :

$$\cos 2\theta - \frac{2mg}{IBa} \sin \theta = 0$$

ou :

$$2 \sin^2 \theta + 2 \frac{mg}{IBa} \cdot \sin \theta - 1 = 0$$

Application numérique :

$$\left. \begin{array}{l} m = 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg} \\ g = 10 \text{ ms}^{-2} \\ I = 10 \text{ A} \\ B = 10^{-1} \text{ T} \\ a = 4 \text{ cm} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \sin^2 \theta + \sin \theta - 2 = 0$$

Seule la racine positive de cette équation du second degré est physiquement acceptable ($0 \leq \theta \leq \pi$ radians) :

$$\sin \theta \simeq 0,594 \Rightarrow \theta = 36^\circ 20' \quad \text{ou} \quad 143^\circ 40'$$

Il est facile de constater que la première solution correspond à un équilibre stable, tandis que la seconde correspond à un équilibre instable.

7-7*. TORSEUR DES FORCES APPLIQUÉES A UN CIRCUIT. — Un cadre carré ABCD de côté $2a = 20 \text{ cm}$ (les côtés AB et CD étant verticaux et les côtés BC et AD horizontaux) est mobile autour d'un axe vertical $z'z$ passant par son centre O. Un fil rectiligne vertical infini $t't$ est placé verticalement à 20 cm du centre du carré.

Sachant que le cadre est parcouru par un courant électrique d'intensité constante $I = 10 \text{ A}$, et le fil rectiligne par un courant d'intensité $I' = 100 \text{ A}$, déterminer les éléments de réduction en O du torseur des forces agissant sur le cadre ABCD lorsque le plan de ce cadre fait un angle θ avec le plan des verticales $t't$ et $z'z$. Application numérique au cas : $\theta = 60^\circ$.

INDICATIONS. — Chaque élément de longueur dl du cadre \mathcal{C} est soumis à la force de Laplace $d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$, où \vec{B} est l'induction magnétique créée au centre M de l'élément dl par le fil $t't$. Les éléments de réduction en O du torseur des forces appliquées au cadre \mathcal{C} sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la résultante } \vec{F} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{F} \\ \text{le couple } \vec{\Gamma}_O = \oint_{\mathcal{C}} \vec{OM} \wedge d\vec{F} \end{array} \right.$$

Plutôt que de calculer effectivement ces intégrales, il est préférable de démontrer auparavant que le torseur cherché est réductible à deux glisseurs horizontaux \vec{F}_{AB} et \vec{F}_{CD} passant respectivement par les milieux M_{AB} et M_{CD} des côtés verticaux AB et CD (ces glisseurs ne sont autres que les forces de Laplace appliquées à AB et CD respectivement).

— SOLUTION —

Examinons successivement les contributions à \vec{F} et $\vec{\Gamma}_O$ des éléments horizontaux du cadre, puis des éléments verticaux.

a) Contribution des côtés horizontaux AD et BC. — Considérons deux éléments de circuit horizontaux dl et dl' symétriques par rapport au plan horizontal passant par O (l'un est donc sur AD et l'autre sur BC); les vecteurs $d\vec{l}$ et $d\vec{l}'$ sont opposés (sens de courant opposés), et l'induction magnétique créée par le fil $t't$ est la même en M (centre de dl) qu'en M' (centre de dl'), donc :

$$\begin{aligned} d\vec{F} + d\vec{F}' &= I d\vec{l} \wedge \vec{B} + I d\vec{l}' \wedge \vec{B}' \\ &= I(d\vec{l} + d\vec{l}') \wedge \vec{B} = \vec{0} \end{aligned}$$

Ces deux éléments apportent au couple $\vec{\Gamma}_O$ la contribution :

$$\begin{aligned} d\vec{\Gamma}_O + d\vec{\Gamma}'_O &= \vec{OM} \wedge d\vec{F} + \vec{OM}' \wedge d\vec{F}' \\ &= \vec{M'M} \wedge d\vec{F} = \vec{0}, \end{aligned}$$

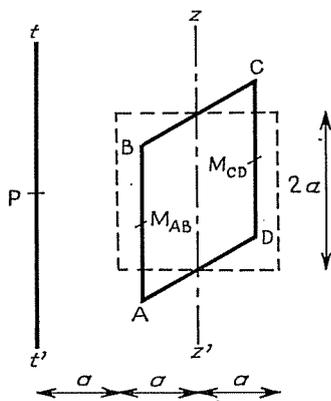


FIG. 7-7 1°.

car les vecteurs $\overrightarrow{M'M}$ et \overrightarrow{dF} sont verticaux, donc parallèles. Nous pouvons ainsi nous limiter, lors du calcul de \vec{F} et $\vec{\Gamma}_O$, aux seuls éléments verticaux du cadre.

b) Contribution des côtés verticaux AB et CD. — Considérons un seul de ces deux côtés, AB par exemple; l'induction magnétique \vec{B} est la même en chaque point du côté, donc la contribution à \vec{F} du côté considéré est :

$$\vec{F}_{AB} = \int_{AB} I \vec{dl} \wedge \vec{B} = I \left(\int_{AB} \vec{dl} \right) \wedge \vec{B}_{AB} = I \cdot \overrightarrow{AB} \wedge \vec{B}_{AB}$$

Considérons deux éléments de circuit verticaux dl et dl' symétriques par rapport au plan horizontal passant par O, leur contribution au couple $\vec{\Gamma}_O$ est :

$$\begin{aligned} d\vec{\Gamma}_O + d\vec{\Gamma}'_O &= \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF} + \overrightarrow{OM}' \wedge \overrightarrow{dF}' = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}') \wedge \overrightarrow{dF} \\ &= \overrightarrow{OM}_{AB} \wedge (2 \cdot \overrightarrow{dF}), \end{aligned}$$

où M_{AB} désigne le milieu de AB. La contribution $\vec{\Gamma}_{AB}$ de tout le côté AB au couple $\vec{\Gamma}_O$ est donc :

$$\vec{\Gamma}_{AB} = \int_{M_{AB}B} (d\vec{\Gamma}_O + d\vec{\Gamma}'_O) = \overrightarrow{OM}_{AB} \wedge \int_{M_{AB}B} 2 \cdot \overrightarrow{dF} = \overrightarrow{OM}_{AB} \wedge \vec{F}_{AB}$$

Les contributions \vec{F}_{CD} et $\vec{\Gamma}_{CD}$ du côté CD aux éléments de réduction \vec{F} et $\vec{\Gamma}_O$ sont de même :

$$\vec{F}_{CD} = I \cdot \overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}_{CD} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_{CD} = \overrightarrow{OM}_{CD} \wedge \vec{F}_{CD}.$$

Le torseur des forces appliquées au cadre est donc réductible à deux glisseurs \vec{F}_{AB} et \vec{F}_{CD} , qui ne sont autres que les forces de Laplace globales appliquées aux côtés AB et CD respectivement.

c) Détermination des éléments de réduction \vec{F} et $\vec{\Gamma}_O$. — Soit P le point où $t't$ rencontre le plan horizontal passant par O; désignons précisément par θ l'angle $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}_{AB})$ et convenons de compter positivement le produit Π' quand le courant dans $t't$ a le même sens que dans AB (et négativement, bien sûr, dans le cas contraire).

Le glisseur \vec{F}_{AB} est porté par $M_{AB}P$, et a pour mesure algébrique sur cet axe (dirigé de M_{AB} vers P) :

$$F_{AB} = I \cdot (2a) \cdot \frac{\mu_0 I'}{2\pi \cdot M_{AB}P}$$

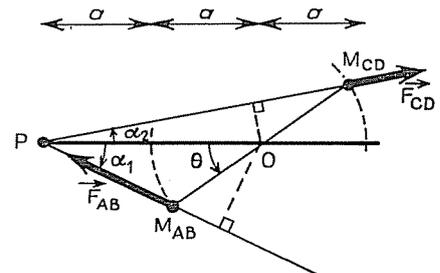


FIG. 7-7 2°.

De même pour \vec{F}_{CD} (axe $M_{CD}P$ dirigé de M_{CD} vers P) :

$$F_{CD} = I \cdot (2a) \cdot \frac{-\mu_0 I'}{2\pi \cdot M_{CD}P}$$

Il est facile de constater (cf. figure) que :

$$\begin{cases} M_{AB}P = a\sqrt{5-4\cos\theta} \\ M_{CD}P = a\sqrt{5+4\cos\theta} \end{cases}$$

Pour exprimer la résultante \vec{F} , il peut être est préférable d'en exprimer les composantes X et Y , l'axe $x'x$ ayant par exemple été choisi parallèle à \vec{PO} et de même sens; désignant par α_1 et α_2 les angles (\vec{PO}, \vec{M}_{AB}) et (\vec{PO}, \vec{M}_{CD}) , il vient :

$$\begin{aligned} X &= -F_{AB} \cdot \cos \alpha_1 - F_{CD} \cdot \cos \alpha_2 \\ Y &= -F_{AB} \cdot \sin \alpha_1 - F_{CD} \cdot \sin \alpha_2 \end{aligned}$$

Les angles α_1 et α_2 sont donnés par :

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= -\frac{a \cdot \sin \theta}{M_{AB}P}, & \cos \alpha_1 &= +\frac{2a - a \cdot \cos \theta}{M_{AB}P}, \\ \sin \alpha_2 &= +\frac{a \cdot \sin \theta}{M_{CD}P}, & \cos \alpha_2 &= +\frac{2a + a \cdot \cos \theta}{M_{CD}P}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne donc :

$$\begin{aligned} X &= +\frac{\mu_0 I'}{\pi} \left(-\frac{2 - \cos \theta}{5 - 4 \cos \theta} + \frac{2 + \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} \right) \\ Y &= +\frac{\mu_0 I'}{\pi} \left(+\frac{\sin \theta}{5 - 4 \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{5 + 4 \cos \theta} \right) \end{aligned}$$

ou bien encore :

$$\boxed{X = \frac{\mu_0 I'}{\pi} \cdot \frac{-6 \cdot \cos \theta}{25 - 16 \cdot \cos^2 \theta} \quad \left| \quad Y = \frac{\mu_0 I'}{\pi} \cdot \frac{10 \cdot \sin \theta}{25 - 16 \cdot \cos^2 \theta} \right.}$$

Le moment en O du torseur considéré est :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{OM}_{AB} \wedge \vec{F}_{AB} + \vec{OM}_{CD} \wedge \vec{F}_{CD};$$

c'est un vecteur axial vertical, dont la mesure algébrique sur $z'z$ est :

$$\Gamma_O = + (2a \cdot \sin \alpha_1) \cdot F_{AB} + (2a \cdot \sin \alpha_2) \cdot F_{CD}$$

donc :

$$\Gamma_O = 2a \cdot \frac{\mu_0 I'}{\pi} \left(-\frac{\sin \theta}{5 - 4 \cos \theta} - \frac{\sin \theta}{5 + 4 \cos \theta} \right)$$

ou :

$$\Gamma_0 = a \cdot \frac{\mu_0 I I'}{\pi} \cdot \frac{-20 \sin \theta}{25 - 16 \cos^2 \theta}$$

Application numérique : $\theta = 60^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I.} \\ I = 10 \text{ A} \\ I' = 100 \text{ A} = 10^2 \text{ A} \\ \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = 10 \text{ cm} = 10^{-1} \text{ m} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{\mu_0 I I'}{\pi} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ S.I.}$$

d'où :

$$X = -\frac{4}{7} \cdot 10^{-4} \text{ N}, \quad Y = \frac{20}{7\sqrt{3}} \cdot 10^{-4} \text{ N}, \quad \Gamma_0 = -\frac{4}{7\sqrt{3}} \cdot 10^{-4} \text{ m} \wedge \text{N}$$

c'est-à-dire environ :

$$X \simeq -0,57 \cdot 10^{-4} \text{ N} \quad Y \simeq 1,65 \cdot 10^{-4} \text{ N} \quad \Gamma_0 \simeq -0,33 \cdot 10^{-4} \text{ m} \wedge \text{N}$$

7-8*. ROUE DE BARLOW. — *Un disque de cuivre de rayon R est libre de tourner autour de son axe; un courant électrique d'intensité I arrive en son centre et repart par un point de sa périphérie (l'axe est par exemple horizontal, et le bord inférieur du disque est en contact avec du mercure). La roue est placée dans une région de l'espace où l'induction magnétique, uniforme, est parallèle à l'axe. Calculer le couple exercé sur le disque. Montrer que ce couple ne dépend pas de la façon dont les lignes de courants se répartissent dans le disque.*

INDICATIONS. — Le calcul du couple exercé sur une roue de Barlow est fréquemment fait en admettant que le courant passe en fait le long du rayon joignant le centre O du disque au point de sa périphérie par lequel repart le courant; ceci se justifie en considérant une roue pleine comme la limite d'une roue formée d'un nombre fini de rayons matériels, et pour laquelle la fermeture du circuit se maintient par commutations successives (un rayon venant en remplacer un autre avant que ce dernier n'ait quitté le mercure). Une telle assimilation n'est pas acceptable; pourquoi, ayant à leur disposition une étendue continue de matière conductrice, les électrons

tiendraient-ils absolument à se ruer tous ensemble par le chemin le plus court? Rien ne permet de le supposer.

Il est donc plus correct de poser qu'à chaque instant les lignes de courant ont une certaine répartition, caractérisée par la densité superficielle de courant $\vec{j} = \vec{j}(M, t)$ en chaque point M et à chaque instant t (cf problème 7-3). En régime permanent, nous pourrions admettre que cette répartition ne varie pas avec le temps : $\vec{j} = \vec{j}(M)$, mais la seule chose que nous sachions en outre sur \vec{j} est que l'intensité sortant d'une courbe fermée quelconque entourant O est égale à I .

— SOLUTION —

Considérons un élément de surface dS du disque; à un instant t donné, cet élément de surface est situé en M et la densité superficielle du courant est $\vec{j}(M)$, il est donc soumis à la force de Laplace :

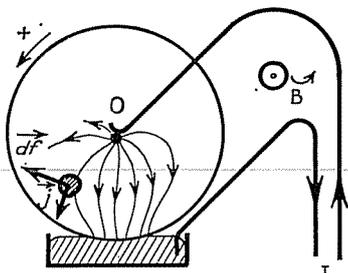


FIG. 7-8.

$$d\vec{f} = \vec{j} \cdot dS \wedge \vec{B}$$

Le moment en O de cette force élémentaire est :

$$d\vec{\Gamma}_O = \vec{OM} \wedge d\vec{f} = \vec{OM} \wedge (\vec{j} \cdot dS \wedge \vec{B})$$

ou :

$$d\vec{\Gamma}_O = (\vec{OM} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{j} \cdot dS - (\vec{OM} \cdot \vec{j} \cdot dS) \cdot \vec{B}$$

Les vecteurs \vec{OM} et \vec{B} étant perpendiculaires, ceci se réduit à :

$$d\vec{\Gamma}_O = -(\vec{OM} \cdot \vec{j} \cdot dS) \cdot \vec{B}$$

Le couple $\vec{\Gamma}_O$ exercé sur le disque est donc :

$$\vec{\Gamma}_O = -\vec{B} \cdot \iint_S \vec{OM} \cdot \vec{j} \cdot dS,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface du disque. Repérons sur le disque la position du point courant par ses coordonnées polaires r et θ , l'intégrale ci-dessus peut se mettre sous la forme ($\vec{OM} = \vec{r}$) :

$$\vec{\Gamma}_O = -\vec{B} \cdot \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \vec{OM} \cdot \vec{j} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

ou :

$$\vec{\Gamma}_O = -\vec{B} \cdot \int_{r=0}^{r=R} r \cdot dr \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \vec{j} \cdot r \cdot d\theta$$

L'intégrale $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \vec{j} \cdot \vec{r} \cdot d\theta$ n'est autre que le flux de \vec{j} sortant du cercle de centre O et de rayon r , elle est donc égale (par définition même de \vec{j}) à

l'intensité du courant sortant de ce cercle, c'est-à-dire à I si le régime permanent est atteint :

$$\Gamma_0 = - \vec{B} \cdot \int_{r=0}^{r=R} I \cdot r \cdot dr$$

ou :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_0 = - \frac{IR^2}{2} \cdot \vec{B}}$$

7-9*. — Un barreau aimanté d'axe vertical $z'z$ est coiffé par une boîte cylindrique conductrice de même axe pouvant tourner librement autour de cet axe; cette boîte est fermée à sa partie supérieure et ouverte à sa partie inférieure; ses bords inférieurs plongent dans une rigole circulaire contenant du mercure. Un courant électrique d'intensité I arrive au centre O du disque supérieur de la boîte et s'écoule par les bords inférieurs. Le flux magnétique total qui traverse la boîte étant Φ , calculer le couple qui s'exerce sur la boîte.

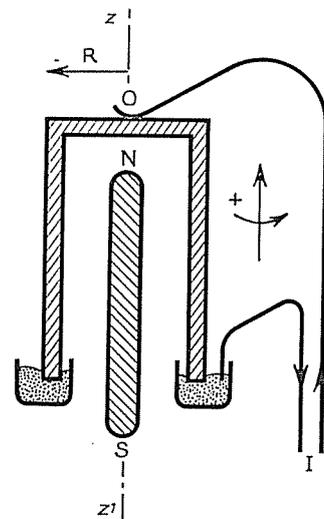


FIG. 7-9.

INDICATIONS. — Du fait de la présence de l'aimant, on ne peut pas assurer que les lignes de courant sont radiales (sur la face supérieure du cylindre), ni verticales (sur la face latérale). On peut cependant tirer certaines conclusions de la symétrie du système physique étudié. Comme d'autre part le flux de la densité surfacique de courant \vec{j} (cf problèmes 7-3 et 7-8) sortant d'une courbe fermée (tracée sur le cylindre) entourant O est I en régime permanent, on montrera que :

- d'une part, sur la face supérieure, la composante radiale \vec{j}_r de \vec{j} a pour module $\frac{I}{2\pi r}$ à la distance r de O ;
- d'autre part, sur la face latérale, la composante verticale \vec{j}_z de \vec{j} a pour module: $\frac{I}{2\pi R}$, où R est le rayon du cylindre.

— SOLUTION —

Quand un courant électrique d'intensité I arrive au centre O du disque supérieur et repart par les bords inférieurs, les lignes de courant ont sur la surface du cylindre une certaine répartition caractérisée par la valeur de la densité surfacique de courant \vec{j} en chaque point de la surface de la boîte cylindrique.

Le système matériel étudié est invariant par une rotation quelconque autour de $z'z$, ce qui permet de conclure que :

- Le moment en O du torseur des forces exercées sur la boîte cylindre est porté par $z'z$: c'est le couple $\vec{\Gamma}$ cherché, nous en calculerons la mesure algébrique Γ .
- La résultante \vec{F} de ce même torseur est portée par $z'z$ également (à moins qu'elle ne soit nulle).
- La répartition de \vec{j} sur le cylindre est également invariante par une rotation quelconque autour de $z'z$.

Soit c une courbe fermée tracée sur la surface du cylindre et entourant O (aucune autre limitation n'est imposée à c : cette courbe peut être tout entière comprise sur le disque supérieur ou sur la paroi latérale, elle peut tout aussi bien chevaucher un nombre quelconque de fois le cercle qui les sépare). En régime permanent, la densité surfacique de charges a une certaine répartition indépendante du temps, et l'intensité du courant sortant de c est I , or l'intensité sortant de c est par définition le flux de \vec{j} sortant de c :

$$I = \oint_c \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot ds, \quad (1)$$

où ds est l'élément d'arc sur la courbe c , et \vec{n} le vecteur unitaire normal sortant de c (vecteur normal à c mais tangent à la surface sur laquelle est tracée c). Convenons de représenter points et vecteurs par leurs coordonnées cylindriques r, θ et z ; nous avons signalé ci-dessus que \vec{j} n'est fonction que de r et z .

— Choisissons par exemple comme courbe c un cercle de centre O et de rayon r tracé sur le disque supérieur; la relation (1) s'écrit :

$$I = + 2\pi r \cdot j_r$$

— Choisissons maintenant comme courbe c un cercle horizontal (d'axe $z'z$ et de rayon R) tracé sur la paroi latérale; la relation (1) s'écrit :

$$I = - 2\pi R \cdot j_z$$

Le couple Γ cherché est défini par une intégrale de surface :

$$\Gamma = \vec{k} \cdot \iint_{\text{surface de la boîte}} \vec{OM} \wedge (\vec{j} \cdot dS \wedge \vec{B}),$$

où \vec{k} désigne le vecteur unitaire choisi sur $z'z$, M le point courant sur la surface de la boîte, et dS l'élément de surface entourant M . Il est commode pour le calcul de distinguer dans la relation ci-dessus les contributions respectives Γ_1 et Γ_2 du disque supérieur et de la paroi latérale.

1° Calcul de Γ_1 (disque supérieur). — Introduisant le vecteur élément de surface orienté \vec{dS} , nous pouvons écrire, sur le disque supérieur :

$$\vec{k} \cdot dS = \vec{dS},$$

ce qui permet d'écrire Γ_1 sous la forme :

$$\Gamma_1 = \iint_{\text{disque supérieur : } \mathcal{G}_1} \vec{dS} \cdot [\vec{OM} \wedge (\vec{j} \wedge \mathbf{B})]$$

Utilisant les propriétés du produit mixte, nous écrivons :

$$\Gamma_1 = \iint_{\mathcal{G}_1} \vec{OM} \cdot [(\vec{j} \wedge \mathbf{B}) \wedge \vec{dS}]$$

ou :

$$\Gamma_1 = \iint_{\mathcal{G}_1} \vec{OM} \cdot [(\vec{j} \cdot \vec{dS}) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \vec{dS}) \cdot \vec{j}]$$

Les vecteurs \vec{j} et \vec{dS} sont perpendiculaires, le terme $\mathbf{B} \cdot \vec{dS}$ est l'élément $d\Phi_1$ du flux Φ_1 de \mathbf{B} à travers le disque supérieur, et $\vec{OM} \cdot \vec{j} = r \cdot j_r$; nous avons vu que, sur le disque supérieur, $r \cdot j_r = \frac{I}{2\pi}$, donc :

$$\Gamma_1 = -\frac{I\Phi_1}{2\pi}$$

2° Calcul de Γ_2 (paroi latérale). — Soit H la projection sur $z'z$ du point courant M de la paroi latérale; nous pouvons remplacer \vec{OM} par la somme vectorielle $\vec{OH} + \vec{HM}$, donc écrire Γ_2 sous la forme :

$$\Gamma_2 = \vec{k} \cdot \iint_{\text{paroi latérale : } \mathcal{G}_2} \vec{OH} \wedge \vec{j} \cdot dS \wedge \mathbf{B} + \vec{k} \iint_{\text{paroi latérale : } \mathcal{G}_2} \vec{HM} \wedge \vec{j} \cdot dS \wedge \mathbf{B}$$

La première intégrale est nulle car les vecteurs \vec{k} et \vec{OH} sont colinéaires. On peut d'autre part écrire sur la paroi latérale, faisant intervenir le vecteur élément de surface orienté \vec{dS} :

$$\vec{HM} \cdot dS = R \cdot \vec{dS},$$

ce qui permet d'écrire Γ_2 sous la forme :

$$\Gamma_2 = \vec{k} \cdot \iint_{\mathcal{G}_2} R \cdot \vec{dS} \wedge \vec{j} \wedge \mathbf{B}$$

ou :

$$\Gamma_2 = \iint_{\mathcal{G}_2} R \cdot \vec{k} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \vec{dS}) \cdot \vec{j} - (\vec{j} \cdot \vec{dS}) \cdot \mathbf{B}]$$

Les vecteurs \vec{j} et $d\vec{S}$ sont perpendiculaires, le terme $\vec{B} \cdot d\vec{S}$ est l'élément $d\Phi_2$ du flux Φ_2 de \vec{B} à travers la surface latérale du cylindre, et $\vec{k} \cdot \vec{j}$ est la composante j_x de \vec{j} , dont nous avons vu qu'elle était égale, sur la paroi latérale, à $-\frac{I}{2\pi R}$. Il vient ainsi :

$$\Gamma_2 = -\frac{I\Phi_2}{2\pi}$$

Le couple cherché est la somme de Γ_1 et Γ_2 , nous le trouvons donc égal à :

$$\Gamma = -\frac{I\Phi}{2\pi},$$

où Φ est le flux magnétique total qui traverse la boîte conductrice.

7-10*. POMPE ÉLECTROMAGNÉTIQUE. — Une conduite cylindrique, dont la section droite est rectangulaire de dimensions a et b , plonge verticalement dans la surface libre d'un métal liquide de masse volumique μ . Les parois de la conduite

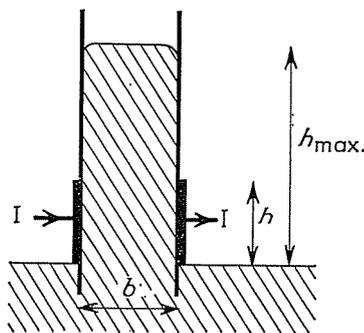


FIG. 7-10.

sont faites d'une matière isolante, mais du niveau du liquide jusqu'à une hauteur h les parois opposées de largeur a sont remplacées par deux électrodes métalliques planes de largeur a et de hauteur h . Dans toute la région de l'espace où se déroule l'expérience, l'induction magnétique \vec{B} est uniforme, horizontale et parallèle aux électrodes planes.

A quelle hauteur h_{\max} s'élève le liquide quand on fait passer entre les électrodes un courant électrique d'intensité I ?

Application numérique : $a = 1 \text{ cm}$, $I = 200 \text{ A}$, $B = 1 \text{ tesla}$, $\mu = 13,6 \text{ g/cm}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

INDICATIONS. — Le problème est trivial si l'on admet que le vecteur densité de courant est uniforme dans l'espace compris entre les électrodes, et nul en dehors (analogie avec un condensateur plan). Il n'est cependant pas acceptable de négliger ici les effets de bord, du fait de la présence de la grande masse conductrice que forme le liquide autour et en dessous de la conduite (calculer la résistance comme résistance d'un parallélépipède de longueur b et de surface de base $S = a \cdot h$ n'aurait pas grand sens). Il convient donc de prouver que le module de la force de Laplace s'exerçant sur la colonne de liquide est IbB , même si la répartition des lignes de courants est quelconque.

— SOLUTION —

En l'absence de courant électrique, le liquide se trouve dans un état d'équilibre, sous l'action de forces telles que la pesanteur, les forces de pression atmosphérique, les forces de tension superficielle, etc. Ces forces ne se modifieront pas si l'on fait passer le courant électrique, le liquide sera soumis à deux forces nouvelles : la force de Laplace et le poids de la colonne liquide si celle-ci s'élève d'une hauteur h' au-dessus de son niveau initial, nous ne nous occuperons plus que de ces deux forces \vec{F} et \vec{P} .

La résultante \vec{F} des forces de Laplace exercées sur les différents éléments de volume constituant le liquide est égale à :

$$\vec{F} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{i} \cdot d\vec{\tau} \wedge \vec{B},$$

où l'intégrale triple est étendue à tout le volume \mathcal{V} du liquide où i n'est pas nul. Nous ne connaissons rien de la répartition des lignes de courant, sinon qu'elle doit respecter les symétries du système, donc en particulier qu'une ligne de courant issue d'un point d'une électrode aboutit nécessairement au point en regard sur l'autre électrode. Certaines lignes de champ pénètrent dans le liquide situé en dehors de la conduite, mais il est naturel de penser que les forces de Laplace exercées à ce niveau (ou tout au moins leurs composantes verticales) sont transmises (par l'intermédiaire des forces de pression) à la colonne liquide comprise dans la conduite. Si le liquide est monté d'une hauteur h' dans la conduite, nous pourrions considérer cette colonne liquide comme un système mécanique soumis à la force \vec{F} et à son poids \vec{P} . L'induction magnétique \vec{B} étant uniforme, la force \vec{F} peut s'écrire :

$$\vec{F} = \left(\iiint_{\mathcal{V}} \vec{i} \cdot d\vec{\tau} \right) \wedge \vec{B}$$

La position d'un point du liquide est déterminée quand on sait sur quelle ligne de courant (ou ligne de champ : $\vec{E} = \rho \cdot \vec{i}$) et sur quelle surface équipotentielle il est situé. Les surfaces équipotentielles et les lignes de courant sont orthogonales, et \vec{i} est parallèle aux lignes de courant; appelant \vec{dl} et \vec{dS} l'élément d'arc vectoriel sur les lignes de courant et le vecteur élément de surface équipotentielle orientée, nous pouvons écrire (compte tenu de ce que les vecteurs \vec{i} , \vec{dl} , \vec{dS} , sont parallèles):

$$\vec{i} \cdot d\vec{\tau} = \vec{i}(\vec{dS} \cdot \vec{dl}) = (\vec{i} \cdot \vec{dS}) \cdot \vec{dl},$$

et calculer l'intégrale triple comme l'intégrale curviligne d'une intégrale de surface :

$$\vec{F} = \left(\int_{\text{ligne de courant}} \vec{dl} \cdot \int_{\text{équipotentielle}} \vec{i} \cdot \vec{dS} \right) \wedge \vec{B}$$

En régime permanent, le flux de i traversant une surface équipotentielle est I , et la force \vec{F} s'écrit :

$$\vec{F} = I \cdot \left(\int \vec{dl} \right) \cdot \wedge \vec{B}$$

ce qui montre bien que \vec{F} est verticale de module IbB , c'est-à-dire qu'elle a la même expression que si la densité de courant \vec{i} était uniforme :

Suivant le sens du courant, la force \vec{F} est dirigée vers le haut ou vers le bas, nous noterons positivement l'intensité I si le sens du courant est tel que \vec{F} soit dirigée vers le haut :

$$|F| = |I|b \cdot B \quad \text{et} \quad |P| = \mu \cdot (ab \cdot h') \cdot g,$$

où h' désigne la hauteur de la colonne considérée. On observe que $|F|$ est supérieur ou inférieur à $|P|$ selon que h' est inférieur ou supérieur à $\frac{|I|B}{\mu g a}$.

Si I est positif, le liquide monte donc jusqu'à cette hauteur et s'y stabilise, alors qu'il reste au niveau initial si I est négatif :

$I \leq 0 \Rightarrow h_{\max} = 0$
$I \geq 0 \Rightarrow h_{\max} = \frac{I \cdot B}{\mu g a}$

Application numérique :

$I = 2 \cdot 10^3 \text{ A}$	$\Rightarrow h_{\max} = \frac{2}{0,136 \cdot 9,81} \simeq 1,5 \text{ m}$
$B = 1 \text{ T}$	
$\mu = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	
$g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$	
$a = 10^{-2} \text{ m}$	

7-11. COURANTS AMPÉRIENS. — *La structure d'une matière aimantée est telle qu'un élément de volume $d\vec{v}$ entourant un point quelconque M du milieu soit assimilable à un dipôle magnétique élémentaire de moment :*

$$d\vec{m} = \vec{J}(M) \cdot d\vec{v},$$

le vecteur $\vec{J}(M)$ étant défini en tout point du milieu (vecteur intensité d'aimantation).

1° Montrer qu'une portion de matière aimantée crée la même induction magnétique que des courants répartis dans tout le volume \mathcal{V} occupé par l'aimant

[densité volumique de courant : i_a], ainsi que sur la surface \mathcal{S} limitant cette portion [densité surfacique de courant : \vec{j}_a], les densités \vec{i}_a et \vec{j}_a étant égales à :

$$i_a = \text{rot}(\vec{j}) \quad \text{et} \quad \vec{j}_a = \vec{j} \wedge \vec{n},$$

où \vec{n} désigne le vecteur unitaire sortant de la surface \mathcal{S} au point considéré.

2° On définit le vecteur excitation magnétique \vec{H} par la relation :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} - \vec{j}$$

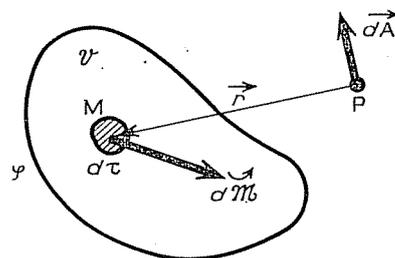


FIG. 7-11.

Montrer que la composante tangentielle de \vec{H} se conserve à la traversée de la surface d'un aimant qui n'est parcouru par aucun courant réel. Cas général?

3° Milieux magnétiques linéaires, homogènes et isotropes. — L'intensité d'aimantation $\vec{j}(M)$ définie ci-dessus est, dans le cas de certains milieux, proportionnelle à l'excitation magnétique :

$$\vec{j}(M) = \chi_m \cdot \vec{H}(M),$$

où χ_m est une constante caractéristique du milieu (susceptibilité magnétique). Montrer que toutes les formules électromagnétiques valables dans le vide sont transposables à un tel milieu magnétique (sans tenir compte des dipôles magnétiques constituant le milieu), à condition d'y remplacer le coefficient μ_0 par une autre constante μ , caractéristique du milieu, que l'on calculera en fonction de χ_m .

INDICATIONS. — On pourra remarquer et mettre à profit le parallélisme existant entre ce problème et celui où est étudiée la polarisation des diélectriques (I-11, page 21). On pourra démontrer préalablement la formule d'analyse vectorielle suivante :

$$\iint_{\mathcal{S}} d\vec{S} \wedge \vec{a} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{rot} \vec{a} \cdot d\vec{v}.$$

— SOLUTION —

1° Il est équivalent de connaître en tout point l'induction magnétique \vec{B} ou le potentiel vecteur \vec{A} (l'induction est calculable par : $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, et réciproquement, compte tenu de : $\text{div} \vec{A} = 0$); nous calculerons plutôt le potentiel vecteur, exprimé par des formules plus simples.

Le potentiel vecteur que crée en un point quelconque P un dipôle magnétique

élémentaire (de moment magnétique : $d\vec{\mathcal{M}}$) placé au point M, est :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{MP}}{MP^3}$$

(cf. exercice 7-4). Posant : $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$, ceci peut s'écrire :

$$d\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{\mathcal{J}} \wedge \vec{r}}{r^3} \cdot d\mathcal{V}$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}(P)$ créé au point P par l'ensemble de la matière aimantée est donc :

$$\vec{A}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_{\mathcal{V}_0} \frac{\vec{\mathcal{J}} \wedge \vec{r}}{r^3} \cdot d\mathcal{V}$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}'(P)$ que créerait au même point une distribution volumique (densité : i_a) et surfacique (densité : \vec{j}_a) de courants, est :

$$\vec{A}'(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_{\mathcal{V}_0} \frac{i_a}{r} \cdot d\mathcal{V} + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{j}_a}{r} \cdot d\mathcal{S}$$

L'énoncé proposant pour les densité i_a et \vec{j}_a les densités :

$$\vec{i}_a = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\mathcal{J}}) \quad \text{et} \quad \vec{j}_a = \vec{\mathcal{J}} \wedge \vec{n},$$

la formule ci-dessus s'écrit, compte tenu de ce que : $\vec{n} \cdot d\mathcal{S} = d\vec{\mathcal{S}}$:

$$\vec{A}'(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[\iiint_{\mathcal{V}_0} \frac{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\mathcal{J}})}{r} \cdot d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{\mathcal{J}}}{r} \wedge d\vec{\mathcal{S}} \right].$$

Cherchons à exprimer sous forme d'une intégrale triple l'intégrale de surface :

$$\vec{b} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{a} \wedge d\vec{\mathcal{S}};$$

multipliant \vec{b} par un vecteur unitaire quelconque \vec{u} , il vient :

$$\vec{u} \cdot \vec{b} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{u} \cdot (\vec{a} \wedge d\vec{\mathcal{S}}) = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{u} \wedge \vec{a}) \cdot d\vec{\mathcal{S}}$$

par application du théorème d'Ostrogradsky, il vient :

$$\vec{u} \cdot \vec{b} = \iiint_{\mathcal{V}_0} \text{div}(\vec{u} \wedge \vec{a}) \cdot d\mathcal{V} = - \iiint_{\mathcal{V}_0} u \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\mathcal{V},$$

ce qui montre que :

$$\vec{b} = - \iiint_{\mathcal{V}_0} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\mathcal{V}$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}'(P)$ peut ainsi s'exprimer sous la forme :

$$\vec{A}'(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[\iiint_{V_0} \frac{\vec{\text{rot}}(\vec{j})}{r} \cdot d\tau - \iint_{S_0} \vec{\text{rot}}\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) \cdot d\vec{\tau} \right]$$

Or :

$$\vec{\text{rot}}(a \cdot \vec{b}) = a \cdot \vec{\text{rot}} \vec{b} + \vec{\text{grad}} a \wedge \vec{b},$$

c'est-à-dire ici :

$$\vec{\text{rot}}\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) = \frac{1}{r} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{j}) + \frac{-\vec{r}}{r^3} \wedge \vec{j}$$

Il vient donc :

$$\vec{A}'(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_{V_0} \frac{\vec{r} \wedge \vec{j}}{r^3} \cdot d\tau$$

Les potentiels vecteurs $\vec{A}(P)$ et $\vec{A}'(P)$ coïncident ainsi en tout point P, ce qui démontre la proposition indiquée par l'énoncé.

2° L'induction magnétique \vec{B} créée par l'aimant, égale au rotationnel du potentiel vecteur, est égale à celle que créeraient les courants de densités i_a (volumique) et \vec{j}_a (surfactive); elle vérifie donc les relations locales suivantes.

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{i}_a & \text{au sein de la matière aimantée} \\ \Delta \vec{B}_t = \mu_0 \cdot \vec{j}_a \wedge \vec{n} & \text{à la traversée de la surface de l'aimant.} \end{cases}$$

Il est naturel de poser : $\vec{j}(M) = \vec{0}$ à l'extérieur de l'aimant (absence de dipôles). La composante tangentielle de \vec{j} sur la surface de l'aimant est nulle à l'extérieur et vaut, juste au-dessous de cette surface :

$$\vec{j}_t(M) = \vec{j}(M) - (\vec{j}(M) \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n},$$

où M est un point quelconque de la surface \mathcal{S} , et \vec{n} le vecteur unitaire normal en ce point. De la définition du vecteur excitation magnétique :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j},$$

nous déduisons la variation $\Delta \vec{H}_t$ de la composante tangentielle de l'excitation à la traversée de la surface de l'aimant (de l'intérieur vers l'extérieur) :

$$\Delta \vec{H}_t = \frac{\Delta \vec{B}_t}{\mu_0} - [\vec{0} - \vec{j}(M) + (\vec{j}(M) \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}]$$

or :

$$\Delta \vec{B}_t = \mu_0 \cdot \vec{j}_a(M) \wedge \vec{n} = \mu_0 \cdot (\vec{j} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n} = \mu_0 \cdot [(\vec{j} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} - \vec{j}],$$

ce qui montre que :

$$\Delta \vec{H}_t = 0$$

en posant :

$$\mu = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m)$$

Les propriétés locales de l'induction magnétique \vec{B} sont alors caractérisées par :

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{rot} (\vec{B}) = \mu \cdot \vec{i}$
$\Delta \vec{B}_n = \vec{0}$	$\Delta \vec{B}_t = \mu \cdot \vec{j} \wedge \vec{n}$

relations identiques à celles démontrées dans le vide, au remplacement près de la constante universelle μ_0 par la constante μ (caractéristique du milieu). Il en est de même pour les diverses conséquences de ces équations, par exemple pour la loi de Biot et Savart, ou pour le théorème d'Ampère.

REMARQUES. — 1° La similitude entre le problème traité ici (matière aimantée) et celui traité pages 21 à 23 (matière polarisée) est évidente; il est à noter cependant que si nous faisons correspondre ici \vec{B} à \vec{E} et \vec{H} à \vec{D} , d'autres présentations associent par contre \vec{H} à \vec{E} et \vec{B} à \vec{D} ; d'autre part, les constantes χ_m et χ_e ne se correspondent pas formellement, ni les vecteurs \vec{j} et \vec{P} , cela tient en partie à des questions d'usage, en partie au fait que les phénomènes magnétostatiques et électrostatiques ne sont pas entièrement comparables (\vec{E} est un champ newtonien, \vec{B} ne l'est pas).

2° L'excitation magnétique \vec{H} créée par les courants ampériens fictifs est un champ de vecteurs newtonien ($\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0}$), on peut donc lui appliquer l'étude faite dans le problème 1-11, ce qui conduit à introduire des « masses magnétiques », correspondant aux charges électriques; ces masses magnétiques constituent un fort élégant et pratique moyen de calcul, mais ne semblent correspondre à aucune réalité physique intrinsèque, au contraire des charges électriques.

8. PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DÉPENDANT DU TEMPS. INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE. AUTO-INDUCTION. ACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES ENTRE CIRCUITS

8-1. — Sur deux rails rectilignes parallèles horizontaux XX' et YY' , de résistances négligeables, sont placées deux barres mobiles horizontales AA_1 et

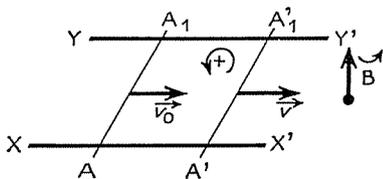


FIG. 8-1.

$A'A_1'$ perpendiculaires aux rails. La distance des rails est $l = 10$ cm, la résistance de la partie de chaque barre comprise entre les deux rails est $R = 1$ ohm, chaque barre a une masse $m = 10$ g.

L'ensemble étant soumis à l'action d'un champ magnétique vertical uniforme d'induction $B = 1$ tesla, on déplace la barre

AA_1 , en l'approchant de $A'A_1'$, avec une vitesse constante v_0 normale à AA_1 . Étudier le mouvement de $A'A_1'$.

Application numérique : $v_0 = 20$ cm. s^{-1} .

— SOLUTION —

Une orientation sur le contour $AA'A_1'A_1$ ayant été choisie (par exemple de A vers A'), nous écrivons le flux d'induction Φ traversant le circuit $AA'A_1'A_1$:

$$\Phi = B.l.AA'$$

Il apparaît au cours du mouvement une force électromotrice E dans le circuit, et cette f.é.m. est égale à :

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl \cdot \frac{dAA'}{dt} = -Bl.(v - v_0),$$

où v est la vitesse de la barre $A'A_1'$ (comptée positivement si elle est de même sens que la vitesse imposée à AA_1). Négligeant (faute d'information supplémentaire) les phénomènes d'auto-induction, nous écrivons qu'il apparaît un courant d'intensité :

$$I = \frac{E}{2R} = -\frac{Bl}{2R} \cdot (v - v_0)$$

La barre se trouve soumise à l'action de la force de Laplace \vec{F} , dont la mesure algébrique est égale à :

$$F = I/B = -\frac{B^2 l^2}{2R} \cdot (v - v_0)$$

Cette mesure algébrique est d'autre part (relation fondamentale de la mécanique) égale à :

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

La vitesse cherchée v est ainsi solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{2Rm} \cdot v - \frac{B^2 l^2}{2Rm} \cdot v_0 = 0$$

Si la barre $A'A_1'$ est initialement immobile, il vient :

$$v = v_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{2Rm} \cdot t} \right)$$

Application numérique :

$$\left. \begin{array}{l} B = 1 \text{ T} \\ R = 1 \Omega \\ l = 10^{-1} \text{ m} \\ m = 10^{-2} \text{ kg} \\ v_0 = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow v = 0,2 \cdot (1 - e^{-0,5 \cdot t}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

8-2*. POMPE ÉLECTROMAGNÉTIQUE. — *On considère la pompe électromagnétique décrite dans l'exercice 7-10 (page 158). Le liquide se déplace dans la conduite avec une vitesse v . Le circuit électrique extérieur, qui se ferme dans le liquide grâce aux électrodes, a une résistance totale R et comporte un générateur de f.é.m. constante E . Exprimer, en fonction des données, la pression p d'origine électromagnétique exercée par la pompe sur le liquide.*

On montrera que p s'annule pour une certaine vitesse v_0 ; interpréter les cas : $v > v_0$ et $v < 0$.

INDICATIONS. — Le milieu conducteur étant mobile dans une région de l'espace où règne un champ magnétique d'induction \vec{B} , il apparaît entre les électrodes en champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B},$$

et la force électromotrice totale du circuit est, non pas E , mais $E + e$, où e est la circulation du champ électromoteur le long d'une ligne de courant joignant les deux électrodes. On peut également interpréter ce fait en faisant intervenir le flux coupé par le liquide conducteur en mouvement (ces deux méthodes sont équivalentes).

— SOLUTION —

Nous avons vu lors de la résolution de l'exercice 7-10 que le liquide était soumis à une force de Laplace parallèle à l'axe de la conduite, et de module :

$$F = I b B$$

Nous noterons positivement la vitesse v du liquide si elle a le même sens que \vec{F} , négativement dans le cas contraire. Au sein du liquide compris entre les électrodes règne le champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

La portion de circuit comprise entre les électrodes est donc le siège d'une force électromotrice e égale à la circulation du champ électromoteur le long d'une ligne de courant joignant les deux électrodes :

$$e = -bv.B$$

L'intensité I du courant dans le circuit est donc :

$$I = \frac{E + e}{R} = \frac{1}{R} \cdot (E - bv.B),$$

ce qui permet d'exprimer la force de Laplace F . Si l'on considère la colonne liquide comme formée de plusieurs colonnes juxtaposées, on peut dire que la force F est la somme des forces de Laplace appliquées aux différentes colonnes et ces forces composantes sont proportionnelles aux surfaces des sections droites des colonnes composantes correspondantes. Pour cette raison, mais surtout pour des raisons de commodité et d'habitude, on introduit la notion de *pression d'origine électromagnétique* :

$$p = \frac{F}{ab} = I \frac{B}{a}$$

Il vient ainsi :

$$p = \frac{B}{aR} \cdot (E - bv.B)$$

Cette pression p est une fonction décroissante de v , qui s'annule pour $v = v_0$, où :

$$v_0 = \frac{E}{b \cdot B}$$

Le cas $v > v_0$ se produit quand une autre pompe (de nature quelconque) en série force le liquide à dépasser la vitesse v_0 . La pompe étudiée freine alors le liquide ($p < 0$).

Le cas $v < 0$ se produit quand une autre pompe en opposition confère au liquide une vitesse négative, la pompe étudiée freine le liquide, encore plus efficacement que dans le cas précédent (pour une même valeur de $|v|$).

8-3. — Un fil rectiligne vertical XX' est placé dans le plan d'un cadre carré vertical $ABCD$ de côté $a = 10$ cm. Le côté vertical AB le plus proche du fil XX' est situé à la distance $d = 5$ cm de celui-ci. Calculer l'inductance mutuelle de l'ensemble fil-cadre.

— SOLUTION —

Supposons qu'un courant électrique d'intensité I parcourt le fil XX' , et calculons le flux à travers le cadre de l'induction magnétique créée par ce courant. L'induction magnétique \vec{B} en un point du cadre situé à la distance r du fil est normale au plan du cadre et a pour module :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Le flux de \vec{B} à travers le cadre est :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r=d}^{r=d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r} \cdot a \cdot dr,$$

c'est-à-dire :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot a \cdot \text{Log} \frac{d+a}{d}.$$

L'inductance mutuelle de l'ensemble fil-cadre est donc :

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \cdot \text{Log} \frac{d+a}{d}$$

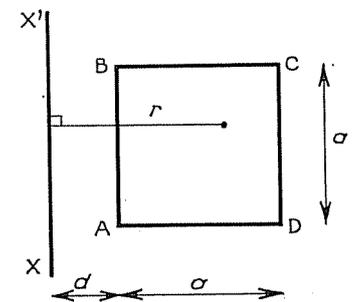


FIG. 8-3.

Application numérique :

$$\left. \begin{array}{l} \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ S.I.} \\ a = 10^{-1} \text{ m} \\ d = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow M = 2 \cdot \text{Log } 3 \cdot 10^{-8} \simeq 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ henry.}$$

8-4*. — Une bobine torique comporte N spires. Chaque spire, ABCD par exemple, est de forme rectangulaire et a pour dimensions : $AB = CD = a$,

$AD = BC = b$. Chaque spire se déduit de la précédente par une rotation d'angle $2\pi/N$ autour d'un axe Δ du plan de la spire, parallèle à AD et situé à la distance R de ce côté. Les spires sont reliées entre elles et la bobine est fermée sur elle-même.

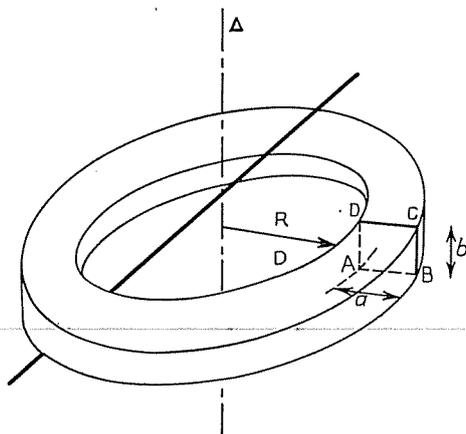


FIG. 8-4.

1° Calculer l'auto-inductance de cette bobine.

2° Un fil rectiligne illimité coïncide avec l'axe Δ ; calculer l'inductance mutuelle de l'ensemble fil-bobine. Que devient cette inductance mutuelle lorsque le fil

rectiligne, tout en traversant toujours la bobine, ne coïncide plus avec l'axe Δ ?

INDICATIONS. — 1° Le système physique étudié est invariant par toute rotation d'angle $k \frac{2\pi}{N}$ ($k \in \mathbb{Z}$) autour de Δ , il en est de même pour l'induction magnétique \vec{B} créée par la bobine. Si le nombre N est grand, nous pourrions admettre que l'induction \vec{B} est invariante par toute rotation (d'angle quelconque) autour de Δ , c'est-à-dire que les lignes d'induction sont des cercles d'axe Δ . Le calcul de \vec{B} par l'application du théorème d'Ampère est alors très facile, et le calcul du flux propre $\Phi_p = L.I$ également.

2° Le calcul de l'inductance mutuelle M de l'ensemble fil-bobine se fait simplement en calculant le flux à travers la bobine de l'induction magnétique créée par un courant électrique circulant le long du fil (cf. exercice précédent). Le fil peut être considéré comme faisant partie d'un circuit se fermant à l'infini, et l'inductance mutuelle M pourrait aussi être calculée par l'intermédiaire du flux, à travers ce circuit, de l'induction créée par un courant circulant dans la bobine.

— SOLUTION —

1° L'induction magnétique \vec{B} créée par un courant circulant dans la bobine n'a pas vraiment la symétrie cylindrique autour de Δ (symétrie que possède-

rait une répartition torique de courants superficiels de densité surfacique constante en module); nous l'admettrons cependant si le nombre N est grand (approximation analogue à celle que l'on fait pour un solénoïde droit formé de N spires). Dans ces conditions, les lignes d'induction sont des cercles d'axe Δ , et l'application du théorème d'Ampère à une ligne d'induction de rayon r donne :

$$2\pi r \cdot B = \begin{cases} \mu_0 \cdot NI & \text{si la ligne d'induction passe à travers chaque spire,} \\ 0 & \text{si la ligne d'induction ne traverse aucune spire,} \end{cases}$$

d'où :

$$B = \begin{cases} \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} & \text{en un point intérieur au tore, situé à la distance } r \text{ de } \Delta, \\ 0 & \text{en tout point extérieur au tore.} \end{cases}$$

Le flux magnétique traversant une spire est donc :

$$\varphi_p = \int_{r=R}^{r=R+a} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \cdot b \cdot dr = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot NI \cdot b \cdot \text{Log} \frac{R+a}{R}$$

Le flux propre Φ_p traversant toute la bobine est : $\Phi_p = N \cdot \varphi_p$, et l'auto-inductance cherchée L est par définition le rapport Φ_p/I :

$$L = N \frac{\Phi_p}{I} = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \cdot \text{Log} \frac{R+a}{R}$$

2° Si le fil est parcouru par un courant d'intensité I , il crée en un point distant de r une induction magnétique \vec{B} orthoradiale de module :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Le flux de \vec{B} traversant une spire est :

$$\varphi = \int_{r=R}^{r=R+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot b \cdot dr = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot Ib \cdot \text{Log} \frac{R+a}{R}$$

Le flux de \vec{B} traversant toute la bobine est : $\Phi = N \cdot \varphi$, et l'inductance mutuelle de l'ensemble fil-bobine est par définition le rapport Φ/I :

$$M = N \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 Nb}{2\pi} \cdot \text{Log} \frac{R+a}{R}$$

On peut considérer le fil comme faisant partie d'un circuit plan se fermant à l'infini, et la bobine découpe sur ce plan une surface rectangulaire identique à la surface d'une spire. Si un courant d'intensité I circule dans la bobine,

nous savons que l'induction \vec{B} créée est nulle à l'extérieur du tore, le flux de \vec{B} à travers le circuit plan est :

$$\varphi = \frac{\mu_0 N b I}{2\pi} \cdot \text{Log} \frac{R+a}{R}$$

Ce flux est le même tant que la bobine traverse le circuit plan, il ne dépend donc pas de la forme du circuit, et en particulier de la position du fil tant que celui-ci traverse la bobine : l'inductance mutuelle M ne dépend donc pas en fait de la position du fil.

Il est facile de voir que l'inductance mutuelle de l'ensemble constitué par la bobine torique et un circuit filiforme s'enroulant autour du tore est nM , où n est le nombre de tours qui fait le circuit filiforme autour du tore, et ce, quelle que soit par ailleurs la forme du circuit filiforme.

8-5*. — On considère le solénoïde constitué par un ressort vertical de raideur k , de longueur l_0 et comprenant N spires de surface S , et dont l'extrémité supérieure est fixe. Un poids étant suspendu à l'extrémité inférieure, le ressort s'allonge de l_0 à l .

On fait passer un courant continu d'intensité I dans le solénoïde, quelle est la nouvelle longueur l' du ressort ?

Application numérique : $k = 0,628 \text{ N/m}$, $S = 10 \text{ cm}^2$, $N = 100$, $l_0 = 10 \text{ cm}$, $l = 20 \text{ cm}$, $I = 10 \text{ A}$.

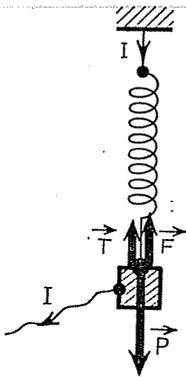


FIG. 8-5.

INDICATIONS. — Le ressort a atteint initialement une longueur l telle que le poids et la force de tension s'équilibraient. Quand on fait passer un courant d'intensité I , il apparaît des forces intérieures électromagnétiques dont l'effet est d'augmenter l'auto-inductance du circuit : le ressort atteint une nouvelle longueur l' telle que le poids (qui n'a pas

changé), la tension (proportionnelle à l'allongement) et ces forces électromagnétiques s'équilibrent.

Rappelons que l'énergie électromagnétique emmagasinée par le circuit est :

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

La force électromagnétique exercée sur l'extrémité inférieure est :

$$\vec{F} = + (\text{grad } W)_z$$

la dérivée étant prise à intensité I constante (Ceci se démontre, rappelons-le, en écrivant

que la variation de l'énergie W au cours d'un déplacement à intensité constante est la somme du travail mécanique fournie par l'opérateur et du travail électrique supplémentaire dépensé pour maintenir l'intensité I constante).

— SOLUTION —

Orientons la verticale, par exemple vers le bas. Si la longueur du ressort est x , la force de tension exercée sur un corps à l'extrémité inférieure a pour mesure algébrique :

$$T = -k.(x - l_0)$$

En l'absence de courant, la longueur du ressort était égale à l , c'est que le poids imposé et la force de tension s'équilibraient; la mesure algébrique du poids est donc :

$$P = +k.(l - l_0)$$

La nouvelle longueur du ressort à l'équilibre étant l' , la force de tension a alors pour mesure algébrique :

$$T = -k.(l' - l_0)$$

En présence de courant, l'extrémité inférieure du ressort se trouve soumise à une force supplémentaire dont la mesure algébrique est :

$$F = + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{I, x=l'} = \frac{I^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{x=l'}$$

où W représente l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit, et la dérivée partielle est prise à intensité constante.

Comme $L = \mu_0 \cdot \frac{N^2 S}{l}$,

il vient :

$$F = -\mu_0 \frac{I^2}{2} \cdot \frac{N^2 S}{l'^2}$$

et l'équilibre du ressort (de longueur l') s'écrit :

$$F + P + T = 0$$

c'est-à-dire :

$$-\mu_0 \frac{I^2}{2} \cdot \frac{N^2 S}{l'^2} + k(l - l') = 0$$

ou bien encore :

$$l'^3 - ll'^2 + \mu_0 \frac{I^2 N^2 S}{2k} = 0$$

Application numérique :

$$\left. \begin{array}{l} \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \\ I = 10 \text{ A} \\ N = 10^3 \\ S = 10^{-3} \text{ m}^2 \\ k = 0,628 \text{ Nm}^{-1} \\ l = 0,2 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2k} \simeq 0,001$$

Une solution évidente de :

$$l'^3 - 0,2 \cdot l'^2 + 0,001 = 0$$

est: $l_1 = 0,1 \text{ m}$, les autres solutions sont alors racines de:

$$l'^2 - 0,1 \cdot l' - 0,01 = 0,$$

donc sont :

$$l'_2 = 0,16 \text{ m} \quad \text{et} \quad l'_3 = -0,06 \text{ m}$$

Nous pouvons éliminer *a priori* la solution l'_3 , les deux solutions l'_1 et l'_2 sont physiquement acceptables. La stabilité des équilibres correspondant à ces deux solutions est caractérisée par la première dérivée non nulle de la fonction :

$$f(l) = F(l) + T(l) + P$$

résultante des forces appliquées à l'extrémité du ressort (cette expression n'est valable que pour $l \geq l_0$, le signe de la tension change pour $l < l_0$). Or cette fonction est de la forme :

$$f(l) = -\frac{A}{l^2} - Bl + C$$

où les coefficients A, B, C sont des constantes positives. La fonction $f(l)$ est une fonction croissante puis décroissante de l , donc :

$$\left(\frac{df}{dl} \right)_{l=l_1} > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df}{dl} \right)_{l=l_2} < 0$$

ce qui montre que la valeur l'_1 correspond à un équilibre instable, alors que la valeur l'_2 correspond à un équilibre stable. Nous retiendrons donc seulement la solution :

$$l' \simeq 0,16 \text{ m}$$

8-6*. CABLE COAXIAL. — Un câble coaxial est formé de deux tubes métalliques d'épaisseurs négligeables, dont les rayons sont R_1 et R_2 respectivement. Le conducteur intérieur est parcouru par un courant d'intensité I , le tube

extérieur servant de fil de retour est parcouru par la même intensité (mais en sens contraire).

1° Calculer l'auto-inductance L_1 du câble par unité de longueur.

2° Calculer la capacité C_1 par unité de longueur.

INDICATIONS. — 1° L'auto-inductance cherchée est par définition le rapport $L_1 = \Phi_1/I$, où Φ_1 est le flux propre par unité de longueur. Le circuit n'étant pas filiforme, nous ne pouvons appliquer la définition habituelle du flux. Le plus simple pour pallier cet inconvénient est de considérer le circuit comme la limite, quand N tend vers l'infini, d'une bobine torique formée de N spires, et où circule un courant d'intensité $i = I/N$; on peut également utiliser la définition plus sophistiquée introduite dans certains cours¹. Une méthode complètement différente consiste à remarquer que l'énergie électromagnétique

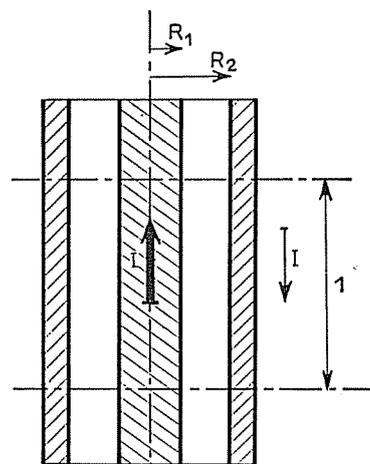


FIG. 8-6.

emmagasinée par unité de longueur est $\frac{1}{2} I^2 L_1$, mais que c'est aussi l'intégrale de surface de la densité volumique d'énergie magnétique, égale à $\bar{w}_m = B^2/2\mu_0$ (intégrale étendue à la surface de section droite comprise entre les deux conducteurs).

2° Le calcul de la capacité par unité de longueur ne pose aucun problème; il est d'ailleurs fait dans tous les cours (*condensateur cylindrique*). Cette capacité par unité de longueur peut aussi être calculée par intégration de la densité volumique d'énergie électrostatique $\bar{w}_e = \epsilon_0 E^2/2$.

— SOLUTION —

1° Le système physique étudié présente la symétrie de révolution autour de l'axe commun Δ des deux cylindres, on peut en conclure que les lignes d'induction sont des cercles d'axe Δ . L'application du théorème d'Ampère à ces lignes d'induction montre que le module B de l'induction est, en un point situé à la distance r de Δ :

$$B = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{si } r > R_2 \end{cases}$$

Le calcul de l'auto-inductance L_1 par unité de longueur peut se faire essentiellement de deux façons différentes :

a) **Calcul direct.** — Pour calculer le flux propre d'induction Φ_1 par unité de longueur, on peut considérer le circuit comme la forme limite, quand N

1. Cf. JOYAL-PROVOST, *Cours d'Électricité*, pages 398-399, Masson et C^{ie}, éd.

tend vers l'infini, d'une bobine torique comprenant N spires filiformes : chacune de ces spires se compose de deux fils rectilignes parallèles à l'axe Δ , l'un situé à la distance R_1 de cet axe, et l'autre (fil de retour) à la distance R_2 ; chaque spire se déduit de la précédente par une rotation d'angle $2\pi/N$ autour de Δ , et il passe un courant d'intensité $i = \frac{I}{N}$ dans la bobine, donc dans chaque spire.

Le flux d'induction par unité de longueur traversant chaque spire composant la bobine a pour limite quand N tend vers l'infini (et i vers 0, le produit Ni restant égal à I) :

$$\varphi_1 = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \cdot dr = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi} \text{Log} \frac{R_2}{R_1},$$

le flux propre par unité de longueur est donc au total :

$$\Phi_1 = N \cdot \varphi_1 = \frac{\mu_0 N^2 i}{2\pi} \text{Log} \frac{R_2}{R_1},$$

et l'auto-inductance par unité de longueur de la bobine formée de N spires est :

$$l_1 = \frac{\Phi_1}{i} = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} \cdot \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

Il est ici extrêmement important de noter que le flux magnétique traversant un circuit ou l'auto-inductance de ce circuit n'est pas une fonction intrinsèque de la répartition des densités de courant; ces paramètres dépendent de la façon dont on considère qu'est formé le circuit. L'énergie W_1 par unité de longueur, fonction d'état s'il en fut, est bien, elle, une fonction intrinsèque de la répartition des densités de courant; selon que l'on considère le circuit comme un circuit non filiforme où circule une intensité I , ou qu'on le considère comme un circuit filiforme (où circule une intensité i) s'enroulant un certain nombre de fois, on écrira :

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I^2 \quad \text{ou} \quad W_1 = \frac{1}{2} l_1 \cdot i^2,$$

ce qui montre que l'auto-inductance L_1 par unité de longueur cherchée est égale à :

$$L_1 = l_1 \cdot \left(\frac{i}{I} \right)^2 = \frac{l_1}{N^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

Une façon générale de définir le flux magnétique traversant un circuit non filiforme est de considérer ce circuit comme la juxtaposition de circuits quasi-filiformes de sections ds_k , dans lesquels passe l'intensité $dI = i_k \cdot ds_k$, avec :

$$s \text{ (section totale)} = \iint ds_k \quad \text{et} \quad I \text{ (intensité totale)} = \iint dI$$

La définition du flux magnétique Φ est alors :

$$\Phi = \iint \Phi_k \cdot \frac{ds_k}{S}, \quad (1)$$

la définition du flux Φ_k étant celle introduite pour un circuit filiforme (et ne posant donc plus de problème). Dans l'exemple qui nous intéresse ici, le découpage en circuits filiformes élémentaires se fait en découpant la surface de chaque conducteur en bandes verticales limitées par l'angle au centre $d\theta$, et parcourues par l'intensité $dI = \frac{d\theta}{2\pi} I$; les flux Φ_k sont ici tous égaux à :

$$\Phi_k = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \text{Log} \frac{R_2}{R_1},$$

et la formule (1) se réduit à :

$$\Phi = \Phi_k,$$

donc :

$$L = \frac{\Phi_k}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

Cette méthode, que nous qualifierons de « générale » n'est visiblement pas foncièrement différente de celle utilisée plus haut.

b) **Calcul indirect.** — L'énergie magnétique par unité de longueur emmagasinée par le circuit est égale à :

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 \cdot I^2,$$

mais l'on sait que cette énergie est localisée dans tout l'espace avec une densité volumique égale à :

$$\overline{w_m} = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

donc :

$$W_1 = \iint \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot dS,$$

où l'intégrale de surface est étendue à tout un plan normal à l'axe Δ . Comme nous avons vu que l'induction \vec{B} était nulle à l'intérieur du conducteur intérieur et à l'extérieur du conducteur extérieur, et qu'entre les deux conducteurs elle était orthoradiale de module :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

il vient simplement :

$$W_1 = \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \cdot 2\pi r \cdot dr$$

c'est-à-dire :

$$W_1 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \cdot \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

donc :

$$L_1 = \frac{2W_1}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

2° La capacité par unité de longueur du câble est celle d'un condensateur cylindrique, qu'on sait égale à :

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Log} \frac{R_2}{R_1}}$$

Signalons simplement le calcul indirect, par l'intermédiaire de l'énergie électrostatique. L'énergie électrostatique par unité de longueur emmagasinée par le câble est :

$$W_{e1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_1^2}{C_1},$$

où λ_1 est la charge portée par l'unité de longueur du conducteur intérieur, mais on sait aussi que l'énergie électrostatique est localisée dans tout l'espace avec la densité volumique :

$$\overline{w_e} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2},$$

donc que :

$$W_{e1} = \iint \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot dS$$

Le champ électrostatique \vec{E} est nul à l'intérieur du conducteur intérieur et à l'extérieur du conducteur extérieur; entre les deux conducteurs, il est radial de module :

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Il vient ainsi :

$$W_{e1} = \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \right)^2 \cdot 2\pi r \cdot dr$$

c'est-à-dire :

$$W_{e1} = \frac{\lambda_1^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \text{Log} \frac{R_2}{R_1},$$

donc :

$$C_1 = \frac{\lambda_1^2}{2W_{e1}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{Log} \frac{R_2}{R_1}}$$

Remarquons que le produit $L_1 C_1$ est égal à $\epsilon_0 \mu_0$, donc que $L_1 C_1 \cdot c^2 = 1$.

8-7*. DIPOLES MAGNÉTIQUES.

1° Un circuit filiforme \mathcal{C} assimilable à un dipôle magnétique (O, \vec{M}) de moment magnétique \vec{M} (cf. problème 7-4), est placé en un point O où l'induction magnétique est \vec{B} . Définir et déterminer l'énergie mutuelle du dipôle et du champ. Déterminer les éléments de réduction en O du torseur des forces appliquées au circuit \mathcal{C} .

2° Deux circuits filiformes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont assimilables à deux dipôles magnétiques (O_1, \vec{M}_1) et (O_2, \vec{M}_2) de moments magnétiques \vec{M}_1 et \vec{M}_2 , et situés à la distance $O_1O_2 = r$ l'un de l'autre. Exprimer en fonction des vecteurs \vec{M}_1 , \vec{M}_2 et $\vec{O}_1\vec{O}_2 = \vec{r}$ l'énergie mutuelle des deux circuits.

Déterminer les éléments de réduction en O_2 du torseur des forces appliquées au circuit \mathcal{C}_2 ; on exprimera la résultante comme une combinaison linéaire des vecteurs \vec{M}_1 , \vec{M}_2 et \vec{r} .

INDICATIONS. — 1° On appelle *énergie du circuit dans le champ*, ou *énergie mutuelle circuit-champ*, le travail qu'il faut fournir pour amener, de façon réversible, le circuit d'un endroit où l'induction est nulle (par exemple l'infini), à sa position actuelle où le flux à travers le circuit est Φ (flux de l'induction extérieure : compte non tenu du flux propre). On pourra dans tout ce problème s'inspirer de ce qu'on fait en électrostatique à propos des dipôles du même nom.

2° On pourra utiliser les résultats du problème 7-4, et en particulier l'expression de \vec{B} démontrée au § 4° :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\vec{M}}{r^3} + 3(\vec{M} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^5} \right]$$

Pour exprimer la résultante sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs \vec{M}_1 , \vec{M}_2 et \vec{r} , on pourra utiliser les résultats suivants :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(a \cdot b) = a \cdot \overrightarrow{\text{grad}} b + b \cdot \overrightarrow{\text{grad}} a$$

et :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{r} \cdot \vec{a}) = \vec{a} \quad \text{quand le vecteur } \vec{a} \text{ est constant.}$$

— SOLUTION —

1° Si l'on amène de l'infini (ou de toute autre région de l'espace où l'induction magnétique \vec{B} est nulle), de façon réversible, un circuit rigide \mathcal{C} à sa position actuelle (où le flux à travers le circuit est Φ), le travail fourni par l'opérateur est l'opposé du travail des forces électromagnétiques, lequel est égal à :

$$\mathcal{E}_{em} = I\Phi,$$

où I est l'intensité du courant circulant dans le circuit. Le travail fourni par l'opérateur sera, par définition de celle-ci, l'énergie mutuelle du système circuit-champ :

$$W = -\mathcal{E}_{em} = -I \cdot \Phi$$

Si le circuit \mathcal{C} est assimilable à un dipôle magnétique de moment \vec{m} placé au point O où l'induction est \vec{B} (compte tenu de tous les circuits présents, *sauf* le circuit \mathcal{C}), cette définition de l'énergie mutuelle devient :

$$W = -I\Phi = -I\vec{B} \cdot \vec{S} = -(\vec{I}\vec{S}) \cdot \vec{B}$$

(On admet que l'induction \vec{B} est la même en tous les points du circuit). D'où :

$$\boxed{W = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$$

formule analogue à celle donnant l'énergie mutuelle dipôle électrostatique-champ électrostatique ($W_e = -\vec{P} \cdot \vec{E}$). Pour calculer les éléments de réduction \vec{F} et $\vec{\Gamma}_O$ en O du torseur des forces appliquées au circuit \mathcal{C} , on peut écrire que le travail du torseur $[\vec{F}, \vec{\Gamma}_O]$ est égal à la *diminution* de l'énergie mutuelle W .

a) **Calcul de la résultante \vec{F} .** — Lors d'une translation élémentaire (de vecteur \vec{dl}) du circuit \mathcal{C} , le moment magnétique \vec{m} du circuit ne change pas, mais l'induction magnétique \vec{B} au centre O du dipôle peut changer; l'énergie mutuelle W varie dans ces conditions de :

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial W}{\partial z} \cdot dz = \overrightarrow{\text{grad } W} \cdot \vec{dl}$$

Le travail du torseur considéré se réduit au travail de la résultante :

$$\delta\mathcal{C} = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

De la relation : $\delta\mathcal{C} = -dW$, nous déduisons :

$$\boxed{\vec{F} = + \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{m} \cdot \vec{B})}$$

Les coordonnées F_x, F_y, F_z de \vec{F} dans un repère orthonormé sont :

$$\boxed{F_x = + \vec{m} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \quad F_y = + \vec{m} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \quad F_z = + \vec{m} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}}$$

b) **Calcul du moment $\vec{\Gamma}_O$ en O .** — Lors d'une rotation élémentaire (d'angle $d\theta$) autour d'un axe de vecteur unitaire \vec{k} , le moment magnétique \vec{m} du circuit tourne avec lui, donc varie de :

$$d\vec{m} = \vec{k} \, d\theta \wedge \vec{m}$$

Le vecteur induction \vec{B} reste invariant, l'énergie mutuelle varie donc de :

$$dW = -\vec{B} \cdot d\vec{m} = -(\vec{k} d\theta \wedge \vec{m}) \cdot \vec{B} = -(\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{k} d\theta$$

Le travail du torseur considéré se réduit au travail du moment Γ_0 :

$$\delta\mathcal{C} = \vec{\Gamma}_0 \cdot \vec{k} d\theta$$

De la relation : $\delta\mathcal{C} = -dW$, nous déduisons :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_0 = \vec{m} \wedge \vec{B}}$$

2° L'énergie mutuelle du système formé par les deux circuits est par définition égale au travail qu'il faut fournir pour amener, de façon réversible, chacun des deux circuits d'une région de l'espace où l'induction \vec{B} est nulle à sa position actuelle; on peut par exemple dans un premier temps amener le premier circuit de l'infini jusqu'à sa position actuelle où, faute d'autre circuit, l'induction est toujours nulle : cette première opération ne nécessite aucun travail; on amènera ensuite le second circuit jusqu'à sa position actuelle, ce qui nécessite un travail \mathcal{C} (le premier circuit étant déjà en place). Ainsi l'on constate que l'énergie mutuelle W d'un système de deux circuits est égale à l'énergie mutuelle d'un circuit et du champ créé par l'autre, telle qu'elle a été définie au § 1° :

$$W = -\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_2 = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1,$$

où \vec{B}_1 est l'induction magnétique créée en O_2 par le circuit c_1 , et \vec{B}_2 l'induction magnétique créée en O_1 par le circuit c_2 .

Nous avons démontré dans le problème 7-4 (§ 4°) une formule donnant l'induction magnétique \vec{B} créée par un dipôle magnétique. Posant $\overrightarrow{O_1 O_2} = \vec{r}$, il vient ainsi :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[-\frac{\vec{m}_1}{r^3} + 3(\vec{m}_1 \cdot \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^5} \right]$$

Nous trouvons donc l'énergie mutuelle cherchée égale à :

$$\boxed{W = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[\frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{r^3} - 3 \frac{(\vec{m}_1 \cdot \vec{r})(\vec{m}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} \right]}$$

Les éléments de réduction en O_2 du torseur des forces appliquées au circuit c_2 se calculent comme au § 1° :

$$\vec{F}_2 = -\overrightarrow{\text{grad}}_2 W, \quad \vec{\Gamma}_{2 O_2} = \vec{m}_2 \wedge \vec{B}_1$$

(l'indice 2 du gradient indique simplement qu'on considère pour son calcul les coordonnées de O_2 comme variables, et celles de O_1 comme constantes).

Nous n'expliciterons pas le moment $\vec{\Gamma}_2$ dont l'expression ne se simplifie guère, et nous nous intéresserons plus spécialement à la résultante \vec{F}_2 :

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left\{ -\vec{\text{grad}} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2}{r^3} \right) + 3 \vec{\text{grad}} \left[\frac{(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} \right] \right\}$$

Rappelons que :

$$\vec{\text{grad}} (a \cdot b) = a \cdot \vec{\text{grad}} b + b \cdot \vec{\text{grad}} a$$

Il est évident que si le vecteur \vec{a} est constant, l'on a :

$$\vec{\text{grad}} (\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$$

Les vecteurs $\vec{\mathcal{M}}_1$ et $\vec{\mathcal{M}}_2$ étant constants (pour le calcul de \vec{F}_2), nous écrivons la résultante \vec{F}_2 sous la forme.

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[-(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2) \cdot \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right) + 3(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{r}) \cdot (\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^5} \right) + 3 \frac{(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{r})}{r^5} \cdot \vec{\text{grad}} (\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{r}) + 3 \frac{(\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} \cdot \vec{\text{grad}} (\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{r}) \right]$$

Or :

$$\vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}, \quad \vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r^5} \right) = -5 \frac{\vec{r}}{r^7}$$

et :

$$\vec{\text{grad}} (\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{r}) = \vec{\mathcal{M}}_1, \quad \vec{\text{grad}} (\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{r}) = \vec{\mathcal{M}}_2$$

Regroupant dans l'expression de \vec{F}_2 les termes colinéaires à $\vec{\mathcal{M}}_1$, $\vec{\mathcal{M}}_2$ et \vec{r} respectivement, nous obtenons finalement :

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \left\{ \left[3(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2) - \frac{15}{r^2} (\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{r}) \right] \vec{r} + 3(\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{M}}_1 + 3(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{M}}_2 \right\}$$

REMARQUE IMPORTANTE. — L'énergie mutuelle W introduite ici peut être écrite :

$$W = -I_1 \cdot \Phi_2 = -I_2 \cdot \Phi_1,$$

où I_1 est l'intensité du courant circulant dans C_1 , et Φ_2 le flux à travers C_2 de l'induction magnétique créée par le circuit C_2 (définitions analogues pour I_2 et Φ_1). Or on considère généralement comme énergie mutuelle de deux circuits la quantité :

$$W' = +I_1 \cdot \Phi_2 = +I_2 \cdot \Phi_1 \quad (= MI_1 I_2)$$

Ce n'est ni une faute de signe, ni une question de convention de signe. C'est que dans le premier cas (celui qui nous intéressait ici), on ne considère que le travail *mécanique* fourni par l'opérateur, ne cherchant pas à savoir ce qui crée les moments magnétiques $\vec{\mathcal{M}}_1$ et $\vec{\mathcal{M}}_2$ des deux dipôles, on considère ainsi les deux dipôles comme des données intrinsèques du problème. Dans le second cas par contre, on s'inquiète du surplus énergétique dépensé par les sources afin de maintenir constantes les intensités dans les

deux circuits, et l'on appelle énergie mutuelle W' la somme du travail mécanique $\mathcal{C} = W$ dépensé par l'opérateur et du travail électrique \mathcal{C}_e fourni par les sources (nécessité de forces électromotrices complémentaires pour compenser l'apparition des f.é.m. d'induction); pour le malheur de l'étudiant, $\mathcal{C}_e = +2I_1\Phi_2$, donc $W' = -W$, ce qui rend les confusions fort tentantes...

8-8. — Le bobinage d'un rhéostat est assimilable à un solénoïde comportant n spires de surface S par unité de longueur. Le rhéostat est placé dans une région de l'espace où l'induction magnétique, uniforme, est parallèle à l'axe du bobinage, et l'on forme un circuit filiforme en reliant ce rhéostat à une résistance R (cf. figure). Sachant que la résistance d'une spire est r , calculer l'intensité I du courant qui apparaît dans le circuit quand on déplace le curseur du rhéostat à la vitesse constante v .

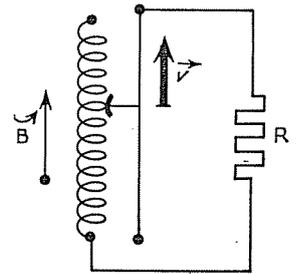


FIG. 8-8.

— SOLUTION —

L'intensité cherchée est nulle. Calculons en effet la force électromotrice d'induction e qui apparaît dans le circuit; celle-ci est égale à la circulation, le long du circuit, du champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B},$$

où \vec{A} et \vec{B} sont le potentiel vecteur et l'induction magnétique là où se trouve l'élément de circuit considéré, et \vec{v} la vitesse de cet élément de circuit. L'induction magnétique extérieure étant constante, le terme $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est partout nul; d'autre part, la seule portion mobile du circuit est formée du curseur et de l'ensemble rigide qui lui est lié, or la vitesse \vec{v} de cet ensemble rigide est parallèle à \vec{B} , le terme $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est donc lui aussi partout nul : le champ électromoteur \vec{E}_m est nul en tous les points du circuit, donc la f.é.m. d'induction e cherchée est nulle; il n'apparaît pas de courant d'induction.

REMARQUE. — Cet exercice-piège n'est pas sans utilité; on peut calculer la f.é.m. d'induction e en introduisant le flux d'induction Φ traversant le circuit, et écrire :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

On est alors tenté d'écrire que pendant le temps dt , la surface (normale à \vec{B}) du circuit s'accroît de $(nS) \cdot v \cdot dt$, donc que le flux magnétique Φ traversant le

circuit s'accroît de $(nBS) \cdot v \cdot dt$ (on trouverait alors une intensité I non nulle). Or le circuit considéré n'est pas un circuit qui se déplace ou *qui se déforme*, mais un circuit auquel on rajoute des spires initialement hors circuit, par commutations successives (le curseur est à cheval sur plusieurs spires, les mettant en circuit au fur et à mesure qu'il perd le contact avec les spires précédentes). Le résultat serait le même si le curseur se déplaçait continûment le long du bobinage; il apparaîtrait par contre effectivement un courant d'induction si, le circuit une fois constitué, on tordait ou détordait les fils, augmentant ou diminuant ainsi le nombre de spires du bobinage.

Dans cet ordre d'idées, rappelons l'exemple de la roue de Barlow, pour laquelle le flux magnétique traversant le circuit ne semble pas varier (dans la mesure où la géométrie du système ne varie pas quand la roue tourne), alors qu'il apparaît une f.é.m. d'induction. On fait alors appel à la notion de flux coupé, mais il vaudrait peut-être mieux éviter de parler de flux magnétique quand on n'a pas affaire à des circuits filiformes, ou quand il y a des commutations...

8-9. FORMULE DE NEUMANN. — *Montrer que l'inductance mutuelle de deux circuits filiformes C_1 et C_2 peut être écrite sous la forme :*

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2}{r},$$

où \vec{dl}_1 et \vec{dl}_2 sont les éléments d'arc courants sur C_1 et C_2 , et r la distance qui les sépare.

— SOLUTION —

Calculons le flux à travers C_1 de l'induction \vec{B}_2 créée par un courant d'intensité I circulant dans le circuit C_2 :

$$\Phi_{12} = \iint_{g_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{g_1} \text{rot } \vec{A}_2 \cdot d\vec{S}_1,$$

où g_1 est une surface (ouverte) s'appuyant sur le contour de C_1 , et orientée selon les conventions habituelles. Le théorème de Stokes permet d'écrire :

$$\Phi_{12} = \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot \vec{dl}_1$$

Le potentiel \vec{A}_2 est le potentiel vecteur créé par le circuit C_2 au niveau de l'élément d'arc \vec{dl}_1 ; nous savons qu'il est égal à :

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{\vec{dl}_2}{r},$$

où dl_2 est l'élément d'arc orienté sur C_2 , et r la distance séparant l'élément

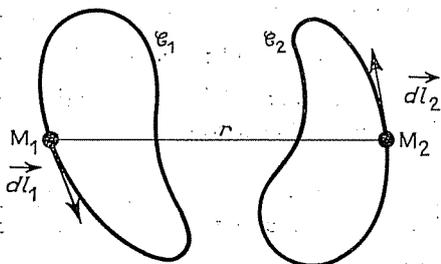


FIG. 8-9.

\vec{dl}_1 de l'élément d'arc orienté courant \vec{dl}_2 sur C_2 . Il vient ainsi :

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2}{r}$$

D'où nous déduisons :

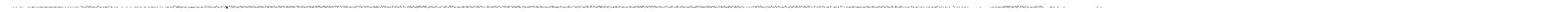
$$M = \frac{\Phi_{12}}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2}{r}$$

REMARQUE. — La formule ici démontrée présente l'avantage de traiter symétriquement les circuits C_1 et C_2 ; cet avantage est en fait essentiellement d'ordre esthétique, l'élément d'intégration :

$$\frac{\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2}{r}$$

n'ayant par lui-même aucune signification physique intrinsèque.





QUATRIÈME PARTIE

COURANT ALTERNATIF



1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

1911

9. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURANTS ALTERNATIFS SINUSOÏDAUX

REMARQUE PRÉLIMINAIRE. — L'approximation des états quasi-stationnaires permet de remplacer les équations de Maxwell par des relations plus facilement exploitables, celles de l'électromagnétisme classique; nous n'étudierons les courants alternatifs sinusoïdaux que dans les limites de cette approximation. Rappelons que celle-ci reste acceptable tant que les distances considérées sont très faibles devant la longueur d'onde λ ; comme dans l'air la vitesse de la lumière est: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$, la longueur d'onde λ associée à un courant alternatif de type industriel ($\nu = 50 \text{ Hz}$ en Europe) est:

$$\lambda = c/\nu = 6 \cdot 10^6 \text{ m} = 6 \text{ 000 km},$$

ce qui est amplement suffisant pour ce qui nous concerne. Par contre, les méthodes employées ici et les résultats obtenus ne s'appliqueront plus à des courants alternatifs de trop haute fréquence.

9-1. EFFET JOULE EN COURANT ALTERNATIF. — *Un filament métallique de résistance R et de capacité calorifique μ est parcouru par un courant d'intensité : $i = I\sqrt{2} \cdot \sin \omega t$. Pendant la durée infinitésimale dt , le filament reçoit du milieu ambiant la quantité de chaleur $\delta Q = k(T_0 - T) dt$, où k est une constante, T_0 la température ambiante et T la température du filament à l'instant considéré (δQ est compté algébriquement : pertes de chaleur par conduction, convection et rayonnement). Exprimer, en fonction du temps, la température T du filament, sachant que sa température initiale est T_0 .*

— SOLUTION —

Pendant la durée infinitésimale dt , la quantité de chaleur δQ et le travail (électrique) δW fournis au filament sont respectivement :

$$\delta Q = k(T_0 - T) dt \quad \text{et} \quad \delta W = Ri^2 dt$$

L'énergie interne du filament varie pendant ce temps de :

$$dU = \mu \cdot dT$$

Le premier principe de la thermodynamique appliqué au filament s'écrit :

$$k(T_0 - T) dt + Ri^2 dt = \mu \cdot dT$$

Posons : $\tau = \mu/k$ (constante homogène à un temps); la température T du filament est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_0}{\tau} + \frac{RI^2}{k\tau} = \frac{T_0 + \frac{RI^2}{k}}{\tau} - \frac{RI^2}{k\tau} \cdot \cos 2\omega t \quad (1)$$

Une solution de l'équation sans second membre étant :

$$T = T_0 + \frac{RI^2}{k} + C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2)$$

nous chercherons T sous une forme analogue où C est une fonction du temps, à déterminer. Il vient ainsi :

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{RI^2}{k\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \cos 2\omega t \quad (3)$$

Cette équation différentielle (3) s'intègre facilement en remarquant que $\cos 2\omega t$ est la partie réelle de $e^{2j\omega t}$ (j étant une racine carrée de -1); mais il est plus rapide de chercher directement $C(t)$ sous la forme :

$$C(t) = A + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \cos(2\omega t + \varphi) \quad (4)$$

où A , B , et φ sont des constantes à déterminer. En identifiant la dérivée de $C(t)$ sous cette forme (4) à l'expression (3), il vient :

$$\frac{B}{\tau} = -\frac{RI^2}{k\tau} \cos \varphi \quad \text{et} \quad -2\omega B = -\frac{RI^2}{k\tau} \sin \varphi$$

donc :

$$\text{tg } \varphi = -2\omega\tau \quad \text{et} \quad B = \frac{RI^2}{k\sqrt{1 + 4\omega^2\tau^2}}$$

Reportons ces expressions dans (4), puis dans (2); nous obtenons en définitive :

$$\boxed{T = T_0 + \frac{RI^2}{k} + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B \cdot \cos(2\omega t + \varphi)} \quad (5)$$

où :

$$\tau = \frac{\mu}{k}, \quad \text{tg } \varphi = -\frac{2\omega\mu}{k}, \quad B = \frac{RI^2}{\sqrt{k^2 + 4\mu^2\omega^2}}$$

La constante A , qui reste à déterminer, s'obtient en écrivant que $T = T_0$ à l'instant $t = 0$, et en reportant ce résultat dans l'expression (5). Il vient alors :

$$A = -\frac{4\mu^2\omega^2 \cdot RI^2}{k(k^2 + 4\mu^2\omega^2)}$$

Le terme $A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ est d'ailleurs rapidement négligeable, et la température T du filament oscille entre les valeurs $\left(T_0 + \frac{RI^2}{k} - B\right)$ et $\left(T_0 + \frac{RI^2}{k} + B\right)$, à une fréquence double de celle du courant.

9-2. PONT DE WHEATSTONE EN COURANT ALTERNATIF.

1° Les branches AB , BC , CD et DA d'un pont de Wheatstone ont respectivement pour résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 , et pour réactances X_1 , X_2 , X_3 et X_4 . Entre les points A et C est disposé un détecteur de zéro, c'est-à-dire un appareil permettant de déceler que la différence des potentiels en A et C est constamment nulle, et la différence des potentiels en B et D est imposée (tension alternative sinusoïdale), ce sera par exemple la tension du réseau urbain, ou celle fournie par un générateur basse-fréquence. Montrer que le pont n'est en équilibre (c'est-à-dire : les potentiels en A et C ne sont constamment égaux) que si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} R_1R_3 - X_1X_3 &= R_2R_4 - X_2X_4 \\ X_1R_3 + X_3R_1 &= X_2R_4 + X_4R_2 \end{aligned}$$

2° Pont de Sauty. — Le pont de Sauty est un pont de Wheatstone particulier, dans lequel les branches AB et DA sont des boîtes de résistances, la branche BC est constituée par une capacité étalon et une boîte de résistances disposées en parallèle, et la branche CD par un condensateur C_3 imparfait. Montrer que le pont de Sauty permet de mesurer la capacité C_3 et la résistance de fuite R_3 de ce condensateur C_3 .

3° Pont de Robinson. — Dans le pont de Robinson, les branches CD et DA sont des résistances pures, la branche AB est constituée par une résistance R et une capacité C en série, et la branche BC par une résistance égale R et une capacité égale C en parallèle. Montrer qu'un tel pont permet de mesurer la fréquence de la tension alternative sinusoïdale imposée entre les points A et C .

— SOLUTION —

1° On sait que l'emploi des notations complexes permet d'étendre aux courants alternatifs la loi d'Ohm, sous sa forme usuelle ($U = R \cdot i$), sans autre

forme de procès : la tension complexe aux bornes d'une portion de circuit est égal au produit de l'intensité complexe par l'impédance complexe de la portion de circuit considérée. Les lois de Kirchhoff (obtenues en courant continu) restent valables à condition de remplacer les grandeurs électriques par les grandeurs complexes associées; on en déduit que la condition d'équilibre du pont de Wheatstone s'écrit, en courant alternatif :

$$z_1^* \cdot z_3^* = z_2^* \cdot z_4^* \quad (1)$$

où z_1^* , z_2^* , z_3^* et z_4^* sont les impédances complexes des branches AB, BC, CD et DA du pont. Comme $z_i^* = R_i + j \cdot X_i$ ($i \in [1,4]$), l'égalité (1) des nombres complexes $z_1^* z_3^*$ et $z_2^* z_4^*$ se traduit par l'égalité de leurs parties réelles et imaginaires respectivement, c'est-à-dire par :

$$R_1 R_3 - X_1 X_3 = R_2 R_4 - X_2 X_4 \quad (2)$$

et

$$X_1 R_3 + X_3 R_1 = X_2 R_4 + X_4 R_2$$

2° Pont de Sauty. — La constitution du pont de Sauty, exposée dans

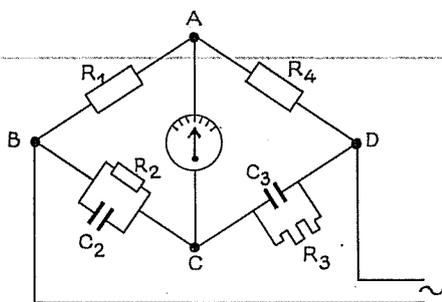


FIG. 9-2 2°.

l'énoncé, est représentée sur la figure sachant qu'un condensateur imparfait est équivalent à une capacité et une résistance (résistance de fuite) en parallèle. Les impédances complexes z_1^* et z_4^* des branches AB et DA sont égales à leurs résistances respectives R_1 et R_4 . Les impédances complexes z_2^* et z_3^* des branches BC et CD se calculent comme, en courant continu,

la résistance équivalente d'une portion de circuit formée de deux résistances en parallèle :

$$\frac{1}{z_2^*} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\frac{j}{C_2 \omega}} = \frac{1 + j R_2 C_2 \omega}{R_2}$$

de même :

$$\frac{1}{z_3^*} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\frac{j}{C_3 \omega}} = \frac{1 + j R_3 C_3 \omega}{R_3}$$

La condition d'équilibre: $z_1^* z_3^* = z_2^* z_4^*$ peut s'écrire également:

$$\frac{1}{z_1^* z_3^*} = \frac{1}{z_2^* z_4^*},$$

ce qui donne:

$$\frac{1 + j R_3 C_3 \omega}{R_1 R_3} = \frac{1 + j R_2 C_2 \omega}{R_2 R_4}$$

La condition d'équilibre se dédouble donc en :

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad \text{et} \quad \frac{C_3}{R_1} = \frac{C_2}{R_4} \quad (3)$$

Si C_2 est une capacité étalon, R_1 , R_2 et R_4 des résistances variables (boîtes de résistances), on peut choisir R_1 , R_2 et R_4 de telle sorte que l'équilibre soit réalisé, et la condition (3) permet alors le calcul de R_3 et C_3 . On remarque que R_1 et R_4 n'importent vraiment que par leur rapport, et l'on peut remplacer les branches AB et DA par un fil rectiligne homogène BD, le point A étant mobile sur BD (le rapport R_1/R_4 est alors égal au rapport AB/AD).

3° Pont de Robinson. — Le calcul des impédances complexes z_1^* , z_2^* , z_3^* et z_4^* des branches AB, BC, CD et DA du pont de Robinson ne pose, comme ci-dessus, aucun problème, nous trouvons :

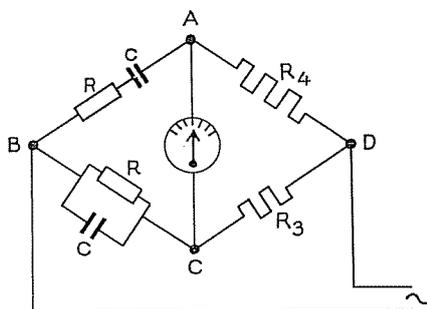


FIG. 9-2 3°.

$$z_1^* = R - j \cdot \frac{1}{C\omega},$$

$$z_2^* = \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} - j \frac{R^2 C \omega}{1 + R^2 C^2 \omega^2},$$

$$z_3^* = R_3, \quad z_4^* = R_4$$

L'équilibre du pont se caractérise par la condition : $z_1^* z_3^* = z_2^* z_4^*$, c'est-à-dire par les relations (2) :

$$R R_3 = \frac{R R_4}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \quad \text{et} \quad -\frac{R_3}{C\omega} = -\frac{R^2 C \omega R_4}{1 + R^2 C^2 \omega^2},$$

ce qui s'écrit :

$$1 + R^2 C^2 \omega^2 = \frac{R_4}{R_3} = R^2 C^2 \omega^2 \cdot \frac{R_4}{R_3}$$

ou :

$$R^2 C^2 \omega^2 = 1 \quad \text{et} \quad R_4 = 2R_3$$

Si l'on fixe les résistances R_3 et R_4 telle que $R_4 = 2R_3$, on pourra faire varier R (ou C) par l'emploi de deux boîtes de résistances (ou de capacités) couplées, jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. La fréquence de la tension appliquée entre les points A et C se calcule alors par :

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \cdot RC}$$

9-3. — Deux portions de circuit comprenant : l'une une inductance L en série avec une capacité C , l'autre une inductance L' en série avec une capacité C' , sont branchées en parallèle; le bipôle ainsi obtenu est intercalé dans un circuit électrique : montrer qu'il laisse passer sans atténuation des courants alternatifs sinusoïdaux de fréquence N_1 ou N_2 , qu'il interdit le passage de courants de fréquence N_3 ou N_4 , qu'il laisse enfin passer les autres courants alternatifs sinusoïdaux mais avec atténuation.

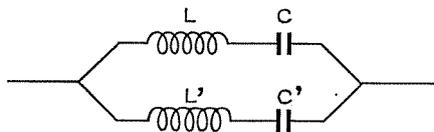


FIG. 9-3.

— SOLUTION —

La conductance complexe (inverse de l'impédance complexe) du bipôle est la somme des conductances complexes des deux portions de circuit en parallèle:

$$\frac{1}{z^*} = \frac{1}{j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} + \frac{1}{j\left(L'\omega - \frac{1}{C'\omega}\right)}$$

donc :

$$z^* = -j \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(L'\omega - \frac{1}{C'\omega}\right)}{(L + L')\omega - \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)\frac{1}{\omega}}$$

L'impédance réelle du bipôle est donc :

$$Z = |z^*| = \left| \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(L'\omega - \frac{1}{C'\omega}\right)}{(L + L')\omega - \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)\frac{1}{\omega}} \right|$$

Posons : $L'' = L + L'$ et : $C'' = \frac{CC'}{C + C'}$; nous constatons que Z s'anule quand $|\omega|$ prend l'une des valeurs $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{1}{\sqrt{L'C'}}$, que Z tend vers l'infini si $|\omega|$ tend vers 0 ou $\frac{1}{\sqrt{L''C''}}$, et que Z prend une valeur positive, finie et non nulle pour toute autre valeur de $|\omega|$. Ces résultats sont équivalents à ceux proposés par l'énoncé; les fréquences correspondantes sont :

$$N_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad N_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L'C'}}, \quad N_3 = 0 \quad \text{et} \quad N_4 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L''C''}}$$

Si l'on avait tenu compte des résistances R et R' des deux portions de circuit, les calculs auraient été fort compliqués; il est à prévoir néanmoins que, au moins pour des valeurs faibles de R et R' , nous aurions trouvé Z minimale pour des fréquences proches de N_1 et N_2 , et maximale pour des fréquences proches de N_3 et N_4 . L'insertion d'une série de tels bipôles dans un circuit susceptible d'être traversé par des courants de fréquences diverses ou par un courant périodique non sinusoïdal permet ainsi de favoriser les composantes de fréquences N_1 et N_2 aux dépens des autres, et tout particulièrement des composantes de fréquence N_3 (composante continue) et N_4 .

9-4. QUADRIPÔLES EN COURANT ALTERNATIF. FILTRES.

1° Déterminer, parmi les résultats de l'exercice 5-7, lesquels restent valables en courant alternatif : définir une matrice impédance $[Z]$, une matrice admittance (conductance complexe) $[A]$, une matrice de transfert $[T]$, une impédance itérative.

2° Déterminer la matrice de transfert et l'impédance itérative des quadripôles S (quadripôle série), D (quadripôle dérivation) et T (quadripôle en T) représentés par la figure 9-4-2°.

3° On appelle bande passante d'un qua-

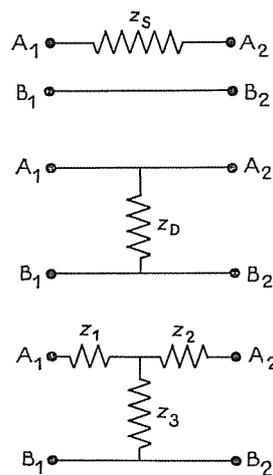


FIG. 9-4 2°.

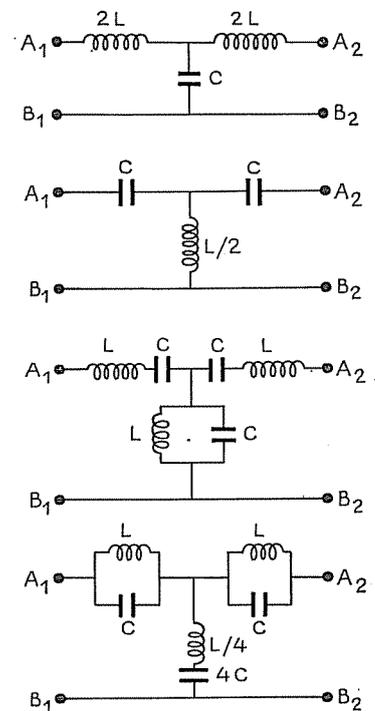


FIG. 9-4 4°.

dripôle passif l'ensemble des fréquences pour lesquelles l'oscillation électrique est transmise sans affaiblissement par le quadripôle quand ce dernier est fermé sur son impédance itérative. Montrer qu'une condition nécessaire et

suffisante pour qu'une fréquence soit passante est que la somme des éléments diagonaux de la matrice de transfert correspondante soit réelle et de module inférieur à 2. Exprimer cette condition au moyen des éléments de la matrice impédance ou de la matrice admittance.

4° Déterminer la bande passante de chacun des quatre quadripôles représentés par la figure 9-4-4°.

— SOLUTION —

1° On sait que le principe de conservation des charges et la loi d'Ohm s'expriment sous la même forme qu'en courant continu, à condition de remplacer les intensités et les différences de potentiel par les quantités complexes correspondantes, et les résistances par les impédances complexes. Les équations de Kirchhoff, le théorème de superposition, le théorème de Thévenin et (pour des réseaux passifs) le théorème de réciprocity, qui en sont les conséquences, resteront donc valables sous les mêmes conditions.

Pour des quadripôles, on fera correspondre aux grandeurs déjà définies U_1, i_1, U_2, i_2 les grandeurs complexes correspondantes $U_1^*, i_1^*, U_2^*, i_2^*$ liées dans le cas général par des relations linéaires :

$$\begin{aligned} U_1^* &= z_{11}i_1^* + z_{12}i_2^* & \text{ou : } \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} &= [Z] \begin{bmatrix} i_1^* \\ i_2^* \end{bmatrix} \\ U_2^* &= z_{21}i_1^* + z_{22}i_2^* \\ i_1^* &= a_{11}U_1^* + a_{12}U_2^* & \text{ou : } \begin{bmatrix} i_1^* \\ i_2^* \end{bmatrix} &= [A] \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} \\ i_2^* &= a_{21}U_1^* + a_{22}U_2^* \\ U_2^* &= t_{11}U_1^* + t_{12}i_1^* & \text{ou : } \begin{bmatrix} U_2^* \\ i_2^* \end{bmatrix} &= [T] \begin{bmatrix} U_1^* \\ i_1^* \end{bmatrix} \\ i_2^* &= t_{21}U_1^* + t_{22}i_1^* \end{aligned}$$

Les matrices $[Z]$, $[A]$ et $[T]$ resteront liées par les relations démontrées dans l'exercice 5-7. Les résultats éventuels concernant les signes des coefficients ne s'appliqueront plus, néanmoins, qu'aux composantes réelles des éléments des matrices complexes. Pour un quadripôle passif, nous aurons également :

$$z_{12} + z_{21} = 0, \quad a_{12} + a_{21} = 0, \quad |T| \equiv t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1$$

et de plus, pour un quadripôle symétrique :

$$z_{11} + z_{22} = 0, \quad a_{11} + a_{22} = 0, \quad t_{11} = t_{22}$$

L'impédance itérative sera par définition une valeur complexe z_i telle que ($U_2^* = z_i \cdot i_2^*$) entraîne ($U_1^* = z_i \cdot i_1^*$). Si une telle valeur z_i existe, elle est valeur propre de la matrice $[Z]$ donc vérifie :

$$\begin{vmatrix} z_{11} - z_i & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} - z_i \end{vmatrix} \equiv z_i^2 - (z_{11} + z_{22})z_i + (z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}) = 0$$

Les matrices colonnes $\begin{bmatrix} U_2^* \\ i_2^* \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} U_1^* \\ i_1^* \end{bmatrix}$ sont alors colinéaires, et le coefficient de proportionnalité λ est valeur propre de la matrice de transfert :

$$\lambda^2 - (t_{11} + t_{22})\lambda + (t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}) = 0$$

Dans le cas d'un quadripôle passif, le déterminant $|T| \equiv t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}$ est nul, et les deux racines de l'équation précédente sont, soit de modules égaux à 1, soit de modules inverses; dans ce dernier cas, seule une des deux valeurs propres λ est physiquement acceptable, l'autre correspondrait à une production et non une consommation d'énergie dans le quadripôle.

2° Dans le *quadripôle série* S, nous pouvons écrire directement les relations : $i_2^* = i_1^*$ et : $U_2^* - U_1^* = z_s \cdot i_1^*$, la matrice de transfert est donc :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -z_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les relations $U_1^* = z_i \cdot i_1^*$ et $U_2^* = z_i \cdot i_2^*$ ne sont compatibles que si $i_1^* = 0$, l'impédance itérative n'est pas définie, ou, si l'on préfère, est infinie (ce qui veut dire que si le circuit de sortie est ouvert, alors le circuit d'entrée l'est aussi). Il est à remarquer que dans ce cas la matrice $[Z]$ n'est pas définie, ce qui tient à la dépendance de i_1^* et i_2^* .

Dans le *quadripôle dérivation* D, nous pouvons écrire directement les relations : $U_2^* = U_1^* = z_D(i_1^* - i_2^*)$, d'où nous déduisons la matrice de transfert :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{z_D} & 1 \end{bmatrix}$$

Les relations $U_1^* = z_i \cdot i_1^*$ et $U_2^* = z_i \cdot i_2^*$ ne sont compatibles que si $U_1^* = U_2^* = 0$, l'impédance itérative est donc nulle : si la sortie est en court-circuit, le quadripôle se comporte comme un court-circuit vis-à-vis du circuit d'entrée.

Il est facile de déterminer directement les éléments de la matrice de transfert du *quadripôle en T*, mais il est plus simple encore de remarquer qu'il est équivalent à trois quadripôles S_1, D_s, S_2 des types précédents associés en chaîne, c'est-à-dire tels que les bornes de sortie de l'un soient confondues avec les bornes d'entrée du suivant; il est alors évident que la matrice de transfert du quadripôle T est le produit des trois matrices de transfert $[T_2], [T_3]$ et $[T_1]$:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{z_3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{z_2}{z_3} & -z_1 - z_2 - \frac{z_1 z_2}{z_3} \\ -\frac{1}{z_3} & 1 + \frac{z_1}{z_3} \end{bmatrix}$$

3° Nous avons vu que lorsqu'un quadripôle est fermé sur son impédance itérative, on a : $U_2^* = \lambda \cdot U_1^*$ et $i_2^* = \lambda \cdot i_1^*$, où λ est racine de l'équation :

$$\lambda^2 - (t_{11} + t_{22})\lambda + (t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}) = 0$$

de plus $t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1$ dans le cas d'un quadripôle passif. Pour que l'oscillation électrique soit transmise sans atténuation, il faut et il suffit que $|\lambda| = 1$; les deux racines λ_1 et λ_2 sont alors complexes conjuguées : $\lambda_1 = e^{j\varphi}$ et $\lambda_2 = e^{-j\varphi}$; leur somme, égale à : $2 \cdot \cos \varphi$, est réelle de module inférieur à deux, et d'autre part égale à $(t_{11} + t_{22})$. Si réciproquement $(t_{11} + t_{22})$ est réel de module inférieur à deux, le discriminant de l'équation ci-dessus est négatif, donc les racines sont complexes, elles sont alors forcément conjuguées de module un puisque leur somme est réelle et leur produit égal à un.

Nous constatons bien ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait pas atténuation est que la somme des éléments diagonaux de la matrice de transfert soit réelle et de module inférieur à deux. Cette condition peut bien sûr s'exprimer au moyen des éléments des matrices [A] et [Z] grâce aux formules de passage liant les trois matrices; nous obtenons ainsi trois inéquations équivalentes :

$$-2 < \frac{z_{22} - z_{11}}{z_{12}} < +2 \quad \text{ou} \quad -2 < t_{11} + t_{22} < +2 \quad \text{ou} \quad -2 < \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} < +2$$

4° Chacun des quatre quadripôles proposés par l'énoncé est passif et symétrique, et présente la forme en T vue au § 2°; si nous reprenons les notations de ce paragraphe, la condition ci-dessus s'écrit :

$$-2 < 1 + \frac{z_2}{z_3} + 1 + \frac{z_1}{z_3} < +2$$

ou, compte tenu de ce que $z_1 = z_2$:

$$-2 < \frac{z_1}{z_3} < 0$$

Pour le premier des quatre quadripôles de la figure 9-4 2°, z_1 et z_3 sont égaux à : $2jL\omega$ et $-\frac{j}{C\omega}$ respectivement, donc la condition ci-dessus devient :

$$-2 < -2LC\omega^2 < 0 \quad \text{c'est-à-dire simplement} \quad \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pour le second quadripôle, z_1 et z_3 sont respectivement égaux à $-\frac{j}{C\omega}$ et $j\frac{L\omega}{2}$, et la même condition devient :

$$-2 < -\frac{2}{LC\omega^2} < 0 \quad \text{c'est-à-dire simplement} \quad \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pour le troisième quadripôle, z_1 et z_3 sont respectivement égaux à :

$$z_1 = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{\frac{L}{C}}{j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

et la condition devient :

$$-2 < -\frac{(LC\omega^2 - 1)^2}{LC\omega^2} < 0$$

d'où nous déduisons (inéquation du second degré en ω^2) :

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{LC}} < \omega < \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{LC}}$$

Pour le quatrième quadripôle, z_1 et z_3 sont respectivement égaux à :

$$z_1 = \frac{\frac{L}{C}}{j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{j}{4}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

et la condition devient :

$$-2 < -\frac{4LC\omega^2}{(LC\omega^2 - 1)^2} < 0$$

d'où nous déduisons :

$$\omega < \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{LC}} \quad \text{ou} \quad \omega > \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{LC}}$$

Posons :

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad N_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{LC}}, \quad N_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{LC}}.$$

Nous constatons, au vu des résultats ci-dessus, que le premier quadripôle laisse passer tout courant alternatif sinusoïdal de fréquence inférieure à N_0 : c'est un *filtre passe-bas*; le second laisse passer les courants de fréquence supérieure à N_0 : c'est un *filtre passe-haut*; le troisième laisse passer les courants de fréquence intermédiaire entre N_1 et N_2 : c'est un *filtre passe-bande*;

le quatrième enfin laisse passer les courants de fréquence extérieure à l'intervalle $[N_1, N_2]$: c'est un *filtre coupe-bande*.

Il doit être bien entendu que les quadripôles tels que ceux étudiés ci-dessus sont fondamentalement utilisés en chaînes, associés bout à bout, ce qui fait tout l'intérêt de la matrice de transfert et de l'impédance itérative d'une part, de la notion de bande passante d'autre part : les oscillations électriques dont la fréquence est extérieure à la bande passante sont impitoyablement atténuées, voire coupées, par des chaînes suffisamment longues de tels quadripôles, d'où le nom de *filtres*. Il n'est sans doute pas nécessaire de rappeler ici toute l'importance pratique des filtres, employés aussi bien dans les matériels radiophoniques que dans les installations téléphoniques, etc.

9-5. CONDENSATEUR IMPARFAIT. — *Un condensateur de capacité C présente une résistance de fuite très grande R. Calculer son impédance Z et le déphasage φ qu'il introduit entre courant et tension, ainsi que l'angle de perte $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varphi$.*

— SOLUTION —

Un condensateur imparfait est équivalent à un condensateur parfait de même capacité et monté en parallèle avec une résistance pure égale à sa résistance de fuite; son admittance est donc la somme de celle d'une capacité pure C et de celle d'une résistance pure R :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-j} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + jC\omega$$

donc :

$$z = \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} (1 - jRC\omega).$$

L'impédance réelle Z et l'angle de déphasage φ sont donc égaux à :

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \approx \frac{1}{C\omega} \left(1 - \frac{1}{2R^2 C^2 \omega^2} \right) \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctg(RC\omega).$$

L'angle de perte est égal à :

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varphi = RC\omega.$$

9-6. MESURE D'UNE PUISSANCE. — *Un appareil A fonctionne en courant alternatif sinusoïdal sous une tension efficace déterminée U_1 en utilisant une intensité efficace déterminée I, et l'on se propose de mesurer la puissance moyenne P qu'il consomme.*

On dispose en série avec A une résistance non inductive R et l'on mesure

les tensions efficaces : U_1 aux bornes de A, U_2 aux bornes de R et U_3 aux bornes de l'ensemble. Calculer P en fonction de U_1 , U_2 , U_3 et R.

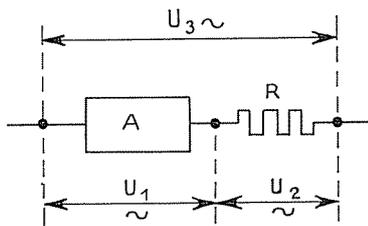


FIG. 9-6.

Si les trois tensions efficaces sont mesurées avec la même incertitude relative ε , à quelle condition la résistance R doit-elle satisfaire pour que la mesure de P soit faite avec la meilleure précision?

Cette condition étant réalisée, comparer la puissance P_2 consommée par effet

Joule dans la résistance à la puissance mesurée P.

— SOLUTION. —

Soit Z l'impédance réelle de l'appareil A, et φ l'angle de déphasage qu'il introduit entre courant et tension. L'impédance complexe de A est :

$$z_1^* = Z \cdot e^{j\varphi},$$

celle de la résistance R est : $z_2^* = R$, et l'impédance complexe de l'ensemble, somme des deux précédentes, est :

$$z_3^* = z_1^* + z_2^* = R + Z \cdot e^{j\varphi} = (R + Z \cdot \cos \varphi) + j(Z \cdot \sin \varphi).$$

Les impédances réelles de A, R et de l'ensemble sont donc respectivement :

$$Z_1 = Z, \quad Z_2 = R \quad \text{et} \quad Z_3 = \sqrt{R^2 + 2RZ \cdot \cos \varphi + Z^2}$$

La loi d'Ohm appliquée aux grandeurs efficaces s'écrit :

$$U_1 = I \cdot Z, \quad U_2 = I \cdot R \quad \text{et} \quad U_3 = I \cdot \sqrt{R^2 + 2RZ \cdot \cos \varphi + Z^2}$$

ce qui permet d'exprimer $\cos \varphi$ sous la forme :

$$\cos \varphi = \frac{U_3^2 - (U_1^2 + U_2^2)}{2U_1U_2}$$

La puissance P cherchée est égale à $U_1 I \cdot \cos \varphi$, et $I = U_2/R$, donc :

$$P = \frac{1}{2R} [U_3^2 - (U_1^2 + U_2^2)]$$

Soient $\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U_3$ les incertitudes (absolues) avec lesquelles sont mesurées les trois tensions efficaces U_1, U_2, U_3 ; si la résistance R est connue avec une précision suffisante pour qu'on puisse négliger l'erreur qu'elle introduit dans la mesure de P, nous pourrions estimer l'incertitude ΔP portant sur la mesure de P à :

$$\Delta P = \frac{1}{2R} [2U_3 \cdot \Delta U_3 + 2U_1 \cdot \Delta U_1 + 2U_2 \cdot \Delta U_2]$$

Si les incertitudes relatives $\frac{\Delta U_1}{U_1}$, $\frac{\Delta U_2}{U_2}$, $\frac{\Delta U_3}{U_3}$ sont jugées égales à ϵ , il vient :

$$\Delta P = \frac{\epsilon}{R} (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) = 2 \frac{\epsilon}{R} (R^2 + RZ \cdot \cos \varphi + Z^2)$$

La précision de la mesure est d'autant meilleure que ΔP est plus faible, donc que $R + \frac{Z^2}{R}$ est plus faible : c'est donc pour la valeur $R = Z$ de la résistance que la précision est maximale, c'est-à-dire pour :

$$\boxed{R = \frac{U_1}{I}}$$

Cette condition étant réalisée, les tensions U_1 et U_2 sont égales, les puissances apparentes consommées par A et R sont égales, mais la puissance réelle P consommée par A est inférieure à la puissance P_2 consommée par effet Joule dans la résistance :

$$\frac{P}{P_2} = \cos \varphi < 1.$$

10. ACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES ALTERNATIVES SINUSOÏDALES

10-1*. MOTEUR ASYNCHRONE POLYPHASÉ. — Une bobine circulaire plate, formée de N spires de même aire S , fermée sur elle-même, de résistance R et d'auto-inductance L , est libre de tourner autour d'un diamètre vertical Δ . Elle est soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme horizontal, de module constant B et tournant autour de l'axe Δ avec une vitesse angulaire constante ω_0 .

Calculer, en fonction des données et de la vitesse angulaire de rotation ω (supposée constante) de la bobine, le couple moyen Γ qui s'exerce sur la bobine.

Tracer la courbe représentant Γ en fonction de ω . Comment se modifie cette courbe lorsque R varie? Que se passe-t-il lorsqu'on exerce sur la bobine un couple résistant croissant?

INDICATIONS. — Le flux Φ de l'induction magnétique \vec{B} à travers la bobine varie avec le temps si les deux vitesses angulaires ω_0 et ω sont différentes. Il s'ensuit l'apparition dans la bobine d'un courant d'induction, dont l'intensité est calculable, connaissant Φ (donc $\frac{d\Phi}{dt}$) et l'impédance complexe $z^* = R + jL\omega$ de la bobine. La bobine est alors douée d'un moment magnétique \vec{M} , et se trouve donc soumise à l'action d'un couple $\vec{\gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$, dont on cherchera la valeur moyenne $\bar{\Gamma}$.

— SOLUTION —

Dans le plan horizontal passant par le centre O de la bobine, choisissons un axe de référence Ox , par exemple l'axe ayant pour direction et sens ceux de

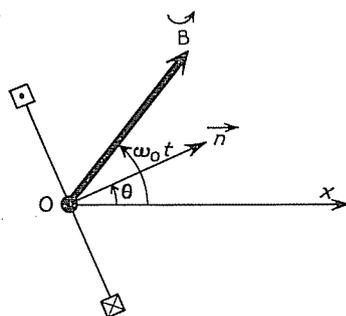


FIG. 10-1 1°.

l'induction magnétique \vec{B} à l'instant origine $t = 0$, et appelons par exemple θ l'angle de cet axe Ox et de l'axe orienté On de la bobine (le sens de On est déterminé dès que l'on a choisi sur la bobine un sens de rotation, d'ailleurs arbitraire) : $\theta = (Ox, On)$. L'angle (Ox, \vec{B}) étant égal à $\omega_0 t$, le flux Φ de \vec{B} à travers la bobine est, à l'instant t :

$$\Phi = NSB \cdot \cos(\omega_0 t - \theta).$$

Il apparaît dans la bobine une force électromotrice d'induction égale à :

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = NSB \cdot \left(\omega_0 - \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \sin(\omega_0 t - \theta),$$

donc aussi un courant d'intensité i telle que :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = NSB \cdot \left(\omega_0 - \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \sin(\omega_0 t - \theta). \quad (1)$$

Le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de la bobine est porté par l'axe On , et sa mesure algébrique sur cet axe est : $\mathcal{M} = NSi$. Le torseur des forces électromagnétiques appliquées à la bobine se réduit au seul couple : $\vec{\gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$. Ce vecteur-couple est porté par l'axe Δ , et sa mesure algébrique sur cet axe (orienté par exemple vers le haut) dépend de \mathcal{M} , donc de i , et de l'angle $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{B})$, donc de θ . Comme d'autre part l'angle θ dépend précisément de $\vec{\gamma}$, et des autres contraintes mécaniques éventuellement imposées à la bobine, nous nous trouverons à la tête de trois équations différentielles à trois fonctions inconnues i , θ et γ , ce qui nous permettra, au moins théoriquement, de les déterminer :

$$\vec{\gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \quad \text{donc} \quad \gamma = NSB \cdot i \cdot \sin(\omega_0 t - \theta) \quad (2)$$

Soit J le moment d'inertie de la bobine par rapport à Δ , et soit $\vec{\gamma}_e$ (porté par Δ) le couple extérieur éventuellement appliqué à la bobine (ce couple représente les contraintes mécaniques qui s'ajoutent à celles d'origine électromagnétique, et qui ne sont pas précisées par l'énoncé). Les lois de la mécanique s'expriment sous la forme :

$$\gamma + \gamma_e = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

Les équations fonctionnelles (1), (2) et (3) permettent théoriquement, compte tenu de la donnée des conditions initiales, de J et de γ_e (*a priori* fonction du temps, mais connu), de déterminer γ , i et θ , donc de définir et calculer un couple moyen Γ .

Ce problème est bien trop compliqué dans le cas général (outre que l'énoncé ne précise, ni J , ni γ_e), nous nous contenterons d'étudier les régimes permanents: nous supposons que $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ est constant ($\theta = \omega \cdot t + \alpha$), la f.é.m. E est alors sinusoïdale de pulsation $(\omega_0 - \omega)$, nous supposons de plus que l'intensité l'est aussi (avec la même pulsation). Dans ces conditions, l'équation (1) sera remplacée par la loi d'Ohm (exprimée entre grandeurs complexes):

$$E^* = z^* \cdot i^*$$

où :

$$E^* = NSB \cdot (\omega_0 - \omega) \cdot e^{(\omega_0 - \omega)t - \alpha - \frac{\pi}{2}}, \quad z^* = R + jL(\omega_0 - \omega)$$

Il vient ainsi :

$$i = \frac{\text{NSB} \cdot (\omega_0 - \omega)}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}} \cdot \sin [(\omega_0 - \omega)t - \alpha - \varphi] \quad \text{et} \quad \text{tg } \varphi = \frac{L(\omega_0 - \omega)}{R}$$

L'équation (2) devient alors :

$$\gamma = \frac{(\text{NSB})^2(\omega_0 - \omega)}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}} \cdot \sin [(\omega_0 - \omega)t - \alpha] \cdot \sin [(\omega_0 - \omega)t - \alpha - \varphi]$$

ou :

$$\gamma = \frac{(\text{NSB})^2(\omega_0 - \omega)}{2\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}} \cdot \{\cos \varphi - \cos [2(\omega_0 - \omega)t - 2\alpha - \varphi]\}$$

Si $\omega = \omega_0$, nous trouvons γ constant égal à zéro; si $\omega \neq \omega_0$, le couple γ ainsi obtenu est la somme d'une composante continue et d'une composante alternative sinusoïdale, sa valeur moyenne se réduit à la composante continue :

$$\Gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \gamma \cdot dt \right] = \frac{(\text{NSB})^2(\omega_0 - \omega)}{2\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}} \cdot \cos \varphi = \frac{(\text{NSB})^2(\omega_0 - \omega)R}{2[R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2]}$$

L'énoncé n'imposait aucunement de mener le calcul conduisant aux équations (1), (2) et (3), puis la discussion conduisant à l'approximation; il suffisait de tenir dès l'abord $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ pour constant, et l'intensité i pour sinusoïdale, mais le calcul ainsi abordé a l'intérêt de montrer pourquoi l'on fait des approximations, et où : d'une part en supposant ω constant (ce qui exigerait théoriquement que l'on ajuste à chaque instant le couple extérieur γ_e à la valeur $\gamma_e = J\omega - \gamma$), d'autre part en négligeant la composante non sinusoïdale de l'intensité (solution de l'équation (1) sans second membre, dont l'amplitude maximale décroît d'ailleurs exponentiellement avec le temps). L'approximation ainsi faite est en pratique excellente, notamment si le moment d'inertie J est suffisamment grand.

Le tracé de la courbe représentant Γ en fonction de ω ne pose aucun problème, il est représenté sur la figure 10-1-2°. Le couple Γ a le signe de $(\omega_0 - \omega)$, s'annule pour $\omega = \omega_0$, est extrémal pour

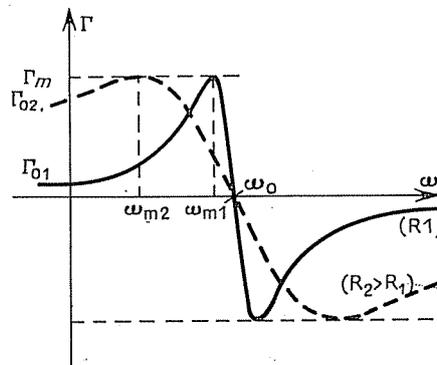


FIG. 10-1 2°.

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon \frac{R}{L} \quad (\varepsilon = +1 \text{ ou } -1)$$

et prend alors la valeur $\varepsilon \frac{(\text{NSB})^2}{4L}$,

et tend à s'annuler quand ω tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Le couple Γ est moteur s'il a le signe de ω : il est donc moteur pour $0 < \omega < \omega_0$ et

résistant pour $\omega < 0$ ou pour $\omega > \omega_0$.

Lorsque R varie, le couple maximal $\Gamma_m = \frac{(\text{NSB})^2}{4L}$ reste constant, mais la valeur $\omega_m = \omega_0 - \frac{R}{L}$ pour laquelle il est obtenu décroît quand R augmente, et d'autre part le couple au démarrage $\Gamma_0 = \frac{(\text{NSB})^2 R \omega_0}{2(R^2 + L^2 \omega_0^2)}$ augmente.

Si l'on exerce sur la bobine un couple résistant de module constant γ_e , un régime permanent est atteint si $(\gamma + \gamma_e)$ est nul, ou plutôt (compte tenu des approximations effectuées, et notamment si J est grand) si $(\Gamma + \gamma_e)$ est nul; ceci est possible pour différentes valeurs de ω selon la valeur de γ_e : si $\gamma_e < \Gamma_0$, une seule valeur de ω convient, elle est comprise entre ω_m et ω_0 et correspond à un fonctionnement stable car pour cette valeur, $\frac{d\Gamma}{d\omega}$ est négatif;

si $\gamma_e = \Gamma_0$, à la valeur précédente s'ajoute la valeur $\omega = 0$, qui correspond à un fonctionnement (à un non-fonctionnement, devrait-on dire) instable car $\frac{d\Gamma}{d\omega}$ est alors positif;

si $\Gamma_0 < \gamma_e < \Gamma_m$, trois valeurs de ω correspondent à un régime permanent, la valeur $\omega = 0$ (car, si le couple moteur est insuffisant, le couple résistant s'ajuste de telle sorte que le couple résultant soit nul), une valeur comprise entre 0 et ω_m , qui correspond à un fonctionnement instable ($\frac{d\Gamma}{d\omega} > 0$) et une valeur comprise entre ω_m et ω_0 , qui correspond à un fonctionnement stable ($\frac{d\Gamma}{d\omega} < 0$);

si $\gamma_e = \Gamma_m$, le régime permanent est atteint pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \omega_m$, mais le fonctionnement est instable pour cette dernière valeur (on dit que le moteur décroche);

enfin, si $\gamma_e > \Gamma_m$, le seul régime permanent possible est l'arrêt du moteur ($\omega = 0$).

Quoique nous n'ayons pas étudié les phénomènes transitoires (c'est-à-dire ce qui se passe quand $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ n'est pas nul), nous pouvons prévoir, au vu de la pente

de la courbe $\Gamma(\omega)$, vers quel régime permanent le moteur va évoluer. Supposons qu'à l'instant origine $t = 0$, le moteur se trouve arrêté ($\omega = 0$), qu'on applique un couple résistant de module constant γ_e inférieur à Γ_0 , puis qu'on mette le moteur en marche (c'est-à-dire que l'on branche le moteur, donc qu'on fasse apparaître l'induction tournante \vec{B}): le couple $\vec{\Gamma}$ est moteur de module supérieur à $|\gamma_e|$, donc le moteur commence à tourner, ω augmente jusqu'à la valeur de fonctionnement stable, comprise entre ω_m et ω_0 .

Si le couple γ_e est supérieur à Γ_0 , le moteur ne se met pas en marche,

mais si $\Gamma_0 < \gamma_e < \Gamma_m$, et si on lance artificiellement, mécaniquement par exemple, le moteur jusqu'à une vitesse ω supérieure à la seconde valeur de régime permanent, le couple résultant devient moteur, ω augmente, dépasse ω_m et se stabilise autour de la troisième valeur de régime permanent, entre ω_m et ω_0 .

Si, lorsque le moteur fonctionne, l'on augmente le couple résistant γ_e , la vitesse ω décroît, le couple moteur Γ augmente et s'ajuste à la valeur γ_e ; si γ_e atteint ou dépasse Γ_m , le moteur « décroche » puis s'arrête. Le couple de démarrage Γ_0 n'est pas nul, donc le moteur peut démarrer seul, mais si $\Gamma_0 < \gamma < \Gamma_m$, on peut faciliter le démarrage en intercalant une résistance en série : R augmente et Γ_0 aussi.

De tels moteurs sont dits *asynchrones* car ils fonctionnent à une vitesse différente de ω_0 , et variable; en fait, dans le cas d'un moteur réel, le rapport $\frac{R}{L\omega_0}$ est de l'ordre de 3 à 5 %, et la vitesse ω dépend donc très peu de la charge. Ils sont dits polyphasés car l'induction tournante n'est pas obtenue par un moyen mécanique, mais par le fonctionnement de bobines fixes dans lesquelles on fait passer des courants de même fréquence, mais déphasés; les petits moteurs asynchrones réels ont un rotor constitué, non par une bobine comme ci-dessus, mais par une « cage d'écureuil », qui fonctionne comme un jeu de plusieurs cadres. Ces moteurs sont assez robustes, car ils sont de conception simple, et ne nécessitent pas l'emploi de contacts mobiles.

10-2. MOTEUR ASYNCHRONE MONOPHASÉ. — Une bobine circulaire plate, formée

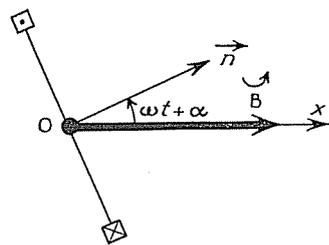


FIG. 10-2 1°.

de N spires de même aire S , fermée sur elle-même, de résistance R et d'auto-inductance L , est libre de tourner autour d'un diamètre vertical Δ . Elle est soumise à l'action d'un champ magnétique alternatif sinusoïdal de direction horizontale fixe : $B = B_0 \cdot \cos \omega_0 t$. Sachant que la vitesse angulaire de rotation ω de la bobine est constante, calculer le couple moyen Γ qui s'exerce sur la bobine. Un tel dispositif peut-il servir de moteur ?

— SOLUTION —

Orientons la parallèle Ox à \vec{B} menée par le centre O de la bobine, et choisissons un sens de rotation sur la bobine, ce qui revient à orienter son axe On . L'angle de ces deux axes est : $(Ox, On) = \omega t + \alpha$, où α est une constante; le flux Φ de l'induction magnétique \vec{B} à travers la bobine est, à l'instant t :

$$\Phi = NSB_0 \cdot \cos \omega_0 t \cdot \cos (\omega t + \alpha).$$

Ce flux Φ peut s'écrire comme la somme de deux flux alternatifs sinusoïdaux Φ_+ et Φ_- de pulsations différentes (si $\omega \neq 0$ tout au moins) :

$$\Phi_+ = \frac{NSB_0}{2} \cdot \cos [(\omega_0 + \omega)t + \alpha] \quad \text{et} \quad \Phi_- = \frac{NSB_0}{2} \cdot \cos [(\omega_0 - \omega)t - \alpha]$$

Il apparaît dans la bobine une force électromotrice d'induction E somme de deux f.é.m. alternatives sinusoïdales $E_+ = -\frac{d\Phi_+}{dt}$ et $E_- = -\frac{d\Phi_-}{dt}$. L'intensité i du courant d'induction est somme des intensités correspondantes i_+ et i_- (nous en négligerons les composantes transitoires non sinusoïdales). Le couple γ , dépendant linéairement de i , est également somme des couples correspondants γ_+ et γ_- .

$$E_+ = -\frac{d\Phi_+}{dt} = \frac{NSB_0 \cdot (\omega_0 + \omega)}{2} \cdot \sin [(\omega_0 + \omega)t + \alpha]$$

L'impédance complexe de la bobine correspondant à la pulsation $(\omega_0 + \omega)$ est $[R + jL(\omega_0 + \omega)]$ donc l'intensité correspondante est :

$$i_+ = \frac{NSB_0 \cdot (\omega_0 + \omega)}{2\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 + \omega)^2}} \cdot \sin [(\omega_0 + \omega)t + \alpha - \varphi_+],$$

avec

$$\text{tg } \varphi_+ = \frac{L(\omega_0 + \omega)}{R}$$

Le couple correspondant $\vec{\gamma}_+ = \vec{\mathcal{M}}_+ \wedge \vec{B}$ est porté par Δ et a pour mesure algébrique :

$$\gamma_+ = -\frac{(NSB_0)^2(\omega_0 + \omega)}{2\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 + \omega)^2}} \cdot \sin [(\omega_0 + \omega)t + \alpha - \varphi_+] \cdot \sin (\omega t + \alpha) \cdot \cos \omega_0 t$$

ce qui peut s'écrire, après transformations :

$$\gamma_+ = \frac{(NSB_0)^2(\omega_0 + \omega)}{8\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 + \omega)^2}} \{ \cos [2(\omega_0 + \omega)t + 2\alpha - \varphi_+] + \cos (2\omega t + 2\alpha - \varphi_+) - \cos (2\omega_0 t - \varphi_+) - \cos \varphi_+ \}$$

Nous obtiendrons de même :

$$\gamma_- = \frac{(NSB_0)^2(\omega_0 - \omega)}{8\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}} \{ -\cos [2(\omega_0 - \omega)t - 2\alpha - \varphi_-] - \cos (2\omega t + 2\alpha + \varphi_-) + \cos (2\omega_0 t - \varphi_-) + \cos \varphi_- \}$$

Le couple moyen Γ cherché est défini comme :

$$\Gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\gamma_+ + \gamma_-) \cdot dt \right]$$

Le calcul de Γ est légèrement différent selon que ω est nul ou non nul :

1° si $\omega = 0$,

$$\Gamma = \frac{(\text{NSB}_0)^2 \omega_0}{8 \sqrt{R^2 + L^2 \omega_0^2}} [\cos(2\alpha - \varphi_+) - \cos \varphi_+ - \cos(2\alpha + \varphi_-) + \cos \varphi_-]$$

et dans ce cas :

$$\text{tg } \varphi_+ = \text{tg } \varphi_- = \frac{L\omega_0}{R} \quad \text{donc} \quad \Gamma = \frac{(\text{NSB}_0)^2 L \omega_0^2}{4(R^2 + L^2 \omega_0^2)} \cdot \sin 2\alpha$$

2° si $\omega \neq 0$, le couple moyen Γ est la somme des moyennes Γ_+ et Γ_- de γ_+ et γ_- :

$$\text{tg } \varphi_+ = \frac{L(\omega_0 + \omega)}{R} \quad \text{et} \quad \text{tg } \varphi_- = \frac{L(\omega_0 - \omega)}{R}$$

donc :

$$\Gamma = \frac{(\text{NSB}_0)^2 \cdot R}{8} \cdot \left[\frac{\omega_0 - \omega}{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2} - \frac{\omega_0 + \omega}{R^2 + L^2(\omega_0 + \omega)^2} \right]$$

ou bien encore :

$$\Gamma = \frac{(\text{NSB}_0)^2 \cdot R}{4} \cdot \frac{-\omega \cdot [R^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)]}{[R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2] \cdot [R^2 + L^2(\omega_0 + \omega)^2]}$$

Le graphe de la fonction $\Gamma(\omega)$ a la forme représentée par la figure 10-2-2° : Γ tend vers zéro quand ω tend vers zéro, le point correspondant étant centre

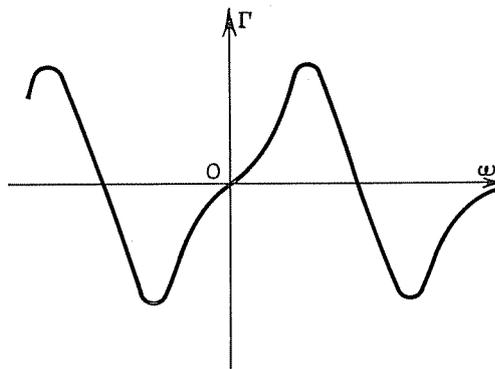


FIG. 10-2 2°.

de symétrie du graphe; il est intéressant de noter que $\Gamma(\omega)$ n'est pas continue au point $\omega = 0$, comme l'a montré le calcul précédent; en fait, la moyenne calculée n'a pas grand sens quand la pulsation ω est trop faible, les fonctions sinusoïdales de pulsation ω ou 2ω variant alors trop lentement, et les phénomènes transitoires ne sont plus négligeables. Le couple Γ est moteur s'il a

le même signe que ω , donc si :

$$|\omega| < \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{L^2}},$$

ce qui n'est évidemment possible que si $\frac{R}{L}$ n'est pas trop grand. Dans ce cas favorable, le dispositif peut servir de moteur dans les deux sens de rotation, le couple maximal étant atteint pour une valeur $|\omega|$ proche de $\omega_0 - \frac{R}{L}$ si R est faible devant L .

Il est intéressant de comparer ces moteurs à ceux étudiés dans l'exercice précédent. L'induction alternative sinusoïdale peut en effet être considérée comme la somme de deux inductions tournantes \vec{B}_+ et \vec{B}_- de module constant $B_0/2$, tournant dans un plan horizontal avec des vitesses angulaires opposées ω_0 et $-\omega_0$. Le moment magnétique \vec{M} est la somme des moments magnétiques correspondants \vec{M}_+ et \vec{M}_- , et le couple $\vec{\gamma}$ est égal à :

$$\vec{\gamma} = \vec{M}_+ \wedge \vec{B}_+ + \vec{M}_- \wedge \vec{B}_- + (\vec{M}_+ \wedge \vec{B}_- + \vec{M}_- \wedge \vec{B}_+)$$

En pratique, le couple moyen $\bar{\Gamma}$ est la somme des couples $\bar{\Gamma}_+$ et $\bar{\Gamma}_-$ correspondants, le premier ou le second des quatre termes ci-dessus ayant seul, selon le signe de ω , une valeur moyenne non négligeable : le moteur ne peut pas démarrer tout seul, mais si on le lance, le moteur peut accélérer progressivement, jusqu'à « s'accrocher » sur l'un des deux champs tournants. Les moteurs de ce type ont comme autre inconvénient d'avoir un rendement et un facteur de puissance plus faibles que les moteurs asynchrones polyphasés.

10-3. MOTEURS SYNCHRONES. — *Un aimant permanent de moment magnétique \vec{M} est libre de tourner autour d'un axe vertical Δ normal à \vec{M} .*

1° Il est soumis à l'action d'une induction magnétique \vec{B} normale à Δ , de module constant B , et tournant autour de Δ avec la vitesse angulaire constante ω_0 . Sachant que l'aimant tourne autour de Δ avec une vitesse angulaire constante ω , calculer le couple moyen $\bar{\Gamma}$ à l'action duquel l'aimant se trouve soumis. Un tel dispositif peut-il servir de moteur, et que se passe-t-il lorsqu'on exerce sur l'aimant un couple résistant croissant ?

2° Le même aimant est soumis maintenant, non à l'action d'une induction tournante, mais à celle d'une induction alternative sinusoïdale de direction horizontale fixe : $B = B_0 \cos \omega_0 t$. Calculer de même, quand l'aimant tourne autour de Δ avec une vitesse angulaire constante ω , le couple moyen $\bar{\Gamma}$ qui s'exerce sur l'aimant.

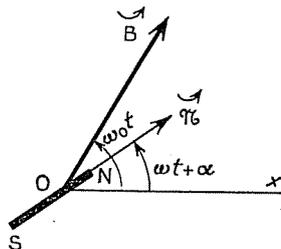


FIG. 10-3.

— SOLUTION —

Le problème dont il est question ici ressemble fort aux précédents; il est même plus facile, et nous nous contenterons d'une solution rapide.

1° Dans le cas d'une induction tournante, désignons par exemple par α la valeur de l'angle $(\vec{B}, \vec{\mathcal{M}})$ à l'instant origine $t = 0$; cet angle a pour valeur à l'instant t :

$$(\vec{B}, \vec{\mathcal{M}}) = (\omega - \omega_0)t + \alpha$$

Le couple \vec{B} auquel est soumis l'aimant est égal à :

$$\vec{\gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Sa mesure algébrique sur l'axe Δ (le sens sur Δ étant choisi conformément au choix du sens de rotation dans le plan horizontal) est :

$$\gamma = -\mathcal{M}B \cdot \sin [(\omega - \omega_0)t + \alpha]$$

La valeur moyenne de γ au cours du temps est nulle si $\omega \neq \omega_0$. Si par contre $\omega = \omega_0$, le couple moyen Γ cherché a pour valeur :

$$\Gamma = -\mathcal{M} \cdot B \cdot \sin \alpha$$

Ce couple est moteur s'il a le même signe que ω , donc si $\omega = \omega_0$ et que le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ est *en retard* sur l'induction tournante \vec{B} d'un angle compris entre 0 et π .

Si l'on exerce sur l'aimant un couple résistant constant, le couple Γ peut équilibrer exactement le couple résistant si ce dernier est inférieur au produit $\mathcal{M} \cdot B$; le régime permanent peut alors être atteint pour deux valeurs distinctes de l'angle de retard $\varphi = -\alpha$: l'une comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, l'autre comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

Il est facile de voir que la première de ces deux valeurs correspond à un fonctionnement stable (la dérivée $\frac{d\Gamma}{d\alpha}$ est alors négative) alors que la seconde correspond à un fonctionnement instable (la dérivée $\frac{d\Gamma}{d\alpha}$ est alors positive); dans le cas du fonctionnement stable, si par hasard le retard de $\vec{\mathcal{M}}$ augmente (φ augmente, α diminue), Γ augmente et dépasse donc le couple résistant, et $\vec{\mathcal{M}}$ rattrape son retard, de même, si le retard diminue, Γ augmente, le couple résistant devient prépondérant et le retard va augmenter et revenir à sa valeur normale.

Si, lors du fonctionnement stable, l'on augmente la valeur du couple résistant, celui-ci devient momentanément prépondérant : le retard de $\vec{\mathcal{M}}$ sur \vec{B} aug-

mente jusqu'à ce que Γ , augmentant, arrive à équilibrer le couple résistant; si le couple résistant atteint ou dépasse la valeur $\mathcal{N} \cdot B$, le moteur *décroche* et s'arrête.

2° Dans le cas d'une induction alternative sinusoïdale, orientons arbitrairement la direction (horizontale et fixe) de \vec{B} , par exemple dans le même sens que la valeur de \vec{B} à l'instant initial $t = 0$, et désignons par α l'angle que fait cet axe Ox avec \vec{n} à l'instant initial. A l'instant t , cet angle a pour valeur :

$$(\text{Ox}, \vec{n}) = \omega t + \alpha$$

Le couple $\vec{\gamma} = \vec{n} \wedge \vec{B}$ exercé sur l'aimant a pour mesure algébrique :

$$\gamma = -\mathcal{N}B_0 \cdot \cos \omega_0 t \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

ce qu'on peut écrire :

$$\gamma = -\frac{\mathcal{N}B_0}{2} \{ \sin [(\omega + \omega_0)t + \alpha] + \sin [(\omega - \omega_0)t + \alpha] \}$$

Le couple moyen Γ est donc nul si ω n'est pas égal à ω_0 ou à $-\omega_0$; si par contre $|\omega| = \omega_0$, le couple moyen Γ a pour valeur :

$$\Gamma = -\frac{\mathcal{N}B_0}{2} \cdot \sin \alpha$$

Tout se passe comme si l'aimant était soumis à l'action de deux inductions tournantes de même module $\frac{B_0}{2}$, mais de vitesses angulaires opposées ω_0 et $-\omega_0$; le couple moyen, somme des couples moyens dus à ces deux inductions tournantes, se réduit en fait au couple moyen dû à l'une d'elles si $|\omega| = \omega_0$.

De tels moteurs sont dits synchrones car ils fonctionnent à vitesse constante (quelle que soit la charge); pour les faire démarrer, on a généralement recours à des artifices (démarrage en moteur asynchrone par exemple). L'aimant permanent est généralement remplacé par un électroaimant alimenté en courant continu (au moyen d'une petite dynamo). Les moteurs synchrones ont un excellent rendement et ont de plus l'avantage de relever le facteur de puissance du réseau de distribution dans lequel ils sont insérés. Il est intéressant de noter que leur fonctionnement est réversible : en faisant tourner un aimant permanent à vitesse constante devant une ou plusieurs bobines, on fait naître dans cette ou ces bobines une force électromotrice alternative sinusoïdale ou des f.é.m. sinusoïdales déphasées; le même dispositif peut ainsi servir de moteur ou d'alternateur.

10-4*. MESURE DU PRODUIT $\epsilon_0 \mu_0$. — *Un solénoïde déformable comprenant $N = 100$ spires de surface $S = 10 \text{ cm}^2$ régulièrement espacées, est disposé*

verticalement. Son extrémité supérieure A est fixe et l'autre extrémité D, libre de se mouvoir, porte l'une des armatures horizontales d'un condensateur plan, l'autre armature B de ce condensateur étant fixe en regard de la première. Dans ces conditions, la longueur du solénoïde à l'équilibre est $l = 20 \text{ cm}$, et la distance entre les armatures horizontales est $e = 1 \text{ mm}$. La surface commune des armatures est $S' = 200 \text{ cm}^2$. On relie A et B aux bornes d'une source alternative sinusoïdale dont la fréquence est réglable de 10^6 à 10^8 Hz . On suppose l'inertie mécanique du système suffisante pour que tout déplacement éventuel au cours d'une période soit négligeable. On constate que pour une fréquence $\nu = 2,13 \cdot 10^7 \text{ Hz}$, le point D occupe la même position d'équilibre qu'en l'absence de courant. En déduire la valeur du produit $\epsilon_0 \mu_0$.

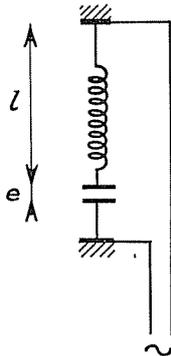


FIG. 10-4.

INDICATIONS. — 1° En l'absence de courant, le dispositif déformable étudié (solénoïde plus armature associée) est en équilibre sous l'action de son poids et des forces intérieures élastiques de rappel.

En présence de courant, et comme l'auto-inductance L est susceptible de varier quand le solénoïde se déforme, le même dispositif est de plus soumis à l'action des forces intérieures électromagnétiques, ainsi qu'à celle de la force électrostatique exercée par l'armature fixe. Il y a équilibre si ces quatre types de forces s'équilibrent : forces gravitationnelles, forces élastiques, forces électromagnétiques et forces électrostatiques.

2° Si l'équilibre est le même qu'en l'absence de courant (c'est-à-dire pour les mêmes valeurs de l et e), les actions des forces gravitationnelles et élastiques d'une part, électromagnétiques et électrostatiques d'autre part, se compensent séparément. La manière la plus simple d'exprimer l'équilibre est alors sans doute d'appliquer le théorème des travaux virtuels.

3° On se rappellera que le travail des forces intérieures électromagnétiques lors de la déformation d'un circuit parcouru par un courant d'intensité I constante a pour expression :

$$\mathcal{C}_i = \frac{1}{2} I^2 \cdot \Delta L$$

où ΔL est la variation de l'auto-inductance du circuit. On se rappellera également l'expression de l'auto-inductance d'un solénoïde :

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \cdot S$$

— SOLUTION —

En l'absence de courant, l'armature supérieure du condensateur est en équilibre sous l'action de son poids \vec{P} et d'une force élastique de rappel \vec{R}_0 :

$$\vec{P} + \vec{R}_0 = \vec{0}.$$

En présence de courant, soumise à l'action de son poids \vec{P} , à celle d'une force élastique de rappel \vec{R} , à celle d'une force de rappel \vec{f}_{em} d'origine électromagnétique, à celle enfin de la force électrostatique \vec{f}_{es} exercée par l'armature inférieure, l'armature supérieure est en équilibre si :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{em} + \vec{f}_{es} = \vec{0}.$$

Ceci n'est pas en fait réalisé à chaque instant, mais si l'inertie mécanique du système est grande, on peut négliger tout déplacement éventuel au cours d'une période, et l'équilibre est réalisé si la valeur moyenne \vec{F} de la somme $\vec{f} = \vec{f}_{em} + \vec{f}_{es}$ vérifie :

$$\vec{F} = \vec{R}_0 - \vec{R}.$$

Pour calculer \vec{F} , appliquons par exemple le théorème des travaux virtuels; si le dispositif étudié se déforme de telle sorte que l'auto-inductance L du solénoïde varie de dL , et la capacité C du condensateur de dC , le travail développé par la force \vec{F} au cours de cette déformation élémentaire sera :

$$\delta\bar{e} = \frac{1}{2} I^2 \cdot dL + \frac{1}{2} V^2 \cdot dC,$$

où I est l'intensité efficace du courant, et V la tension efficace aux bornes du condensateur.

Comme :

$$L = \mu_0 \cdot \frac{N^2 S}{l} \quad \text{et} \quad C = \epsilon_0 \cdot \frac{S'}{e},$$

il vient :

$$\delta\bar{e} = -\frac{I^2}{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2 S}{l^2} \cdot dl - \frac{V^2}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S'}{e^2} \cdot de$$

Si la pulsation du courant est ω , l'impédance réelle du condensateur est $\frac{1}{C\omega}$;

comme d'autre part la somme $e + l$ est constante, nous pouvons réécrire le travail élémentaire ci-dessus sous la forme :

$$\delta\bar{e} = \left(\frac{1}{2\epsilon_0 S' \omega^2} - \frac{\mu_0 N^2 S}{2l^2} \right) \cdot I^2 \cdot dl$$

Si, lorsque la pulsation du courant est $\omega = 2\pi\nu$, l'équilibre atteint est le même qu'en l'absence de courant (*id est* : il est obtenu pour la même valeur de l), les forces élastiques de rappel \vec{R} et \vec{R}_0 sont égales, la force \vec{F} est alors nulle, donc le travail élémentaire $\delta\bar{e}$ est nul quel que soit dl :

$$\frac{1}{2\epsilon_0 S' \omega^2} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l^2}$$

d'où nous déduisons :

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{l^2}{4\pi^2 v^2 N^2 S S'}$$

Application numérique ;

$$\left. \begin{array}{l} l = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m} \\ v = 2,13 \cdot 10^7 \text{ Hz} \\ N = 10^2 \\ S = 10 \text{ cm}^2 = 10^{-3} \text{ m}^2 \\ S' = 200 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_0 \mu_0 \simeq \frac{1}{9 \cdot 10^{16}} \text{ m}^{-2} \text{ s}^2$$

Si l'on admet que la vitesse de la lumière est : $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$, nous vérifions ainsi que : $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

10-5. TRANSFORMATEURS. — Soit u_1^* la tension complexe instantanée, de pulsation ω , appliquée aux bornes d'une première portion de circuit de résistance R_1 , d'auto-inductance L_1 et parcourue par une intensité complexe instantanée i_1^* .

Soit u_2^* la tension complexe de même pulsation appliquée aux bornes d'une seconde portion de circuit de résistance R_2 , d'auto-inductance L_2 , parcourue par une intensité i_2^* .

Soit M le coefficient d'inductance mutuelle des deux circuits.

1° Écrire sous forme matricielle la relation existant entre la matrice-colonne d'éléments u_1^* et u_2^* et la matrice-colonne d'éléments i_1^* et i_2^* .

2° Les résistances étant négligeables, exprimer le rapport $\frac{u_2^*}{u_1^*}$ pour $i_2^* = 0$ (circuit secondaire ouvert). Quelle est la condition pour que ce quadripôle soit réversible, c'est-à-dire pour que le rapport soit le même quand le circuit primaire est ouvert ($i_1^* = 0$, $u_2^* \neq 0$) ?

3° Montrer que cette condition est approximativement réalisée pour deux enroulements comportant N_1 spires et N_2 spires sur un même tore de fer doux, et calculer alors le rapport $\frac{u_2^*}{u_1^*}$.

4° Un premier tore de fer doux comporte deux enroulements : l'un, formé de N_{12} spires, a pour bornes T_1 et T_2 ; l'autre, formé de N spires, a pour bornes D_1 et D_1' .

Un second tore de fer doux comporte deux enroulements : l'un, formé de N_3 spires, a pour bornes T_3 et T_3' , l'autre, formé de N spires, a pour bornes D_2 et D_2' .

Les points T_1, T_2, T_3 sont alimentés en courant triphasé; le point T'_3 est relié directement au point milieu M de l'enroulement T_1T_2 (point tel qu'il y ait le même nombre de spires, à savoir $\frac{N_{12}}{2}$, entre T_1 et M qu'entre M et T_2).

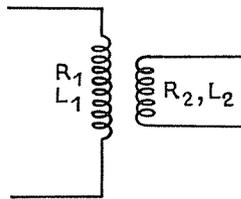


FIG. 10-5 1°.

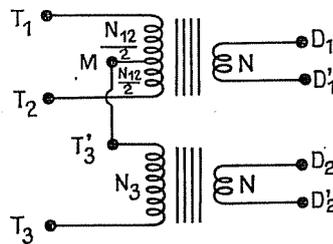


FIG. 10-5 2°.

Montrer que, pour un choix judicieux de N, N_{12} et N_3 , les tensions V_1^* et V_2^* qui apparaissent aux bornes des secondaires (entre D_1 et D_1' d'une part, D_2 et D_2' de l'autre) sont les composantes d'une tension diphasée.

— SOLUTION —

1° Les flux magnétiques traversant les deux circuits sont respectivement :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = M i_1 + L_2 i_2$$

La loi d'Ohm appliquée à chacun des circuits donne :

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

ou, entre grandeurs complexes associées :

$$u_1^* = (R_1 + j\omega L_1) i_1^* + j\omega M i_2^* \quad \text{et} \quad u_2^* = j\omega M i_1^* + (R_2 + j\omega L_2) i_2^*$$

ce qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1^* \\ i_2^* \end{bmatrix}$$

2° Si l'on admet que $R_1 = R_2 = 0$, et si de plus $i_2^* = 0$, l'équation précédente devient :

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où nous déduisons :

$$\frac{u_2^*}{u_1^*} = \frac{M}{L_1}$$

Si par contre $i_1^* = 0$ et $i_2^* \neq 0$, il vient :

$$\frac{u_2^*}{u_1^*} = \frac{L_2}{M}$$

Le quadripôle est donc réversible si :

$$M^2 = L_1 L_2$$

3° La perméabilité magnétique du fer étant très élevée, les lignes de champ, « piégées » par le fer, peuvent être considérées comme fermées sur elles-mêmes, on peut admettre qu'aucune ligne de champ magnétique ne sort du tore, et chaque spire enroulée autour de ce tore est traversée par le même flux magnétique φ (au signe près, selon le sens de l'orientation choisie sur la bobine correspondante). Les flux Φ_1 et Φ_2 traversant les deux circuits sont dans ces conditions égaux à :

$$\Phi_1 = N_1 \cdot \varphi \quad \text{et} \quad \Phi_2 = N_2 \cdot \varphi$$

donc :

$$\begin{cases} L_1 i_1 + M i_2 = N_1 \cdot \varphi \\ M i_1 + L_2 i_2 = N_2 \cdot \varphi \end{cases}$$

ces deux équations ne sont compatibles que si :

$$\begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix} \equiv L_1 L_2 - M^2 = 0$$

Un transformateur usuel satisfait ainsi à la condition démontrée au § 2°, dans la mesure où l'on peut négliger les résistances des enroulements et les pertes magnétiques du fer doux.

Dans ces conditions :

$$\frac{M}{L_1} = \frac{L_2}{M} = \frac{N_2}{N_1}$$

et :

$$\frac{u_2^*}{u_1^*} = \frac{M i_1^* + L_2 i_2^*}{L_1 i_1^* + M i_2^*} = \frac{N_2}{N_1}$$

Les deux tensions sont donc en phase (ou en opposition de phase selon le sens des enroulements) et dans le rapport des nombres de spires des enroulements correspondants.

4° Désignons par $1, k$ et k^2 les racines cubiques de l'unité ($1 + k + k^2 = 0$). Les points T_1, T_2, T_3 sont alimentés en courant triphasé, leurs potentiels complexes sont représentables par :

$$u_1^* = v^*, \quad u_2^* = k \cdot v^*, \quad u_3^* = k^2 \cdot v^*$$

Le potentiel complexe du point milieu M est :

$$u_M^* = \frac{u_1^* + u_2^*}{2} = v^* \cdot \frac{1 + k}{2} = -\frac{k^2}{2} \cdot v^*$$

D'après ce qui précède, et notamment le paragraphe 3°, les tensions complexes

V_1^* et V_2^* qui apparaissent entre D_1 et D_1' d'une part, D_2 et D_2' de l'autre, sont :

$$V_1^* = \frac{N}{N_{12}} \cdot (u_1^* - u_2^*) = \frac{N}{N_{12}} \cdot (1 - k) \cdot v^*$$

$$V_2^* = \frac{N}{N_3} \cdot (u_3^* - u_M^*) = \frac{N}{N_3} \cdot \frac{3k^2}{2} \cdot v^*$$

Le rapport de ces deux tensions est :

$$\frac{|V_2^*|}{|V_1^*|} = \frac{N_{12}}{N_3} \cdot \frac{3k^2}{2 \cdot (1 - k)}$$

On vérifie aisément que :

$$\frac{k^2}{1 - k} = \frac{j}{\sqrt{3}}$$

donc que si :

$$\boxed{N_3 = N_{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

le rapport $\frac{V_2^*}{V_1^*}$ est une racine carrée de -1 : les tensions V_1 et V_2 ont même amplitude, même pulsation et sont en quadrature; elles sont donc les composantes d'une tension diphasée.

Il est facile de transformer, par des dispositifs aussi simples que celui-ci, un système de tensions polyphasées en un autre présentant un nombre de phases différent. Seul le courant alternatif monophasé ordinaire ne peut ainsi être transformé en courant polyphasé (il faut recourir à d'autres types d'artifices).

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTROSTATIQUE

1. *Phénomènes fondamentaux de l'électrostatique. Champ électrostatique. Potentiel électrostatique* 3
2. *Équilibre des conducteurs. Capacité et énergie* 28
3. *Systèmes de conducteurs en équilibre. Influence. Condensateurs* 43

DEUXIÈME PARTIE

ÉLECTRODYNAMIQUE

4. *Lois fondamentales de l'électrodynamique. Lois d'Ohm, de Joule, de Pouillet* .. 73
5. *Réseaux de conducteurs* 87

TROISIÈME PARTIE

ÉLECTROMAGNÉTISME

6. *Lois fondamentales de l'électromagnétisme. Équations de Maxwell* 111
7. *Phénomènes électromagnétiques indépendants du temps. Champs magnétiques produits par les courants. Actions exercées par les champs d'induction sur les courants* 127
8. *Phénomènes électromagnétiques dépendant du temps. Induction électromagnétique. Auto-induction. Actions électromagnétiques entre circuits* 166

QUATRIÈME PARTIE

COURANT ALTERNATIF

9. *Propriétés générales des courants alternatifs sinusoïdaux* 189
10. *Actions électromagnétiques alternatives sinusoïdales* 203

MASSON et C^{ie}, Éditeurs,
120, Bd St-Germain, Paris (VI^e),
Dépôt légal: 4^e trimestre 1971.

Imprimé en France

IMPRIMERIE DURAND,
28-Luisant
(10-1971)

