

• Licence, Maîtrise et Magistère :  
Physique, E.E.A., Sciences et Techniques  
• Formation permanente

# Ondes électromagnétiques

## en radioélectricité et en optique

R. PETIT

- Lois générales
- Calcul du champ à partir des sources
- Propagation libre et guidée • Cavités
- Réflexion • Réfraction • Diffraction
- Utilisation des distributions  
en électromagnétisme

MASSON 

ENSEIGNEMENT DE LA PHYSIQUE

# Ondes électromagnétiques

en radioélectricité et en optique

**Roger PETIT**

*Professeur  
à l'université d'Aix-Marseille 3*

- *Lois générales*
- *Calcul du champ à partir des sources*
- *Propagation libre et guidée* • *Cavités*
- *Réflexion* • *Réfraction* • *Diffraction*

- *Utilisation des distributions  
en électromagnétisme*

2<sup>e</sup> tirage corrigé

**MASSON** Paris Milan Barcelone Bonn **1993**

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur, est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle).

Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris, tél. : 43.26.95 35.

© *Masson, Paris, 1992*

ISBN : 2-225-81571-2

ISSN : 0992-5538

---

MASSON S.A.  
MASSON S.p.A.  
MASSON S.A.  
DÜRR und KESSLER

120, bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06  
Via Statuto 2/4, 20121 Milano  
Avenida Principe de Asturias 20, 08012 Barcelona  
Maarweg, 30, 5342 Rheinbreitbach b. Bonn

# Table des matières

Avant-propos .....	IX
Notations .....	XIII
<i>Chapitre 0. Rappels et compléments sur le cours de Premier Cycle.</i>	
Électrostatique dans le vide et théorie du potentiel .....	1
Électrostatique en présence d'isolants ; théorie macroscopique des diélectriques .....	6
Introduction du vecteur $\vec{D}$ .....	10
Relations caractérisant un diélectrique .....	12
Magnétostatique dans le vide .....	15
Magnétostatique en présence de matériaux magnétiques .....	19
Introduction du vecteur $\vec{H}$ .....	21
Relations caractérisant un milieu magnétique .....	23
Résumé des résultats importants .....	25
Les phénomènes d'induction électromagnétique et la relation de Maxwell-Faraday .....	26
<i>Chapitre 1. Les lois fondamentales de l'Électromagnétisme.</i>	
Un peu d'histoire et de réflexion .....	28
Énoncé classique des lois fondamentales .....	31
L'électromagnétisme et la théorie des distributions .....	32
Les relations constitutives .....	39
Exercices .....	45
<i>Chapitre 2. Les équations de Maxwell harmoniques.</i>	
Quelques considérations théoriques sur la transformée de Fourier, le signal analytique et la représentation complexe des fonctions sinusoïdales .....	50
Le point de vue pratique .....	53
Les relations constitutives et les relations de Kramers-Krönig .....	57
L'équivalence métal-diélectrique .....	62
L'équation de Helmholtz et quelques-unes de ses propriétés .....	63
La polarisation elliptique des champs .....	68
<i>Chapitre 3. Intégration des équations de Maxwell en milieu homogène isotrope.     Potentiel scalaire et potentiel vecteur. Propagation.</i>	
Le problème des potentiels .....	74
L'équation des ondes et sa solution élémentaire .....	78
Le champ créé par des sources données .....	79
Les potentiels en régime harmonique .....	82
Notion de front d'onde et application à l'optique géométrique .....	85
<i>Chapitre 4. Considérations énergétiques et relations de réciprocité.</i>	
Les lois de conservation en physique .....	91

L'identité de Poynting .....	92
La notion d'énergie en électromagnétisme du vide .....	93
L'énergie électromagnétique en régime sinusoïdal .....	95
Effet Joule et échauffement des diélectriques .....	97
Notions sur l'impulsion de champ .....	100
Introduction aux relations de réciprocité .....	104
<b>Chapitre V. L'onde plane en régime sinusoïdal.</b>	
L'onde plane dans un milieu non absorbant .....	111
L'onde plane dans un milieu absorbant .....	115
Commentaires sur le rôle des ondes planes .....	118
<b>Chapitre VI. Le paquet d'ondes.</b>	
Introduction et définitions .....	120
Propagation du paquet d'ondes: centre d'onde, vitesse de groupe .....	124
Étendue ou largeur du paquet ; déformation en cours de propagation .....	126
Importance de la notion de paquet d'ondes .....	128
<b>Chapitre VII. Dioptré plan et milieux stratifiés.</b>	
Introduction et notations .....	130
Généralités .....	131
Réflexion et réfraction d'un faisceau sur un dioptré .....	133
Réflexion et réfraction d'une onde plane sur un dioptré ; formules de Fresnel, applications .....	136
Étude mathématique du coefficient de réflexion .....	150
Notions sur les milieux stratifiés ; formulation matricielle .....	155
<b>Chapitre VIII. Le métal infiniment conducteur.</b>	
Retour sur le dioptré plan en incidence normale et passage à une conductivité infinie .....	162
Généralisation et propriétés du métal infiniment conducteur .....	165
Conditions aux limites imposées par un métal infiniment conducteur .....	166
Réflexion d'une onde plane par un miroir infiniment conducteur .....	167
<b>Chapitre IX. Guides d'ondes métalliques.</b>	
Introduction .....	168
Étude mathématique d'un certain type d'onde .....	170
Le problème des guides métalliques : champs TE et TM .....	173
Compléments sur le mode $TE_{0,1}$ du guide rectangulaire .....	187
Recherche des valeurs propres du Laplacien dans un rectangle. Notion de mode dégénéré .....	190
Étude des ondes TEM ; coaxial et ligne bifilaire .....	192
Autres lignes de transmission .....	208
Superposition d'ondes guidées ; régime « semi-stationnaire » .....	209
<b>Chapitre X. Notions sur la théorie des lignes en régime harmonique.</b>	
Introduction .....	211
Rappels sur la théorie des circuits B.F .....	212
Représentation d'une ligne sans pertes par un quadripôle à constantes réparties .....	216
Étude des lignes réelles .....	219
Impédance et théorie des lignes .....	222
L'abaque de Smith .....	227
<b>Chapitre XI. Guides diélectriques.</b>	
Le guide « plans parallèles » ou « slab » .....	230

Le « slab symétrique » .....	240
Le double slab ; notion de couplage .....	244
<i>Chapitre XII. Notions sur la théorie des fibres optiques.</i>	
Introduction .....	249
Équation de dispersion .....	252
Exercice .....	254
Quelques idées à retenir .....	256
<i>Chapitre XIII. Notions sur les cavités.</i>	
Exercice préliminaire .....	258
La cavité infiniment conductrice de forme quelconque .....	260
Les cavités réelles et le problème des pertes ; le facteur de qualité Q .....	262
<i>Chapitre XIV. Rayonnement.</i>	
Quelques calculs rencontrés en théorie des antennes .....	265
Rayonnement d'une charge en mouvement dans le vide, potentiels de Lienard-Wiechert et calcul du champ électromagnétique .....	272
<i>Chapitre XV. Introduction aux problèmes de diffraction en régime harmonique.</i>	
Le problème de la diffraction par une tige infiniment conductrice .....	281
Quelques propriétés générales du champ ; théorème optique .....	283
Détermination du champ diffracté par la méthode intégrale en E// .....	288
Détermination du champ diffracté par la méthode intégrale en H// .....	292
Cas particulier d'une tige à section circulaire .....	293
Commentaires sur l'unicité de la solution ; condition de Meixner .....	295
<i>Chapitre XVI. Diffraction par un réseau.</i>	
Le modèle mathématique utilisé .....	296
La pseudo-périodicité du champ .....	298
Le développement de Rayleigh et la formule des réseaux .....	299
Les suites de Yasuura .....	303
Quelques importantes propriétés générales ; conservation de l'énergie et réciprocité ....	305
Les différentes méthodes numériques utilisées pour le calcul des efficacités .....	310
Exercice sur la « fonction de Green » en théorie des réseaux .....	316
<i>Annexe 1. Notions élémentaires d'algèbre et d'analyse vectorielle</i> .....	317
<i>Annexe 2. La représentation complexe des fonctions sinusoïdales</i> .....	322
<i>Annexe 3. La notion de signal analytique</i> .....	328
<i>Annexe 4. Notions sur les fonctions de Bessel</i> .....	334
<i>Bibliographie</i> .....	345
<i>Index</i> .....	347

# Avant-propos

Il y a quelques dizaines d'années, l'étudiant quittait souvent l'université sans avoir beaucoup manipulé les équations de Maxwell. On lui avait bien dit qu'elles résumaient en quelques lignes tout l'électromagnétisme, mais il n'en connaissait guère que quelques solutions simples, en milieu homogène illimité. Il est vrai que l'insuffisance de ses connaissances mathématiques et la faiblesse de ses moyens de calcul ne lui auraient guère permis d'aller beaucoup plus loin. Aujourd'hui les programmes de nos maîtrises de physique, comme ceux de nos écoles d'ingénieurs, comportent des compléments de mathématiques, et l'ordinateur permet aux physiciens débutants d'envisager des calculs numériques que les plus prestigieux de leurs aînés n'auraient jamais osé entreprendre. L'étude des équations aux dérivées partielles est maintenant suffisamment avancée pour que les équations de Maxwell puissent être utilisées dans la résolution de nombreux problèmes pratiques, en radioélectricité comme en optique. Personnellement, c'est l'étude théorique des réseaux de diffraction qui, au début des années 60, m'a conduit à l'électromagnétisme. À cette époque, dans le monde occidental au moins, les Anglo-Saxons tenaient le haut du pavé et, presque toujours, les congrès internationaux mettaient en vedette des chercheurs américains. Les plus anciens d'entre eux avaient souvent participé activement au développement du radar pendant la Seconde Guerre mondiale ; les autres étaient généralement leurs élèves. Tous parlaient des « microwaves » avec un enthousiasme communicatif et pourtant, pourquoi ne pas l'avouer, j'avais du mal à suivre, ou même à lire, leurs communications. Je tins d'abord mes professeurs d'anglais pour les boucs émissaires de ces difficultés ; mais il m'apparut rapidement que le mal était plus profond. Je ne dominais pas les méthodes mathématiques auxquelles ils faisaient sans cesse allusion. On parlait du plan complexe, des coupures, de Wiener-Hopf, des fonctions de Green, des dyades, des équations intégrales... tandis que mes études m'avaient surtout familiarisé avec quelques équations différentielles et la construction de Fresnel ! Bref, l'enseignement qui m'avait été dispensé dans les cours de physique générale de l'époque n'était pas adapté aux recherches que j'avais la prétention d'entreprendre. Je fréquente encore aujourd'hui les colloques consacrés à la propagation des ondes électromagnétiques et, d'année en année, les connaissances mathématiques, implicitement imposées aux nouveaux venus, ne font qu'augmenter. La possibilité d'utiliser les plus puissants ordinateurs ne dispense pas le chercheur d'une analyse soignée sauf, évidemment, si l'on identifie l'informatique scientifique à l'aveugle utilisation de logiciels écrits par d'autres. L'enseignement supérieur peut, semble-t-il, avoir des buts plus ambitieux. Nos étudiants doivent non seulement acquérir le bagage aujourd'hui nécessaire pour trouver un emploi ; ils doivent être préparés à s'adapter demain à

des situations nouvelles. Dans un monde en rapide évolution l'apprentissage des techniques ne doit surtout pas faire oublier la formation générale. C'est dans cet esprit que je me suis mis au travail, essayant *a posteriori* de rédiger le cours dont j'aurais aimé pouvoir disposer lors de ma propre formation initiale.

Ce livre n'est pas un traité, mais un simple ouvrage d'enseignement. Il est prévu pour quarante-cinq heures de cours magistral complétées par autant de travaux dirigés et un peu de réflexion personnelle. L'accent étant mis sur l'aspect physique mathématique, il est clair que des travaux pratiques sont aussi à prévoir. En physique, il suffit au lecteur d'avoir assimilé un cours de premier cycle de l'enseignement supérieur. Puisqu'il n'existe pas de programmes officiels à l'université, nous nous référons au programme minimal des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques (Spéciales M). En mathématiques, la seule connaissance du programme traditionnel des classes préparatoires est par contre nettement insuffisante ; la lecture de certains chapitres sera uniquement profitable à qui connaît déjà la théorie élémentaire des distributions et ses prolongements à la convolution et à la transformation de Fourier. Tout ceci figure évidemment dans le cours de Mathématiques<sup>1</sup> que nous avons publié dans la même collection et qui sera, par suite, souvent cité en référence.

On aurait pu, comme on le fait généralement aujourd'hui, se contenter d'une présentation axiomatique à partir des équations de Maxwell. Compte tenu de la présumée hétérogénéité de l'ensemble des lecteurs, on a préféré commencer par quelques réflexions et compléments sur les cours antérieurs. Il faut lire attentivement le chapitre 0 et réfléchir aux problèmes qu'il soulève ; vous y trouverez sans doute quelque chose de nouveau mais, quoi qu'il en soit, vous ferez ainsi connaissance avec l'auteur, son style, ses manies, son souci de rigueur... Bref vous connaîtrez l'esprit du cours avant d'entrer dans le vif du sujet.

Les quatre chapitres suivants (I à IV) sont consacrés à l'exposé des lois fondamentales, connues maintenant depuis plus d'un siècle ; leur originalité réside dans l'emploi assez systématique des distributions au niveau d'un cours de maîtrise. L'introduction d'un nouvel outil mathématique ne se fait jamais sans quelque réticence ; j'espère que vous vous laisserez convaincre, et crois pouvoir vous assurer que l'effort accompli sera payant pour ceux d'entre vous qui envisagent une vraie carrière scientifique. Certains passages difficiles pourront être sautés en première lecture si le cours de mathématiques n'est pas encore bien assimilé ; ils sont indiqués — c'est une règle générale valable tout au long du livre — par un trait continu limitant la marge de gauche.

Les chapitres V, VI, VII, VIII, IX, X et XIII contiennent ce qui peut être considéré comme un programme minimal. On y aborde des sujets très classiques, et seule la façon de présenter certains points délicats peut recéler quelque originalité. Citons à cet égard les exposés consacrés au paquet d'ondes, aux formules de Fresnel et au métal infiniment conducteur. La théorie des guides métalliques nous a fourni l'occasion de montrer l'importance des problèmes aux valeurs propres. Ça et là quelques exercices attirent l'attention sur l'intérêt de la théorie des fonctions analytiques.

---

<sup>1</sup> *L'outil mathématique*, par R. PETIT, 3<sup>e</sup> édition révisée, 255 pages, 1991.



On trouve dans les chapitres XI, XII, XIV, XV et XVI quelques notions sur des sujets plus spécialisés (antennes, diffraction, rayonnement d'une charge en mouvement) ou plus à la mode (guides diélectriques, fibres optiques, théorie électromagnétique des réseaux de diffraction).

L'ouvrage se termine par quatre annexes appelées à jouer un double rôle. Comme un simple aide-mémoire, elles rassemblent tout d'abord des formules plus ou moins compliquées mais sans cesse utilisées. Elles contiennent aussi un exposé sur certaines représentations des signaux (amplitudes complexes, signal analytique) souvent présentées de façon trop imprécise. Enfin il nous a paru indispensable de rédiger avec soin quelques pages sur les fonctions de Bessel, indissolublement liées à l'équation de Helmholtz, et trop souvent décrites par nos collègues mathématiciens. Il faut certes combattre la « besseomanie », mais il semble bien difficile de se passer complètement des fonctions spéciales.

On nous reprochera peut-être de n'avoir rien dit des unités électriques ; c'est une question bien étudiée en premier cycle et, dans le système légal MKSA que nous utilisons systématiquement, les unités associées aux nouvelles grandeurs introduites ( $\vec{P}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ )... n'ont pas reçu de noms particuliers.

Notre but initial était de mettre à la disposition des étudiants de langue française un petit livre bon marché, pouvant être considéré comme une introduction à l'étude théorique des champs électromagnétiques. Ceci nous a conduit à des choix difficiles et explique des lacunes que certains ne manqueront pas de regretter. Non seulement nous nous sommes délibérément limités au point de vue macroscopique, mais nous avons dû renoncer à évoquer certains aspects théoriques fondamentaux (électromagnétisme et relativité) et à donner ne serait-ce que quelques notions sur les milieux anisotropes. À la réflexion, même les développements mathématiques auraient mérité d'être plus étoffés ; les notions de sources magnétiques, de fonctions de Green, ont à peine été évoquées alors qu'elles sont constamment utilisées de nos jours dans les publications ; il en est de même pour les considérations de symétrie. Mais il faut bien laisser matière aux enseignements de troisième cycle...

La plupart des questions traitées ont déjà fait l'objet de cours photocopiés, sans cesse remaniés au cours de plus de dix années d'enseignement. C'est dire que je dois des remerciements à tous mes collaborateurs et plus particulièrement à mon collègue M. CADILHAC. C'est l'assurance de son aide qui m'a incité à introduire les distributions dans mon cours d'électromagnétisme. Comme pour l'*Outil Mathématique*, la frappe du manuscrit a été assurée par M<sup>me</sup> FRIZZI et je crains que ma gratitude ne puisse lui faire oublier l'ampleur de la tâche accomplie. Sans doute aurait-elle préféré s'initier aux charmes du traitement de texte sur un travail de secrétariat plus traditionnel

*Avant-propos à la deuxième édition*

Cette seconde édition m'aura, j'espère, donné l'occasion de corriger la majorité des petites erreurs qui avaient échappé à mon attention en relisant le manuscrit de 1989.

L'efficace collaboration technique de M<sup>me</sup> FRIZZI m'a aussi permis de modifier légèrement quelques passages délicats pour essayer d'en augmenter la précision ou la clarté... Je remercie tous ceux qui ont contribué à ces améliorations en me faisant part de leurs remarques et tout particulièrement mon collaborateur, G. TAYEB, maître de conférences, chargé des travaux dirigés.

# Notations

## 1. GENERALITES.

Ce livre contient des chapitres repérés par des chiffres romains et quatre annexes  $A_1, A_2, A_3, A_4$  assimilables à des chapitres du point de vue des notations. Chaque chapitre (ou annexe) est divisé en paragraphes eux mêmes divisés en sous-paragraphes ; par exemple, 2.1 désigne le premier sous-paragraphes du deuxième paragraphe. Certaines formules sont numérotées dans l'ordre où elles apparaissent, mais la numérotation est reprise au début de chaque chapitre.

Voici quelques exemples illustrant les procédés employés pour renvoyer à un passage du livre.

Notation	passage auquel elle renvoie
(12)	formule 12 du même chapitre
(12,13)	formules 12 et 13 du même chapitre
(1-4)	formules 1 à 4 du même chapitre
(§ 2)	paragraphe 2 du même chapitre
( $\Sigma$ ,12)	formule 12 du chapitre $\Sigma$
(A2,12)	formules 12 de l'annexe 2
( $\Sigma$ ,12,13)	formules 12 et 13 du chapitre $\Sigma$
( $\Sigma$ ,§ 2.2)	paragraphe 2.2 du chapitre $\Sigma$
(II,16-19)	formules 16 à 19 du chapitre II

On utilise des crochets [ ] pour renvoyer aux ouvrages ou publications cités en bibliographie : la notation ([7], V et VI) invite donc à se reporter aux chapitres V et VI de l'Outil Mathématique (référence N°7).

Voici maintenant quelques notations d'usage suffisamment courant pour ne pas avoir été redéfinies dans le texte.

## 2. SYMBOLES DE LA THEORIE DES ENSEMBLES

$\forall$	quel que soit
$x \in E, x \notin E$	x appartient à E, x n'appartient pas à E
$E \cup F$ et $E \cap F$	réunion et intersection des ensembles E et F
$\inf_{M \in K}(a)$	borne inférieure de a(M) pour M appartenant à K
$P \Rightarrow Q$	la propriété P implique la propriété Q
$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$	ensemble des entiers naturels et relatifs
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels

$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ privés de zéro

### 3. AUTRES NOTATIONS GÉNÉRALES

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ou $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	vecteurs unitaires du repère Oxyz
$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	espace à deux ou trois dimensions de la géométrie
$ x $	valeur absolue du réel x
$1/a$	souvent utilisé pour $\frac{1}{a}$
$\int_I f(x) dx$	intégrale de f sur l'intervalle I
$\iiint_{\Omega} f(\vec{r}) d\vec{r}$	intégrale de f sur le domaine $\Omega$ de $\mathbb{R}^3$
$\iiint_{u(\vec{r}) < 0} f(\vec{r}) d\vec{r}$	intégrale sur la région définie par $u(\vec{r}) < 0$
$\oint f(x) dx$	intégrale en valeur principale de Cauchy
$\sum_{n \in E} u_n$	somme (ou série) de tous les $u_n$ pour lesquels $n \in E$
$\delta_{\Omega}$	frontière du domaine $\Omega$
$\ \vec{r}\ $	norme du vecteur $\vec{r}$
$\langle f \rangle$	valeur moyenne de f sur une période
$\exp(x)$ ou $e^x$	exponentielle de x
$\ln(x)$ et $\log(x)$	logarithme népérien et logarithme décimal de x
$\text{tg}(x)$	notation trigonométrique traditionnelle, progressivement remplacée aujourd'hui par $\tan(x)$
$\delta_{n,m}$	symbole de Kronecker ( 1 si $n = m$ et 0 si $n \neq m$ )
$\ M\ $ ou $\det(M)$	déterminant de la matrice M
resp.	respectivement
C.Q.F.D	ce qu'il fallait démontrer

### 3. SYMBOLES DE LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

On se reportera au cours de mathématiques [7] pour plus de détails

p.p	presque partout
$\langle T, \varphi \rangle$	nombre associé à la fonction $\varphi$ par la distribution T
$\mathcal{D}$	espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support borné

$\mathcal{D}'$	ensemble des distributions (dual topologique de $\mathcal{D}$ )
$\mathcal{D}_{xyz}$	sous espace de $\mathcal{D}$ contenant seulement les fonctions des trois variables $x, y, z$
$\mathcal{D}'_{xyz}$	ensemble des distributions des trois variables $x, y, z$ (dual topologique de $\mathcal{D}_{xyz}$ )
$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'}$ $f$	$f_n$ tend vers $f$ au sens des distributions
$\frac{\partial T}{\partial x}$	dérivée partielle de la distribution $T$
$\frac{\partial f}{\partial x}$	dérivée partielle de la fonction $f$ au sens des distributions
$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$ ou $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$	dérivée partielle de $f$ au sens usuel (sans précaution)
$\sigma_f, \sigma_{df/dn}$	saut de la fonction $f$ , saut de $df/dn$
$\delta(x-x_0)$	distribution de Dirac
$\alpha \delta_S$	une distribution singulière associée à la surface $S$ et à la fonction $\alpha$ définie sur $S$ [7]
$H(x)$ et $\text{sgn}(x)$	fonction de Heaviside et fonction "signe de $x$ "
$V_p(1/x)$	distribution "valeur principale de Cauchy"
$\mathcal{F} T$ ou $\hat{T}$	transformée de Fourier de $T$
$S * T$	produit de convolution des distributions $S$ et $T$

#### 4. SYMBOLES DE LA THEORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

$ z $ et $\arg z$	module et argument du complexe $z$
$\bar{z}$	imaginaire conjugué de $z$
$\log(z)$	logarithme de $z$
$\text{Re } z$ et $\text{Im } z$	partie réelle et partie imaginaire de $z$
$\textcircled{z}$	"plan complexe" associé à la variable complexe $z$
$\int_{\gamma} f(z) dz$	intégrale de la fonction $f$ sur le chemin $\gamma$

#### 5. QUELQUES GRANDEURS PHYSIQUES.

$c, c_0$	vitesse de la lumière dans un milieu, dans le vide
$\mu, \mu_0$	perméabilité d'un milieu, du vide
$\epsilon, \epsilon_0$	permittivité d'un milieu, du vide
$\eta, \eta_0$	impédance d'un milieu, du vide

## Chapitre 0

# *Rappels et compléments sur le cours de premier cycle*

Ce chapitre ne forme pas un ensemble cohérent grâce auquel le lecteur pourrait prendre un premier contact avec l'Electromagnétisme. Sa lecture suppose qu'un cours de premier cycle consacré à l'Electrostatique et à la Magnétostatique dans le vide a déjà été assimilé. On se contente de revoir et de commenter quelques points délicats. Nos commentaires nécessitent une bonne connaissance des résultats de mathématiques rappelés en annexe 1. Il est donc conseillé de commencer par la lecture de cette annexe.

### 1. ELECTROSTATIQUE DANS LE VIDE ET THEORIE DU POTENTIEL.

On sait que l'interprétation des expériences d'Electrostatique a conduit à la notion de charge électrique. Cette grandeur physique est mathématiquement représentée par un nombre réel. Contrairement à la masse, la charge (qu'on aurait pu appeler masse électrique) peut être négative, mais du point de vue mathématique, l'attribution d'une charge (ou d'une masse) relève des mêmes techniques. Pour un objet ponctuel, on donne la valeur du réel qui lui est associé. Pour les objets que nous refusons d'assimiler à des points, on introduit les notions de charge (ou de masse) volumique, surfacique ou linéique. Ces nouvelles grandeurs sont des fonctions de point qui, par intégration, fournissent la charge attribuée à une région de l'espace. Tout ceci étant supposé connu, contentons-nous de résumer sur un exemple. Soit une charge volumique  $\rho$ , une charge surfacique  $\sigma$  définie sur une surface  $\Sigma$ , une charge linéique  $\lambda$  définie sur une ligne  $\Gamma$ , et des charges ponctuelles  $q_i$  placées en des points  $M_i$ . La charge  $Q$  associée à un domaine  $\Omega$  limité par une surface fermée  $S$  est :

$$Q = \sum_i q_i + \iiint_{\Omega} \rho \, dv + \iint_{\Omega \cap \Sigma} \sigma \, ds + \int_{\Omega \cap \Gamma} \lambda \, dl ,$$

la somme  $\sum_i q_i$  étant étendue aux charges ponctuelles intérieures à  $S$ . On notera que nous préférons définir  $Q$  à partir de  $\rho$ , plutôt que  $\rho$  à partir de  $Q$ . Désignant par  $\Delta v$  un élément de volume centré sur  $M$ , et par  $\Delta Q$  sa charge, il ne nous semble pas souhaitable de dire que  $\rho(M)$  est la limite de  $\Delta Q/\Delta v$  quand  $\Delta v$  tend vers 0. Les ouvrages qui le font doivent, pour rester cohérents avec les idées actuelles sur la constitution de la matière, imposer à  $\Delta v$  de "rester grand" devant les dimensions atomiques. Ceci ne plaît guère aux meilleurs de nos étudiants pour qui toute édulcoration des mathématiques est souvent regardée comme suspecte. C'est pourquoi nous préférons postuler l'existence d'une fonction  $\rho$  (la masse volumique) dont l'intégrale de volume donne  $Q$ . La détermination précise de  $\rho(M)$  est un autre problème. Si l'on admet savoir mesurer la charge  $\Delta Q$  associée à un petit volume centré sur  $M$ , le premier théorème de la moyenne [1] fournit la valeur exacte de  $\rho$  (supposée continue) non pas en  $M$  mais en un point de son voisinage. Comme toujours en physique, une mesure n'est jamais exacte!

Un exposé très élémentaire d'électrostatique pourrait se limiter (et se limite parfois) au calcul du potentiel  $V$  et du champ  $\vec{E} = -\text{grad } V$  en tout point  $M$  ( $\vec{OM} = \vec{r}$ ), la répartition de charge étant supposée connue. Le cas de charges ponctuelles  $q_i$  placées en des points  $M_i$  ( $\vec{OM}_i = \vec{r}_i$ ) est le plus simple ; rappelons qu'alors  $4\pi\epsilon_0 V(\vec{r}) = \sum_i q_i/R_i$  avec  $R_i = M_iM = \|\vec{r} - \vec{r}_i\|$ . Considérons maintenant un domaine borné  $\Omega$ , limité par une surface  $S$ , et dont la charge est uniquement due à une charge volumique  $\rho$  :

$$(1) \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv',$$

où  $dv'$  est l'élément de volume centré sur le point  $M'$  ( $\vec{OM}' = \vec{r}'$ ) et  $R = M'M = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$ . Evidemment, et dans la mesure où  $\rho$  est localement sommable, cette intégrale existe pour tout point  $M$  extérieur à  $S$  car  $1/R$  reste borné quel que soit  $M'$  dans  $\Omega$ . Un problème d'existence se pose, par contre, si  $M \in \Omega$  puisque, dans ces conditions,  $1/R$  n'est pas borné ( $R \rightarrow 0$  quand  $M' \rightarrow M$ ). Ce problème est étudié dans les ouvrages de mathématiques consacrés au potentiel coulombien et le livre de Kellogg [4] est resté longtemps la référence fondamentale depuis sa parution en 1929. On y établit que si  $\Omega_\xi$  est un domaine de forme arbitraire contenu dans une sphère de rayon  $\xi$  centrée sur  $M$ ,  $V(M)$  garde un sens pourvu que l'on remplace (1) par :

$$(1') \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Omega - \Omega_\epsilon} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv' .$$

Compte tenu des idées actuelles sur l'intégration, les mathématiciens préféreraient sans doute dire aujourd'hui que, moyennant des conditions de régularité assez faibles sur la masse volumique,  $\rho/R$  est une fonction non bornée mais sommable (intégrable au sens de Lebesgue). Quoi qu'il en soit, tout physicien se doit de connaître les résultats essentiels de la Théorie du Potentiel, même s'il n'est pas en mesure de suivre dans le détail certaines démonstrations.

La fonction  $V(\vec{r})$  définie par (1, 1') est partout une fonction continue et dérivable dont on peut calculer le gradient en "dérivant sous le signe somme" par rapport à  $\vec{r}$  :

$$(2) \quad \text{grad } V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega - \Omega_\epsilon} \text{grad}_{\vec{r}} \left( \frac{\rho(\vec{r}')}{R} \right) dv' .$$

Ce gradient (qui pour  $M \in \Omega$  est en fait une extension d'intégrale définie dans les ouvrages spécialisés) est lui-même une fonction continue de  $\vec{r}$ . On notera qu'en transformant le second membre de (2) par utilisation des formules de l'annexe 1, on obtient le résultat généralement présenté directement à partir de la loi de Coulomb :

$$(3) \quad \vec{E}(\vec{r}) = - \text{grad } V(\vec{r}) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{u}_M}{R^2} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{u}_M}{R^2} dv'$$

formule dans laquelle  $\vec{u}_M$  est le vecteur unitaire de  $\overrightarrow{M'M}$  (dirigé vers M). En conclusion, dans le cas d'une répartition volumique de charge, on retiendra que  $V$  et  $\vec{E}$  sont des fonctions continues pourvu que la fonction  $\rho$  soit suffisamment régulière. D'après Kellogg [4], il suffit de supposer  $\rho$  continue par morceaux. Par contre, même la continuité de  $\rho$  ne suffit pas à assurer l'existence des dérivées secondes du second membre de (1'). Il faut pour cela imposer à  $\rho$  une condition plus forte que la continuité, mais plus faible que la dérivabilité : on suppose qu'il existe deux constantes positives  $A$  et  $\alpha$  telles que, pour tout couple  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  :

$$|\rho(\vec{r}_1) - \rho(\vec{r}_2)| \leq A \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^\alpha .$$



Moyennant cette condition, dite condition de Hölder,\*  $\Delta v = \sum_1 \partial^2 v / \partial x_i^2$  existe partout et l'équation de Poisson  $\Delta v + \rho/\epsilon_0$  est satisfaite. Notons que, dans les cours élémentaires, cette équation est souvent formellement déduite (par le théorème de Green-Ostrogradsky) du théorème de Gauss, lui-même établi en n'utilisant que des charges ponctuelles. Il suffit de réfléchir un peu pour détecter un manque de cohérence qui mérite attention.

Les conclusions de la Théorie du Potentiel sont beaucoup moins simples pour le potentiel et le champ créé par une surface chargée  $S$ . Soit  $\sigma(\vec{r}')$  la charge surfacique en chaque point  $M'$  ( $\vec{OM}' = \vec{r}'$ ) de  $S$ . Si  $M$  ( $\vec{OM} = \vec{r}$ ) n'appartient pas à  $S$  :

$$(4) \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{R}, \quad \text{avec toujours } R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|.$$

On peut encore donner un sens à l'intégrale (4) même si  $M$  est sur  $S$ , bien qu'alors la fonction  $1/R$  ne soit pas bornée sur le domaine d'intégration. Pourvu que  $\sigma$  soit continue par morceaux, le potentiel  $V$  défini par (4) est continu en tout point et notamment sur la surface  $S$ . Pour tout point  $M \notin S$ ,  $\vec{E}$  s'obtient à partir de (4) par dérivation sous le signe somme :

$$(5) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}') \vec{u}_M dS'}{R^2},$$

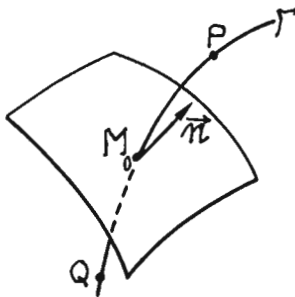


Figure 1

et cette fonction est continue dans le complémentaire de  $S$ . Le champ  $\vec{E}$  défini par (5) garde un sens même si  $M$  est sur  $S$  (il s'agit alors d'une extension d'intégrale), mais  $\vec{E}$  n'est pas une fonction continue. Soit (Fig.1) une ligne  $\Gamma$  qui coupe  $S$  en  $M_0$ ,  $P$  et  $Q$  deux points situés sur  $\Gamma$  de part et d'autre de  $S$ , et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la normale en  $M_0$ ; alors, pourvu que  $\sigma$  satisfasse des conditions de régularité (de type Hölder) que nous supposons satisfaites :

a) les composantes tangentielles de  $\vec{E}(P)$  et  $\vec{E}(Q)$  (sur le plan tangent à  $S$  en  $M_0$ ) ont une limite commune quand  $P$  et  $Q$  tendent vers  $M_0$  ;

\* Si  $\alpha = 1$ , la condition de Hölder est aussi appelée condition de Lipschitz

b) il n'en est pas de même des composantes normales et si  $\vec{E}(M_0)$  désigne la valeur du champ donné par l'extension d'intégrale (5) :

$$(6) \quad \lim_{P \rightarrow M_0} (\vec{n}(M_0) \cdot \vec{E}(P)) = \vec{n}(M_0) \cdot \vec{E}(M_0) + \frac{\sigma(M_0)}{2\epsilon_0},$$

$$(6') \quad \lim_{Q \rightarrow M_0} (\vec{n}(M_0) \cdot \vec{E}(Q)) = \vec{n}(M_0) \cdot \vec{E}(M_0) - \frac{\sigma(M_0)}{2\epsilon_0}.$$

A partir de ces conclusions relatives aux composantes tangentielles et normales, on peut établir des relations faisant uniquement intervenir le champ total  $\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_n$  (somme du champ tangentiel et du champ normal) :

$$(7) \quad \lim_{P \rightarrow M_0} \vec{E}(P) = \vec{E}(M_0) + \frac{\sigma(M_0)}{2\epsilon_0} \vec{n}(M_0),$$

$$(7') \quad \lim_{Q \rightarrow M_0} \vec{E}(Q) = \vec{E}(M_0) - \frac{\sigma(M_0)}{2\epsilon_0} \vec{n}(M_0).$$

Par soustraction, on trouve que le saut de  $\vec{E}$ , quand on franchit  $S$  dans le sens de  $\vec{n}$ , est égal à  $\vec{n}(M_0)\sigma/\epsilon_0$  ; on notera que ce résultat est indépendant du sens a priori arbitraire de  $\vec{n}$ .

C'est sans doute sans grand enthousiasme que le lecteur physicien aura suivi cet exposé (pourtant trop simplifié et trop imprécis) sur la Théorie du Potentiel. Pour se préparer à l'éventuelle utilisation des équations intégrales en Electromagnétisme (Chap. XV et XVI), il doit cependant essayer de retenir les résultats les plus marquants. Les cours élémentaires d'Electrostatique fournissent pour cela un excellent moyen mnemotechnique. Il suffit de songer au cas particulier où  $S$  est la sphère frontière d'une boule métallique supposée seule dans l'espace. Chacun sait (cours de 1<sup>er</sup> cycle) que la charge surfacique  $\sigma$  est alors constante, et que le champ est nul en tout point  $Q$  intérieur à  $S$ . D'après le théorème de Coulomb  $\lim_{P \rightarrow M_0} \vec{E}(P) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}(M_0)$  et des considérations utilisant astucieusement la

notion d'angle solide permettent le calcul direct de  $\vec{E}(M_0)$  à partir de la formule (5) ; on trouve  $\vec{E}(M_0) = \vec{n}(M_0)\sqrt{\sigma}/2\epsilon_0$ . Il est facile, sur ce cas particulier, de vérifier les formules (7,7') dont les mathématiciens ont établi la validité dans le cas général.



Terminons ces remarques sur le calcul du potentiel en commentant un résultat relatif au dipôle. Etant donné un vecteur  $\vec{\mathcal{M}}$ , de vecteur unitaire  $\vec{m}$  ( $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{m}$ ), on sait qu'on appelle dipôle (ou doublet), de moment dipolaire  $\vec{\mathcal{M}}$  placé en  $M'$ , la limite (quand  $\ell \rightarrow 0$ ) de la configuration suivante :

- une charge  $-q = -\mathcal{M}/\ell$ , placée en  $M'$  ( $\vec{OM}' = \vec{r}'$ ),
- une charge  $q = \mathcal{M}/\ell$ , placée en  $M$  ( $\vec{OM} = \vec{r} = \vec{r}' + \ell \vec{m}$ ).

Un calcul classique montre qu'un tel dipôle crée au point  $M$  le potentiel :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}_M}{R^2},$$

où  $\vec{u}_M$  est le vecteur unitaire de  $\vec{M'M}$  (dirigé vers  $M$ ) et  $R$  la distance entre  $M'$  et  $M$ . Compte tenu de résultats rappelés dans l'annexe 1, il est bon de remarquer que cette formule s'écrit aussi :

$$(8) \quad V(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\mathcal{M}} \cdot \text{grad}_M(1/R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\mathcal{M}} \cdot \text{grad}_{M'}(1/R).$$

C'est sous cette dernière forme que nous l'utiliserons souvent. L'indice  $M'$  indique que, pour calculer  $\text{grad}(1/R)$ , on doit dériver par rapport aux coordonnées de  $M'$ . La lettre  $\vec{\mathcal{M}}$  est utilisée pour éviter toute confusion avec le point  $M$ .

## 2. ELECTROSTATIQUE EN PRESENCE D'ISOLANTS ; THEORIE MACROSCOPIQUE DES DIELECTRIQUES.

Après avoir étudié le potentiel  $V(M)$  créé dans le vide par une répartition connue de charge (charges ponctuelles, charge répartie en volume, charge portée par la surface de corps métalliques chargés), on est naturellement amené à se poser la question suivante : ce potentiel et le champ qui lui est associé sont-ils modifiés par la présence, dans le voisinage des objets chargés, d'un corps isolant (ou diélectrique) non chargé ? On sait que l'Expérience (cours de 1er cycle) conduit à répondre affirmativement. Pour expliquer ce résultat, on admet en Physique macroscopique que, vis à vis d'un calcul de potentiel, chaque élément de diélectrique (élément  $dv'$  centré sur  $M'$ ) se comporte comme un dipôle électrostatique de moment  $d\vec{\mathcal{M}} = \vec{P}(M') dv'$ . La fonction vectorielle  $\vec{P}$  ainsi introduite s'appelle la polarisation électrique. Bien entendu, ce phénomène de "polarisation" peut recevoir une "interprétation microscopique" que nous ne voulons pas appro-

fondir ici. Rappelons seulement que, bien que les particules (atomes ou molécules) constituant le diélectrique soient neutres (leur charge est nulle), elles peuvent posséder un moment dipolaire (le barycentre des charges positives qu'elles renferment n'étant pas confondu avec le barycentre des charges négatives). Ce moment dipolaire peut exister même si la molécule est supposée seule dans l'espace (c'est le cas des molécules polaires dont la molécule d'eau est un exemple) ou apparaître sous l'action d'un champ électrique. Quoi qu'il en soit, quand un diélectrique est placé au voisinage de corps chargés, les innombrables dipôles élémentaires contenus dans l'un de ses éléments de volume s'orientent sous l'action du champ électrique ; la somme de tous les moments dipolaires élémentaires n'est alors généralement pas nulle et ce serait là l'origine du moment  $\overrightarrow{dM'}$  associé au volume  $dv'$ . Mais encore une fois, notre intention n'est pas ici de convaincre... Le lecteur peu sensible à ce genre d'argumentation peut se contenter de la présentation axiomatique suivante : pour faire des calculs de potentiel en théorie macroscopique de l'Electrostatique, on rend parfaitement compte du rôle des diélectriques en admettant que tout élément de volume  $dv'$  (au sens du calcul infinitésimal) possède un moment dipolaire  $\overrightarrow{dM'} = \vec{P}(M') dv'$ . C'est à partir de cette seule hypothèse que nous allons maintenant présenter l'Electrostatique en présence d'isolants. Il s'agira d'un simple rappel, ou tout au plus d'une mise au point, pour les lecteurs ayant déjà étudié l'Electrostatique des diélectriques dans un cours de premier cycle.

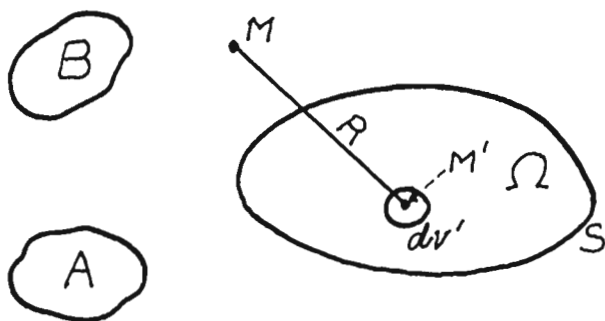


Figure 2 : *A et B sont des objets métalliques chargés.*

Soit donc (fig.2) une surface  $S$  limitant un domaine  $\Omega$  rempli de diélectrique, et des corps chargés  $A$  et  $B$  situés dans le vide à l'extérieur de  $\Omega$ . Le potentiel en un point  $M$  extérieur à  $\Omega$  est la somme du potentiel  $V_c$

dû aux charges de A et B et du potentiel  $V_p$  dû à la "polarisation" du diélectrique. Proposons-nous d'exprimer  $V_p$  à partir de  $\vec{P}(M)$ . La formule (8) montre que l'élément de volume  $dv'$  centré sur  $M'$  crée en M le potentiel  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P}(M') \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{M'} (1/R) dv'$ . Par suite :

$$(9) \quad V_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \vec{P}(M') \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{M'} (1/R) dv' .$$

Cette intégrale peut être décomposée en la somme de deux intégrales qui sont de la forme étudiée en théorie du potentiel (§1). Il suffit pour cela de remarquer (voir A1) que :

$$\vec{P} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{R} \right) = \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{R} \right) - \frac{1}{R} \text{div} \vec{P} .$$

Dès lors :

$$(10) \quad V_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \text{div}_{M'} \left( \frac{\vec{P}}{R} \right) dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{-\text{div} \vec{P}}{R} dv' ,$$

ou encore, d'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$(10') \quad V_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{n} \cdot \vec{P}}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{-\text{div} \vec{P}}{R} dv' .$$

Sous cette forme, il apparaît que le potentiel dû à la polarisation du diélectrique est égal au potentiel qui serait créé, en Electrostatique du vide, par une distribution fictive de charge. Dans ce chapitre, les charges fictives, dites aussi charges de polarisation, seront décrites par des lettres accentuées (il n'y a ici aucun risque de confusion avec des dérivées). Elles sont de deux types :

- a) des charges réparties dans  $\Omega$  avec une charge volumique  $\rho' = -\text{div} \vec{P}$  ,
- b) des charges réparties sur S avec une charge surfacique  $\sigma' = \vec{n} \cdot \vec{P}$ .

Il importe de noter que, dans cette dernière formule,  $\vec{n}$  est dirigé vers l'extérieur du diélectrique.

Le champ dû à la polarisation se déduit de  $V_p$  par la relation classique :

$$(11) \quad \vec{E}_p = -\overrightarrow{\text{grad}} V_p$$

qui, en utilisant les formules du paragraphe 1, conduit à :

$$(11') \quad \vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho'(M') \vec{u}_M}{R^2} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma'(M') \vec{u}_M}{R^2} dS' .$$

La théorie du potentiel nous apprend que les intégrales figurant dans (10') et (11') existent, même si  $M$  (jusqu'ici supposé extérieur à  $S$ ) est intérieur à  $S$  ou sur  $S$ . On peut donc utiliser ces intégrales pour définir le potentiel et le champ à l'intérieur de la matière isolante.

Nous dirons donc que, par définition, le potentiel  $V(M)$  en un point  $M$  quelconque est le potentiel qui serait créé en ce point (en l'absence de diélectrique) par l'ensemble des charges réelles et des charges fictives de polarisation. Toujours par définition, le champ est, au signe près, le gradient de ce potentiel.

Il importe de bien analyser notre démarche d'esprit : l'existence de la fonction  $\vec{P}(M)$  une fois admise, les notions de potentiel et de champ sont claires en dehors du diélectrique ; on sait même donner une expression intégrale de ces deux grandeurs ((10') et (11')). Il se trouve que ces expressions intégrales gardent un sens si  $M$  est situé dans le diélectrique et on les utilise pour définir  $V$  et  $\vec{E}$  dans la matière.

Remarque : La loi de Coulomb et plus généralement les équations de Maxwell ont été suggérées par des expériences de Physique macroscopique. Admettons qu'elles s'appliquent encore en Physique microscopique pour calculer la force s'exerçant entre deux particules chargées. Alors, connaissant, pour un diélectrique, la structure électronique de ses molécules et leurs positions relatives, on peut théoriquement calculer le champ en tout point. Ce champ, qui est infini sur une particule ponctuelle électrisée, varie très vite, non seulement en fonction du lieu, mais aussi en fonction du temps (en raison du mouvement des charges ponctuelles qui le créent). Il ne s'identifie pas avec le champ macroscopique défini dans ce paragraphe. Le passage du "microscopique" au "macroscopique" est une question très délicate que nous n'aborderons pas dans ce cours. Le lecteur intéressé pourra se reporter à des ouvrages plus ambitieux [5, 6]. Signalons seulement que le champ macroscopique en un point  $M$  résulte d'une opération de moyenne effectuée sur le champ microscopique. A priori, cette "moyenne", qu'il reste à définir, doit être calculée non seulement sur les variables d'espace (sur un domaine entourant  $M$  et "petit" à notre échelle), mais aussi sur le temps. En dépit des nombreux travaux effectués sur ce sujet, il semble difficile de vraiment tirer l'affaire au clair. On conseille de consulter la dernière édition du livre de Jackson [5].

### 3. INTRODUCTION DU VECTEUR $\vec{D}$ .

Répetons qu'à l'intérieur d'un diélectrique le champ se calcule comme en "Electrostatique du vide" pourvu que l'on prenne en considération, non seulement les charges réelles, mais aussi les charges fictives de polarisation. Or, en "Electrostatique du vide", on établit une relation locale liant le champ à la charge volumique :

$$(12) \quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 .$$

Cette relation, qui suppose l'existence de la divergence, n'est évidemment pas applicable en un point où se trouve une charge ponctuelle ou encore sur la frontière d'un corps métallique chargé. Moyennant cette restriction, on peut dire qu'en tout point d'un diélectrique :

$$(13) \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_v + \rho'}{\epsilon_0} = \frac{\rho_v - \operatorname{div} \vec{P}}{\epsilon_0} ,$$

relation dans laquelle  $\rho_v$ , qui représente ici la charge volumique vraie, est nulle dans le cas fréquent d'un diélectrique non chargé. En regroupant les deux divergences, on est conduit à :

$$(13') \quad \operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_v ,$$

et il suffit de poser :

$$(14) \quad \vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} ,$$

pour obtenir l'importante relation locale :

$$(15) \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_v .$$

Il ne semble pas que les physiciens aient encore pu se mettre d'accord pour donner un nom au vecteur  $\vec{D}$ . Certains parlent de "vecteur déplacement électrique", d'autres de "vecteur induction électrique"... Pour éviter de prendre parti dans cette stérile querelle de vocabulaire, nous parlerons du vecteur  $\vec{D}$ , comme d'ailleurs nous parlons souvent du vecteur  $\vec{E}$  sans rappeler constamment qu'il s'agit du vecteur champ électrique. L'important est de

bien connaître la formule de définition (14) ; elle montre que dans le vide, où par suite de l'absence de matière la polarisation est nulle,  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ .

Nous connaissons déjà le comportement du vecteur  $\vec{E}$  quand on franchit, au point M, la frontière S séparant deux diélectriques 1 et 2 (Fig.3). Cette question a été étudiée au §1 : si  $\vec{n}_{12}$  est le vecteur unitaire de la normale dirigé de 1 vers 2 et si  $\vec{E}_2$  et  $\vec{E}_1$  désignent respectivement la limite de  $\vec{E}$  quand on tend vers M en restant dans le milieu 2 ou le milieu 1 :

$$(16) \quad \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\vec{n}_{12} \sigma(M)}{\epsilon_0},$$

expression dans laquelle  $\sigma$  désigne la charge surfacique prise en compte pour le calcul de  $\vec{E}$ . Ici,  $\sigma$  est donc la somme de trois termes :

$$\sigma = \sigma_v + \sigma'_1 + \sigma'_2,$$

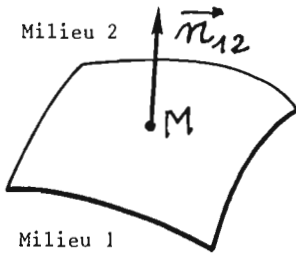


Figure 3

$\sigma_v$  décrit la charge vraie de S,  $\sigma'_1 = \vec{n}_{12} \cdot \vec{P}_1$  est la charge surfacique fictive associée au diélectrique 1,  $\sigma'_2 = -\vec{n}_{12} \cdot \vec{P}_2$  est la charge surfacique fictive associée au diélectrique 2.  $\vec{P}_1$  (resp.  $\vec{P}_2$ ) est la limite de  $\vec{P}$  quand on tend vers M en restant dans le milieu 1 (resp. 2).

La différence de signe dans l'expression de  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$  s'explique par une remarque faite au paragraphe 2 : pour pouvoir écrire  $\sigma_p = \vec{n} \cdot \vec{P}$ , il faut que  $\vec{n}$  soit dirigé vers l'extérieur du diélectrique.

Ainsi, finalement :

$$\epsilon_0(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{n}_{12} (\sigma_v + \vec{n}_{12} \cdot \vec{P}_1 - \vec{n}_{12} \cdot \vec{P}_2),$$

d'où l'on déduit en multipliant vectoriellement, puis scalairement, par  $\vec{n}_{12}$ :

$$(17) \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_2 = \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_1,$$

et :



$$\epsilon_0 \vec{n}_{12} \cdot \vec{E}_2 - \epsilon_0 \vec{n}_{12} \cdot \vec{E}_1 = \sigma_v + \vec{n}_{12} \cdot \vec{P}_1 - \vec{n}_{12} \cdot \vec{P}_2 ,$$

soit, en tenant compte de la définition de  $\vec{D}$  (14) :

$$(18) \quad \vec{n}_{12} \cdot \vec{D}_2 - \vec{n}_{12} \cdot \vec{D}_1 = \sigma_v .$$

La formule (17) traduit la conservation de la composante tangentielle  $\vec{E}_t$  de  $\vec{E}$  , car  $\vec{n}_{12} \wedge \vec{E} = \vec{n}_{12} \wedge \vec{E}_t$  est le vecteur déduit de  $\vec{E}_t$  par rotation de  $+\pi/2$  autour de  $\vec{n}_{12}$  . La formule (18) donne le saut de la composante normale de  $\vec{D}$  ; ce saut est nul dans le cas fréquent où la frontière S n'est pas chargée ( $\sigma_v = 0$ ).

#### 4. RELATIONS CARACTERISANT LE DIELECTRIQUE.

Une relation comme la relation (15) est une relation universelle, indépendante du diélectrique étudié. Nous allons maintenant parler de relations contenant des paramètres qui varient d'un diélectrique à l'autre.

Essayons tout d'abord de relier les deux champs de vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$ . On pourrait envisager que le vecteur polarisation soit déterminé en M par la connaissance du champ électrique dans un certain voisinage de M. Une hypothèse simplificatrice (toujours faite dans les cours élémentaires) consiste à admettre qu'en un point donné,  $\vec{P}$  dépend uniquement de la valeur de  $\vec{E}$  en ce point. Autrement dit, si  $P_i$  et  $E_j$  désignent respectivement les composantes de  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  sur un trièdre orthonormé, nous admettons l'existence de fonctions  $f_i$  telles que :

$$(19) \quad P_i = f_i(E_1, E_2, E_3) , \quad i = 1, 2, 3,$$

soit, en développant en série de Taylor au voisinage de  $(0,0,0)$  :

$$(20) \quad P_i(E_1, E_2, E_3) = f_i(0,0,0) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial E_j}(0,0,0) E_j + \dots$$

Abstraction faite de quelques substances (corps ferroélectriques) qui ont une polarisation permanente, les termes constants  $f_i(0,0,0)$  sont nuls. De plus l'expérience montre qu'à la température ordinaire et pour les champs

usuellement réalisés au laboratoire, on peut négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à 2. Nous nous limiterons à cette approximation linéaire, bien que, depuis l'invention du laser (qui permet d'obtenir des champs très intenses), on assiste au développement d'un électromagnétisme non linéaire. Le succès de l'Électromagnétisme linéaire se comprend facilement grâce à l'interprétation microscopique des phénomènes de polarisation (§2). À l'intérieur de l'atome, les champs sont typiquement de l'ordre de  $10^{11}$  V/m, tandis que les champs appliqués, qui créent la polarisation, dépassent rarement  $10^6$  V/m ; ces derniers n'engendrent donc que de faibles perturbations.

Finalement, posant  $\frac{\partial f_1}{\partial E_j}(0,0,0) = a_{1j}$ , on peut remplacer (20) par :

$$(21) \quad P_1(E_1, E_2, E_3) = \sum_{j=1}^3 a_{1j} E_j .$$

Autrement dit, un repère ayant été choisi, il existe une matrice A telle que :

$$(22) \quad \vec{P} = A \vec{E} .$$

Dans le cas général, les vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$ , associés à un même point, ne sont donc pas colinéaires ; de plus, A dépend du point. Il est aisé de constater que  $\vec{P}$  et le produit  $\epsilon_0 \vec{E}$  ont "même dimension" : dans le système légal, ils s'expriment tous deux en coulomb par mètre carré. Pour cette raison, on préfère écrire (22) sous la forme :

$$(23) \quad \vec{P}(M) = \epsilon_0 \chi(M) \vec{E}(M) ,$$

introduisant ainsi une nouvelle matrice  $\chi$  (lire  $\kappa$ ), dite matrice des susceptibilités électriques, dont les éléments sont des nombres "sans dimension" ayant une valeur indépendante du système d'unités utilisé. Si le milieu est homogène,  $\chi$  est la même en tout point. Dans les milieux isotropes,  $\chi$  est un nombre réel que l'expérience et la théorie révèlent positif.

Dans ce cours, et sauf indication contraire, nous nous intéressons uniquement à des milieux isotropes comme les gaz, les liquides, les verres ou certains solides cristallisant dans le système cubique. Si de plus ces milieux sont homogènes, d'importantes simplifications apparaissent.

La relation (14) devient :

$$(24) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} , \quad (25) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} ,$$

en posant :

$$(26) \quad \epsilon_r = 1 + \chi \quad \text{et} \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r .$$

$\epsilon$  et  $\epsilon_r$  sont respectivement appelés permittivité et permittivité relative. Les recueils de constantes physiques donnent la valeur de  $\epsilon_r$  pour les diélectriques usuels. Cette valeur, indépendante du système d'unités, est toujours supérieure à 1. Aux températures usuelles, elle est très voisine de 1 pour l'air (1,0005 pour de l'air sec à 25°) et dépasse 1000 pour les "céramiques" utilisées dans la fabrication des condensateurs. On rappelle qu'elle est de l'ordre de 80 pour l'eau et de quelques unités pour beaucoup d'isolants usuels (verre, mica, polyéthylène ...).

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (milieu lhi), les lois de l'Electrostatique se déduisent facilement des lois de "l'Electrostatique dans le vide". Ces dernières découlent en effet des deux équations locales :

$$(27) \quad \text{rot } \vec{E} = 0 , \quad (28) \quad \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 ,$$

qui, dans un milieu lhi, sont remplacées par :

$$(27') \quad \text{rot } \vec{E} = 0 \quad (\text{puisque } \vec{E} \text{ dérive toujours d'un potentiel}),$$

$$(28') \quad \text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon \quad (\text{d'après } \text{div } \vec{D} = \text{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho) .$$

Il suffit donc de remplacer  $\epsilon_0$  par  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  dans toute loi qui est conséquence des relations (27) et (28). C'est ainsi que, dans un diélectrique de permittivité  $\epsilon$ , la force exercée par une charge ponctuelle  $q$  (placée en M) sur une charge ponctuelle  $q'$  (placée en M') est :

$$(29) \quad \vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon} qq' \frac{\vec{MM'}}{d^3} \quad \text{où } d \text{ est la distance des points M et M' .}$$

Si ce diélectrique est utilisé dans un condensateur plan, la capacité  $C$  est donné par :

$$(30) \quad C = \frac{\epsilon S}{e} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{e} .$$

Elle est donc  $\epsilon_r$  fois plus grande que si l'espace séparant les armatures était vide (ou rempli d'air). Ceci explique l'intérêt des corps à permittivité élevée : ils permettent de réaliser des capacités élevées sous un faible volume (condensateurs céramiques).

Dans les problèmes pratiques, on se trouve fréquemment en présence de plusieurs domaines diélectriques et la recherche du potentiel conduit le plus souvent à un problème de mathématiques appliquées impossible à résoudre sans l'aide d'un ordinateur. Un tel problème relève de l'étude numérique des équations aux dérivées partielles, étude que nous ne voulons pas aborder pour l'instant. Nous nous contenterons ici de rappeler un exercice très classique sur la "réfraction des lignes de champ".

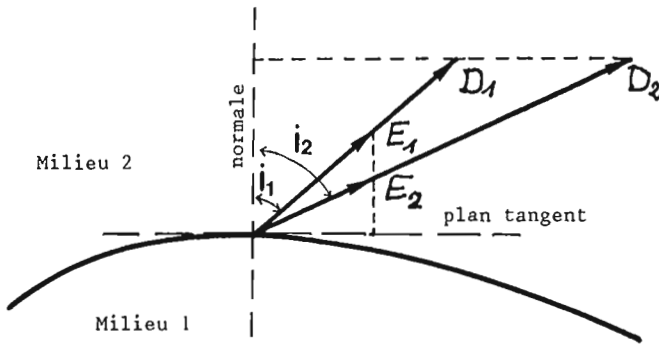


Figure 4

Soit une surface  $S$  séparant deux milieux diélectriques linéaires homogènes et isotropes non chargés. La conservation de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  et de la composante normale de  $\vec{D}$  impose aux vecteurs  $\vec{E}_2, \vec{E}_1, \vec{D}_2, \vec{D}_1$  d'être disposés conformément à la figure 4. Il en résulte les relations :

$$D_1 \cos i_1 = D_2 \cos i_2, \quad E_1 \sin i_1 = E_2 \sin i_2,$$

d'où :

$$(31) \quad \frac{\operatorname{tg} i_1}{\epsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} i_2}{\epsilon_2}.$$

## 5. MAGNETOSTATIQUE DANS LE VIDE.

Il y a de nombreuses façons d'exposer la Magnétostatique dans le vide (étude des phénomènes magnétiques créés dans le vide par les courants con-

tinus). Quelle que soit la présentation qui vous a été faite, on a introduit un champ de vecteur  $\vec{B}$ , dit champ magnétique. (De plus en plus rares sont ceux qui continuent à désigner  $\vec{B}$  sous le nom d'induction magnétique, comme on le faisait il y a quelques dizaines d'années). Ce champ  $\vec{B}$  dérive d'un "potentiel vecteur"  $\vec{A}$ . De façon précise, cela signifie qu'il existe un autre champ vectoriel  $\vec{A}$  tel que :

$$(32) \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} .$$

Par suite,  $\vec{B}$  est à flux conservatif, ou si l'on préfère, sa divergence est nulle :

$$(33) \quad \text{div } \vec{B} = \text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0 .$$

Ceci résulte d'une identité mathématique (voir A1) : sous réserve d'existence, la divergence d'un rotationnel est toujours nulle.

Le champ magnétique est lié au vecteur densité de courant  $\vec{j}$  (défini dans les cours de premier cycle) par la relation fondamentale :

$$(34) \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} ,$$

qui, compte tenu de (32), s'écrit :

$$(35) \quad \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} ,$$

soit encore (voir A1, §2) :

$$(35') \quad -\Delta \vec{A} + \text{grad}(\text{div } \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} .$$

Mais la relation (32) ne détermine pas  $\vec{A}$  de façon unique comme nous le reverrons en détail plus loin en étudiant le "problème des potentiels en Electromagnétisme" (Chap. III). On en profite pour imposer la condition supplémentaire :

$$(36) \quad \text{div } \vec{A} = 0 ,$$

de sorte que (35') devient :

$$(37) \quad \Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = 0 .$$

Par projection, il apparaît que chaque composante  $A_i$  de  $\vec{A}$  vérifie, comme le potentiel  $V$  de l'Electrostatique, une équation de Poisson :

$$(38) \quad \Delta A_i = - \mu_0 j_i .$$

On en déduit que, si  $R$  représente la distance des points  $M$  et  $M'$  :

$$(39) \quad A_i(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j_i(M')}{R} dv' ,$$

soit, sous forme vectorielle :

$$(39') \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(M')}{R} dv' .$$

En présence de courants superficiels sur une surface  $S$ , cette intégrale doit évidemment être complétée par une intégrale de surface (cas des courants fictifs introduits au paragraphe suivant).

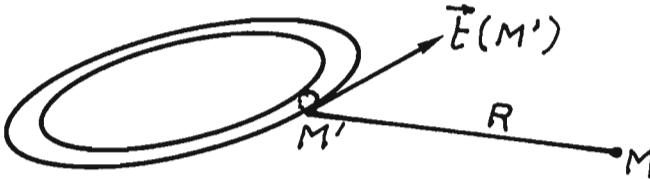


Figure 5

Un autre cas important est celui où le champ est dû aux courants parcourant des circuits filiformes. Soit  $C$  un tel circuit (Fig.5),  $\sigma$  l'aire de sa section droite en  $M'$ ,  $\vec{t}$  le vecteur unitaire de la tangente orientée par le courant. Le vecteur  $\vec{j}$  est colinéaire à  $\vec{t}$  et :

$$\vec{j}(M') dv' = j(M') \vec{t}(M') \sigma d\ell' = I \vec{t}(M') d\ell' ,$$

de sorte que l'intégrale (39') devient une intégrale curviligne :

$$(40) \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\vec{t}(M')}{R} d\ell' ,$$

où  $d\ell'$  est l'élément d'arc centré sur  $M'$  et  $I$  l'intensité du courant

dans C. Grâce à une formule d'analyse vectorielle rappelée au §4 de l'annexe 1, cette intégrale curviligne peut être remplacée par une intégrale de surface ; on obtient :

$$(40') \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S \vec{n}(M') \wedge \text{grad}_{M'} \left( \frac{1}{R} \right) dS' ,$$

où S est une surface s'appuyant sur C,  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de sa normale orientée par le courant et  $dS'$  l'élément d'aire centré sur  $M'$ .

Le champ  $\vec{B}(M)$  se déduit de  $\vec{A}(M)$  par (32). Pour des courants volumiques, et compte tenu des formules données au §2 de l'annexe 1 :

$$\begin{aligned} (41) \quad \vec{B}(M) &= \text{rot}_M \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(M')}{R} dv' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \text{rot}_M \left( \frac{\vec{j}(M')}{R} \right) dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left( \text{grad}_M \left( \frac{1}{R} \right) \wedge \vec{j}(M') + \frac{1}{R} \text{rot}_M(\vec{j}(M')) \right) dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{-\vec{u}_M}{R^2} \wedge \vec{j}(M') dv' , \end{aligned}$$

car  $\text{rot}_M(\vec{j}(M'))$  est évidemment nul.

Dans le cas d'un circuit filiforme :

$$\begin{aligned} (42) \quad \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \text{rot}_M \left( \frac{\vec{t}(M')}{R} \right) d\ell' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \text{grad}_M \left( \frac{1}{R} \right) \wedge \vec{t}(M') d\ell' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{-\vec{u}_M}{R^2} \wedge \vec{t}(M') d\ell' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\vec{t}(M') \wedge \vec{u}_M}{R^2} d\ell' . \end{aligned}$$

On reconnaît la formule de Biot et Savart.

A titre d'exercice, on vérifiera que les problèmes d'existence et de continuité des intégrales rencontrées dans ce paragraphe sont résolus par la théorie du potentiel, après projection sur les trois axes de coordonnées.

Nous utiliserons beaucoup dans la suite la formule donnant le potentiel vecteur de la "boucle du courant" ou "dipôle magnétique" qui, rappelons-le, est élémentairement présentée comme un circuit plan, d'aire S, dont les dimensions sont petites par rapport à la distance d'observation R. Dans ces

conditions, partant de la formule (40') et négligeant les variations du gradient sur le domaine d'intégration, on retrouve la formule supposée déjà établie en Premier Cycle. Pour une "boucle" placée en  $M'$  :

$$(43) \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \vec{n} \wedge \text{grad}_{M'} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\mathcal{M}} \wedge \text{grad}_{M'} \left( \frac{1}{R} \right),$$

où  $\vec{\mathcal{M}} = IS \vec{n}$  est, par définition, le moment magnétique du petit circuit constituant la boucle (Noter l'analogie avec (8)).

## 6. MAGNETOSTATIQUE EN PRESENCE DE MATERIAUX MAGNETIQUES.

Les propriétés magnétiques attribuées à la matière peuvent s'interpréter à partir de celles des atomes ou des molécules qui, par suite du mouvement des électrons, peuvent être assimilées à des boucles de courant caractérisées par des moments magnétiques. Ces moments peuvent apparaître dans un champ extérieur (diamagnétisme) ou préexister (paramagnétisme). Quoi qu'il en soit, en Magnétostatique macroscopique, on postule que, vis-à-vis du calcul du potentiel vecteur, tout élément de volume  $dv'$  centré sur un point  $M'$  se comporte comme une boucle de courant de moment magnétique  $d\vec{\mathcal{M}} = \vec{P}(M') dv'$ . La fonction vectorielle  $\vec{P}$  ainsi introduite s'appelle la polarisation magnétique ou aimantation.

Dans un problème où interviendraient à la fois les propriétés électriques et magnétiques de la matière, il faudrait évidemment prendre soin d'employer des notations différentes pour désigner la polarisation électrique et la polarisation magnétique d'une part, le moment dipolaire et le moment magnétique d'autre part. Nous ne le faisons pas ici par économie de notations et puisqu'il n'y a pas risque de confusion. L'aimantation est parfois désignée par  $\vec{J}$  : nous évitons cette notation qui prête à confusion avec la densité de courant.

La matière contenue dans le domaine  $\Omega$  intérieur à une surface fermée  $S$  crée en un point  $M$  extérieur à  $S$  un potentiel vecteur de polarisation  $\vec{A}_p(M)$  tel que :

$$(44) \quad \vec{A}_p(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{P}(M') \wedge \text{grad}_{M'} \left( \frac{1}{R} \right) dv',$$

comme le montre la formule (43) puisque chaque élément de  $\Omega$  possède un



moment  $\vec{P}(M')$   $dv'$ . Mais, comme on le rappelle en A1, §2 :

$$\text{rot}_{M'}\left(\frac{1}{R}\vec{P}\right) = \frac{1}{R}\text{rot}_{M'}(\vec{P}) + \text{grad}_{M'}\left(\frac{1}{R}\right) \wedge \vec{P},$$

et, en conséquence, le deuxième membre de la formule (44) peut s'écrire sous forme d'une somme d'intégrales rencontrées en étudiant la "Magnétostatique dans le vide" :

$$\vec{A}_p(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{1}{R} \text{rot}_{M'}(\vec{P}) dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} -\text{rot}_{M'}\left(\frac{\vec{P}}{R}\right) dv',$$

soit, après transformation de la deuxième intégrale en intégrale de surface (voir A1, §3) :

$$(45) \quad \vec{A}_p(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{1}{R} \text{rot}_{M'}(\vec{P}) dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{-\vec{n} \wedge \vec{P}}{R} dS.$$

Ainsi pour calculer le potentiel vecteur dû à l'aimantation, on peut utiliser les formules de la "Magnétostatique du vide" pour une distribution fictive de courants. Ces courants fictifs, ou courants d'aimantation, sont de deux types :

- des courants volumiques décrits par un vecteur densité de courant  $\vec{j}' = \text{rot } \vec{P}$ ,
- des courants superficiels décrits par un vecteur  $\vec{j}'_s = -\vec{n} \wedge \vec{P}$  tangent à la surface  $S$  ( $\vec{n}$  vecteur unitaire de la normale dirigé vers l'extérieur de la matière aimantée).

La théorie du potentiel permet d'établir l'existence des intégrales figurant dans la formule (45), même si  $M$  est à l'intérieur de la matière aimantée. En conséquence, en présence de matériaux magnétiques, nous pouvons poser les définitions suivantes :

- Le potentiel vecteur est la fonction vectorielle définie partout par :

$$(46) \quad \vec{A}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{j}(M')}{R} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{j}'_s(M')}{R} dv',$$

en tenant compte des courants vrais ( $\vec{j}_v$  et  $\vec{j}_{sv}$ ) et des courants fictifs décrivant l'aimantation ( $\vec{j}'$  et  $\vec{j}'_s$ ) :

$$\vec{j} = \vec{j}_v + \vec{j}' , \quad \vec{j}_s = \vec{j}_{sv} + \vec{j}'_s .$$

b) le champ  $\vec{B}$  est défini en tout point par :

$$(32) \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} .$$

La théorie du potentiel assure l'existence de  $\vec{B}$  et justifie les dérivations "sous le signe somme" que l'on est amené à faire pour le calculer. Elle montre que le champ dû à des courants volumiques est une fonction continue. Par contre, il apparaît qu'un courant superficiel crée un champ discontinu sur la surface à laquelle il est tangent. Soit en effet  $\vec{B}(M)$  le champ créé par le courant superficiel  $\vec{j}_s$  tangent à une surface  $S$  ; si  $(j_s)_1$  désigne la 1<sup>ème</sup> composante de  $\vec{j}_s$  :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \text{grad}_M \left( \frac{1}{R} \right) \wedge \vec{j}_s(M') \, dS' , \\ &= \frac{-\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \iint_S (j_s)_i \vec{e}_i \wedge \text{grad}_M \left( \frac{1}{R} \right) \, dS' , \\ &= \mu_0 \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge \iint_S \frac{-\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0} (j_s)_i \text{grad}_M \left( \frac{1}{R} \right) \, dS' . \end{aligned}$$

Or, formellement, l'intégrale de surface peut être interprétée comme le champ électrostatique créé par une charge superficielle décrite par la charge surfacique  $\sigma = \epsilon_0 (j_s)_i$  (Comprendre  $\epsilon_0$  multiplié par  $(j_s)_i$ ). On a vu en Electrostatique que ce champ est discontinu à la traversée de  $S$  et que son saut est  $\vec{n} \sigma / \epsilon_0 = \vec{n} (j_s)_i$ . Si  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1$  désigne le saut de  $\vec{B}$  en passant du milieu 1 au milieu 2, on a donc :

$$(47) \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \sum_i \vec{e}_i \wedge \vec{n}_{12} (j_s)_i = \mu_0 \sum_i \vec{e}_i (j_s)_i \wedge \vec{n}_{12} = -\mu_0 \vec{n}_{12} \wedge \vec{j}_s .$$

## 7. INTRODUCTION DU VECTEUR $\vec{H}$ .

On peut transposer en Magnétostatique les idées développées en Electrostatique au §3. En "Magnétostatique dans le vide", on connaît la relation :

$$(34) \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} .$$

On a donc dans la matière :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_v + \vec{j}') ,$$

où  $\vec{j}_v$  et  $\vec{j}'$  désignent respectivement les courants vrais et courants fictifs d'aimantation. En remplaçant  $\vec{j}'$  par  $\text{rot}(\vec{P})$ , on trouve après quelques manipulations algébriques :

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{P}\right) = \vec{j}_v .$$

Il suffit de poser :

$$(48) \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{P} ,$$

pour obtenir la relation locale :

$$(49) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_v ,$$

qui est l'analogue de la relation (15) en Electrostatique. Le vecteur  $\vec{H}$ , défini par (48), s'appelle généralement aujourd'hui excitation magnétique. On notera que le vecteur  $\vec{B}$ , qui est partout le rotationnel de  $\vec{A}$ , vérifie dans la matière comme dans le vide la relation (33) :

$$\text{div } \vec{B} = 0 .$$

Reportons-nous maintenant à la figure 3 (en supposant que les milieux 1 et 2 sont magnétiques) pour étudier le comportement de  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  en franchissant la surface frontière S. On sait que les éventuelles discontinuités de ces vecteurs sont dues aux courants superficiels car la contribution des courants volumiques est continue :

$$(50) \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = -\mu_0 \vec{n}_{12} \wedge (\vec{j}_s - \vec{n}_{12} \wedge \vec{P}_1 + \vec{n}_{12} \wedge \vec{P}_2) .$$

Ceci entraîne :

$$(51) \quad \vec{n}_{12} \cdot \vec{B}_2 - \vec{n}_{12} \cdot \vec{B}_1 = 0 , \quad (52) \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_s .$$

La formule (51), qui se déduit de (50) en remarquant que la multiplication scalaire par  $\vec{n}_{12}$  fait apparaître un produit mixte nul au second membre, traduit la conservation de la composante normale de  $\vec{B}$  ; le saut de cette composante est nulle. Quant à (52), on l'obtient à partir de (50) par utilisation de la formule du double produit vectoriel (Al, §1) et de la définition de  $\vec{H}$ . Posant :

$$\vec{j}_s - \vec{n}_{12} \wedge \vec{P}_1 + \vec{n}_{12} \wedge \vec{P}_2 = \vec{j}_s ,$$

on obtient successivement :

$$\begin{aligned} n_{12} \wedge \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - n_{12} \wedge \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} &= - (\vec{n}_{12} \cdot \vec{j}_s) \vec{n}_{12} + \vec{j}_s = 0 + \vec{j}_s , \\ &= \vec{j}_s - \vec{n}_{12} \wedge \vec{P}_1 + \vec{n}_{12} \wedge \vec{P}_2 . \end{aligned}$$

$$\vec{n}_{12} \wedge \left( \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{P}_2 \right) - \vec{n}_{12} \wedge \left( \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{P}_1 \right) = \vec{j}_s ,$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_s \quad (\text{C.Q.F.D.}).$$

Dans le cas où  $\vec{j}_s = 0$ , et comme on l'a déjà expliqué à propos de la relation (17) en Electrostatique, (52) traduit la conservation de la composante tangentielle de  $\vec{H}$ .

## 8. RELATIONS CARACTERISANT LE MILIEU MAGNETIQUE.

En Magnétostatique, les milieux à aimantation permanente ne sont pas rares ; ce sont les aimants dont on donnait l'importance pratique. Mais nous n'étudierons pas la propagation des ondes électromagnétiques dans de tels milieux que nous éliminons donc dès maintenant de notre étude. Alors, dans le cas de l'approximation linéaire, on est tenté, par analogie avec l'Electrostatique, d'introduire la matrice liant, en un point, les deux vecteurs  $\vec{B}$  et  $\vec{P}$ . Mais il est trivial de montrer que si  $\vec{P}$  se déduit de  $\vec{B}$  par multiplication matricielle, il en est de même pour  $\vec{P}$  à partir de  $\vec{H}$  ; il suffit pour cela d'utiliser la définition de  $\vec{H}$  qui entraîne  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{P})$ . Il faut retenir que c'est le développement de Taylor de  $\vec{P}$  en fonction de  $\vec{H}$  qui est traditionnellement utilisé pour définir la matrice  $\chi$  des suscepti-

bilités magnétiques . On pose :

$$(53) \quad \vec{P}(M) = \chi(M) \vec{H}(M) .$$

Dans un milieu homogène,  $\chi$  est indépendant de  $M$  et, dans un milieu isotrope (les seuls que nous étudions dans ce cours),  $\chi$  est un nombre. Il est important de remarquer que ce nombre est sans dimension : en système légal,  $\vec{P}$  et  $\vec{H}$  s'expriment tous deux en ampère par mètre. Contrairement à la susceptibilité électrique qui est toujours positive, la susceptibilité magnétique se révèle tantôt positive (paramagnétisme), tantôt négative (diamagnétisme). Pour tous les milieux que nous utiliserons dans la suite pour illustrer les phénomènes de propagation (gaz et liquides usuels, métaux et alliages, exception faite des ferromagnétiques comme le fer, le nickel, le cobalt et un certain nombre de leurs minerais), la susceptibilité magnétique est toujours, en module, très petite devant l'unité (rarement supérieure à  $10^{-4}$  à la température ordinaire).

Dans le cas simple mais fréquent des milieux linéaires, homogènes et isotropes, on déduit de (48) et (53) l'importante relation :

$$(54) \quad \vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} .$$

La perméabilité relative  $\mu_r$  et la perméabilité absolue  $\mu$  sont alors respectivement définies par :

$$(55) \quad \mu_r = 1 + \chi , \quad \mu = \mu_r \mu_0 .$$

Puisque  $\chi \ll 1$ , on peut donc, en négligeant  $\chi$  devant 1, confondre  $\mu$  et  $\mu_0$ . Dans un tel milieu (l,h,i) les deux relations fondamentales de la Magnétostatique s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} .$$

En posant  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ , on peut les remplacer par :

$$(56) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} .$$

On reconnaît les relations fondamentales de la "Magnétostatique dans le vide" dans lesquelles  $\mu_0$  a été remplacé par  $\mu$ . Mais, comme pour les milieux

que nous étudierons  $\mu$  est très voisin de  $\mu_0$ , nous retiendrons que la Magnétostatique de ces milieux s'identifie pratiquement à la Magnétostatique dans le vide. Il s'agit d'une grosse simplification qui diminue l'importance pratique des paragraphes 6, 7 et 8 sans naturellement en diminuer l'importance théorique.

## 9. RESUME DES RESULTATS IMPORTANTS.

Dans cette récapitulation et pour éviter des confusions possibles, on emploie des notations distinctes pour désigner les grandeurs électriques et magnétiques de même nom. On utilise pour cela les indices e (électrique) et m (magnétique).

### 9.1. Lois fondamentales.

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \iff \vec{E} = -\text{grad } V, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \iff \vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}.$$

N.B. : C'est seulement dans un domaine simplement connexe que la nullité du rotationnel entraîne l'existence d'un potentiel scalaire et que la nullité de la divergence entraîne l'existence d'un potentiel vecteur.

### 9.2. Définitions.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{P}_m,$$

$$\vec{P}_e = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad \vec{P}_m = \chi_m \vec{H}.$$

### 9.3. Relations de passage.

$$\vec{n} \wedge \vec{E}_2 = \vec{n} \wedge \vec{E}_1, \quad \vec{n} \cdot \vec{B}_2 = \vec{n} \cdot \vec{B}_1,$$

$$\vec{n}_{12} \cdot \vec{D}_2 - \vec{n}_{12} \cdot \vec{D}_1 = \rho, \quad \vec{n}_{12} \wedge \vec{H}_2 - \vec{n}_{12} \wedge \vec{H}_1 = \vec{j}_s.$$

9.4. Remarque. Jusqu'ici, nous avons parlé successivement des diélectriques et des milieux magnétiques. En fait, un milieu réel est caractérisé par des propriétés diélectriques (liées à sa susceptibilité électrique  $\chi_e$ ), des

propriétés magnétiques (liées à sa susceptibilité magnétique  $\chi_m$ ) et des propriétés conductrices. Au sujet de ces dernières, rappelons que, pour décrire le courant dû aux déplacements des charges libres d'un métal sous l'action d'un champ électrique, on utilise souvent la loi d'Ohm :

$$(57) \quad \vec{j}(M) = \sigma(M) \vec{E}(M) .$$

Dans le cas général (milieu anisotropes),  $\sigma$  est une matrice, mais dans le cas simple des milieux isotropes,  $\sigma$  est un scalaire appelé conductivité. Si, de plus, le milieu est homogène, la conductivité est la même en tout point ; elle caractérise le milieu à une température donnée.

#### 10. LES PHENOMENES D'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE ET LA RELATION DE MAXWELL-FARADAY.

C'est en général avec ces phénomènes que l'on aborde l'étude des phénomènes électromagnétiques dépendant du temps  $t$ . Les expériences fondamentales sont décrites au lycée et la question est reprise dans nos cours de premier cycle sous un aspect plus théorique. Nous nous contenterons ici de rappeler quelques résultats utiles pour la suite du cours.

Le flux magnétique  $\Phi$  relatif à un contour orienté  $C$  est défini par l'intégrale de surface :

$$(58) \quad \Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS ,$$

où  $S$  est une surface s'appuyant sur  $C$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la normale à  $S$  orienté par  $C$  (A1, §4). Cette intégrale ne dépend pas de  $S$  puisque  $\vec{B}$  est à flux conservatif ( $\text{div } \vec{B} = 0$ ).

On sait que si le flux  $\Phi$  à travers un circuit filiforme varie au cours du temps, ce circuit est parcouru par un courant. On peut élémentairement rendre compte de ce courant (observé en l'absence de tout générateur classique) en disant que le circuit est le siège d'une force électromotrice d'induction  $e(t)$  donnée par la loi de Faraday qui s'écrit dans le système légal :

$$(59) \quad e = - \frac{d\Phi}{dt} .$$

Cette force électromotrice instantanée peut être positive, négative ou nulle. Sa valeur est parfaitement déterminée dès qu'un "sens de parcours" a

été choisi sur C puisqu'alors  $\vec{n}$  et  $\Phi$  sont clairement définis. Rappelons que si  $\vec{t}$  est le vecteur unitaire de la tangente à C (A1, §4), la force électromotrice d'induction n'est autre que la circulation du champ électrique  $\vec{E}$  sur C :

$$(60) \quad e = \int_C \vec{E} \cdot \vec{t} \, d\ell .$$

Grâce à cette remarque, la formule de Faraday devient :

$$(61) \quad \int_C \vec{E} \cdot \vec{t} \, d\ell = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS ,$$

soit, d'après le théorème de Stokes (A1, §4) :

$$(62) \quad \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS .$$

Si l'on admet que les deux dernières relations sont vraies pour toute courbe C, qu'elle soit ou non matérialisée par un circuit filiforme, on est conduit à la relation dite de Maxwell-Faraday entre les champs :

$$(63) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

Remarquons que si  $\vec{B}$  est indépendant du temps, on retrouve une des lois fondamentales de l'Electrostatique :

$$(27') \quad \text{rot } \vec{E} = 0 .$$

Dans un exposé plus axiomatique, on peut postuler d'emblée la relation (63) et dire que cette relation, qui établit un lien entre champ magnétique et champ électrique, permet de bien interpréter les phénomènes observés. En particulier, il est facile de remonter à la loi de Faraday (59) qui permet la résolution de très nombreux problèmes pratiques (exercices sur les phénomènes d'induction et d'auto-induction en premier cycle).



## Chapitre I

# *Les lois fondamentales de l'électromagnétisme*

En Sciences physiques, rares sont les notions qu'une seule série de cours suffit à faire assimiler de façon satisfaisante. Au contraire, la plupart des grandes questions (Mécanique, Thermodynamique, Electricité, ...) sont abordées plusieurs fois, mais à des niveaux différents, en cours de scolarité. Evidemment la reprise d'un thème déjà étudié ne saurait être qu'un simple rabâchage. Elle se fixe un but plus ambitieux et s'accompagne généralement d'une présentation nouvelle. Bref, elle s'adapte à la maturité intellectuelle de l'Etudiant. Ce sont les "leçons de choses" de l'Enseignement élémentaire qui préparent la présentation des théories physiques à l'Université ; seuls quelques brillants étudiants sont peut-être capables de tirer profit, sans préparation, d'une présentation axiomatique si "peaufinée" soit-elle.

### 1. UN PEU D'HISTOIRE ET DE REFLEXION.

La plupart des lecteurs ont certainement déjà rencontré ce qu'il est convenu d'appeler les équations de Maxwell ; mais pour certains, l'exposé a été limité à l'Electromagnétisme du vide puisque ni l' "Electrostatique des diélectriques", ni "la Magnétostatique des milieux aimantés" ne figuraient à leur programme de Premier cycle. Il faut donc revenir sur cette question pour permettre à tous d'aborder avec fruit le cours qui fait l'objet de ce livre. Supposons donc que nous ayons bien assimilé les notions et les lois du chapitre 0 ; nos connaissances sont à peu près celles d'un physicien de 1860. L'ensemble des phénomènes électromagnétiques connus à cette date pouvait s'interpréter à l'aide de quatre champs de vecteurs notés  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  qui, mathématiquement parlant, étaient considérés comme des fonctions (à valeurs vectorielles) de quatre variables (les trois variables d'espace  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et le temps  $t$ ). Ces fonctions sont, disait-on, suffisamment régulières

pour que dans tout "milieu continu", c'est-à-dire en dehors de certaines surfaces-frontières dont le franchissement entraîne des changements brusques des propriétés de la matière, elles vérifient les relations :

$$(1) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j},$$

$$(3) \quad \text{div } \vec{D} = \rho, \quad (4) \quad \text{div } \vec{B} = 0,$$

dans lesquelles  $\rho(\vec{r}, t)$  et  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  représentent respectivement la densité de charge et le vecteur densité de courant.

A ces relations, il fallait ajouter des renseignements relatifs aux sauts des diverses composantes de champ lors du franchissement d'une surface-frontière entre deux "milieux continus", dits milieu 1 et milieu 2. Si  $\vec{n}_{12}$  est le vecteur unitaire de la normale à une telle surface dirigé de 1 vers 2 :

$$(5) \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \quad (6) \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_s$$

$$(7) \quad \vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s, \quad (8) \quad \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0.$$

Dans ces "relations de passage" établies en Statique au chapitre 0,  $\rho_s$  et  $\vec{j}_s$  représentent d'éventuels charges ou courants superficiels. Les deux dernières (7,8) renseignent sur le saut des composantes normales de  $\vec{D}$  et  $\vec{B}$ . Rappelons (0, §3) que les deux premières peuvent s'interpréter en termes de composantes tangentielles : (5) exprime la conservation de la composante tangentielle de  $\vec{E}$ , tandis que, d'après (6), le saut de la composante tangentielle de  $\vec{H}$  est égal au courant superficiel (à une rotation de  $\pi/2$  autour de  $\vec{n}_{12}$  près).

On peut, à juste titre, s'interroger sur la validité des relations fondamentales (1-4) qui, sauf la première, ont été établies en Electrostatique ou en Magnétostatique. On peut donc envisager que dans le cas général (où les champs  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  dépendent de  $t$ ) il soit nécessaire de modifier les relations (2-4) en y faisant apparaître des termes complémentaires contenant les dérivées des champs par rapport au temps. Il est clair, en effet, que si deux grandeurs  $g_1(\vec{r}, t)$  et  $g_2(\vec{r}, t)$  sont en fait liées par une loi de la forme :

$$(9) \quad a g_1 + b \text{ grad } g_2 + c \frac{\partial g_2}{\partial t} = 0,$$

cette loi ne peut pas être découverte par un expérimentateur faisant uniquement des expériences de Statique. Celui-ci arrivera au mieux à :

$$(10) \quad ag_1 + b \operatorname{grad} g_2 = 0 .$$

La relation (2) est particulièrement suspecte à cet égard car, puisque la divergence d'un rotationnel est nulle (A1), elle conduit à :

$$(11) \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0 .$$

Or, ce résultat est en désaccord avec la règle de la conservation de la charge qui, en régime dépendant du temps, entraîne :

$$(12) \quad \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ,$$

comme on le voit écrivant de deux façons la diminution de la charge d'un domaine  $\Omega$  (limité par une surface fermée  $S$ ), pendant la durée  $dt$  :

$$(13) \quad - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho \, dv = \iint_S \vec{n} \cdot \vec{j} \, ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{j} \, dv .$$

On a évidemment utilisé le premier théorème de Green (A.1) pour obtenir cette égalité qui, puisqu'elle est vraie quelle que soit  $S$ , entraîne (12). Nous sommes donc contraints au choix suivant : ou bien prétendre que la relation (2) reste valable et renoncer au principe de la conservation de la charge (12), ou bien sauvegarder ce principe en modifiant les relations (1-4). C'est cette deuxième attitude qui, vers 1865, fût adoptée par Maxwell pour proposer les "équations" que tout le monde admet aujourd'hui. Il s'agit en fait d'égalités entre êtres mathématiques. (Le mot équation devrait être réservé pour désigner une égalité du type  $f(x) = 0$  vérifiée seulement pour certaines valeurs de  $x$ ). Maxwell proposa de conserver les relations (1,3,4), mais de remplacer la relation (2) par :

$$(2') \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

Cette légère modification suffit pour assurer la conservation de la charge qui apparaît alors comme une conséquence de (2') et (3), comme on le voit immédiatement en égalant la divergence des deux membres de (2') et en notant que  $\operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}$ , tandis que  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$ .

Pour bien comprendre la "révolution maxwellienne", il faut répéter qu'en 1865 tous les phénomènes connus s'expliquaient très correctement à l'aide

des relations (1-4). A cette époque où l'on ne connaissait pas les "courants haute-fréquence", le terme  $\partial\vec{D}/\partial t$  pouvait en effet être négligé sans erreur appréciable (on le néglige d'ailleurs encore aujourd'hui dans "l'approximation des états quasi-stationnaires" souvent utilisée en Radioélectricité). La proposition de Maxwell n'était donc pas de nature à intéresser le grand public... On peut imaginer qu'elle ait été considérée par de nombreux ingénieurs comme une "simple élucubration de théoricien". C'est pourtant grâce à elle que l'on devait prévoir les phénomènes de propagation mis en évidence plus de vingt ans plus tard (expériences de Hertz, de Marconi,...) Ici la Théorie a précédé l'Expérience. Les réflexions d'un seul chercheur (on disait à l'Époque un savant) ont bouleversé les idées établies et ouvert "l'ère des télécommunications". Comme quoi, et contrairement à une idée communément répandue aujourd'hui, la recherche scientifique n'est pas nécessairement un phénomène collectif ; il ne faut pas transposer à la recherche fondamentale ce qui est vrai pour la recherche technologique. Toutes les ressources d'une grande nation sont évidemment nécessaires pour "débarquer" sur la lune, mais des travaux individuels sont aussi susceptibles de faire progresser notre connaissance des lois de la Nature. Il faudrait être bien pessimiste pour croire qu'il n'y aura plus de Maxwell, d'Einstein, de Dirac, ... etc.

## 2. ENONCE CLASSIQUE DES LOIS FONDAMENTALES DE L'ELECTROMAGNETISME.

On peut, comme on le fait le plus souvent dans les manuels d'enseignement, résumer ces lois par les trois énoncés suivants :

2.1. Les équations de Maxwell. Ce sont les quatre relations liant les champs de vecteurs  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  à ce qu'il est convenu d'appeler les sources, c'est-à-dire la fonction densité de charge  $\rho$  et la fonction vectorielle densité de courant  $\vec{j}$  :

$$(1) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2') \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$(3) \quad \text{div } \vec{D} = \rho, \quad (4) \quad \text{div } \vec{B} = 0.$$

Ces relations sont valables dans tout "milieu continu". Les termes "densité de charge" et "densité de courant" sont évidemment critiquables si on a décidé de réserver le mot "densité" à des grandeurs sans dimension.

### 2.2 Les relations de passage à la frontière de deux "milieux continus".

- (5) Conservation de la composante tangentielle de  $\vec{E}$ ,
- (8) Conservation de la composante normale de  $\vec{B}$ ,
- (6) Relation entre le saut de  $\vec{H}$  et le courant superficiel,
- (7) Relation entre le saut de  $\vec{D}$  et la charge superficielle.

Il est clair qu'en l'absence de moyen mnémotechnique, ces relations sont assez difficiles à retenir ; d'où l'intérêt du paragraphe 3.

2.3. La loi donnant la force s'exerçant sur une charge. Dans le vide, si  $\vec{v}$  est la vitesse (par rapport à un référentiel galiléen) d'une charge ponctuelle  $q$  dans un champ  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , on a établi, dans le cours de l'er cycle, que cette charge  $q$ , supposée "passive", est soumise à la force de Lorentz :

$$(14) \quad \vec{f} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

aussi bien en Mécanique classique qu'en Relativité restreinte.

Dans le cas d'une charge répartie avec une charge volumique  $\rho$ , la densité macroscopique de courant est  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  et on peut dire que tout élément de volume  $dr$  est soumis à la force :

$$(14') \quad d\vec{f} = \rho \vec{E} dr + \vec{j} \wedge \vec{B} dr ,$$

mettant ainsi en évidence une force volumique  $\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$  .

Remarque : Les équations de Maxwell ainsi formulées ne sont pas adaptées aux cas des charges ponctuelles, des charges et des courants superficiels. Il serait difficile, pour ne pas dire impossible, de montrer qu'elles résument toutes nos connaissances en Electromagnétisme. Comment par exemple retrouver la loi de Coulomb prévoyant l'interaction entre deux charges ponctuelles, puisque la notion de charge volumique associée à de telles charges n'a pas de sens. On peut bien entendu fermer les yeux sur ce genre de difficultés en disant que les charges ponctuelles n'existent pas dans la nature. C'est une échappatoire un peu facile... et le modèle des charges ponctuelles (comme celui des points matériels en Mécanique) est de toute évidence suffisamment utile pour qu'il mérite d'être conservé.

### 3. L'ELECTROMAGNETISME ET LA THEORIE DES DISTRIBUTIONS.

3.1. Généralités. Toute théorie physique commence par associer des "objets mathématiques" aux "grandeurs physiques". Cette association faite, les lois

physiques se traduisent par des relations entre objets mathématiques bien définis. Par exemple, la Mécanique classique associe à tout "point matériel" un réel positif (sa masse  $m$ ) et représente la "force appliquée" par un vecteur  $\vec{f}$ . Moyennant ces axiomes de représentation, elle postule l'existence d'un repère et d'un paramètre réel  $t$  (le temps) tels que :

$$(15) \quad \vec{f} = m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = m \frac{d\vec{v}}{dt} .$$

Cette loi, dite fondamentale, n'est en fait qu'une "loi-cadre". Placé devant un problème concret, le Physicien doit encore découvrir la "loi de force" c'est-à-dire préciser la valeur de  $\vec{f}$  (dépendant de la position du point, de sa vitesse, et éventuellement du temps) qu'il convient d'adopter pour que l'intégration de (15) donne une fonction  $\vec{OM}(t)$  en bon accord avec l'Expérience.

Il est clair que la présentation de tel ou tel chapitre de Physique est liée à l'état de nos connaissances en Mathématiques. Compte tenu des cours généralement enseignés aujourd'hui à l'Université, il semble que nous puissions envisager d'utiliser les distributions pour représenter des grandeurs physiques. Nous nous proposons de le faire assez systématiquement, en supposant que le Lecteur a déjà une bonne connaissance de notre cours de Mathématiques [7].

3.2. Les lois fondamentales de l'Electromagnétisme (énoncé moderne). Tous les phénomènes que nous nous proposons d'étudier s'interprètent en admettant que les équations de Maxwell sont vraies au sens des distributions. Ceci mérite évidemment un assez long commentaire, commentaire que nous allons entreprendre après avoir récrit ces équations sous une forme légèrement différente de celle utilisée au §2 :

$$(16) \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 , \quad (17) \quad \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} ,$$

$$(18) \quad \text{div } \vec{D} = \rho , \quad (19) \quad \text{div } \vec{B} = 0 .$$

Dans ce modèle  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  sont des distributions vectorielles dont les composantes sont des éléments de  $\mathcal{D}'_{xyzt}$ , c'est-à-dire [7] des fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{D}_{xyzt}$ . Dans le langage des physiciens, ce sont des distributions des quatre variables  $x, y, z, t$  (distributions dans  $\mathbb{R}^4$ ). Il en est de même des distributions  $\rho$  et  $\vec{J}$  que nous continuerons à appeler les sources (ou distributions-sources). Les équations (16) et (19) qui ne contiennent pas les sources sont dites homogènes.

Note sur la théorie des distributions. Soit une distribution des trois variables  $x, y, z$ , notée  $T_t(x, y, z)$  ou  $T_t(\vec{r})$  qui, à toute fonction  $\varphi(x, y, z) \in \mathcal{D}_{xyz}$ , associe un complexe  $c$  dépendant d'un paramètre  $t$  et tel que  $c(t)$  soit localement sommable (cette dernière condition est indispensable pour les applications que nous avons en vue). On dira dans la suite qu'une telle distribution est une distribution des trois variables d'espace dépendant du paramètre  $t$ . Si de plus  $c(t)$  est continûment dérivable, on appellera dérivée de  $T_t(x, y, z)$  par rapport au paramètre  $t$  la distribution des trois variables  $x, y, z$ , notée  $\partial T_t / \partial t$  et définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{xyz}, \quad \left\langle \frac{\partial T_t}{\partial t}, \varphi \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle T_t, \varphi \rangle.$$

Un exemple simple est fourni par  $T_t(\vec{r}) = t \delta(x, y, z)$  :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{xyz}, \quad \langle T_t, \varphi \rangle = t \varphi(0, 0, 0) \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{\partial T_t}{\partial t}, \varphi \right\rangle = \varphi(0, 0, 0).$$

Toute fonction  $\psi(x, y, z, t) \in \mathcal{D}_{xyzt}$  est, pour  $t$  fixé, une fonction  $\varphi_t(x, y, z)$  de  $\mathcal{D}_{xyz}$  sur laquelle on peut faire agir une distribution  $T_t(x, y, z)$ . Cette remarque permet d'associer à toute distribution  $T_t(x, y, z)$  une distribution  $T(x, y, z, t)$  définie par :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{xyzt}, \quad \langle T, \psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T_t, \varphi_t \rangle dt \quad \text{avec} \quad \varphi_t(x, y, z) = \psi(x, y, z, t).$$

En se reportant à la définition de la dérivée partielle d'une distribution ([7], III), il est facile de vérifier que la distribution  $T$  associée à  $\partial T_t / \partial x$  (considérée comme une distribution de trois variables) n'est autre que  $\partial T / \partial x$  (distribution de quatre variables). Il est plus délicat d'établir que  $\partial T / \partial t$  est la distribution de quatre variables associée à  $\partial T_t / \partial t$  (dérivée par rapport au paramètre  $t$  de la distribution de trois variables  $T_t(x, y, z)$ ). On peut pour cela procéder comme suit :

(a) Admettre que :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{xyzt}, \quad \frac{d}{dt} \langle T_t, \varphi_t \rangle = \left\langle \frac{\partial T_t}{\partial t}, \varphi_t \right\rangle + \left\langle T_t, \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \right\rangle$$

Ceci s'établit facilement dans le cas particulier où  $\psi$  est le produit d'une fonction de  $x, y, z$  par une fonction de  $t$ . Le passage au cas général exigerait l'emploi d'un "théorème de densité" et relève donc d'ouvrages spécialisés en théorie des distributions.

(b) Vérifier ensuite que :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{xyzt}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{\partial T_t}{\partial t}, \varphi_t \right\rangle dt = \left\langle \frac{\partial T}{\partial t}, \psi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle,$$

c'est à dire que le premier membre, qui représente l'action sur  $\psi$  de la distribution associée à  $\partial T_t / \partial t$  est identique à celle de  $\partial T / \partial t$ . Il suffit pour cela d'utiliser (a) et de noter que  $\langle T_t, \varphi_t \rangle$  est une fonction de  $t$  dont le support est borné :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{\partial T_t}{\partial t}, \varphi_t \right\rangle dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \langle T_t, \varphi_t \rangle dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T_t, \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \rangle dt = 0 - \langle T, \frac{\partial \psi}{\partial t} \rangle$$

En conclusion, si T est la distribution de quatre variables associée à  $T_t$ , toute dérivation partielle effectuée sur  $T_t$  entraîne la même dérivation sur T.

Comme exemple de distribution  $T_t(\vec{r})$  on peut citer :

a) toute fonction localement sommable  $f(x,y,z,t)$  considérée, pour  $t$  fixé, comme fonction de  $x,y,z$ . Le théorème de Fubini ([7], 0) permet en effet d'établir que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{xyz}, \quad \iiint f \varphi dx dy dz \quad \text{existe et que :}$$

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{xyzt}, \quad \iiint f \psi dx dy dz dt = \int dt \iiint f \varphi_t dx dy dz .$$

b) tout produit du type  $\alpha(t) S(x,y,z)$  où  $S$  est une distribution quelconque et  $\alpha$  une fonction localement sommable. On a en effet :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{xyz}, \quad \langle \alpha(t) S(x,y,z), \varphi(x,y,z) \rangle = \alpha(t) \langle S, \varphi \rangle ,$$

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{xyzt}, \quad \langle \alpha S, \psi \rangle = \langle \alpha \langle S, \varphi \rangle \rangle = \int \alpha(t) \langle S, \varphi \rangle dt$$

d'après, cette fois, le théorème de Fubini pour les distributions ([7], III).

c) les distributions souvent utilisées en Physique  $\delta(\vec{r} - \vec{v}t)$  et  $H(t - u(\vec{r}))$  où  $\vec{v}$  est un vecteur fixé,  $u$  une fonction de points et  $H$  la fonction de Heaviside (s'en convaincre à titre d'exercice).

Par contre  $\delta(\vec{r}) \delta(t)$  ne convient pas puisqu'il est impossible de parler de cette distribution pour  $t$  fixé.

Il se trouve que les distributions  $T(x,y,z,t)$  que nous aurons à manipuler pourront presque toujours être considérées comme des distributions  $T_t(x,y,z)$ , c'est à dire comme des distributions des variables d'espace dépendant du paramètre  $t$ . Cette interprétation sera particulièrement utile pour établir certaines formules suffisamment compliquées pour ne pas figurer dans un cours élémentaire sur les distributions : voir le calcul de  $\vec{\partial} B / \partial t$  dans la théorie du front d'onde (III, § 5).

Les distributions sources  $\rho$  et  $\vec{J}$  décrivent la répartition des charges et des courants selon des axiomes de représentation qui ne sont pas toujours intuitifs et dont voici quelques exemples. Chacun admettra volontiers que les distributions  $q(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ ,  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\rho_s(\vec{r}, t) \delta_s$  soient respectivement les bonnes représentations mathématiques d'une charge ponctuelle  $q(t)$  placée au point  $\vec{r}_0$ , d'une charge répartie en volume et d'une charge répartie sur une surface  $S$  avec une charge surfacique  $\rho_s$  dépendant du temps. Mais (voir §5.2) il est moins évident de deviner quelle est la représentation d'un doublet ou, a fortiori, d'un ensemble de doublets



(Tableau 1). Il en est de même pour  $\vec{J}$ , si l'on songe naturellement à représenter un courant volumique par sa densité de courant  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  et un courant localisé sur une surface  $S$  par la distribution vectorielle singulière  $\vec{j}_s \delta_s$ , il est plus difficile de se persuader (voir §5.2) que, par exemple, la distribution  $\text{rot}(\vec{A} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0))$  représente en Magnétostatique une boucle de courant de moment  $\vec{A}$  placée en  $\vec{r}_0$  (Tableau 2).

Distribution $\varrho$	Situation physique représentée	Commentaires
$\rho(\vec{r}, t)$	charge répartie en volume	La charge associée à l'instant $t$ à un domaine $\Omega$ est $\iiint_{\Omega} \rho \, d\vec{r}$
$\rho_s(\vec{r}, t) \delta_s$	charge répartie sur une surface $S$ ( $\rho_s$ est la charge surfacique)	La charge portée par une partie $S_0$ de $S$ est $\iint_{S_0} \rho_s \, dS$
$q(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$	charge ponctuelle $q(t)$ placée au point $\vec{r}_0$	
$-\text{div}(\vec{A} \delta(\vec{r}))$	en statique, doublet de moment dipolaire $\vec{A}$ placé à l'origine	Exercice du § 5.1
$-\text{div}(\vec{a}(\vec{r}))$	en statique, répartition volumique de doublets (l'élément de volume $dv$ ayant pour moment dipolaire $\vec{a} \, dv$ )	bon sujet de travaux dirigés
$-\text{div}(\vec{b}(\vec{r}) \delta_s)$	en statique, doublets répartis sur une surface $S$ (l'élément $dS$ ayant pour moment dipolaire $\vec{b}(\vec{r}) \, dS$ )	bon sujet de travaux dirigés
$q_0 \delta(\vec{r} - \vec{v}t)$	charge ponctuelle $q_0$ se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$	c'est une distribution des variables $x, y, z$ dépendant de $t$

Tableau 1. Quelques distributions  $\varrho$ .

Bien entendu, toute combinaison linéaire de deux distributions  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  décrit aussi une répartition de charge. Par exemple, la distribution  $2q_0 \delta(\vec{r}) + \rho_s \delta_s$  correspond à une charge ponctuelle  $2q_0$  à l'origine et à une charge répartie sur  $S$  avec la charge surfacique  $\rho_s$ . On a laissé quelques cases vides que chacun pourra remplir à sa guise.

distribution $\vec{J}$	situation physique décrite	commentaires
$\vec{j}(\vec{r}, t)$	courant volumique décrit par sa "densité de courant"	vu au chapitre 0
$\vec{j}_s(\vec{r}, t) \delta_s$	courant superficiel localisé sur la surface S	très utile pour le chapitre VIII
$\text{rot}(\vec{A} \delta(\vec{r}))$	en statique, boucle de courant (dipôle magnétique) de moment magnétique $\vec{A}$ placée à l'origine	exercice du § 5.2
$\text{rot}(\vec{a}(\vec{r}))$	l'élément de volume $dv$ centré sur $\vec{r}$ a un moment magnétique $\vec{a} dv$	bon sujet de travaux dirigés
$\text{rot}(\vec{b}(\vec{r}) \delta_s)$	chaque élément de surface $dS$ centré sur $\vec{r}$ a pour moment magnétique $\vec{b} dS$	bon sujet de travaux dirigés

Tableau 2. Quelques distributions J.

Même remarque que pour le tableau 1 concernant les combinaisons linéaires.

Il importe de bien comprendre que, grâce aux distributions, il est inutile de retenir les relations de passage (5-8). Celles-ci sont impliquées par les équations de Maxwell (16-19) dans lesquelles les opérateurs "div" et "rot" doivent, bien entendu, être définis au sens des distributions de  $\mathbb{R}^3$  ([7], III). Nous reviendrons sur ce point lors de l'étude des équations de Maxwell harmoniques (Chap. II) car se sont elles que nous utiliserons le plus souvent. Pour l'instant, contentons-nous de commenter cette importante remarque à l'aide de l'équation (19), la plus simple des quatre. Soit

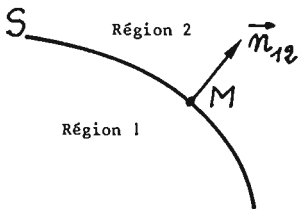


Figure 6

vecteur unitaire de la normale orienté de la région 1 vers la région 2. Admettons que  $\vec{B}$  est régulier dans le complémentaire de S (§ 4.1), mais présente un éventuel saut  $(\vec{B}_1 - \vec{B}_2)$  en tout point M de S. Avec les notations du cours de mathématiques [7], l'équation (19) s'écrit :

$$(\operatorname{div} \vec{B}) + \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\delta_S = 0 ,$$

La distribution singulière  $-\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\delta_S$  ne pouvant être égale à la "divergence sans précaution"  $(\operatorname{div} \vec{B})$  qui est une fonction, ceci implique :

$$(19') \quad (\operatorname{div} \vec{B}) = 0 , \quad (19'') \quad \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 .$$

On retrouve que la divergence de  $\vec{B}$  (au sens des fonctions) est nulle dans le complémentaire de  $S$  (19'), mais on obtient en plus la conservation de la composante normale de  $\vec{B}$  (19'').

On remarquera enfin qu'en prenant la divergence des deux membres de (17), on obtient :  $\operatorname{div} \vec{J} = 0 - \operatorname{div}(\frac{\partial D}{\partial t})$ , soit, en tenant compte de (18) :

$$(20) \quad \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 .$$

Cette égalité entre distributions généralise l'équation de conservation de la charge (12) écrite jusqu'ici au sens des fonctions. L'interprétation de (20) n'est évidemment pas très simple et conduirait à développer, plus que nous l'avons fait, la notion d'opérateurs différentiels (voir Appendix 2 de [8]). Nous ne nous appesantirons pas davantage sur cette question.

3.3 Commentaire. L'énoncé proposé ne demande aucun effort de mémoire puisque formellement les équations restent les mêmes. Qui plus est, la connaissance des équations de Maxwell (qu'il faut savoir par coeur pour faire de l'Electromagnétisme) dispense d'avoir à retenir les relations de passage. Nous avons là un beau domaine d'application de la théorie des distributions. Il nous reste maintenant à compléter les quatre équations universelles (16-19) par des relations constitutives qui précisent le comportement de tel ou tel milieu. Jointes aux équations universelles, elles permettront de prévoir théoriquement l'évolution d'un champ supposé connu à un instant initial. De telles relations ont été étudiées en Statique (Chap.0), mais il est probable qu'elles nécessitent certaines "retouches" avant d'être employées dans les régimes dépendant du temps.

#### 4. LES RELATIONS CONSTITUTIVES.

4.1. Généralités. On peut établir qu'en dehors du support des distributions-sources, les distributions représentant les champs s'identifient à des fonctions localement sommables. Ce sont même des fonctions analytiques des trois variables d'espace dans tout domaine homogène. Nous admettrons désormais que ce sont des fonctions régulières (au moins une fois dérivables) en dehors du support des sources et des surfaces-frontières entre "milieux continus". Rappelons qu'une distribution  $T$  est dite égale à une fonction localement sommable  $f$  sur un ouvert  $\Omega$  si  $\langle T, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$  pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{D}$  ayant son support dans  $\Omega$ . Pour parler des relations constitutives (qui sont, comme nous l'avons déjà vu, des relations entre  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  et éventuellement le courant créé par le champ), on introduit souvent la polarisation électrique  $\vec{P}_e$  et la polarisation magnétique  $\vec{P}_m$  définies par :

$$(21) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e, \quad (22) \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{P}_m,$$

utilisant ainsi, dans le cadre de l'exposé axiomatique que nous sommes en train de faire, des relations de définition qui, au chapitre 0, nous avaient au contraire servis à définir  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$  à partir de  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{P}_e$ ,  $\vec{P}_m$ . Il faut alors ajouter que  $\vec{P}_e$  et  $\vec{P}_m$  sont nuls dans le vide et ceci peut être considéré comme un axiome.

Par élimination de  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$ , on obtient une nouvelle forme des équations de Maxwell où n'interviennent plus que  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{P}_e$  et  $\vec{P}_m$  :

$$(17') \quad \text{rot } \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left( \vec{J} + \text{rot } \vec{P}_m + \frac{\partial \vec{P}_e}{\partial t} \right),$$

$$(18') \quad \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \text{div } \vec{P}_e).$$

En l'absence de matière, (17') et (18') se réduisent à :

$$(17'') \quad \text{rot } \vec{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}, \quad (18'') \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Les quatre équations (16, 17'', 18'', 19) sont souvent appelées les "équations de Maxwell dans le vide". Il y a là évidemment un petit abus de vocabulaire ; il vaudrait mieux dire "en l'absence de toute autre matière que celle liée aux sources". Si, par exemple, un champ est dû au mouvement

d'une particule chargée, il est clair que la particule a parfaitement le droit d'avoir une masse... Cette mise au point une fois faite, la comparaison de (16, 17", 18", 19) avec les équations générales (16-19) permet d'énoncer la règle suivante qui généralise un résultat établi en Statique :

On peut utiliser les "équations du vide" pour traiter des problèmes en présence de matière, à condition de faire intervenir une densité de charges de polarisation  $\rho'$  et une densité de courant de polarisation  $\vec{J}'$  :

$$(23) \quad \rho' = - \operatorname{div} \vec{P}_e, \quad (24) \quad \vec{J}' = \operatorname{rot} \vec{P}_m + \frac{\partial \vec{P}_e}{\partial t}.$$

On notera que ces "sources fictives"  $\rho'$  et  $\vec{J}'$  sont maintenant des distributions qui, dans la mesure où  $\vec{P}_e$  et  $\vec{P}_m$  sont des fonctions discontinues sur une surface  $S$ , comportent une partie singulière correspondant à des charges et des courants superficiels ([7], III).

4.2. Les milieux parfaits. Dans le chapitre 0, en étudiant les régimes indépendants du temps, nous avons utilisé une hypothèse de linéarité très souvent suffisante : en un point donné,  $\vec{P}_e$ ,  $\vec{P}_m$  et  $\vec{j}$  dépendent linéairement respectivement de  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$ . On peut tenter d'admettre que cette hypothèse s'applique à chaque instant, définissant ainsi des "milieux parfaits" dont le comportement se révèle malheureusement souvent différent de celui des milieux réels (ceux que nous rencontrons dans la Nature).

Par définition, un milieu parfait est un milieu pour lequel les relations constitutives prennent la forme suivante :

$$(25) \quad \vec{P}_e(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (26) \quad \vec{P}_m(\vec{r}, t) = \chi_m(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}, t),$$

$$(27) \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t),$$

où  $\chi_e$  et  $\chi_m$  sont des opérateurs linéaires qui, après choix d'une base, sont représentés par une matrice [1]. Ici, on peut, sans aucun danger, utiliser la même notation pour désigner l'opérateur et la matrice et les trois relations (25-27) peuvent ainsi être considérées comme des relations matricielles dans lesquelles  $\chi_e$ ,  $\chi_m$  et  $\sigma$  sont des matrices 3 x 3. Certains parlent même de tenseurs ; on consultera, si besoin est, un livre de Mathématiques [1] pour mieux réfléchir à cette question de vocabulaire, ici sans grand intérêt pratique. On retiendra par contre (Chap. 0) que le scalaire  $\epsilon_0$  est introduit dans (25) pour que, dans (25) et (26), les éléments de matrice

soient des grandeurs sans dimension, indépendantes du système d'unités (dans (25) par exemple, les composantes de  $\epsilon_0 \vec{E}$ , comme celles de  $\vec{P}_e$ , s'expriment en C/m<sup>2</sup>). Dans certaines régions de l'espace, dites alors isotropes, les matrices se réduisent à des scalaires. Dans ce cas, la susceptibilité électrique  $\chi_e$ , la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  et la conductivité  $\sigma$  sont des nombres réels dépendant du point considéré. Ce sont donc des fonctions réelles de  $\vec{r}$ .

En conclusion, pour les milieux que nous appelons parfaits, les relations constitutives gardent la même forme qu'en Electrostatique ou en Magnétostatique (Chap. 0). Cette forme, ne l'oublions pas, résulte d'une hypothèse de localité selon laquelle il existe, pour  $\vec{r}$  fixé, une relation entre la valeur du vecteur figurant au membre de gauche ( $\vec{P}_e$ ,  $\vec{P}_m$  ou  $\vec{j}$ ) et la valeur du vecteur figurant au membre de droite ( $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ). Par exemple, on aurait fort bien pu imaginer, même en Statique, que  $\vec{P}_e(\vec{r})$  dépende des valeurs de  $\vec{E}$  dans un certain voisinage  $\Omega$  de  $\vec{r}$ . C'est ce qui est fait dans certains modèles qui semblent se développer actuellement. On parle alors de milieux non locaux. Dans ce cours, nous n'utiliserons jamais de tels milieux ; leur considération semble d'ailleurs contradictoire avec la notion de frontière macroscopique à laquelle nous ferons constamment allusion (réfléchir pourquoi et comprendre qu'il faudrait alors vraisemblablement remplacer la notion de "frontière" par celle de "couche de transition").

4.3. La relation électrique. Compte tenu de son importance, c'est celle que nous prendrons comme exemple pour dégager des idées générales qui s'appliqueront aux autres relations constitutives. Laissant de côté le cas des milieux anisotropes, supposons que  $\chi_e$  soit un scalaire. Alors, pour  $\vec{r}$  fixé, (25) devient :

$$(25') \quad \vec{P}_e(t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(t) .$$

Ainsi, dire qu'un milieu est parfait, c'est admettre que la valeur de la polarisation à l'instant t dépend uniquement de la valeur du champ à cet instant ; c'est donc croire que les phénomènes de polarisation (0, §2) sont instantanés. Ceci est évidemment peu probable ; se référant à une interprétation microscopique de ces phénomènes, on pressent que toute réorganisation de charge sous l'effet d'une variation de champ nécessite un certain temps. Effectivement, l'Expérience montre que la relation (25') est loin de permettre l'interprétation théorique de tous les phénomènes observés. Il

faut la remplacer par une relation plus élaborée qui, tout en restant linéaire, exprime que  $\vec{P}_e(t)$  dépend des valeurs prises par le champ, non seulement à l'instant  $t$ , mais aussi à certains instants antérieurs. Si, comme nous le supposons implicitement, le milieu ne se modifie pas au cours du temps, il faut aussi que la nouvelle relation soit invariante par translation sur  $t$ . Nous nous orientons donc vers la notion de filtre linéaire et postulons l'existence d'une distribution  $T_e(\vec{r}, t)$  telle que :

$$(28) \quad \vec{P}_e(\vec{r}, t) = \epsilon_0 T_e(\vec{r}, t) \overset{\text{t}}{*} \vec{E}(\vec{r}, t) ,$$

où le symbole  $\overset{\text{t}}{*}$  indique une convolution par rapport à  $t$  pour  $\vec{r}$  fixé. Pour être parfaitement clair, il faut préciser que cette notation signifie en fait :

$$(28') \quad P_j(\vec{r}, t) = \epsilon_0 T_e(\vec{r}, t) \overset{\text{t}}{*} E_j(\vec{r}, t) ,$$

où  $P_j$  et  $E_j$  désignent les composantes de  $\vec{P}_e$  et  $\vec{E}$  sur un même axe. On remarquera que (28) s'applique aussi aux milieux parfaits ; en convenant que pour ceux-ci  $T_e(\vec{r}, t)$  est le produit (tensoriel) de la permittivité  $\chi_e(\vec{r})$  définie en Electrostatique par la distribution de Dirac  $\delta(t)$ . Alors :

$$(29) \quad \vec{P}_e(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}) \delta(t) \overset{\text{t}}{*} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

et, puisque  $\delta(t)$  est l'unité de convolution, on retrouve la relation (25). Dans le cas particulier où  $\vec{P}_e$ ,  $\vec{E}$  et  $T_e$  sont, pour  $\vec{r}$  fixé, des fonctions de  $t$ , le produit de convolution peut s'exprimer sous forme intégrale :

$$(30) \quad \vec{P}_e(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} T_e(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau .$$

Sous cette forme, on voit que  $T_e(\tau)$  décrit "l'importance" de l'instant  $t - \tau$  quand on calcule la polarisation à l'instant  $t$ . Il semble donc que  $T_e(\tau)$  doive devenir très rapidement négligeable quand on s'écarte de  $\tau = 0$ . Mais surtout, on est contraint d'exiger que  $T_e(\tau)$  soit à support positif, refusant d'admettre que la polarisation à l'instant  $t$  puisse dépendre des valeurs du champ à des instants postérieurs à  $t$ . Pour être plus précis encore, et si nous décidons d'exclure de cet ouvrage les phénomènes de polarisation permanente, nous souhaitons que la proposition " $\vec{E} = 0$  pour  $t < 0$ " implique " $\vec{P} = 0$  pour  $t < 0$ ". On dit alors que la relation (28) obéit au principe de causalité.

Finalement, nous retiendrons la relation (28) en exigeant que  $T_e(\vec{r}, t)$  soit, pour  $\vec{r}$  fixé, une distribution à support positif en  $t$ . On montre ([7], IX, §6) que ceci entraîne d'importantes propriétés sur sa transformée de Fourier  $\hat{T}_e(\vec{r}, \nu)$  par rapport à  $t$ . La plus importante, et en tout cas celle que nous utiliserons le plus souvent, est que cette transformée est une fonction complexe de la variable  $\nu$  ayant sa partie réelle et sa partie imaginaire liées par la transformation de Hilbert. On peut retrouver rapidement ce résultat en notant que si  $T_e(t)$  est une fonction à support positif (fonction causale), alors :

$$(31) \quad T_e(t) = \text{sgn}(t) T_e(t) ,$$

où  $\text{sgn}(t)$  désigne la fonction "signe de  $t$ " (égale à 1 ou à -1 suivant le signe de  $t$ ). Par transformation de Fourier, le second membre de (31) devient un produit de convolution. Or la transformée de Fourier de  $\text{sgn}(t)$  est  $-\frac{1}{i\pi} V_p\left(\frac{1}{x}\right)$  ou  $\frac{1}{i\pi} V_p\left(\frac{1}{x}\right)$  suivant que l'on utilise  $\mathcal{F}^+$  ou  $\mathcal{F}^-$  ([7], Chap. VII). Décidant d'utiliser  $\mathcal{F}^+$ , on a donc :

$$(32) \quad \hat{T}_e(\nu) = -\frac{1}{i\pi} V_p\left(\frac{1}{\nu}\right) * \hat{T}_e(\nu) ,$$

formule faisant intervenir la distribution  $V_p\left(\frac{1}{\nu}\right)$ , dite "valeur principale de  $1/\nu$ " ou "pseudofonction  $1/\nu$ " ([7], Chap. I). Il suffit alors de poser :

$$(33) \quad \hat{T}_e(\nu) = A'(\nu) + iA''(\nu) , \quad A' \text{ et } A'' \text{ réels,}$$

pour trouver les relations cherchées (dites relations de dispersion) en égalant la partie réelle et la partie imaginaire des deux membres :

$$(34) \quad A'(\nu) = -\frac{1}{\pi} V_p\left(\frac{1}{\nu}\right) * A''(\nu) , \quad (34') \quad A''(\nu) = \frac{1}{\pi} V_p\left(\frac{1}{\nu}\right) * A'(\nu) .$$

On devra faire l'effort nécessaire pour bien assimiler ces considérations mathématiques dont nous reparlerons souvent. Elles constituent l'essentiel de ce paragraphe, le reste n'est qu'une question de notation. Nous pouvons notamment donner la forme prise par la relation électrique si on l'exprime à l'aide de  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$ . Il suffit de revenir à la définition de  $\vec{D}$  (21) pour obtenir, compte tenu de (28) :



$$(35) \quad \vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 T_e(\vec{r}, t) \overset{t}{*} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

soit, puisque  $\delta$  est l'unité de convolution :

$$(35') \quad \vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \left( \delta(t) + T_e(\vec{r}, t) \right) \overset{t}{*} \vec{E}(\vec{r}, t) .$$

Alors, posant :

$$(36) \quad S_e(\vec{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(t) + T_e(\vec{r}, t) ,$$

il apparait que :

$$(37) \quad \vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 S_e(\vec{r}, t) \overset{t}{*} \vec{E}(\vec{r}, t) .$$

La distribution  $S_e(\vec{r}, t)$  est parfois appelée "permittivité percussionnelle", puisqu'en un point donné elle est étroitement liée à la réponse du milieu (considéré comme un filtre linéaire) à une impulsion de Dirac (pour  $\vec{r}$  fixé,  $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \delta(t)$  entraîne  $\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}_0 S_e(t)$ ).

4.4. La relation magnétique et la relation de conductivité. Tout ce qui vient d'être dit au §4.3 peut se répéter, au facteur  $\epsilon_0$  près, en remplaçant  $\vec{P}_e$ ,  $\vec{E}(t)$ ,  $\chi_e$  par  $\vec{P}_m$ ,  $\vec{H}(t)$ ,  $\chi_m$  et en introduisant une nouvelle distribution  $T_m(\vec{r}, t)$  à la place de  $T_e(\vec{r}, t)$ . On est alors conduit à écrire, en milieu isotrope :

$$(38) \quad \vec{P}_m(\vec{r}, t) = T_m(\vec{r}, t) \overset{t}{*} \vec{H}(\vec{r}, t) ,$$

ou, si l'on préfère utiliser  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  :

$$(39) \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 S_m(\vec{r}, t) \overset{t}{*} \vec{H}(\vec{r}, t) ,$$

avec :

$$(40) \quad S_m(\vec{r}, t) = \delta(t) + T_m(\vec{r}, t) .$$

Nous n'insisterons pas davantage sur ces considérations qui se révéleront sans grand intérêt compte tenu des buts que nous nous sommes fixés : nous

n'étudierons en effet que des milieux "magnétiquement" parfaits.

Quant à la relation de conductivité, on devrait à priori introduire une distribution  $C(\vec{r}, t)$  permettant d'écrire :

$$(41) \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = C(\vec{r}, t) * \vec{E}(\vec{r}, t) .$$

Pour un métal homogène et isotrope, on se contente souvent de :

$$(42) \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) ,$$

supposant ainsi que la loi d'Ohm utilisée en Statique reste vraie. Dans cette hypothèse et admettant de plus que le métal est électriquement parfait :

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \epsilon \text{ div } \vec{E} = \rho .$$

On en déduit :

$$\text{div rot } \vec{H} = 0 = \sigma \text{ div } \vec{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{E}) = \frac{\sigma \rho}{\epsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Il en résulte qu'en tout point :

$$(43) \quad \rho(t) = \rho(0) \exp(-t/\tau) \quad \text{avec} \quad \tau = \epsilon/\sigma .$$

La constante  $\tau$ , qui a les dimensions d'un temps, est appelée temps de relaxation. Dans tous les conducteurs usuels,  $\tau$  est très faible : avec  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\sigma = 10^7$ ,  $\tau \sim 10^{-18}$  s. Ainsi, si la charge volumique  $\rho$  n'était pas nulle à un certain instant, elle le deviendrait pratiquement au bout d'un temps généralement négligeable dans les applications. Ceci signifie qu'une charge supposée placée à l'intérieur d'un conducteur isolé regagne pratiquement instantanément la surface de ce conducteur, sur laquelle elle se répartit à l'équilibre.

## 5. EXERCICES.

5.1. La distribution  $\varrho = -\text{div}(\vec{A} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0))$  représente un doublet de moment  $\vec{A}$  placé en  $\vec{r}_0$ . Posant  $\vec{A} = A \vec{u}$  ( $\vec{u}$  vecteur unitaire de  $\vec{A}$ ), un tel doublet est

la limite quand  $\ell \rightarrow 0$  du système  $S_\ell$  formé des charges  $-A/\ell$  et  $A/\ell$  respectivement placées en  $\vec{r}_0$  et  $\vec{r}_0 + \ell\vec{u}$ . Soit  $T_\ell$  la distribution associée à  $S_\ell$  :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_\ell, \varphi \rangle &= \left\langle -\frac{A}{\ell} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{A}{\ell} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0 - \ell\vec{u}), \varphi(\vec{r}) \right\rangle . \\ &= \frac{A}{\ell} (\varphi(\vec{r}_0 + \ell\vec{u}) - \varphi(\vec{r}_0)) . \end{aligned}$$

Quand  $\ell$  tend vers zéro, le second membre tend vers la valeur prise en  $\vec{r}_0$  par  $\vec{A} \cdot \text{grad } \varphi$ . Celle-ci n'est autre que  $\langle \varrho, \varphi \rangle$ , car :

$$\begin{aligned} \langle -\text{div}(\vec{A} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)), \varphi \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} - \sum_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)), \varphi \right\rangle , \\ &= \sum_i \langle A_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = \sum_i A_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\vec{r}_0) . \end{aligned}$$

On notera qu'en particulier un doublet de moment unité, placé à l'origine, et orienté suivant  $Ox$ , est représenté par  $-\frac{\partial}{\partial x} (\delta(\vec{r}))$ .

5.2. La distribution  $\vec{J} = \text{rot}(\vec{A} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0))$  représente une boucle de courant de moment magnétique  $\vec{A}$  placée en  $\vec{r}_0$ . Sans perdre de généralité, on peut supposer  $\vec{r}_0 = 0$  et  $\vec{A} = A \vec{e}_z$ . Un circuit  $C$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$  dans le sens du vecteur unitaire  $\vec{t}$  de la tangente, est représenté par la distribution  $\vec{J} = I \vec{t} \delta_C$ . C'est dire que si  $t_n$  est une composante de  $\vec{t}$ , les composantes  $J_n$  de  $\vec{J}$  sont définies par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle J_n, \varphi \rangle = \langle I t_n \delta_C, \varphi \rangle = I \int_C t_n \varphi \, d\ell .$$

Si  $C$  est un cercle défini par :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi ,$$

orientons  $\vec{t}$  dans le sens de  $\theta$  croissant et posons  $I = A/\pi r^2$ . Alors :

$$\vec{J} = \frac{A}{\pi r^2} \vec{t} \delta_C \quad \text{avec} \quad \vec{t} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y .$$

En remarquant que toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{D}$  peut se mettre sous la forme :

$$\varphi(x,y,0) = \varphi(0,0,0) + x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0,0) + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0,0) + r^2 \psi(x,y,0) ,$$

où  $\psi$  est une fonction bornée, on montre, après quelques intégrations immédiates que :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \langle J_x, \varphi \rangle = -A \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0,0), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \langle J_y, \varphi \rangle = A \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0,0) .$$

On a donc, au sens des distributions :

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_x = A \frac{\partial \delta}{\partial y}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} J_y = -A \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

et, puisque  $J_z = 0$ ,  $\vec{J}$  tend vers la distribution ayant pour composantes  $A \partial \delta / \partial y$ ,  $-A \partial \delta / \partial x$ ,  $0$ , distribution que l'on identifie immédiatement à  $\text{rot}(A \vec{e}_z \delta(\vec{r}))$ . (C.Q.F.D.).

5.3. Retrouver, à partir des équations de Maxwell, les lois de l'Electrostatique et certains résultats de la théorie du potentiel. En Electrostatique,  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  sont nuls, ainsi que toutes les dérivées par rapport au temps. Les équations (16) et (18) s'écrivent au sens des distributions dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$(44) \quad \text{rot } \vec{E} = 0, \quad (45) \quad \text{div } \vec{D} = \rho,$$

et d'après (44), il existe une fonction potentiel  $V$  telle que :

$$(46) \quad \vec{E} = - \text{grad } V .$$

5.3.1. Electrostatique du vide. Posant  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ , on trouve immédiatement l'équation de Poisson :

$$(47) \quad \Delta V = \text{div}(\text{grad } V) = - \text{div } \vec{E} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

Si le support de  $\rho$  est borné, il suffit d'imposer l'annulation du potentiel à l'infini pour entraîner l'unicité de la solution (une fonction harmonique qui s'annule à l'infini est nulle). Alors, si  $g(\vec{r})$  est solution élémentaire de l'équation de Laplace, c'est-à-dire si  $\Delta g = \delta(\vec{r})$  :

$$(48) \quad v = -\frac{1}{\epsilon_0} g * \varrho .$$

On sait [7] que  $g = -\frac{1}{4\pi r}$  convient. Il suffit de se reporter au cours sur le produit de convolution [7] pour retrouver tous les résultats classiques.

$$a) \text{ Si } \varrho = q_0 \delta(\vec{r}), \quad v(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} * \delta(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r} .$$

b) Si  $\varrho = \rho(\vec{r})$  et si  $\Omega$  est le support de  $\rho$  :

$$v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho * \frac{1}{r}, \quad \text{soit} \quad v(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv' .$$

$$c) \text{ Si } \varrho = \rho_s \delta_s, \quad v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} * \rho_s \delta_s, \quad v(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho_s(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS' .$$

On notera dans ce cas que l'équation de Poisson s'écrit :

$$(\Delta v) + \frac{\sigma_{dv}}{dn} \delta_s + \operatorname{div}(\vec{n} \sigma_v \delta_s) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_s \delta_s .$$

Cette égalité, qui fait intervenir les sauts  $\sigma$  des fonctions  $v$  et  $dv/dn$  sur la surface  $S$ , impose  $\Delta v = 0$  dans le complémentaire de  $S$ ,  $\sigma_v = 0$  et  $\sigma_{n.E} = \rho_s/\epsilon_0$ . On retrouve élégamment et rapidement des résultats de la Théorie du Potentiel : continuité de  $v$  et saut de la composante normale de  $\vec{E}$ , la continuité de la composante tangentielle étant assurée par (44).

$$d) \text{ Si } \varrho = -\operatorname{div}(\vec{A}\delta), \quad v = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} * \operatorname{div}(\vec{A}\delta)$$

et il faut reconnaître le potentiel en  $\vec{r}$  d'un doublet de moment  $\vec{A}$  placé à l'origine. A nouveau, ceci résulte des propriétés du produit de convolution vis à vis de la dérivation :

$$4\pi\epsilon_0 v = -\sum_i \frac{1}{r} * \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i \delta) = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) * A_i \delta = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{A_i}{r} \right) .$$

Or, désignant par  $\vec{u}$  le vecteur unitaire de  $\vec{r}$  :  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{u_i}{r^2}$  et par

$$\text{suite : } v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{A} \cdot \vec{u}}{r^2} \text{ (C.Q.F.D.)}.$$

5.3.2. Equilibre électrostatique des conducteurs. Soit dans un milieu homogène de permittivité  $\epsilon$  un ensemble de conducteurs chargés limités par des surfaces fermées  $S_i$ . Chaque conducteur est caractérisé par une permittivité  $\epsilon_i$ , une conductivité  $\sigma_i$ . On peut considérer que la permittivité du système étudié est une fonction constante par morceaux. Il en est de même pour la conductivité. Le champ et le potentiel sont des fonctions en dehors des surfaces frontières  $S_i$ . La deuxième équation de Maxwell (17) s'écrit ici :  $0 = 0 + \sigma \vec{E}$ . On en déduit que  $\vec{E}$  est nécessairement nul dans tout domaine métallique où  $\sigma$  est différent de 0. Un tel domaine à l'intérieur duquel  $\vec{E} = 0$  est donc un volume équipotentiel.

La relation (44) implique la "continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$ " à la traversée de  $S_i$ , sans quoi la distribution  $\text{rot } \vec{E}$  qui contiendrait le terme singulier  $\vec{n} \wedge (\vec{E} - \vec{0}) \delta_{S_i}$  ne saurait être nulle.

Enfin (47) relie le saut de  $\vec{n} \cdot \vec{D}$  à la charge superficielle  $\rho_s$ . Puisque  $\vec{E}$  est nul à l'intérieur du métal, on obtient très simplement le théorème de Coulomb relatif à la valeur de  $\vec{E}$  au voisinage immédiat d'un métal en équilibre. Si  $\vec{n}$  est orienté vers le milieu homogène :  $\vec{n} \cdot \epsilon \vec{E} - \vec{n} \cdot \vec{0} = \rho_s$ , d'où, puisque sa composante tangentielle, qui se conserve, est nulle :  $\vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \vec{n}$ .

## Chapitre II

# *Les équations de Maxwell harmoniques*

On sait que, grâce à la transformation de Fourier, toute fonction réelle  $s(t)$  qui, en tant que distribution est tempérée, peut être considérée comme la superposition de fonctions sinusoïdales de fréquence  $\nu$  et d'amplitude  $a(\nu)$ . C'est évidemment seulement si toutes les fréquences  $\nu$  "contenues" dans  $s(t)$  appartiennent à un intervalle étroit centré sur un certain  $\nu_0$  que l'ingénieur est tenté de remplacer  $s(t)$  par une fonction sinusoïdale de fréquence  $\nu_0$ . Il se trouve que toute particulièrement en Optique du visible cette approximation est souvent suffisante. Pour préciser, il faut se reporter au cours de Mathématiques ([7], V et VI) et il est préférable de s'intéresser au signal analytique  $\tilde{s}(t)$  plutôt qu'au signal réel représenté par  $s(t)$ . Considérons par exemple la fonction  $s(t) = m(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$  où  $m(t)$  est une gaussienne, c'est-à-dire une "courbe en cloche" dans le langage des techniciens. On sait [A3, §4.1] que  $\tilde{s}(t) = m(t) \exp(-i2\pi\nu_0 t)$  et que par suite  $\hat{s}(\nu)$  se déduit de  $\hat{m}(\nu)$  par translation d'amplitude  $\nu_0$ . Par ailleurs le produit de la "largeur"  $\Delta t$  de  $m(t)$  par la "largeur"  $\Delta\nu$  de sa transformée de Fourier  $\hat{m}(\nu)$  est de l'ordre de l'unité. Si  $\nu_0$  est de l'ordre de  $10^{15}$  (cas de l'Optique du visible) et si  $\Delta t$  est de l'ordre de la nanoseconde, on en déduit que  $\Delta\nu/\nu_0$  est voisin de  $10^{-6}$ , donc très faible (CQFD). En conclusion, on retiendra que c'est la transformation de Fourier qui justifie théoriquement l'intérêt que nous portons aux régimes sinusoïdaux.

### 1. QUELQUES CONSIDERATIONS THEORIQUES.

1.1. Equations de Maxwell et transformation de Fourier (T.F.). Au lieu de nous intéresser aux champs  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  et aux sources  $\rho$  et  $\vec{j}$ , on peut raisonner sur leurs transformées de Fourier  $\hat{E}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{D}$ ,  $\hat{H}$ ,  $\hat{\rho}$  et  $\hat{j}$  par rapport à la variable  $t$ . Ces transformées sont des fonctions (ou plus généralement

X

des distributions) de  $\vec{r}$  et de la variable  $\nu$  (variable conjuguée de la variable  $t$ ). Par rapport à  $t$ , les quatre équations de Maxwell (I, 16-19) sont des équations différentielles du premier ordre et à coefficients constants qui se transforment facilement : la dérivation d'une fonction  $f(\vec{r}, t)$  par rapport à  $t$  correspond à la multiplication de sa transformée de Fourier par la variable conjuguée  $\nu$  (à un coefficient près qui dépend de la définition précise de la T.F.) et la transformée de  $\mathcal{L} f(\vec{r}, t)$  (où  $\mathcal{L}$  est l'un des opérateurs divergence ou rotationnel) est tout simplement  $\mathcal{L} \hat{f}(\vec{r}, \nu)$ . Reste à préciser la définition de la T.F. ; nous utiliserons celle qui, à toute fonction  $f(t)$  sommable, associe la fonction  $\hat{f}(\nu)$  définie par :

$$f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(i2\pi\nu t) dt .$$

C'est la transformation que nous avons appelée  $\mathcal{F}^+$  (Fourier plus) dans notre cours de Mathématiques [7]. Pour utiliser les règles de calculs données dans l'Annexe 4 de ce cours, il faut faire  $c = -2\pi$ ,  $a = b = 1$ .

On est alors immédiatement conduit à :

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{rot } \hat{\vec{E}} - 2i\pi\nu \hat{\vec{B}} &= 0 , & (2) \quad \text{rot } \hat{\vec{H}} + 2i\pi\nu \hat{\vec{D}} &= \hat{\vec{J}} , \\ (3) \quad \text{div } \hat{\vec{D}} &= \hat{\varrho} , & (4) \quad \text{div } \hat{\vec{B}} &= 0 . \end{aligned}$$

Ces équations sont vraies "au sens des distributions dans  $\mathbb{R}^3$ " ou "au sens des fonctions" dans tout milieu continu.

1.2. Equations de Maxwell et signal analytique. On peut aussi raisonner sur les signaux analytiques  $\vec{\tilde{E}}, \vec{\tilde{B}}, \vec{\tilde{D}}, \vec{\tilde{H}}, \vec{\tilde{\rho}}$  et  $\vec{\tilde{j}}$  respectivement associés à  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \varrho$  et  $\vec{J}$  au moyen de la transformation de Fourier  $\mathcal{F}^+$ . Si  $f$  est une fonction (voire une distribution) tempérée des quatre variables  $x_1, x_2, x_3, t$ , alors, comme pour la T.F., le signal analytique de  $\partial f / \partial x_1$  est la dérivée par rapport à  $x_1$  du signal analytique de  $f$ . Puisque, de plus, le signal analytique associé à la dérivée par rapport à  $t$  est la dérivée du signal analytique (A.3), les équations de Maxwell (16-19) gardent la même forme quand on remplace les champs et les sources par leur signal analytique :

$$\begin{aligned} (5) \quad \text{rot } \vec{\tilde{E}} + \frac{\partial \vec{\tilde{B}}}{\partial t} &= 0 , & (6) \quad \text{rot } \vec{\tilde{H}} - \frac{\partial \vec{\tilde{D}}}{\partial t} &= \vec{\tilde{J}} , \\ (7) \quad \text{div } \vec{\tilde{D}} &= \vec{\tilde{\rho}} , & (8) \quad \text{div } \vec{\tilde{B}} &= 0 . \end{aligned}$$



1.3. Les équations de Maxwell en régime sinusoïdal. Si les champs et les sources dépendent sinusoïdalement du temps, c'est-à-dire si toute composante de champ, toute composante de  $\vec{J}$ , ainsi que la densité de charge  $\rho$ , peuvent s'écrire sous la forme :

$$(9) \quad u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi(\vec{r})) ,$$

on sait (A.2) qu'il est commode de représenter les champs et les sources par des quantités complexes  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\mathfrak{R}$  et  $\vec{J}$  dépendant uniquement de  $\vec{r}$ . Les champs vectoriels  $\vec{E}(\vec{r})$ ,  $\vec{B}(\vec{r})$ ,  $\vec{D}(\vec{r})$ ,  $\vec{H}(\vec{r})$ ,  $\vec{J}(\vec{r})$  sont dits vecteurs complexes (en anglais phasors) associés aux champs et au courant, et la fonction  $\mathfrak{R}(\vec{r})$  est l'amplitude complexe de la densité de charges. Puisqu'en multipliant la quantité complexe associée à une fonction sinusoïdale par  $\exp(-i2\pi\nu_0 t)$  on obtient son "signal analytique" (A.3), il est facile de déduire de (5-8) les équations vérifiées par les quantités complexes. Posant  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  :

$$(10) \quad \text{rot } \vec{E} - i\omega_0 \vec{B} = 0 ,$$

$$(11) \quad \text{rot } \vec{H} + i\omega_0 \vec{D} = \vec{J} ,$$

$$(12) \quad \text{div } \vec{D} = \mathfrak{R} ,$$

$$(13) \quad \text{div } \vec{B} = 0 .$$

Par exemple, pour établir (10), on remplace respectivement  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  par  $\vec{E} \exp(-i\omega_0 t)$  et  $\vec{B} \exp(-i\omega_0 t)$  dans (5). Il suffit ensuite de diviser les deux membres par  $\exp(-i\omega_0 t)$ .

Les équations (10-13) sont dites équations de Maxwell harmoniques. On peut évidemment les obtenir de façon beaucoup plus simple (§2) mais la démarche que nous venons de suivre est instructive. Elle montre que les notions de T.F., de signal analytique et de représentation complexe des fonctions sinusoïdales sont étroitement liées. Le choix d'une dépendance temporelle n'est pas indépendant de celui de la transformation de Fourier utilisée.

Il est important de noter que les équations de Maxwell harmoniques (10-13) sont identiques aux équations vérifiées par les transformées de Fourier (1-4). On peut retrouver ce résultat, sans passer par la notion de signal analytique, en établissant directement un lien entre l'amplitude complexe  $\mathfrak{U}$  et la transformée de Fourier  $\hat{u}(\nu)$  d'une fonction  $u(t) = a(\cos 2\pi\nu_0 t + \varphi)$ . D'après l'annexe 2 :

$$(14) \quad 2\hat{u} = \mathfrak{U} \delta(\nu - \nu_0) + \bar{\mathfrak{U}} \delta(\nu + \nu_0) .$$

Partant par exemple de (1), on trouve :

$$\delta(\nu - \nu_0) \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} + \delta(\nu + \nu_0) \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = 2i\pi\nu \left( \vec{\mathcal{H}} \delta(\nu - \nu_0) + \vec{\mathcal{H}} \delta(\nu + \nu_0) \right) ,$$

soit, en se souvenant que  $\nu\delta(\nu - \nu_0) = \nu_0\delta(\nu - \nu_0)$  :

$$\delta(\nu - \nu_0) \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} + \delta(\nu + \nu_0) \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = 2i\pi\nu_0 \vec{\mathcal{H}} \delta(\nu - \nu_0) - 2i\pi\nu_0 \vec{\mathcal{H}} \delta(\nu + \nu_0)$$

En égalant les "coefficients de  $\delta(\nu - \nu_0)$ ", puis ceux de  $\delta(\nu + \nu_0)$ , on obtient l'équation (10) et son imaginaire conjuguée.

## 2. LE POINT DE VUE PRATIQUE.

2.1. Généralités. Chaque fois que l'on s'intéressera à des régimes sinusoïdaux de fréquence  $\nu$  donnée (pulsation  $\omega = 2\pi\nu$ ), nous représenterons les grandeurs physiques (fonctions réelles dépendant des variables d'espace et du temps) par des fonctions complexes des seules variables d'espace. Cette technique de représentation, qui est sans doute déjà connue du Lecteur, est exposée et commentée dans l'annexe 2. Sauf avis contraire (X), nous utiliserons systématiquement la dépendance temporelle en  $\exp(-i\omega t)$ .

L'amplitude complexe associée à :

$$(15) \quad u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(\vec{r})) ,$$

sera donc :

$$(15') \quad \mathcal{U}(\vec{r}) = a(\vec{r}) \exp(-i\varphi(\vec{r})) .$$

Un champ de vecteur du type :

$$(16) \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^3 v_i(\vec{r}, t) \vec{e}_i ,$$

dont les composantes  $v_i$  sont des fonctions sinusoïdales du temps, d'amplitude complexe  $\mathcal{V}_i(\vec{r})$ , sera décrit par le "vecteur complexe" :

$$(16') \quad \vec{\mathcal{V}}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{V}_i(\vec{r}) \vec{e}_i .$$

Pour obtenir la "grandeur physique", on multipliera la "grandeur complexe" associée par  $\exp(-i\omega t)$  et on prendra la partie réelle de ce produit. Pour dériver par rapport à  $t$ , on multipliera la grandeur complexe par  $-i\omega$ . On consultera l'annexe 2 pour se remémorer les autres règles du jeu.

2.2. Les équations de Maxwell harmoniques. On les obtient immédiatement à partir des équations de Maxwell (I, 16-19) en y remplaçant respectivement  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\rho$  par  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{B}}$ ,  $\vec{\mathcal{D}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$ ,  $\vec{\mathcal{J}}$ ,  $\mathcal{R}$  et en remplaçant la dérivation par rapport à  $t$  par la multiplication par  $-i\omega$ . On arrive aux équations (10-13) dans lesquelles la pulsation (notée  $\omega_0$  dans le contexte du §1) est maintenant appelée  $\omega$  :

$$(10') \text{ rot } \vec{\mathcal{E}} - i\omega \vec{\mathcal{B}} = 0 ,$$

$$(11') \text{ rot } \vec{\mathcal{H}} + i\omega \vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{J}} ,$$

$$(12') \text{ div } \vec{\mathcal{D}} = \mathcal{R} ,$$

$$(13') \text{ div } \vec{\mathcal{B}} = 0 .$$

Il faut absolument savoir retrouver très rapidement ces équations auxquelles nous nous référerons constamment. On a pris soin jusqu'ici d'utiliser des lettres différentes pour les "grandeurs physiques" et les "grandeurs complexes" ( $\vec{E}$  et  $\vec{\mathcal{E}}$ , par exemple). Mais les notations diffèrent d'un auteur à l'autre... il faut donc savoir s'adapter. Il est clair que, dans une phrase telle que : "soit  $\vec{E}(\vec{r})$  le champ électrique en régime harmonique",  $\vec{E}$  ne peut être qu'un "vecteur complexe" puisque le "champ physique" dépendrait non seulement de  $\vec{r}$ , mais aussi du temps  $t$ . Disons aussi que la lettre  $\mathcal{R}$ , utilisée dans (12) pour désigner l'amplitude complexe de la densité de charge, n'est pratiquement jamais employée dans la littérature scientifique où, par économie de notation, on continue généralement à désigner les sources par  $\rho$  et  $\vec{j}$  en régime harmonique (il suffit de préciser que ces termes de source dépendent uniquement de  $\vec{r}$  pour éviter toute confusion). Enfin, et quand cela n'entraînera aucune confusion, nous nous dispenserons de mettre une flèche sur les lettres  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{J}$  (ou  $J$ ) bien qu'elles représentent des vecteurs.

2.3. Le problème des relations de passage. Il est facile de montrer que les relations de passage valables en régime quelconque (I, §2.2) restent vraies si l'on remplace les diverses grandeurs physiques par les "quantités complexes" utilisées pour les représenter. Mais ces relations sont assez difficiles à retenir. La bonne façon d'éviter des efforts de mémoire inutiles consiste à savoir que les équations de Maxwell harmoniques sont, comme les équations de Maxwell dont elles dérivent, vraies au sens des distributions.

Il s'agit ici de distributions des trois variables d'espace, c'est-à-dire de distributions dans  $\mathbb{R}^3$ . Le sens et les propriétés des opérateurs différentiels  $\text{div}$  et  $\text{rot}$  doivent être étudiés dans un cours de Mathématiques ([7], III). Quant aux sources, elles sont représentées par des distributions données par les tableaux 1 et 2 du chapitre I en y remplaçant systématiquement les fonctions  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\rho_s(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}_s(\vec{r}, t)$  par les grandeurs complexes qui les représentent. Répétons que, moyennant cette interprétation, les équations harmoniques contiennent en fait les relations de passage qu'il faut nécessairement ajouter dans un exposé traditionnel. Compte tenu de l'importance de cette proposition, qui est un argument important en faveur de l'utilisation des distributions en Electromagnétisme, nous allons un peu insister.

Considérons (fig.7) une surface  $S$  séparant deux milieux homogènes 1 et 2, ou même plus généralement deux "milieux continus" pour chacun desquels  $\mu$ ,  $\epsilon$  et  $\sigma$ , définis au §3, sont des fonctions continues des variables d'espace. De telles surfaces se rencontrent fréquemment ; les dioptries des opticiens sont de bons exemples. Soit  $\vec{n}_{12}$  le vecteur unitaire de la normale en  $M$ , orienté de 1 vers 2. Dans le complémentaire de  $S$ , les fonctions vectorielles  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{H}$  sont régulières (au moins une fois continûment dérivables), mais elles subissent éventuellement des sauts  $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1$  en tout point  $M$  de  $S$ . On notera que ces sauts ont été définis en franchissant  $S$  dans le sens de  $\vec{n}_{12}$  (valeur après franchissement moins valeur avant).

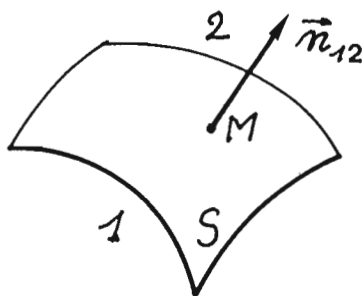


Figure 7

La première équation de Maxwell (10') s'écrit :

$$\text{rot } \mathcal{E} - i\omega \mathcal{B} = 0 ,$$

soit, avec les notations du cours de Mathématiques [7] :

$$(\text{rot } \mathcal{E}) + \vec{n}_{12} \wedge (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)\delta_s - i\omega \mathcal{B} = 0 .$$

Ceci implique :

$$(\operatorname{rot} \mathcal{E}) - i\omega \mathcal{B} = 0, \quad \text{et} \quad \vec{n}_{12} \wedge (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = 0.$$

La première égalité signifie que partout où le rotationnel de  $\mathcal{E}$  est défini au sens des fonctions (dans le complémentaire de  $S$ ), il est égal à  $i\omega \mathcal{B}$ . La seconde est l'expression mathématique de la conservation de la composante tangentielle de  $\mathcal{E}$  (I, §1).

De la même façon, en explicitant  $\operatorname{div} \mathcal{B}$ , (13') conduit à :

$$(\operatorname{div} \mathcal{B}) + \vec{n}_{12} \cdot (\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1)\delta_s = 0,$$

ce qui implique  $(\operatorname{div} \mathcal{B}) = 0$  (la divergence de  $\mathcal{B}$ , au sens des fonctions, est nulle dans le complémentaire de  $S$ ) et  $\vec{n}_{12} \cdot (\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1) = 0$  (conservation de la composante normale de  $\mathcal{B}$ ).

Voyons maintenant les équations contenant les sources. Supposons, par exemple, que la densité de charge soit la superposition d'une fonction localement sommable  $\rho_v(\vec{r})$  et d'une distribution singulière  $\rho_s\delta_s$ .

Alors, d'après (12') :

$$(\operatorname{div} \mathcal{D}) + \vec{n}_{12} \cdot (\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1)\delta_s = \rho_v\delta_s,$$

$$(\operatorname{div} \mathcal{D}) - \rho_v = (\rho_s - \vec{n}_{12} \cdot (\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1))\delta_s,$$

ce qui entraîne :

$$(\operatorname{div} \mathcal{D}) - \rho_v = 0, \quad \text{et} \quad \vec{n}_{12} \cdot (\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1) - \rho_s = 0.$$

On retrouve à nouveau une loi classique (égalité de la divergence de  $\mathcal{D}$  et de la charge volumique dans le complémentaire de  $S$ ) et une relation de passage (égalité du saut de la composante normale au point  $M$  et de la charge surfacique  $\rho_s$  en un point). Evidemment  $\rho_s$  doit être indépendant du numérotage des deux milieux ; on vérifiera qu'il en est bien ainsi.

Enfin, en supposant le courant de la forme  $\vec{j}_v(\vec{r}) + \vec{j}_s\delta_s$ , (11') conduit à :

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} + i\omega \mathcal{D} = \vec{j}_v \quad \text{et} \quad \vec{n} \wedge (\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1) = \vec{j}_s.$$

La dernière égalité relie le saut de la composante tangentielle de  $\mathcal{H}$  au courant superficiel  $\vec{j}_s$ , nécessairement contenu dans le plan tangent (puisque perpendiculaire à  $\vec{n}$ ). Nous verrons qu'un tel courant existe sur la

frontière des métaux dits infiniment conducteurs (VIII).

2.4. Quelques commentaires. En régime sinusoïdal les quatre équations fondamentales ne sont pas indépendantes. Il suffit de prendre la divergence de (10') pour obtenir (13') ; on sait en effet que  $\text{div rot } \mathcal{E} = 0$ . L'équation de conservation de la charge (qui s'obtient directement en prenant la divergence de (11')) prend ici la forme :

$$(17) \quad \text{div } \vec{J} - i\omega \varrho = 0 ,$$

forme que l'on peut aussi déduire de (I, 20) et dans laquelle  $\vec{J}$  et  $\varrho$  sont les quantités complexes notées  $\vec{\mathcal{J}}$  et  $\mathcal{R}$  avant les commentaires de la fin du §2.2. Si l'on considère (17) comme un postulat, il suffit de conserver les deux premières équations de Maxwell (10' et 11') appelées parfois, sans doute pour cette raison, équations principales. Les deux autres (12' et 13') apparaissent alors comme des conséquences.

### 3. LES RELATIONS CONSTITUTIVES.

#### 3.1. La relation électrique.

3.11. Susceptibilité et permittivité complexe. Partons de la relation générale (I, 28) :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 T_e(\vec{r}, t) * \vec{E}(\vec{r}, t) ,$$

et égalons les signaux analytiques associés à chacun des deux membres en nous aidant, si besoin est, de l'annexe 3, §2.4. Nous obtenons, en désignant par  $\mathcal{P}(\vec{r})$  le vecteur complexe associé à  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  :

$$(18) \quad \mathcal{P}(\vec{r}) e^{-2i\pi\nu_0 t} = \epsilon_0 T_e(\vec{r}, t) * \vec{E}(\vec{r}) e^{-2i\pi\nu_0 t} ,$$

ou encore, par transformation de Fourier en  $t$ , et en appelant  $\chi_e(\vec{r}, \nu)$  la transformée de  $T_e(\vec{r}, t)$  :

$$(19) \quad \mathcal{P}(\vec{r}) \delta(\nu - \nu_0) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}, \nu) \vec{E}(\vec{r}) \delta(\nu - \nu_0) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}, \nu_0) \vec{E}(\vec{r}) \delta(\nu - \nu_0)$$

puisque :

$$\chi_e(\vec{r}, \nu) \delta(\nu - \nu_0) = \chi_e(\vec{r}, \nu_0) \delta(\nu - \nu_0) .$$

Finalement, d'après (19) :

$$(20) \quad \mathcal{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}, \nu_0) \mathcal{E}(\vec{r}) .$$

Ainsi, en régime sinusoïdal de fréquence  $\nu_0$ , et pourvu que l'on utilise la représentation complexe, la relation électrique garde la même forme qu'en Statique (0, 23). Toutefois, la susceptibilité  $\chi_e$  est ici un nombre complexe qui dépend de la fréquence.

Si l'on préfère utiliser  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{E}$ , on écrira :

$$(21) \quad \mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathcal{E} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathcal{E}$$

soit, en posant  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  et  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  :

$$(22) \quad \mathcal{D}(\vec{r}) = \epsilon(r, \nu_0) \mathcal{E}(\vec{r}) ,$$

c'est-à-dire, à nouveau une relation du même type qu'en Statique (0, 25), mais où  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  est un complexe dépendant, non seulement de  $\vec{r}$ , mais aussi de la fréquence. On dit alors qu'il y a dispersion ou que le milieu est dispersif.

On remarquera que, dans le cas d'un milieu parfait, pour lequel  $T_e(\vec{r}, t)$  est égal au produit de convolution de la susceptibilité définie en Statique par la distribution de Dirac (I, 29), la susceptibilité complexe définie dans ce paragraphe (qui se déduit de  $T_e(\vec{r}, t)$  par transformation de Fourier en  $t$ ) est indépendante de  $\nu$  et s'identifie à la susceptibilité statique appelée  $\chi_e(\vec{r})$  au chapitre I. Ce résultat s'étend immédiatement à la permittivité. On retiendra qu'un milieu parfait n'est pas dispersif et que sa permittivité complexe n'est autre que la permittivité définie en Statique.

3.12. Relations de dispersion. Dans un milieu homogène dispersif, la susceptibilité complexe  $\chi_e(\nu)$ , transformée de Fourier de la fonction à support positif  $T_e(t)$ , possède les importantes propriétés signalées précédemment (I, §4.3). Sa partie réelle et sa partie imaginaire sont liées par la transformation de Hilbert. Plus précisément, posant  $\chi_e(\nu) = \epsilon_r(\nu) - 1 = A'(\nu) + iA''(\nu)$ , on définit deux fonctions  $A'(\nu)$  et

$A''(\nu)$  qui sont liées par les relations (34) et (34') du chapitre I, relations que l'on préfère souvent exprimer en utilisant la partie réelle et la partie imaginaire de la permittivité relative  $\epsilon_r$  :

$$(23) \quad \epsilon_r(\nu) = \epsilon_r'(\nu) + i \epsilon_r''(\nu) ,$$

$$(24) \quad \epsilon_r'(\nu) - 1 = -\frac{1}{\pi} v_p \left(\frac{1}{\nu}\right) * \epsilon_r''(\nu) , \quad (25) \quad \epsilon_r''(\nu) = \frac{1}{\pi} v_p \left(\frac{1}{\nu}\right) * (\epsilon_r'(\nu) - 1)$$

En Optique, (24) et (25) sont connues sous le nom de relations de dispersion de Kramers-Krönig (1927). En tirant profit de la symétrie hermitienne de  $\chi_e$  (qui résulte du fait que  $\chi_e$  est la transformée de Fourier d'une fonction réelle), on donne en général une forme plus pratique à (24). La symétrie hermitienne de  $\chi_e$  entraîne celle de  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ . On a donc :  $\epsilon_r(\nu) = \bar{\epsilon}_r(-\nu)$ , et par suite  $\epsilon_r'$  et  $\epsilon_r''$  sont respectivement des fonctions paire et impaire. Alors, en explicitant le produit de convolution au moyen d'une intégrale en valeur principale de Cauchy ([7], I), il vient, par des calculs formels qu'il serait facile de justifier :

$$\begin{aligned} \pi(1 - \epsilon_r'(\nu)) &= \int_{-\infty}^0 \frac{\epsilon_r''(u) du}{\nu - u} + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon_r''(u) du}{\nu - u} , \\ &= - \int_{+\infty}^0 \frac{-\epsilon_r''(u) du}{\nu + u} + \int_0^{\infty} \frac{\epsilon_r''(u) du}{\nu - u} = \int_0^{\infty} \frac{2u \epsilon_r''(u) du}{\nu^2 - u^2} , \end{aligned}$$

$$(26) \quad \epsilon_r'(\nu) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u \epsilon_r''(u) du}{u^2 - \nu^2} .$$

Sous cette forme, qui ne fait intervenir que des "fréquences positives", on voit que la connaissance de  $\epsilon_r'$  à une fréquence donnée peut se déduire de celle de la fonction  $\epsilon_r''(\nu)$ . Autrement dit, si on connaissait  $\epsilon_r''$  pour toute fréquence  $\nu$ , on serait capable d'en déduire  $\epsilon_r'$  pour n'importe quelle fréquence  $\nu_0$ , par la formule :

$$(26') \quad \epsilon_r'(\nu_0) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\nu \epsilon_r''(\nu) d\nu}{\nu^2 - \nu_0^2} .$$

On notera bien qu'il s'agit d'une correspondance entre fonctions : il ne suffit évidemment pas de connaître  $\epsilon_r''(\nu_0)$  pour en déduire  $\epsilon_r'(\nu_0)$ . Nous verrons plus loin que  $\epsilon_r''$  est lié au phénomène d'absorption et que, si à une



fréquence  $\nu_0$  un milieu est transparent (non absorbant), alors  $\epsilon_r''(\nu_0) = 0$ . En première approximation, certains milieux peuvent être considérés comme transparents dans toute une bande (un intervalle) de fréquence. Dire qu'un milieu est transparent dans la bande  $(\nu_1, \nu_2)$ , c'est dire que  $\epsilon_r''(\nu) = 0$  pour  $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$ . Pour un tel milieu, et pourvu que  $\nu_1 < \nu < \nu_2$ , le second membre de (26) peut être scindé en deux intégrales de Riemann ordinaires :

$$(27) \quad \epsilon_r'(\nu) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\nu_1} \frac{u \epsilon_r''(u) du}{u^2 - \nu^2} + \frac{2}{\pi} \int_{\nu_2}^{\infty} \frac{u \epsilon_r''(u) du}{u^2 - \nu^2}.$$

Les intégrales au sens de Cauchy ( $\int$ ) sont devenues des intégrales de Riemann ( $\int$ ) car, si  $\nu_1 < \nu < \nu_2$ , le dénominateur  $u^2 - \nu^2$  ne peut pas s'annuler sur chacun des intervalles  $(0, \nu_1)$  et  $(\nu_2, \infty)$ . Si de plus  $\nu$  est "au centre" d'une large bande, on peut, en première approximation, remplacer  $(u^2 - \nu^2)$  respectivement par  $-\nu^2$  et  $u^2$  dans la première et la deuxième intégrale de (27). Ceci permet de décrire la variation de la permittivité en fonction de la fréquence par une loi approchée ; A et B étant deux constantes positives :  $\epsilon(\omega) = A - B/\omega^2$  :

Un des intérêts de (27) est de montrer que la dérivée  $d\epsilon_r'/d\nu$  garde un signe constant sur l'intervalle  $(\nu_1, \nu_2)$ . Elle peut en effet s'obtenir par dérivation sous le signe intégrale :

$$(27'') \quad \frac{\pi}{2} \frac{d\epsilon_r'}{d\nu}(\nu) = \int_0^{\nu_1} \frac{2\nu u \epsilon_r''(u)}{(u^2 - \nu^2)^2} du + \int_{\nu_2}^{\infty} \frac{2\nu u \epsilon_r''(u)}{(u^2 - \nu^2)^2}$$

et, la fonction  $\epsilon_r''$  étant positive (IV, §5), le premier membre est positif (C.Q.F.D.) en tant que somme d'intégrales de fonctions positives. Dans une bande de transparence, nous appellerons indice optique  $n(\nu)$  la racine carrée de  $\epsilon_r(\nu) = \epsilon_r'(\nu)$ . En dérivant cette relation de définition ( $n = \sqrt{\epsilon_r'}$ ), on obtient :

$$(27''') \quad \frac{dn}{d\nu} = \frac{\frac{d\epsilon_r'}{d\nu}}{2\sqrt{\epsilon_r'}}$$

ce qui, d'après (27'), montre que l'indice est fonction croissante de  $\nu$ , donc fonction décroissante de la longueur d'onde  $\lambda$  (puisque, comme on l'a déjà vu en Premier cycle,  $\lambda$  est inversement proportionnelle à  $\nu$ ). Ainsi, dans une bande de transparence, l'indice optique est fonction décroissante

de la longueur d'onde. Un résultat aussi général n'illustre-t-il pas remarquablement l'intérêt des considérations théoriques développées jusqu'ici ?

3.2. La relation magnétique. Ayant décidé de ne pas parler des milieux à aimantation permanente (0, §8), on pourrait reproduire, à propos des grandeurs magnétiques complexes  $\mathcal{P}_m$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{H}$ , les considérations développées au §3.1 à propos des grandeurs électriques. Nous concluons qu'en milieu homogène magnétiquement isotrope les vecteurs complexes  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{H}$  sont liés par la relation :

$$(28) \quad \mathcal{B} = \mu(\nu) \mathcal{H} ,$$

où  $\mu$  est une perméabilité complexe dépendant de la fréquence.

En fait, nous nous intéresserons uniquement à des matériaux pour lesquels cette perméabilité complexe est pratiquement indépendante de  $\nu$  (dispersion négligeable) et toujours très voisine de la perméabilité  $\mu_0$  du vide. Autrement dit, et sauf mention contraire, nous supposons que  $\mu_r = \mu/\mu_0 = 1$ .

3.3. La relation de conductivité. Nous supposons aussi dans la suite que les milieux conducteurs étudiés sont des conducteurs ohmiques non dispersifs. C'est dire que dans un métal homogène et isotrope nous admettrons que les grandeurs complexes  $\vec{j}$  et  $\mathcal{E}$  sont liées, comme en courant continu, par la forme locale de la loi d'Ohm :

$$(29) \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma \mathcal{E}(\vec{r}, t) .$$

En fait, (29) n'est qu'une conséquence de (I, 42). La conductivité  $\sigma$  qui s'exprime en  $\Omega^{-1}m^{-1}$  caractérise le métal à une température donnée. A la température ordinaire, elle est de l'ordre de  $10^7$  pour les métaux usuels. Rappelons que son inverse  $\rho = 1/\sigma$  est la résistivité qui s'exprime en  $\Omega m$ . L'Expérience montre que (29) est une loi acceptable pour les radiations électromagnétiques dont la longueur d'onde reste supérieure à quelques dizaines de microns, une valeur plus précise pouvant être donnée pour chaque métal considéré. Un examen du tableau 3 montre que (29) devra donc être utilisée avec discernement en Optique. Encore valable pour l'infrarouge lointain, cette loi devient généralement inacceptable dans le visible et a fortiori dans l'ultraviolet. Dans ces domaines de longueur d'onde, il faut considérer que  $\sigma$  est complexe, dépend de la fréquence  $\nu$ , ce qui, comme nous le verrons, conduit à attribuer au métal un indice complexe dépendant de la fréquence.

Longueur d'onde $\lambda$	Appellation	Fréquence $\nu$ en hertz
$< 0.4 \text{ m}\mu$	Rayons $\gamma$	$> 10^{15}$
	Rayons X	
	Ultraviolet	
$0.4 \text{ m}\mu$	VISIBLE	de l'ordre de $10^{15}$
$0.8 \text{ m}\mu$	Infrarouge	de l'ordre de $10^{11}$ ou $10^{10}$
quelques mm ou quelques cm	Hyperfréquences ou micro-ondes	
	Radio Télévision	$< 10^{10}$

Tableau 3 : Vue d'ensemble des radiations électromagnétiques.

Si  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide,  $\lambda = c/\nu$ . Les frontières entre les différents domaines sont en fait très floues, voire inexistantes. Souvent les fréquences sont données en mégahertz (MHz) ou en gigahertz (GHz). Rappelons que :

$$1 \text{ MHz} = 10^6 \text{ Hz}, \quad 1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}.$$

Pour passer rapidement des fréquences aux longueurs d'onde, on peut essayer de retenir que 10 GHz correspond à 3 cm.

Au risque d'être lassant, répétons bien que la loi d'Ohm n'est pas, au même titre que les équations de Maxwell, une loi fondamentale. Elle constitue une hypothèse de travail souvent suffisante, mais il existe de nombreux cas pratiques où elle n'est pas vérifiée (cas des gaz ionisés, des supraconducteurs, de nombreux composants de l'Electronique ...). On n'oubliera pas non plus qu'elle suppose que la densité de courant dépend uniquement du champ électrique. Elle ignore donc, par exemple, l'effet Hall. On pourra consulter [8] pour une discussion plus approfondie.

#### 4. EQUIVALENCE METAL-DIELECTRIQUE.

Ecrivons côte à côte les équations de Maxwell harmoniques dans un métal homogène ohmique ( $\epsilon$ ,  $\mu_0$ ,  $\sigma$ ) et dans un diélectrique homogène ( $\tilde{\epsilon}$ ,  $\mu_0$ )

non chargé :

(a) dans le métal

(b) dans le diélectrique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathcal{E} = i\omega \mu_0 \mathcal{H} \\ \text{rot } \mathcal{H} = \sigma \mathcal{E} - i\omega \epsilon \mathcal{E} = -i\omega \epsilon \left( \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \\ \text{div } \mathcal{D} = \rho \\ \text{div } \mathcal{B} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathcal{E} = i\omega \mu_0 \mathcal{H} \\ \text{rot } \mathcal{H} = -i\omega \tilde{\epsilon} \mathcal{E} \\ \text{div } \mathcal{D} = 0 \\ \text{div } \mathcal{B} = 0 . \end{array} \right.$$

Dans le métal où  $\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}$ , il suffit de prendre la divergence de la deuxième équation pour établir que  $\rho = 0$  (N'oublions pas que  $\rho$  est ici une amplitude complexe). Alors, il apparaît, par simple comparaison, que les quatre équations (a) sont identiques aux quatre équations (b) pourvu que :

$$(30) \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega} .$$

En régime harmonique, nous remplacerons donc souvent un métal ohmique homogène ( $\epsilon$ ,  $\mu_0$ ,  $\sigma$ ) par un diélectrique homogène ( $\tilde{\epsilon}$ ,  $\mu_0$ ) de permittivité  $\tilde{\epsilon}$  donnée par (30). Grâce à cette équivalence métal-diélectrique, on pourra, en Physique mathématique, mener de front l'étude théorique des métaux et celle des diélectriques.

## 5. L'EQUATION DE HELMHOLTZ.

5.1. Introduction et définitions. Ecrivons les équations de Maxwell (10'-13') dans un domaine rempli d'un diélectrique homogène (diélectrique vrai ou diélectrique équivalent à un métal) en l'absence de charge et de courant :

$$(10'') \quad \text{rot } \mathcal{E} = i\omega \mu_0 \mathcal{H} ,$$

$$(11'') \quad \text{rot } \mathcal{H} = -i\omega \epsilon \mathcal{E} ,$$

$$(12'') \quad \epsilon \text{ div } \mathcal{E} = 0 ,$$

$$(13'') \quad \mu_0 \text{ div } \mathcal{H} = 0 .$$

Pour éliminer  $\mathcal{H}$  entre ces quatre relations, prenons le rotationnel des deux membres de (10''). En utilisant (A1, 25), on arrive à :

$$(31) \quad -\Delta \mathcal{E} + \text{grad div } \mathcal{E} = i\omega \mu_0 \text{ rot } \mathcal{H} .$$

Alors, en tenant compte de (12") et (11"), il vient :

$$(32) \quad \Delta \mathcal{E} + \omega^2 \epsilon \mu_0 \mathcal{E} = 0 ,$$

relation que l'on appelle généralement équation de Helmholtz vectorielle. Autrement dit, chacune des trois composantes  $\mathcal{E}_i$  du vecteur  $\mathcal{E}$  vérifie :

$$(32') \quad \Delta \mathcal{E}_i + \omega^2 \epsilon \mu_0 \mathcal{E}_i = 0 .$$

On peut aussi prendre le rotationnel des deux membres de (11") et éliminer  $\mathcal{E}$ . Ceci conduit à :

$$(32'') \quad \Delta \mathcal{H} + \omega_0^2 \epsilon \mu_0 \mathcal{H} = 0 .$$

L'habitude est d'attacher à tout milieu homogène un nombre  $k$  défini par :

$$(33) \quad k^2 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0^2 \epsilon \mu_0 .$$

Ce nombre dépend de la fréquence. On l'appelle "le  $ka$  du milieu". Il est défini sans ambiguïté si  $\epsilon$  est réel ( $k$  est alors positif), mais des précisions s'imposent pour  $\epsilon$  complexe : il existe en effet deux complexes dont le carré est égal à un complexe donné. On retiendra pour l'instant que, dans tout domaine homogène contenu dans le complémentaire du support des sources (là où il n'y a ni charge, ni courant, dira le Physicien), toute fonction complexe  $u(\vec{r})$  représentant une composante du champ vérifie l'équation de Helmholtz :

$$(34) \quad \Delta u + k^2 u = 0 .$$

On remarquera (et nous en verrons plus loin des exemples) qu'en présence de sources, une telle composante pourra vérifier une équation du type :

$$(34') \quad \Delta u + k^2 u = S ,$$

où  $S$  est une distribution connue. On parlera alors d'équation de Helmholtz avec second membre.

L'équation (34') joue dans l'étude des régimes harmoniques un rôle aussi

important que l'équation de Poisson ( $\Delta u = -\rho/\epsilon_0$ ) en Electrostatique. L'équation de Helmholtz (34) n'est d'ailleurs qu'une généralisation de l'équation de Laplace  $\Delta u = 0$ . On passe de l'une à l'autre en faisant  $k = 0$ , ce qui correspond à  $\omega = \nu = 0$  ou, si l'on préfère,  $\lambda$  et  $T$  infinis.

## 5.2. Quelques propriétés élémentaires de l'équation de Helmholtz.

5.21. L'équation (34) admet des solutions de la forme  $u(\vec{r}) = \exp(i\vec{a} \cdot \vec{r})$  pourvu que le vecteur  $\vec{a}$  soit convenablement choisi.

Si  $a_j$  désignent les trois composantes supposées complexes de  $\vec{a}$ , il suffit en effet de calculer les dérivées successives de  $u$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = i a_j \exp(i\vec{a} \cdot \vec{r}) , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = - a_j^2 \exp(i\vec{a} \cdot \vec{r}) ,$$

pour voir que (34) impose :

$$(35) \quad \sum_{j=1}^3 a_j^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = k^2 .$$

Le carré scalaire de  $\vec{a}$  (qu'il ne faut pas confondre avec sa norme hermitienne  $\sum_{j=1}^3 a_j \bar{a}_j$ ) doit donc être égal au carré du "ka du milieu".

Ainsi, l'amplitude complexe  $u$  de la forme :

$$(36) \quad u(\vec{r}) = \exp(i\vec{a} \cdot \vec{r}) \quad \text{avec} \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = k^2$$

correspond-elle à une fonction  $u(\vec{r}, t) = \text{Re}(u(\vec{r}) \exp(-i\omega t))$  qui mérite d'être étudiée. Si  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de  $\vec{a}$  :

$$(37) \quad u(\vec{r}, t) = \exp(-\vec{a}_2 \cdot \vec{r}) \cos(\omega t - \vec{a}_1 \cdot \vec{r}) = A(\vec{r}) \cos(\omega t - \varphi(\vec{r}))$$

avec :

$$(38) \quad A(\vec{r}) = \exp(-\vec{a}_2 \cdot \vec{r}) \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{r}) = \vec{a}_1 \cdot \vec{r} .$$

En Physique, les réels  $A$  et  $\varphi$  sont respectivement appelés amplitude et phase de la vibration  $u$ . Les surfaces équiphasés, définies par  $\varphi(\vec{r}) = \text{Cte}$ ,

sont des plans perpendiculaires à  $\vec{a}_1$  et, pour cette raison, on dit souvent que l'amplitude complexe (36) caractérise une onde plane. ??

La situation la plus simple correspond à  $\vec{a}$  réel et  $k^2$  réel positif. Alors,  $\vec{a}_2 = 0$  et tous les points ont la même amplitude :

$$(39) \quad u(\vec{r}, t) = \cos(\omega t - \vec{a} \cdot \vec{r}) \quad \text{avec} \quad \vec{a}^2 = k^2 .$$

Il s'agit de l'onde plane étudiée en premier cycle et pour laquelle les plans équiphasés sont aussi des plans équiampitudes.

Si  $\vec{a}$  est complexe,  $u(\vec{r}, t)$  prend une forme qui vous est certainement moins familière :

$$(40) \quad u(\vec{r}, t) = \exp(-\vec{a}_2 \cdot \vec{r}) \cos(\omega t - \vec{a}_1 \cdot \vec{r})$$

et on doit avoir d'après (35) :

$$(41) \quad \vec{a}_1^2 - \vec{a}_2^2 + 2i\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = k^2 ,$$

relation qui impose  $\vec{a}_1$  perpendiculaire à  $\vec{a}_2$  si, de plus,  $k^2$  est réel (cas du vide ou d'un diélectrique utilisé dans une bande de transparence). Quoiqu'il en soit, les plans équiphasés ( $\vec{a}_1 \cdot \vec{r} = \text{Cte}$ ) sont en général différents des plans équiampitudes ( $\vec{a}_2 \cdot \vec{r} = \text{Cte}$ ). On parle pour cette raison d'onde plane dissociée.

5.22. Dans  $\mathbb{R}^3$  on connaît des solutions élémentaires de l'équation de Helmholtz :

Rappelons que si  $G(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r} \exp(\pm ikr)$ , alors :

$$(42) \quad \Delta G + k^2 G = \delta(\vec{r}) .$$

Ce résultat est établi en Mathématiques ([7], III). L'opérateur  $\Delta$  est le Laplacien au sens des distributions, tandis que  $\delta(\vec{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$  est la distribution de Dirac. Comme d'habitude,  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  et il ne faut pas oublier que (42) implique  $\Delta G + k^2 G = 0$  dans le complémentaire de l'origine.

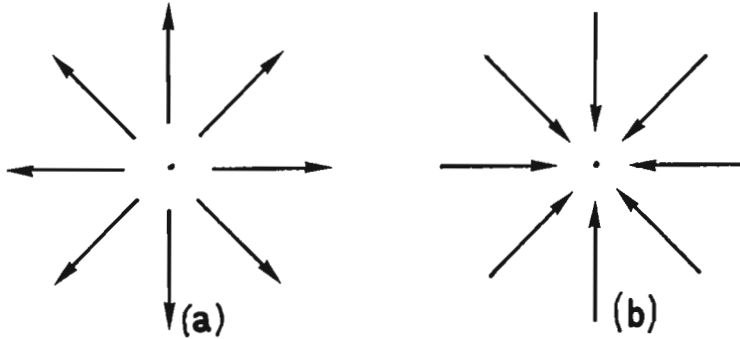
Si une amplitude complexe est de la forme :

$$(43) \quad \mathcal{U}(\vec{r}) = \frac{\exp(\pm ikr)}{r},$$

la fonction  $u(\vec{r}, t)$  qui lui est associée est :

$$(44) \quad u(r) = \frac{1}{r} \cos(\omega t \mp kr) = \frac{1}{r} \cos\left(\omega\left(t \mp \frac{kr}{\omega}\right)\right)$$

et, si  $k$  est réel, les surfaces équiphases, aussi bien que les surfaces équiampitudes sont des sphères centrées sur l'origine. On parle alors d'onde sphérique. On voit, d'après (44), que le signe + dans (43) correspond à une onde sphérique divergente, onde que les opticiens représenteraient par des rayons se propageant à partir de l'origine : il faut s'éloigner de 0 pour que l'argument du cosinus reste constant au cours du temps. Corrélativement, le signe - dans (43) correspond à une onde sphérique convergente (Fig. 8).



a. onde divergente  
(outgoing wave)

b. Onde convergente  
(incoming wave)

Les rayons sont les normales aux surfaces d'onde.

Figure 8

Remarque : Les fonctions  $-\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(\pm ikr)}{r}$  avec  $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  ne sont pas des solutions élémentaires de l'équation de Helmholtz dans  $R^2$  [7]. De telles solutions, qui correspondent à des ondes cylindriques, peuvent être obtenues en utilisant les fonctions de Hankel (A.4).



## 6. POLARISATION ELLIPTIQUE DES CHAMPS.

6.1. Généralités. Soit un champ de vecteurs représenté par un vecteur complexe. On supposera, pour fixer les idées, qu'il s'agit d'un champ électrique  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ , mais ce qui est dit dans ce paragraphe peut être répété pour tout champ dépendant sinusoidalement du temps :

$$(45) \quad \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{A}'(\vec{r}) + i\vec{A}''(\vec{r}) \quad (\vec{A}' \text{ et } \vec{A}'' \text{ réels})$$

entraîne :

$$(46) \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) e^{-i\omega t}) = \vec{A}'(\vec{r}) \cos \omega t + \vec{A}''(\vec{r}) \sin \omega t .$$

A tout point  $M$  ( $\vec{OM} = \vec{r}$ ), associons un point  $P$  tel que  $\vec{OP} = \vec{E}(\vec{r}, t)$  et étudions le mouvement de  $P$  au cours du temps. Ce mouvement a lieu dans un plan  $\mathcal{P}$  parallèle aux vecteurs  $\vec{A}'$  et  $\vec{A}''$  et le Lecteur familiarisé avec la géométrie des coniques verra immédiatement que  $M$  décrit une ellipse contenue dans un parallélogramme de centre  $O$  ( $\vec{A}'$  et  $\vec{A}''$  définissent deux "demi-diamètres conjugués"). Mais, la géométrie n'étant guère à la mode, il est peut-être bon d'établir cette propriété. On peut, pour cela, choisir dans  $\mathcal{P}$  un référentiel orthonormé et attribuer des coordonnées à  $\vec{OP}$ ,  $\vec{A}'$  et  $\vec{A}''$  :

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \vec{A}' = \begin{pmatrix} a' \cos \varphi' \\ a' \sin \varphi' \end{pmatrix}, \quad \vec{A}'' = \begin{pmatrix} a'' \cos \varphi'' \\ a'' \sin \varphi'' \end{pmatrix} .$$

Alors, d'après (46) :

$$(47) \quad X = a' \cos \varphi' \cos \omega t + a'' \cos \varphi'' \sin \omega t ,$$

$$(47') \quad Y = a' \sin \varphi' \cos \omega t + a'' \sin \varphi'' \sin \omega t .$$

Ceci montre que  $\cos \omega t$  et  $\sin \omega t$  dépendent linéairement de  $X$  et  $Y$  et, puisque  $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$ , on en déduit que  $X$  et  $Y$  sont liés par une relation du second degré. Le point  $P$  décrit donc une conique qui, n'ayant pas de points à l'infini, est nécessairement une ellipse. Pour préciser le "sens de parcours", on peut construire le vecteur vitesse  $\vec{dOP}/dt$  à un instant donné. Il est commode de choisir l'instant zéro ; alors, d'après (46),  $\vec{OP} = \vec{A}'$  et  $\vec{dOP}/dt = \omega \vec{A}''$ .

On dit qu'en régime harmonique, les champs sont polarisés elliptiquement. Ce vocabulaire, consacré par l'usage, peut prêter à confusion, mais il n'y

a évidemment aucun rapport entre la polarisation elliptique des champs et les phénomènes de polarisation des milieux électriques ou magnétiques évoqués dans les chapitres précédents.

On notera que l'ellipse dégénère en un segment de droite si les vecteurs  $\vec{A}'$  et  $\vec{A}''$  sont parallèles ( $\vec{A}'' = \alpha \vec{A}'$ ,  $\alpha$  réel éventuellement infini). Alors, posant  $\rho = |1 + i\alpha|$  et  $\text{Arg}(1 + i\alpha) = \varphi$  :

$$(48) \quad \vec{OP} = \rho \vec{A}' \cos(\omega t + \varphi) ,$$

et, comme le champ électrique reste parallèle à une direction fixe, on parle de polarisation rectiligne.

Un autre cas particulier intéressant est celui où  $\vec{A}'$  et  $\vec{A}''$  ont même module et sont perpendiculaires entre eux. L'ellipse P est un cercle et le parallélogramme qui la contient est un carré. Tout ceci est évident d'après (47-47') ; posant  $a' = a'' = a$ ,  $\varphi' = 0$  et  $\varphi'' = \pm\pi/2$ , on reconnaît la représentation paramétrique d'un cercle. On dit qu'il y a polarisation circulaire.

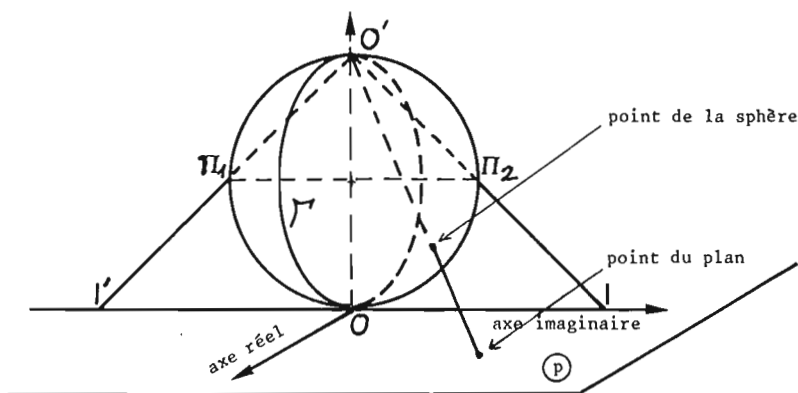
Terminons par une importante remarque. Soit  $\gamma$  un complexe que nous écrivons sous la forme  $r e^{-i\psi}$ . D'après (46), la multiplication de  $\vec{E}$  par  $\gamma$  revient, dans l'expression de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  à remplacer  $\omega t$  par  $\omega t + \varphi$  et à multiplier chacun des deux vecteurs réels  $\vec{A}'$  et  $\vec{A}''$  par  $r$ . La nature géométrique de la trajectoire et son sens de parcours ne sont pas modifiés (changement de l'origine du temps et homothétie de centre O et de rapport r). Nous conviendrons de dire que les champs  $\vec{E}$  et  $\gamma \vec{E}$  correspondent à un même "état de polarisation". Un tel état peut être représenté par le nombre complexe :

$$(49) \quad p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{E}_y}{\vec{E}_x} = \frac{A_y' + iA_y''}{A_x' + iA_x''} .$$

qui reste évidemment inchangé quand on multiplie  $\vec{E}$  par un complexe quelconque  $\gamma$ . On notera que, moyennant ces conventions, il n'y a que deux états de polarisation circulaire, différant uniquement par le sens de parcours ; ils correspondent à  $p = \pm i$  comme on le voit immédiatement à partir de (49) ( $p = i$  implique, par exemple,  $A_y'' = A_x'$  et  $A_x'' = -A_y'$ ). Quant aux états de polarisation rectiligne (pour lesquels  $A_y''/A_y' = A_x''/A_x'$ ), ils correspondent à des valeurs réelles de p.

L'état de polarisation peut aussi être représenté par un point d'une sphère de diamètre unité et tangente au plan complexe  $\textcircled{p}$ . Il suffit d'établir une correspondance entre les points de S et les points de  $\textcircled{p}$ . Utilisons pour

cela une inversion de pôle  $O'$  et de puissance unité (fig.9), ce qui revient à couper la sphère par la droite joignant  $O'$  au point du plan.



*Figure 9.*  $I$  et  $I'$  sont les images des complexes  $i$  et  $-i$  dans le plan  $(p)$ . Noter que  $OO' = OI = OI' = 1$ . Le diamètre parallèle à l'axe imaginaire du plan  $(p)$  coupe la sphère en  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ .

Les deux états de polarisation circulaire correspondent aux points  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ . Les états de polarisation rectiligne sont associés aux points du grand cercle  $\Gamma$ , intersection de la sphère  $S$  et du plan perpendiculaire à  $(p)$  contenant l'axe réel. Par comparaison avec la sphère terrestre, on peut dire que  $\Gamma$  est l'équateur tandis que  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont les pôles. L'idée d'utiliser une sphère pour représenter les différents états de polarisation est généralement attribuée à Poincaré. On la retrouvera de façon plus traditionnelle, mais beaucoup plus artificielle, dans l'exercice qui suit.

6.2. Exercice. On utilise ici des notations indépendantes de celles utilisées dans le reste du chapitre.  $Ox$  et  $Oy$  étant deux axes orthonormés, considérons l'ellipse donnée en représentation paramétrique par :

$$(50) \quad x = a \cos(\omega t + \varphi_1) \quad a > 0,$$

$$(50') \quad y = b \cos(\omega t + \varphi_2) \quad b > 0,$$

et cherchons à déterminer ses axes principaux  $OX$  et  $OY$ , ainsi que le rapport  $b_0/a_0$  de ses demi-diamètres principaux (fig.10).

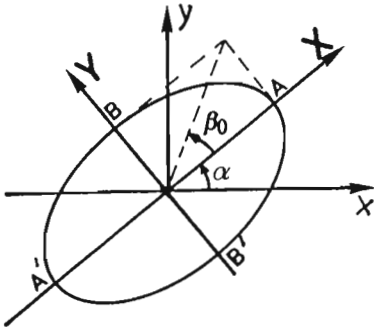


Figure 10.  $OA = a_0$ ,  $OB = b_0$ ,  $\alpha$  est l'angle des demi-axes  $Ox$  et  $Ox'$ .

C'est un problème auquel on est souvent confronté. Il faut retenir qu'il est commode de poser  $\frac{b}{a} = \text{tg } \beta$

et  $\frac{b_0}{a_0} = \text{tg } \beta_0$ , car il se trouve que  $\text{tg } 2\alpha$  et  $\sin 2\beta_0$  s'expriment simplement en fonction des lignes trigonométriques de  $\beta$  et  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Le calcul peut être conduit comme suit :

On sait que par rapport aux axes principaux, les équations paramétriques sont de la forme :

$$(51) \quad X = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0) ,$$

$$(51') \quad Y = b_0 \sin(\omega t + \varphi_0) .$$

Les formules de changement de coordonnées :

$$(52) \quad x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha ,$$

$$(52') \quad y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha$$

conduisent donc par identification à :

$$(53) \quad a_0 \cos \alpha = a \cos \tilde{\varphi}_1 ,$$

$$(53') \quad b_0 \sin \alpha = a \sin \tilde{\varphi}_1 ,$$

$$(54) \quad a_0 \sin \alpha = b \cos \tilde{\varphi}_2 ,$$

$$(54') \quad b_0 \cos \alpha = -b \sin \tilde{\varphi}_2 ,$$

avec  $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 - \varphi_0$  et  $\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 - \varphi_0$ .

On en déduit, par des manipulations classiques en Trigonométrie :

$$(55) \quad a^2 + b^2 = a_0^2 + b_0^2 ,$$

$$(56) \quad a^2 - b^2 = (a_0^2 - b_0^2) \cos 2\alpha .$$

$$(57) \quad \cos \varphi = \cos(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) = \frac{a_0^2 - b_0^2}{ab} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{(a_0^2 - b_0^2)}{2ab} \sin 2\alpha$$

$$(58) \quad \sin \varphi = \sin(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) = \frac{a_0 b_0}{ab} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{a_0 b_0}{ab} .$$

Le rapport des demi-diamètres principaux est fourni par (55) et (58) :

$$\frac{a_0 b_0}{a_0^2 + b_0^2} = \frac{b_0/a_0}{1 + (b_0/a_0)^2} = \frac{ab}{a^2 + b^2} \sin \varphi = \frac{b/a}{1 + (b/a)^2} \sin \varphi$$

d'où, puisque  $\sin 2x = 2 \operatorname{tg} x / (1 + \operatorname{tg}^2 x)$  :

$$(59) \quad \boxed{\sin 2\beta_0 = \sin 2\beta \sin \varphi}.$$

Compte tenu de :  $\operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{tg} x / (1 - \operatorname{tg}^2 x)$ , les relations (56) et (57) donnent  $\operatorname{tg} 2\alpha$  :

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2ab \cos \varphi}{a^2 - b^2} = \frac{2(b/a)}{1 - (b/a)^2} \cos \varphi,$$

$$(60) \quad \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 2\beta \cos \varphi}.$$

L'existence des formules (59) et (60) mérite d'être retenue. Chacun doit s'entraîner à les retrouver rapidement compte tenu de ses connaissances personnelles sur les propriétés des coniques.

On peut aussi décrire l'ellipse initiale par quatre autres paramètres  $s_0, s_1, s_2, s_3$ , dits paramètres de Stokes :

$$\begin{aligned} s_0 &= a^2 + b^2, & s_1 &= a^2 - b^2, \\ s_2 &= 2ab \cos \varphi, & s_3 &= 2ab \sin \varphi. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que :

$$\begin{aligned} s_0^2 &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, & s_3 &= s_0 \sin 2\beta, \\ s_1 &= s_0 \cos 2\beta \cos 2\alpha, & s_2 &= s_0 \cos 2\beta \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

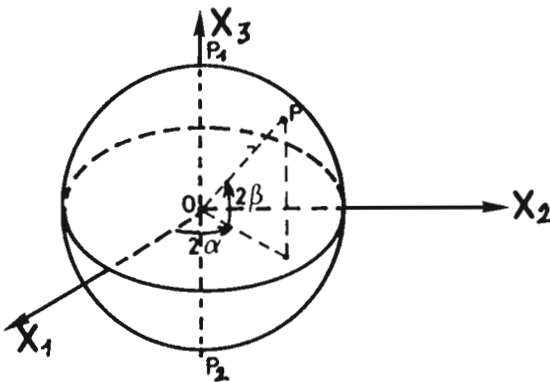


Figure 11

Posant  $X_i = s_i/s_0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), l'état vibratoire peut être représenté (fig. 11) par un point P sur une sphère de rayon unité (représentation de Poincaré) ;  $2\alpha$  et  $2\beta$  sont les angles d'Euler. On vérifie sans peine que "les pôles"  $P_1$  et  $P_2$  correspondent aux vibrations circulaires, et que les points de "l'équateur" correspondent à une polarisation rectiligne.

6.3. "Décomposition" d'un état de polarisation. On a souvent à remplacer une "vibration elliptique" par deux "vibrations rectilignes" ou deux "vibrations circulaires". Plus clairement, on veut remplacer un vecteur complexe associé à une polarisation elliptique par la somme de deux vecteurs complexes associés à des polarisations plus simples (rectiligne ou circulaire). Cette opération repose sur les théorèmes suivants :

Théorème 1. Toute "vibration elliptique" peut être décomposée en deux "vibrations rectilignes".

Ceci est évident d'après (45) ;  $\mathcal{E}(\vec{r}) = \vec{A}'(\vec{r}) + i \vec{A}''(\vec{r})$ , et on sait que chacun des vecteurs  $\vec{A}'$  et  $i \vec{A}''$  est associé à une vibration rectiligne.

Théorème 2. Si  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  sont deux vecteurs réels orthonormés, les deux vecteurs complexes :

$$(61) \quad \mathcal{U}_1 = (\vec{e}_x + i \vec{e}_y) \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (61') \quad \mathcal{U}_2 = (\vec{e}_x - i \vec{e}_y) \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{\mathcal{U}_1}$$

qui sont associés à des vibrations circulaires (ellipses décrites en sens contraires), sont orthogonaux et de norme unité (au sens du produit scalaire hermitien, A.2, §4) :

$$(\mathcal{U}_1 | \mathcal{U}_1) = (\mathcal{U}_2 | \mathcal{U}_2) = 1, \quad (\mathcal{U}_1 | \mathcal{U}_2) = 0.$$

Ils forment donc une base hilbertienne dans  $\mathbb{C}^2$ .

Théorème 3. Toute "vibration elliptique" (éventuellement rectiligne) peut être décomposée en la somme de deux "vibrations circulaires".

Il s'agit tout simplement de la décomposition du vecteur complexe  $\mathcal{E}$  sur la base formée des deux vecteurs  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  :

$$(62) \quad \mathcal{E} = \lambda \mathcal{U}_1 + \mu \mathcal{U}_2, \quad \lambda = (\mathcal{E} | \mathcal{U}_1), \quad \mu = (\mathcal{E} | \mathcal{U}_2).$$

## Chapitre III

# *Intégration des équations de Maxwell en milieu homogène isotrope Potentiel scalaire et potentiel vecteur Propagation*

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de déterminer le champ électromagnétique compatible avec des "sources" connues. Nous envisageons successivement le cas d'un milieu parfait en régime quelconque et le cas d'un régime harmonique.

### 1. LE PROBLEME DES POTENTIELS.

Récrivons les équations de Maxwell dans un milieu homogène parfait en ne conservant que les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Ceci est possible puisque les relations  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$  et  $\vec{B} = \mu\vec{H}$  permettent l'élimination de  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$ . On est conduit à :

$$(1) \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2) \quad \text{rot } \vec{B} - \epsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu\vec{J},$$

$$(3) \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (4) \quad \text{div } \vec{B} = 0,$$

où  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  et  $\rho(\vec{r}, t)$  sont des distributions qui sont nécessairement liées par la relation :

$$(5) \quad \text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

traduisant la conservation de la charge et conséquence de (2) et (3).

Ainsi, la détermination des six composantes de champ à partir des quatre distributions-sources ( $\rho$  et les trois composantes de  $\vec{J}$ ) nous amène à considérer un système de huit équations aux dérivées partielles du premier ordre (chacune des équations (1) et (2) équivalent à trois équations scalaires).

C'est un problème de Mathématiques, à priori difficile, pour lequel nous sommes mal préparés. Nous allons voir qu'il est possible de réduire le nombre des équations par la considération de fonctions inconnues auxiliaires judicieusement choisies et appelées potentiels. Il nous faudra, en contrepartie, accepter de manipuler des équations aux dérivées partielles du second ordre.

L'équation (4) est mathématiquement équivalente à :

$$(6) \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} .$$

Autrement dit,  $\vec{B}$  peut toujours être considéré comme le rotationnel d'un autre champ de vecteur  $\vec{A}$ . On dit que  $\vec{A}$  est un "potentiel vecteur de  $\vec{B}$ ". Il faut dire "un" et non "le", car (6) ne définit pas  $\vec{A}$  de façon unique. Si  $\vec{A}$  est un potentiel vecteur de  $\vec{B}$ , il en est de même de  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi$  ( $\varphi$  fonction deux fois dérivable arbitrairement choisie) puisque le rotationnel d'un gradient est nul.

Compte tenu de (6), l'équation (1) devient :

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 ,$$

ce qui est mathématiquement équivalent à :

$$(7) \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \text{grad } V .$$

Autrement dit, le champ de vecteurs  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  dérive d'un potentiel  $V$ . Ce potentiel scalaire n'est pas non plus défini de façon unique, puisque l'on peut, par exemple, sans changer son gradient, lui ajouter une fonction arbitraire du temps. La présence d'un signe - au deuxième membre de (7) n'a évidemment rien de fondamental. Elle résulte plutôt d'une habitude.

On retiendra que si un couple de deux fonctions  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  et  $V(\vec{r}, t)$  peuvent jouer le rôle de potentiel vecteur et de potentiel scalaire pour un certain champ électromagnétique, il en est de même du couple formé par les deux fonctions  $\vec{A}'$  et  $V'$  définies par :

$$(8) \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi , \quad (8') \quad V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} ,$$

où  $\varphi(\vec{r}, t)$  est une fonction arbitraire suffisamment régulière. Il suffit, pour s'en persuader, de vérifier que les champs  $\vec{B}'$  et  $\vec{E}'$  (associés au



couple  $\vec{A}'$  et  $V'$  par (6) et (7)) ne sont autres que  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  :

$$\vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot grad } \varphi = \text{rot } \vec{A} = \vec{B} ,$$

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= - \text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \text{grad } V - \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi \\ &= \text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} . \end{aligned}$$

Pour lier les potentiels aux sources, récrivons les équations (2) et (3) en tenant compte de (6) et (7). En coordonnées cartésiennes trirectangulaires, on peut utiliser les formules de l'annexe 1 et, après quelques manipulations algébriques, on arrive à :

$$(9) \quad \Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} (\text{div } \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t}) = - \mu \vec{J} ,$$

$$(10) \quad \Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = - \frac{\rho}{\epsilon} .$$

En fait, (9) et (10) représentent un système de quatre équations aux dérivées partielles (équations couplées) pour les quatre fonctions inconnues  $A_x, A_y, A_z, V$  des quatre variables  $x, y, z, t$ . On peut considérablement simplifier ce système (peu engageant) en profitant de l'indétermination régnant sur la définition des potentiels. Supposons en effet que  $\vec{A}$  et  $\varphi$  vérifient :

$$(11) \quad \text{div } \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0 .$$

Alors, (9) et (10) deviennent :

$$(9') \quad \Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = - \mu \vec{J} , \quad (10') \quad \Delta V - \epsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\epsilon} ,$$

ce qui représente un système de quatre équations découplées ayant toutes la même forme, savoir :

$$(12) \quad \Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = f \quad \text{avec} \quad (13) \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon \mu} .$$

Dans (12),  $f$  est une distribution associée aux sources ; suivant que  $U$

désigne  $A_x, A_y, A_z$  ou  $V$ ,  $f$  est respectivement égale à  $-\mu J_x, -\mu J_y, -\mu J_z$  et  $-\rho/\epsilon$ . Quant à la constante  $c$  définie par (13), on montre facilement (en notant que  $\epsilon$  et  $\mu$  ont respectivement pour dimension  $L^{-3}M^{-1}T^2Q^2$  et  $LMQ^{-2}$ ) qu'elle a la dimension d'une vitesse.

Il reste à s'assurer qu'il existe toujours au moins un couple de potentiels vérifiant la relation (11), dite relation de Lorentz. Il suffit pour cela de vérifier que, partant d'un couple  $(\vec{A}, V)$  ne vérifiant pas cette relation, il est possible de choisir la fonction  $\varphi$  pour que le couple  $(\vec{A}', V')$ , (associé à  $(\vec{A}, V)$  par (8) et (8')) vérifie (11). Ceci résulte de l'identité :

$$\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

$$(14) \quad \operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

En effet, si  $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$ , on aura  $\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial t} = 0$  pourvu que  $\varphi$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$(15) \quad \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right).$$

Il existe donc une infinité de fonctions  $\varphi$  répondant à la question puisque, si  $\varphi_0$  est l'une d'entre elles,  $\varphi_0 + \psi$  conviendra aussi pourvu que  $\psi$  satisfasse l'équation homogène associée à (15), savoir :

$$(16) \quad \Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Cette équation (16) est souvent appelée "équation des ondes" en Physique mathématique. On l'écrit parfois sous la forme condensée :

$$(16') \quad \square \psi = 0,$$

en introduisant l'opérateur D'Alembertien  $\square$  défini comme la somme de l'opérateur Laplacien  $\Delta$  et de l'opérateur de dérivation  $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ . X

En résumé, il est toujours possible de définir un potentiel vecteur  $\vec{A}$  et un potentiel scalaire  $V$  satisfaisant à la relation de Lorentz (11). Ce couple

n'est pas unique car, si  $\psi$  vérifie l'équation des ondes (16), le couple  $(\vec{A}', \vec{V}')$  défini par :

$$(17) \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi \qquad (17') \quad V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

convient également. Il est bon de préciser quelques points de vocabulaire : on dit que (17) et (17') définissent une transformation de jauge. Cette transformation respecte la condition de Lorentz et l'ensemble des couples de potentiels ainsi engendrés sont dit appartenir à la jauge de Lorentz. Il existe d'autres moyens de découpler les équations (9) et (10). En imposant  $\text{div } \vec{A} = 0$ , on définit par exemple une jauge dite jauge de Coulomb.

## 2. QUELQUES PROPRIETES DE L'EQUATION DES ONDES.

Pour intégrer une équation du type (12), il est utile d'étudier les solutions élémentaires de cette équation [7, I\(\nabla\)]. Ce sont des distributions  $g(x, y, z, t)$  vérifiant :

$$(18) \quad \square g = \Delta g - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \delta(x, y, z, t) = \delta(x, y, z) \delta(t) .$$

Rappelons en effet que si  $g$  est solution de (18), le produit de convolution  $g * f$  est solution de (16) puisque :

$$\square(g * f) = (\square g) * f = \delta * f = f .$$

Ceci résulte de propriétés du produit de convolution, propriétés qu'il faut absolument connaître pour aborder de nombreuses questions de Physique mathématique [7, I\(\nabla\)]. L'utilisation de la solution élémentaire dans la résolution des équations aux dérivées partielles doit aujourd'hui faire partie du bagage mathématique du Physicien.

On peut rechercher une solution de (18) parmi les distributions à support positif en  $t$  et ayant une transformée de Laplace. Ceci est d'ailleurs assez intuitif si l'on interprète  $g(\vec{r}, t)$  comme le potentiel scalaire créé par une charge ponctuelle qui apparaîtrait en  $\vec{r} = 0$ , au temps  $t = 0$ , pour disparaître immédiatement (interprétation classique de la distribution de Dirac en Physique). Quoi qu'il en soit, désignant par  $\hat{g}(\vec{r}, p)$  la transformée de Laplace de  $g(\vec{r}, t)$ , transformons (18) en nous reportant au cours de Mathéma-

tiques ([7], XI). Il apparaît que :

$$(18') \Delta \hat{g} - \frac{p^2}{c^2} \hat{g} = \delta(x, y, z) .$$

On connaît deux solutions de cette nouvelle équation ([7], III). Ce sont les fonctions  $-\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(\frac{p}{c} r)}{r}$  et  $-\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-\frac{p}{c} r)}{r}$ . La première ne peut être conservée car, n'étant pas à croissance lente pour  $\text{Re}(p)$  tendant vers l'infini, ce n'est pas une transformée de Laplace ([7], XII). Par contre,  $\hat{g}(\vec{r}, p) = -\frac{1}{4\pi r} \exp(-\frac{pr}{c})$  est acceptable et son original  $-\frac{1}{4\pi r} \delta(t - \frac{r}{c})$  est une solution élémentaire de (16).

La distribution  $g(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi r} \delta(t - \frac{r}{c})$  est donc une solution élémentaire de l'équation des ondes. On notera que cette distribution n'est généralement pas étudiée dans les cours de Mathématiques traditionnellement dispensés dans les maîtrises de Physique. Il faudra donc nous contenter de la manipuler formellement, laissant aux mathématiciens professionnels le soin de légitimer nos "méthodes de physiciens".

### 3. CHAMP ELECTROMAGNETIQUE CREE EN MILIEU HOMOGENE, PARFAIT ET ILLIMITE, PAR DES SOURCES DONNEES.

Supposons que  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  et  $\varrho(\vec{r}, t)$  soient des distributions connues, à support borné en  $\vec{r}$  et à support positif en t (les courants et les charges sont nuls jusqu'à un certain instant que l'on prend pour origine du temps). En évoquant le principe de causalité, nous rechercherons aussi les potentiels  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  et  $V(\vec{r}, t)$  dans l'espace des distributions à support positif (en t). Nous imposerons aussi à ces potentiels d'avoir un certain comportement à l'infini, en leur demandant d'être tempérés en  $\vec{r}$ . Admettons provisoirement que ces hypothèses suffisent à assurer l'unicité de la solution du système formé par (9') et (10'). On obtient alors immédiatement cette solution par la technique rappelée au paragraphe précédent :

$$(19) V = -g * \frac{\varrho}{\epsilon} ,$$

$$(19') A_x = -g * \mu J_x, \quad A_y = -g * \mu J_y, \quad A_z = -g * \mu J_z.$$

On résumera les trois dernières formules par :

$$(20) \quad \vec{A} = -g * \mu \vec{J} ,$$

écriture commode, mais peut-être un peu dangereuse (se reporter à (19')) pour interpréter le produit de convolution entre une distribution scalaire et une distribution vectorielle).

Il reste à vérifier que le couple  $(\vec{A}, V)$  donné par (20) et (19) vérifie la condition de Lorentz (11) qui nous a permis d'obtenir (9') et (10') à partir de (9) et (10). Cette vérification découle immédiatement du théorème selon lequel, pour faire agir un opérateur linéaire différentiel sur un produit de convolution, il suffit de le faire agir sur l'un des termes du produit ([7], IV). Ainsi :

$$\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = -g * \mu \operatorname{div} \vec{J} - \epsilon \mu g * \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mu g * \left( \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) .$$

Or  $\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$  est nulle, par hypothèse, d'après la conservation de la charge (5).

Pour interpréter physiquement les résultats obtenus, commençons par expliciter le potentiel scalaire à partir de (19) en supposant que  $\rho$  soit une fonction  $\rho(\vec{r}, t)$ . Bien que  $g$  soit une distribution singulière, il est commode d'écrire :

$$V(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon} \iiint \iint g(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \rho(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' ,$$

comme si l'on manipulait des fonctions. Au second membre figure une intégrale quadruple car il s'agit d'une convolution dans  $\mathbb{R}^4$ . On peut commencer par l'intégration en  $t'$ . Puisque :

$$(21) \quad g(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \delta\left(t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)$$

et compte tenu d'une "recette de physicien" disant que :

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t') u(t') dt' = u(t) ,$$

on arrive à :

$$(23) \quad V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{1}{R} \rho(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) d\vec{r}'$$

avec, comme on en a pris l'habitude en Statique,  $R = \|\vec{r} - \vec{r}'\| = MM'$ .

De la même façon, en partant cette fois de (9'), et en supposant que  $\vec{J}$  soit une fonction  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  :

$$(24) \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{1}{R} \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c}) d\vec{r}' .$$

Il importe de bien comprendre le sens de (23) et (24) en les comparant aux expressions obtenues en Statique pour  $V$  (0, §1) et  $\vec{A}$  (0, §5). Une certaine analogie est frappante et les formules seraient même identiques pour  $c = \infty$ . On peut retenir que les potentiels en un point  $M$  ( $\vec{OM} = \vec{r}$ ) à l'instant  $t$  sont liés à l'état des sources à des instants antérieurs à  $t$ . Plus précisément, la contribution du point  $M'$  ( $\vec{OM}' = \vec{r}'$ ) doit être évaluée en utilisant la charge volumique et la densité du courant associée à ce point à l'instant  $t - \frac{R'}{c}$ . Tout se passe comme si le point  $M$  était informé de ce qui se passe en  $M'$  avec un retard  $\tau = R/c$  ( $\tau$  est l'intervalle de temps nécessaire pour parcourir la distance  $MM'$  à la vitesse  $c$ ). On reconnaît là un phénomène de propagation et les potentiels sont, pour cette raison, appelés "potentiels retardés". La vitesse  $c$  est dite vitesse de propagation ou vitesse de la lumière dans le milieu étudié. Il s'agit d'une grandeur importante qui, rappelons-le, est reliée de façon simple à la permittivité  $\epsilon$  et à la perméabilité  $\mu$  :

$$(13) \quad \epsilon\mu c^2 = 1 .$$

La vitesse ou célérité  $c_0$  de la lumière dans le vide est (avec une approximation de l'ordre de  $10^{-3}$ ) de  $3 \cdot 10^8$  m/s. Cette valeur correspond à  $\epsilon_0 = 10^9/36\pi$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ . En Optique, le rapport  $c_0/c$  est appelé indice  $n$  du milieu. On a donc  $n = \sqrt{\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$  et, dans la mesure où l'on confond  $\mu_r$  avec l'unité,  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ .

Remarque : La différence de deux solutions de l'équation (10') étant solution de l'équation homogène associée, la question d'unicité soulevée au début de ce paragraphe nécessite la démonstration de la propriété suivante. Si  $U(\vec{r}, t)$  est tempérée en  $\vec{r}$  et à support positif en  $t$ , alors :

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad \text{implique} \quad U = 0 .$$

Avec le degré de rigueur habituel dans un cours de Physique, cette démonstration peut être conduite comme suit. Soit  $\hat{U}(\vec{\sigma}, t)$  la transformée de Fourier de  $U(\vec{r}, t)$ . Alors,  ~~$U=0$~~  impose :  $\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

$$4\pi^2\sigma^2\hat{U} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \sigma = \|\vec{\sigma}\| .$$

Il s'agit d'une simple équation différentielle dont on peut écrire la solution générale sous la forme :

$$\hat{U}(\vec{\sigma}, t) = A(\sigma) \cos(2\pi\sigma ct) + \frac{B(\sigma)}{\sigma} \sin(2\pi\sigma ct) ,$$

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}(\vec{\sigma}, t) = -2\pi\sigma c A(\sigma) \sin(2\pi\sigma ct) + 2\pi c B(\sigma) \cos(2\pi\sigma ct) .$$

On remarquera que  $A(\sigma)$  et  $B(\sigma)$  sont a priori des distributions tempérées et que la fonction  $\frac{1}{\sigma} \sin(2\pi\sigma ct)$  a été introduite de préférence à la fonction  $\sin(2\pi\sigma ct)$  pour être sûr de pouvoir donner un sens aux produits de distributions mis en cause ; on vérifiera qu'il s'agit en effet d'une fonction indéfiniment dérivable par rapport aux composantes de  $\vec{\sigma}$ .

On termine la démonstration en notant que  $\hat{U}(\vec{\sigma}, t)$  doit être, comme  $U(\vec{r}, t)$ , à support positif en  $t$ . L'annulation de  $\hat{U}$  et  $\frac{\partial \hat{U}}{\partial t}$  pour  $t < 0$  entraîne immédiatement  $A = B = 0$ , donc  $\hat{U} = 0$  et  $U = 0$ .

#### 4. LES POTENTIELS EN REGIME HARMONIQUE.

A une fréquence  $\nu$  donnée (pulsation  $\omega$ ), on peut reprendre les considérations du §1 en raisonnant sur les vecteurs complexes et en remplaçant la dérivation par rapport au temps par la multiplication par  $-i\omega$ . Les constantes  $\epsilon$  et  $\mu$  deviennent alors des nombres complexes et le milieu n'est donc plus nécessairement parfait mais seulement homogène. On introduit alors deux potentiels  $\vec{A}(\vec{r})$  et  $\mathcal{V}(\vec{r})$  qui ne dépendent plus du temps. Continuant à désigner les sources par  $\rho$  et  $\vec{J}$  (il s'agit alors de distributions complexes des variables d'espace), les principales formules deviennent :

$$(25) \quad \operatorname{div} \vec{J} - i\omega \rho = 0 ,$$

$$(26) \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} ,$$

$$(27) \quad \vec{E} = - \operatorname{grad} \mathcal{V} + i\omega \vec{A} ,$$

$$(28) \quad \operatorname{div} \vec{A} - \frac{i\omega}{c^2} \mathcal{V} = 0 \quad (\text{relation de Lorentz}),$$

$$(29) \quad \Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = - \mu \vec{J} ,$$

$$(30) \quad \Delta \mathcal{V} + k^2 \mathcal{V} = - \frac{\rho}{\epsilon} ,$$

où  $k^2 = \epsilon \mu \omega^2$  caractérise le milieu à la fréquence donnée.

Les équations (29) et (30) qui permettent d'exprimer les potentiels en fonction des sources sont des équations de Helmholtz avec second membre. On démontre qu'elles admettent une solution unique pourvu que l'on impose aux potentiels de vérifier une "condition d'onde sortante" qui exprime que la propagation a lieu des sources vers l'infini. L'unicité étant admise, l'intégration est immédiate puisque l'on connaît une solution élémentaire†  $g(\vec{r})$  de l'équation de Helmholtz qui satisfait la condition d'onde sortante. On rappelle (II, §5.22) que :

$$(31) \quad g(\vec{r}) = - \frac{1}{4\pi r} \exp(ikr) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 ,$$

$$(31') \quad g(\vec{r}) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kr) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \quad (\text{voir A.4}).$$

On trouve, comme au paragraphe 3 :

$$(32) \quad \mathcal{V} = - \frac{1}{\epsilon} g * \rho , \quad (33) \quad \vec{A} = - \mu g * \vec{j} ,$$

mais il s'agit maintenant de la convolution dans  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{R}^2$ . Dans  $\mathbb{R}^3$ , si on utilise la représentation intégrale du produit de convolution, en supposant que les sources sont des fonctions  $\rho(\vec{r})$  et  $\vec{j}(\vec{r})$  :

$$(32') \quad \mathcal{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \rho(\vec{r}') \frac{\exp(ikR)}{R} d\vec{r}' ,$$

$$(33') \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \vec{j}(\vec{r}') \frac{\exp(ikR)}{R} d\vec{r}' ,$$

où  $R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$  représente la distance  $MM'$ .

† Dans les ouvrages anglo-saxons  $G(\vec{r}, \vec{r}') = g(\vec{r} - \vec{r}')$  est souvent appelée fonction de Green de l'espace libre.



Remarque : Ici l'unicité de la solution conduit à réfléchir au problème suivant. Quelles conditions supplémentaires faut-il imposer à  $U$  pour que l'équation de Helmholtz ( $\Delta U + k^2 U = 0$ ) entraîne  $U = 0$  ?

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on démontre qu'il suffit que  $U$  vérifie :

a) une condition de "régularité" :  $rU$  reste fini quand  $r \rightarrow \infty$ ,

b) la "condition de rayonnement" de Sommerfeld, savoir :

$$(34) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial U}{\partial r} - ikU \right) = 0 ,$$

uniformément par rapport à la direction.

Dans  $\mathbb{R}^2$ , il faut modifier le résultat comme suit :

a)  $\sqrt{r} U$  reste fini quand  $r \rightarrow \infty$ ,

$$b) (34') \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial U}{\partial r} - ikU \right) = 0 .$$

La démonstration, qui n'est pas simple, peut être étudiée dans des ouvrages de Mathématiques [26]. Nous nous contenterons d'en donner une idée dans le cas de  $\mathbb{R}^2$ , en exploitant les propriétés des fonctions de Bessel (A.4).

Utilisons les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ . Pour  $r$  fixé, la fonction  $U$ , qui est périodique en  $\theta$  (période  $2\pi$ ), peut être développée en série de Fourier :

$$(35) \quad U(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n(r) \exp(in\theta) .$$

Il suffit de reporter ce développement dans l'équation de Helmholtz pour voir que  $U_n(r)$  vérifie une équation de Bessel. On a donc, puisque  $U_n(r)$  doit être bornée à l'origine :

$$(36) \quad U_n(r) = 2a_n J_n(kr) = a_n (H_n^-(kr) + H_n^+(kr))$$

d'où :

$$(37) \quad U(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^-(kr) \exp(in\theta) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^+(kr) \exp(in\theta) .$$

Donc, asymptotiquement et quand  $r \rightarrow \infty$  :

$$(38) \quad U(r, \theta) \sim A(\theta) \frac{\exp(-ikr)}{\sqrt{r}} + B(\theta) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r}},$$

où  $A(\theta)$  et  $B(\theta)$  sont donnés par des séries découlant du comportement à l'infini des fonctions de Hankel  $H_n^+$  et  $H_n^-$  (A.4). A un même coefficient multiplicatif près :

$$(39) \quad B(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(in(\theta - \frac{\pi}{2})), \quad (40) \quad A(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(in(\theta + \frac{\pi}{2})).$$

On voit que la condition de régularité est automatiquement vérifiée (elle découle de l'équation de Helmholtz). Exprimons maintenant la condition de rayonnement en remarquant qu'asymptotiquement :

$$(41) \quad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{ik}{\sqrt{r}} (-A(\theta) \exp(-ikr) + B(\theta) \exp(ikr)),$$

car les termes en  $r^{-3/2}$  qui apparaissent dans la dérivation doivent être négligés. Alors, (34') impose :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(\theta) \exp(ikr) = 0,$$

ce qui entraîne la nullité de  $A(\theta)$  et par conséquent de tous ses coefficients de Fourier  $a_n i^n$ . On a donc, quel que soit  $n$ ,  $a_n = 0$  et par suite, d'après (35) et (36),  $U(r, \theta) = 0$  (C.Q.F.D.).

On peut profiter de ces calculs pour noter que, dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\exp(ikr)/\sqrt{r}$  vérifie la condition de rayonnement de Sommerfeld (34') contrairement à  $\exp(-ikr)/\sqrt{r}$ . Dans  $\mathbb{R}^3$ , cette condition est vérifiée par l'onde divergente  $\exp(ikr)/r$  sans l'être par  $\exp(-ikr)/r$ . On comprend donc (II, §5.22) que, pour un physicien, "condition d'onde sortante" et "condition de Sommerfeld" soient souvent considérées comme deux synonymes.

## 5. RETOUR SUR LES REGIMES QUELCONQUES. NOTION DE FRONT D'ONDE.

Pour mieux comprendre le phénomène de propagation signalé au §3, étudions le champ  $(\vec{E}, \vec{H})$  créé dans un milieu diélectrique homogène parfait  $(\epsilon, \mu)$  par des sources à support compact  $K$  (en  $\vec{r}$ ) et à support positif en  $t$ . Pour parler plus concrètement, disons qu'il s'agit de sources localisées

dans un voisinage de l'origine du trièdre de référence et "déclenchées" à l'instant  $t = 0$ . Alors, d'après (23) et (24), il apparaît qu'à l'instant  $t$ , les potentiels, et par suite les champs, sont nuls au point  $M$ , pourvu que le produit  $ct$  soit inférieur à la distance  $R$  de  $M$  à tout point  $M'$  de  $K$  (car dans ces conditions l'intégrande est nulle). En d'autres termes, repérant le point  $M$  par  $\vec{r}$  et posant :

$$(42) \quad u(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \inf_{M' \in K} (R) ,$$

la surface  $S_t$  d'équation :

$$(43) \quad t - u(\vec{r}) = 0$$

apparaît comme une "surface de discontinuité" séparant, à l'instant  $t$ , une région où le champ électromagnétique est différent de zéro ( $t > u$ ) d'une région où ce champ est nul ( $t < u$ ). On dit que  $S_t$  est le front d'onde à l'instant  $t$ . On notera que, si  $t_1 \neq t_2$ , deux fronts d'ondes (associés respectivement à  $t_1$  et  $t_2$ ) ne peuvent pas se couper puisque (43) appliquée à un point de l'intersection imposerait contradictoirement  $t_1 = t_2$ . De plus, si  $t_1 > t_2$ , la surface  $S_{t_2}$  est contenue dans l'intérieur de  $S_{t_1}$ .

Ecrivons maintenant la première équation de Maxwell :

$$(44) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ,$$

et effectuons les dérivations en considérant  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  comme des distributions de  $\mathbb{R}^3$  dépendant du paramètre  $t$  (I, 3.2). Le calcul de  $\text{rot } \vec{E}$  est immédiat [7] ; si  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire de  $S_t$  orienté vers l'extérieur et si  $\vec{e}$  désigne la valeur au bord de  $\vec{E}$  :

$$(45) \quad \text{rot } \vec{E} = (\text{rot } \vec{E}) - \vec{n} \wedge \vec{e} \delta_{S_t} .$$

Le calcul de  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  est plus délicat. Partons de la définition de la dérivée d'une composante  $B_n$  de  $\vec{B}$  :

$$(46) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{xyz}, \quad \langle B_n, \varphi \rangle = \iiint_{t > u(\vec{r})} B_n \varphi \, d\vec{r} = I(t) .$$

l'intégration portant sur la partie de l'espace, intérieure à la surface  $S_t$ , c'est-à-dire sur l'ensemble  $\Omega_t$  des points  $\vec{r}$  tels que  $t > u(\vec{r})$ .

D'après "une note sur la théorie des distributions" (I, §3.2) :

$$(47) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{xyz}, \quad \left\langle \frac{\partial B_n}{\partial t}, \varphi \right\rangle = \frac{dI}{dt}.$$

Reste donc à calculer  $dI/dt$ , c'est-à-dire la dérivée par rapport à  $t$  de l'intégrale d'une fonction de  $\vec{r}$  et  $t$  sur un domaine dépendant de  $t$ . C'est la généralisation d'un problème déjà difficile dans le cas simple de deux variables  $x$  et  $t$  ([7], 0, §9). Nous nous contenterons donc d'un calcul formel utilisant les notations du calcul infinitésimal :

$$(47') \quad \frac{dI}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial B_n}{\partial t} \varphi \, d\vec{r} + \frac{dI_1}{dt}$$

avec

$$(48) \quad dI_1 = \iiint_{\Omega_{t+dt}} B_n \varphi \, d\vec{r} - \iiint_{\Omega_t} B_n \varphi \, d\vec{r}.$$

Dans (47') le premier terme correspond à une "dérivation sous le signe somme" et le second à une "dérivation par rapport aux bornes de l'intégration". L'évaluation du second membre de (48) est un problème auquel nous sommes habitués en Physique. En nous aidant de la figure 12, nous écrivons :

$$(49) \quad dI_1 = \iint_{S_t} B_n \varphi \, d\ell \, dS_t,$$

$dS_t$  étant l'élément d'aire sur  $S_t$  et  $d\ell$  l'accroissement de l'abscisse curviligne sur une trajectoire orthogonale  $\Gamma$  à  $S_t$ . Or, d'après (43) :

$$(50) \quad dt = \text{grad } u \cdot d\vec{M}, \quad (50') \quad d\ell = \frac{dt}{\|\text{grad } u\|}$$

et finalement :

$$\frac{dI_1}{dt} = \iint_{S_t} \frac{B_n \varphi}{\|\text{grad } u\|} \, dS_t.$$

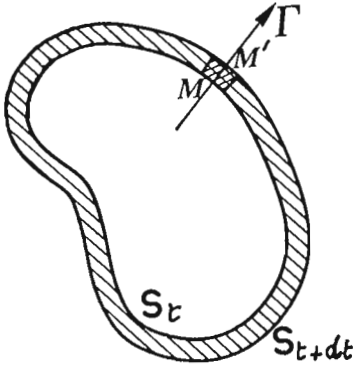


Figure 12.  $S_t$  et  $S_{t+dt}$  sont les fronts d'ondes aux instants  $t$  et  $t + dt$ . La courbe  $\Gamma$  est tangente à  $\text{grad } u$  ;  $\|\overrightarrow{MM'}\| = d\ell$ . L'élément de volume noté  $\vec{dr}$  correspond au petit domaine doublement hachuré. On l'évalue en l'assimilant à un parallélépipède de base  $dS_t$  et de hauteur  $d\ell$ .

Ceci prouve, d'après (47), que :

$$(51) \quad \frac{\partial B_n}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial B_n}{\partial t} \right\rangle + \frac{b_n}{\|\text{grad } u\|} \delta_{S_t},$$

$$(51') \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\rangle + \frac{\mu \vec{h}}{\|\text{grad } u\|} \delta_{S_t},$$

$\vec{b}$  et  $\vec{h}$  désignant les valeurs au bord de  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  sur  $S_t$ .

N.B. : Le résultat (51) que nous venons d'établir, mérite d'être retenu ; Plus généralement, si  $F(\vec{r}, t)$  est une fonction nulle à l'extérieur de  $S_t$  :

$$(52) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle + \frac{f}{\|\text{grad } u\|} \delta_{S_t},$$

où  $f$  est la valeur au bord de  $F$  sur  $S_t$ .

Revenant à (44), l'égalité des distributions singulières figurant dans chacun des deux membres conduit à :

$$(53) \quad \vec{n} \wedge \vec{e} = \frac{\mu \vec{h}}{\|\text{grad } u\|}.$$

Partant de la deuxième équation de Maxwell, on arrive par des calculs similaires à :

$$(54) \quad (\text{rot } \vec{H}) - \vec{n} \wedge \vec{h} \delta_{S_t} = \vec{J} + \left\langle \frac{\partial D}{\partial t} \right\rangle + \frac{\epsilon \vec{e}}{\|\text{grad } u\|} \delta_{S_t}.$$

Il suffit de noter que la distribution  $J$  est nulle sur tout ouvert  $\Omega$  con-

tenu dans le complémentaire de son support K pour en déduire que :

$$(55) \quad \vec{n} \wedge \vec{h} = \frac{-\epsilon \vec{e}}{\|\text{grad } u\|} .$$

La justification rigoureuse de cette dernière conclusion nécessiterait en fait des démonstrations assez délicates exigeant des connaissances approfondies sur la notion de support d'une distribution et la théorie des distributions sur un ouvert ([7], I). L'essentiel est évidemment pour nous de savoir retrouver rapidement (53) et (55). Ces relations montrent, d'après les propriétés du produit vectoriel, que  $\vec{e}$  et  $\vec{h}$  sont perpendiculaires entre eux et que chacun d'eux est perpendiculaire à la normale au front d'onde. En écrivant l'égalité de la norme des deux membres, successivement pour (53) et (55), on obtient donc :

$$(53') \quad \|\vec{e}\| = \frac{\mu \|\vec{h}\|}{\|\text{grad } u\|} ,$$

$$(55') \quad \|\vec{h}\| = \frac{\epsilon \|\vec{e}\|}{\|\text{grad } u\|} ,$$

d'où :

$$(56) \quad \|\text{grad } u\|^2 = \epsilon\mu = \frac{1}{c^2} .$$

Ce dernier résultat, joint à (53), montre que  $\vec{e}$  et  $\vec{h}$  sont liés par une relation simple :

$$(57) \quad \vec{h} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{e}}{\eta} ,$$

$$(57') \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} .$$

On verra plus loin (V) qu'il s'agit de la relation vérifiée par les champs  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$  associés à une onde plane. On dit que sur un front d'onde le champ électromagnétique a localement une structure d'onde plane.

Remarque. On notera que, partant de (43), il n'est pas nécessaire de supposer  $\epsilon$  et  $\mu$  constants (par rapport à  $\vec{r}$ ) pour obtenir les relations (53) et (55). Autrement dit si, débordant le cadre fixé par le titre de ce chapitre, nous envisageons maintenant un milieu "continu" mais inhomogène, il nous suffit d'admettre l'existence d'un front d'onde (d'équation  $t - u(x,y,z) = 0$ ) pour pouvoir conserver nos conclusions. C'est une hypothèse que le Physicien accepte volontiers et qu'un bon mathématicien serait sans doute capable de justifier à partir de la théorie difficile des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ainsi, en milieu isotrope, le champ sur un front a une structure très simple. Cette remarque a été utilisée pour tenter de jeter un pont entre l'Optique géométrique et la Théorie

des ondes électromagnétiques [9]. Les rayons lumineux seraient les normales aux fronts d'ondes  $S_t$ . Cette interprétation apparaît très séduisante si l'on remarque que, conformément à (56), les surfaces  $S_t$  vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$(58) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \epsilon(\vec{r}) \mu(\vec{r}).$$

On reconnaît l' "équation eikonale" que l'on peut prendre comme base de l'Optique géométrique [15]. (Tout au plus faut-il poser  $\tilde{u} = u\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  pour faire apparaître le carré de l'indice optique au second membre). Elle fournit en particulier l' "équation différentielle des "rayons lumineux" en milieu inhomogène". Il suffit de noter que le vecteur unitaire  $\vec{t}$  de la tangente au rayon n'est autre que le vecteur unitaire  $\vec{n}$  de la normale à  $S_t$ . Désignant par  $N$  l'indice du milieu et par  $c_0$  la vitesse de la lumière dans le vide, on a donc :

$$(59) \quad (\text{grad } u)^2 = \frac{N^2}{c_0^2}, \quad (59') \quad \text{grad } u = \frac{N}{c_0} \vec{t},$$

soit, en dérivant (59) par rapport à l'une des coordonnées d'espace  $x_1$  :

$$\text{grad } u \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} (\text{grad } u) = \frac{N}{c_0^2} \frac{\partial N}{\partial x_1} = \frac{N}{c_0} \vec{t} \cdot \text{grad} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right),$$

$$(60) \quad \vec{t} \cdot \text{grad} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{c_0} \frac{\partial N}{\partial x_1}.$$

Le premier membre n'est autre que la dérivée de  $\partial u / \partial x_1$  par rapport à l'abscisse curviligne  $d\ell$  sur le "rayon". On retrouve donc une formule utilisée en Optique géométrique pour étudier la courbure des rayons lumineux en milieu inhomogène :

$$(61) \quad \frac{d}{ds} (N \vec{t}) = \text{grad } N, \quad \text{soit :} \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{N}{c_0} t_1 \right) = \frac{1}{c_0} \frac{\partial N}{\partial x_1}.$$

## Chapitre IV

# *Considérations énergétiques et relations de réciprocité*

Les résultats donnés dans ce chapitre sont en fait des conséquences mathématiques des équations de Maxwell et de quelques hypothèses supplémentaires. Il ne s'agit pas d'une étude fondamentale des notions d'énergie et d'impulsion, étude d'ailleurs délicate qui ferait nécessairement appel à la Thermodynamique [6]. Nous voulons seulement montrer comment l'introduction du vecteur de Poynting et l'utilisation du vocabulaire énergétique facilitent la résolution de certains problèmes. Nous terminerons par une brève présentation des "relations de réciprocité", souvent utiles pour établir élégamment et sans aucun calcul des lois très générales.

### 1. LES LOIS DE CONSERVATION EN PHYSIQUE.

La conservation de la masse, de la charge, de l'énergie et de la quantité de mouvement sont des arguments souvent utilisés en Physique. Mais de quoi s'agit-il exactement ? Comment ces "lois de conservation" se formulent-elles mathématiquement ? Pour préciser, réfléchissons tout d'abord à deux exemples simples.

En Mécanique des fluides, interviennent deux grandeurs fondamentales : la masse volumique  $\rho(\vec{r}, t)$  et la vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  de la particule de fluide qui passe au point M ( $\vec{OM} = \vec{r}$ ) à l'instant  $t$ . Le mot "particule" est ici employé pour désigner une "très petite goutte" de fluide. Soit un domaine  $\Omega$  limité par une surface fermée  $S$  indépendante du temps. Désignons par  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la normale dirigé vers l'extérieur. La masse de liquide contenu dans l'intérieur de  $S$  est, à l'instant  $t$  :

$$m(t) = \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}, t) \, d\vec{r} .$$



La diminution de cette masse pendant l'intervalle  $dt$  est :

$$- dm = - \frac{dm}{dt} dt = - dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\vec{r} .$$

Mais on peut aussi évaluer  $dm$  en disant que pendant l'intervalle  $dt$  une masse  $\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS dt$  s'échappe à travers l'élément de surface  $dS$  : il s'agit de la masse contenue dans le cylindre oblique de base  $dS$  et dont les génératrices, parallèles à  $\vec{v}$ , ont pour longueur  $v dt$ . Ainsi, quelle que soit  $S$  :

$$- dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\vec{r} = dt \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = dt \iiint_{\Omega} \text{div}(\rho \vec{v}) d\vec{r} .$$

Ceci implique :

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 ,$$

où  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  est, par définition, le vecteur courant (on devrait dire courant de matière).

En Electromagnétisme, on définit une charge volumique  $\rho(\vec{r}, t)$  et un courant  $\vec{j}$  (on devrait dire courant de charge), et nous avons vu (I) que la conservation de la charge s'exprime aussi par la relation (1).

Il apparaît ainsi que l'expression mathématique de la conservation d'une grandeur scalaire fait appel à un champ scalaire (la grandeur volumique associée) et à un champ vectoriel (généralement appelé courant).

## 2. L'IDENTITE DE POYNTING.

Récrivons les deux premières équations de Maxwell en régime quelconque :

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

Multiplions scalairement, la première par  $\vec{H}$ , la seconde par  $\vec{E}$ , et soustrayons membre à membre. Compte tenu de l'identité :

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} + \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} ,$$

il vient :

$$(2) \quad \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) + \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 .$$

Ce résultat, très général, attribué à Poynting, n'est donc qu'une conséquence des équations de Maxwell et d'une identité mathématique (A.1, 17).

### 3. REFLEXIONS SUR LA NOTION D'ENERGIE EN ELECTROMAGNETISME DU VIDE.

On sait qu'une particule, de charge  $q$ , placée dans un champ électromagnétique, est soumise de ce fait à une force :

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} .$$

Sous l'action de cette force, elle subit un déplacement  $\vec{v} dt$  pendant l'intervalle de temps  $dt$ , tandis que son énergie cinétique varie. Si la particule n'est soumise à aucune autre force, le théorème de l'énergie cinétique permet d'affirmer que l'accroissement  $dE_c$  de son énergie cinétique est égal au travail de  $\vec{f}$ , soit  $\vec{f} \cdot \vec{v} dt = q\vec{v} \cdot \vec{E} dt$  (puisque  $\vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$ ).

Considérons, dans le vide, une distribution de charge décrite par la charge volumique  $\rho(\vec{r}, t)$  et la vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  : il s'agit par exemple de la description macroscopique d'un très grand nombre de particules élémentaires en mouvement sous l'action du champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . La charge contenue dans un élément de volume, que nous appelons ici  $d\tau$  plutôt que  $dv$  pour éviter toute confusion avec la vitesse, est soumise à la force  $d\vec{f} = (\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \wedge \vec{B}) d\tau$ . La puissance associée est  $d\vec{f} \cdot \vec{v} = \rho\vec{v} \cdot \vec{E} d\tau$ . Si  $\Omega$  est un domaine limité par une surface fermée fixée, l'énergie cinétique  $E_c$  associée à  $\Omega$  subit pendant l'intervalle de temps  $dt$  l'accroissement :

$$(3) \quad dE_c = dt \iiint_{\Omega} \rho\vec{v} \cdot \vec{E} d\tau = dt \iiint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau .$$

Il est tentant de dire que l'énergie nécessaire à cet accroissement est fournie par "les sources" (par exemple par l'antenne d'émission responsable du champ), mais une autre interprétation est possible. Elle consiste à associer une énergie au champ. Ceci est même physiquement plus intéressant puisque, par suite des phénomènes de propagation, un champ peut exister en un lieu après que l'antenne, qui lui a donné naissance en un autre lieu, ait cessé de fonctionner. Nous sommes ainsi conduits, d'après le §1, à

rechercher une fonction scalaire  $w(\vec{r}, t)$ , dite "énergie électromagnétique volumique", et une fonction vectorielle  $\vec{P}(\vec{r}, t)$ , dite "courant d'énergie électromagnétique" qui nous permettrait d'écrire un bilan énergétique entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , sous la forme :

$$(4) \quad - dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} d\tau = dt \iint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS + dt \iiint_{\Omega} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

diminution de l'énergie électromagnétique associée à  $\Omega$ 
perte due aux phénomènes de propagation
accroissement de l'énergie cinétique des particules contenues dans  $\Omega$  à l'instant  $t$

Dans (4), on peut remplacer l'intégrale de surface par l'intégrale de volume de  $\text{div } \vec{P}$  et, comme l'égalité doit être assurée quel que soit le domaine d'intégration  $\Omega$ ,  $w$  et  $\vec{P}$  doivent vérifier :

$$(5) \quad \text{div } \vec{P} + \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0.$$

L'identité de Poynting suggère immédiatement une solution. Il suffit de prendre :

$$(6) \quad \vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}, \quad (7) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

D'autres solutions sont évidemment possibles : il est clair que si  $\vec{\psi}(\vec{r}, t)$  et  $\varphi(r, t)$  sont telles que  $\text{div } \vec{\psi} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ , on peut aussi bien prendre :

$$(6') \quad \vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} + \vec{\psi}, \quad (7') \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

En dépit de quelques propositions qui ont finalement été retirées, les formules (6) et (7) sont universellement retenues. Le vecteur  $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$  est appelé vecteur de Poynting et nous retiendrons (théorème de Poynting) que son flux  $\iint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS$  à travers une surface fermée, orientée vers l'extérieur, est égal au débit de l'énergie électromagnétique qui s'échappe de  $\Omega$  par rayonnement. Ce débit, multiplié par  $dt$ , donne la quantité d'énergie qui s'échappe pendant l'intervalle élémentaire  $dt$ .

Quant à la densité d'énergie  $w$  (définie à une constante additive près), elle peut s'exprimer très symétriquement à l'aide des quatre vecteurs  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ , en intégrant (7) après élimination de  $\vec{D}$  et  $\vec{B}$  :

$$(8) \quad w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2, \quad (9) \quad w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}.$$

En adoptant cette dernière expression, nous généralisons des résultats de Statique. Le lecteur reconnaîtra la "densité d'énergie électrostatique"  $w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$  et la "densité d'énergie magnétique"  $w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$ .

Il importe de noter que le théorème de Poynting ne s'applique qu'à une surface fermée : son utilisation pour le calcul d'un débit d'énergie à travers une partie d'une telle surface appellerait une justification et le choix de la fonction  $\vec{\psi}$  (qui apparaît dans (6')) ne serait plus alors indifférent.

#### 4. L'ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE EN REGIME SINUSOIDAL.

Tous les résultats obtenus jusqu'ici sont évidemment valables pour les régimes sinusoïdaux, mais ils ne s'expriment pas simplement à l'aide des vecteurs complexes qui sont utilisés dans les équations de Maxwell harmoniques. Il est alors généralement plus intéressant de raisonner sur des valeurs moyennes (calculées sur une période) que sur des valeurs instantanées. L'utilisation des vecteurs complexes redevient alors très commode. Comme au chapitre II, et pour alléger les notations, les lettres  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{P}$  représenteront désormais des vecteurs, bien qu'elles ne soient pas surmontées d'une flèche.

4.1. Le vecteur de Poynting complexe. On sait qu'à l'instant  $t$  le débit d'énergie rayonnée à travers une surface fermée  $S$  est :

$$\iint_S \vec{P} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} \, dS .$$

Si  $T = 2\pi/\omega$  désigne la période, le débit moyen est donc :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left( \iint_S \vec{P} \cdot \vec{n} \, dS \right) = \iint_S \frac{\vec{n}}{T} \cdot \int_0^T \vec{P}(\vec{r}, t) \, dt \, dS ,$$

avec :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\mathcal{E} \exp(-i\omega t)) \wedge \text{Re}(\mathcal{H} \exp(-i\omega t)) ,$$

$$4\vec{P}(\vec{r}, t) = (\mathcal{E} \exp(-i\omega t) + \bar{\mathcal{E}} \exp(i\omega t)) \wedge (\mathcal{H} \exp(-i\omega t) + \bar{\mathcal{H}} \exp(i\omega t)) ,$$

$$4\vec{P}(\vec{r}, t) = \mathcal{E} \wedge \mathcal{H} \exp(-2i\omega t) + \bar{\mathcal{E}} \wedge \mathcal{H} + \mathcal{E} \wedge \bar{\mathcal{H}} + \bar{\mathcal{E}} \wedge \bar{\mathcal{H}} \exp(2i\omega t) .$$

Mais :

$$\int_0^T \exp(\pm 2i\omega t) dt = 0 \text{ et, par suite : } \frac{\vec{n}}{T} \cdot \int_0^T \vec{P}(\vec{r}, t) dt = \vec{n} \cdot \text{Re} \left( \frac{1}{2} \mathcal{E} \wedge \bar{\mathcal{H}} \right) .$$

En conclusion, il apparaît que le débit moyen d'énergie à travers S est égal au flux de la partie réelle d'un vecteur  $\vec{\mathcal{P}}$  appelé vecteur de Poynting complexe et défini par :

$$(10) \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2} \mathcal{E} \wedge \bar{\mathcal{H}} .$$

N.B. : Le flux de la partie réelle est aussi la partie réelle du flux.

4.2. Valeur moyenne de l'énergie électromagnétique volumique. Soit  $\langle w \rangle$  la valeur moyenne de  $w$  sur une période :

$$(11) \quad \langle w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right) dt .$$

En exprimant les différents vecteurs en fonction de leur amplitude complexe, chacun des deux produits scalaires  $\vec{E} \cdot \vec{D}$  et  $\vec{H} \cdot \vec{B}$  apparaît comme une somme de quatre termes dont l'intégration est immédiate. Finalement :

$$2\langle w \rangle = \left( \frac{\mathcal{E} \cdot \bar{\mathcal{D}} + \bar{\mathcal{E}} \cdot \mathcal{D}}{4} \right) + \left( \frac{\mathcal{H} \cdot \bar{\mathcal{B}} + \bar{\mathcal{H}} \cdot \mathcal{B}}{4} \right)$$

$$(12) \quad \langle w \rangle = \text{Re} \left[ \frac{1}{4} (\mathcal{E} | \mathcal{D}) + \frac{1}{4} (\mathcal{H} | \mathcal{B}) \right]$$

où  $(\mathcal{E} | \mathcal{D})$  et  $(\mathcal{H} | \mathcal{B})$  sont des produits scalaires hermitiens (A.2, §4). On pose parfois :

$$(13) \quad \langle w \rangle = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle$$

avec :

$$(13') \quad \langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \text{Re} [ (\mathcal{E} | \mathcal{D}) ] \quad \text{et} \quad \langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \text{Re} [ (\mathcal{H} | \mathcal{B}) ]$$

séparant ainsi un "terme électrique" d'un "terme magnétique".

4.3. Remarque sur la partie imaginaire du vecteur de Poynting complexe. On peut se demander si la partie imaginaire de  $\mathcal{P}$  n'a pas, elle aussi, une signification physique. Examinons cette question dans le vide et en l'absence de courant. Les deux premières équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\text{rot } \mathcal{E} = i\omega \mathcal{B} , \quad \text{rot } \mathcal{H} = -i\omega \mathcal{D} .$$

On en tire :

$$2 \text{ div } \mathcal{P} = \text{div} (\mathcal{E} \wedge \bar{\mathcal{H}}) = -\mathcal{E} \cdot \text{rot } \bar{\mathcal{H}} + \bar{\mathcal{H}} \cdot \text{rot } \mathcal{E} = i\omega (\bar{\mathcal{H}} \cdot \mathcal{B} - \mathcal{E} \cdot \bar{\mathcal{D}}) ,$$

d'où, si  $\Omega$  est l'intérieur d'une surface fermée  $S$  :

$$2 \text{ Im} \left[ \iint_S \mathcal{P} \cdot \vec{n} \, dS \right] = \omega \iiint_{\Omega} \text{Re} [(\bar{\mathcal{H}}|\mathcal{B})] \, d\tau - \omega \iiint_{\Omega} \text{Re} [(\mathcal{E}|\bar{\mathcal{D}})] \, d\tau .$$

En se reportant à (13), on voit que le second membre est, au facteur multiplicatif  $4\omega$  près, la différence entre les valeurs moyennes de l'énergie d'origine magnétique et de l'énergie d'origine électrique. Ainsi, posant :

$$(14) \quad \langle W_e \rangle = \iiint_{\Omega} \langle w_e \rangle \, d\tau \quad \text{et} \quad \langle W_m \rangle = \iiint_{\Omega} \langle w_m \rangle \, d\tau ,$$

$$(15) \quad \text{Im} \left[ \iint_S \mathcal{P} \cdot \vec{n} \, dS \right] = \iiint_{\Omega} \text{Im}(\mathcal{P}) \cdot \vec{n} \, dS = 2\omega (\langle W_m \rangle - \langle W_e \rangle) .$$

## 5. EFFET JOULE ET ECHAUFFEMENT DES DIELECTRIQUES.

On sait qu'un morceau de matière, plongé dans un champ électromagnétique, s'échauffe. C'est un fait expérimental, tantôt considéré comme nuisible (pertes dans les diélectriques imparfaits), tantôt commercialement exploité (four à micro-ondes). L'étude quantitative de ce phénomène est délicate ; nous nous limiterons encore au cas du régime sinusoïdal. Soit une surface fermée  $S$  dont l'intérieur  $\Omega$  est rempli de matière et dont l'extérieur est vide. Désignons par  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la normale orientée vers l'extérieur. Par suite des phénomènes de propagation, le champ cède par période, à la matière, une énergie  $W$  que l'on peut calculer comme au §4.2 :

$$\frac{W}{T} = \text{Re} \iint_S -\vec{n} \cdot \mathcal{P} \, dS = -\text{Re} \iiint_{\Omega} \text{div } \mathcal{P} .$$

et c'est cette énergie qui apparaît sous forme de chaleur.

Comme la continuité des composantes tangentielles des champs assure la continuité de  $\vec{n} \cdot \mathcal{P} = \frac{1}{2} \vec{n} \cdot \mathcal{E} \wedge \vec{\mathcal{H}}$  lors de la traversée de S (le vérifier à titre d'exercice), on peut calculer l'intégrale en utilisant les valeurs prises par  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  dans la matière. Or, à l'intérieur de S, les deux premières équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{rot } \mathcal{E} = i\omega \mathcal{B}, \quad \text{rot } \vec{\mathcal{H}} = \vec{J} + i\omega \vec{\mathcal{D}}$$

où J, qui représente la densité de courant, est une fonction vectorielle complexe. Après un calcul analogue à celui du §2 :

$$\text{div } (\mathcal{E} \wedge \vec{\mathcal{H}}) = -\mathcal{E} \cdot \vec{J} - i\omega \mathcal{E} \cdot \vec{\mathcal{D}} + i\omega \vec{\mathcal{H}} \cdot \mathcal{B},$$

$$\frac{W}{T} = \text{Re} \left( \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\mathcal{E} \cdot \vec{J} + i\omega \mathcal{E} \cdot \vec{\mathcal{D}} - i\omega \vec{\mathcal{H}} \cdot \mathcal{B}) \, d\tau \right).$$

Ainsi, peut-on obtenir la moyenne (sur une période) de la chaleur dégagée dans la matière, en intégrant sur  $\Omega$  une quantité volumique p (p comme perte) exprimée en W/m<sup>3</sup> et donnée par la formule :

$$(16) \quad p = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathcal{E} \cdot \vec{J}) + \frac{1}{2} \omega \epsilon'' \mathcal{E} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \omega \mu'' \vec{\mathcal{H}} \cdot \mathcal{H}$$

où  $\epsilon''$  et  $\mu''$  désignent respectivement la partie imaginaire de la permittivité et de la perméabilité.

Très souvent, on peut admettre que  $\mu = \mu_0$  ( $\mu'' = 0$ ) et que la loi d'Ohm ( $\vec{J} = \sigma \mathcal{E}$ ) s'applique. Alors, si  $\sigma$  est réel,  $p = p_1 + p_2$  avec :

$$(17) \quad p_1 = \frac{1}{2} \sigma \mathcal{E} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \sigma (\mathcal{E}|\mathcal{E}), \quad (17') \quad p_2 = \frac{\omega \epsilon''}{2} \mathcal{E} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\omega}{2} \epsilon'' (\mathcal{E}|\mathcal{E})$$

( $\mathcal{E}|\mathcal{E}$ ) désignant le produit scalaire hermitien (A.2, §4).

Evidemment  $p_1$ , qui s'annule avec  $\sigma$ , est associé à l'effet Joule, tandis que  $p_2$ , qui existe même si la conductivité est nulle, est lié au phénomène d'absorption par les diélectriques imparfaits (II, §3.12). On peut ne retenir que la formule (17'), puisqu'un métal ohmique ( $\epsilon, \mu_0, \sigma$ ) est équivalent à un diélectrique ( $\epsilon + i\sigma/\omega, \mu_0$ ). D'après (17'), l'augmentation de  $p_2$  due au remplacement de  $\epsilon$  par  $\epsilon + i\sigma/\omega$  (soit  $\frac{\omega}{2} \frac{\sigma}{\omega} (\mathcal{E}|\mathcal{E})$ ) est bien la valeur de  $p_1$  prévue par (17). L'expérience montrant que p est positif ou nul, on déduit de (17') l'importante inégalité :

$$(18) \quad \epsilon'' \geq 0,$$

inégalité que nous avons utilisée (II, §6.3) pour étudier les variations de l'indice dans une bande de transparence. Rappelons qu'un corps est dit parfaitement transparent (ou non absorbant) à une fréquence donnée si, pour cette fréquence,  $\epsilon'' = 0$ . On notera bien que si  $\epsilon''$  et  $\mu''$  sont nécessairement positifs, par contre, le signe de  $\epsilon'$  ou de  $\mu'$  n'est pas imposé.

Remarque théorique. Certains auteurs définissent une énergie électromagnétique volumique dans la matière, en régime quelconque. Pour d'autres, toute définition sensée de l'énergie électromagnétique en tant que grandeur thermodynamique est impossible en présence de dispersion (Landau et Lifchitz, dans *Electrodynamique des milieux continus*, éditions MIR). C'est ce deuxième point de vue que nous avons finalement adopté. Le lecteur pourra essayer de se convaincre, en se souvenant que les phénomènes de polarisation (I) ne sont pas instantanés ; il comprendra alors que le bilan fait au début de ce paragraphe sur un intervalle période, ne pourrait être répété sur un intervalle élémentaire dt. Il pourra aussi songer à une analogie avec les lois de la Mécanique en présence de frottement. En Mécanique, l'énergie totale est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Cette dernière est, par définition, la fonction potentielle (si elle existe) dont dérive le travail des forces intérieures. En présence de frottement, il est clair que les forces intérieures ne dérivent pas d'un potentiel. Par suite, l'énergie potentielle n'étant pas définie, l'énergie mécanique totale ne l'est pas non plus. Ce qui n'empêche pas certains d'en parler ... C'est même parfois commode, mais ce n'est pas indispensable.

Remarque pratique. Dans les ouvrages pour ingénieurs, si  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$  est la permittivité complexe d'un diélectrique, on pose souvent :

$$(19) \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad - \quad \frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}$$

et  $\delta$  est appelé "angle de perte".

Pour des diélectriques peu absorbants (à faibles pertes),  $\operatorname{tg} \delta$  est petit. La notion d'angle de perte peut être étendue à un métal de permittivité réelle  $\epsilon$ , de conductivité  $\sigma$ . On raisonne alors sur la permittivité équivalente  $\tilde{\epsilon} = \epsilon + i\sigma/\omega$  et :

$$(19') \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\tilde{\epsilon}''}{\tilde{\epsilon}'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}.$$

Pour les métaux usuels,  $\delta$  est voisin de  $\pi/2$  et  $\operatorname{tg} \delta$  est très grand. Par



exemple, si  $\sigma = 10^7$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ , on trouve  $\text{tg } \delta = 1.8 \cdot 10^7$  pour  $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ . Autrement dit, pour un métal bon conducteur,  $\tilde{\epsilon}'$  est négligeable devant  $\tilde{\epsilon}''$ .

## 6. NOTIONS SUR L'IMPULSION DE CHAMP.

6.1. Introduction. La physique théorique associe au champ électromagnétique, non seulement une énergie, mais aussi une impulsion, grandeur qui généralise la quantité de mouvement des systèmes mécaniques. Nous serons très brefs sur cette délicate question qui pourrait presque être passée sous silence dans ce cours essentiellement consacré aux phénomènes de propagation. Nous nous limiterons à l'Electromagnétisme dans le vide. Revenons au problème évoqué au début du §3. Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , la quantité de mouvement des particules contenues dans  $\Omega$  varie sous l'action des forces électromagnétiques. On peut convenir d'attribuer une impulsion au champ et, comme nous l'avons déjà fait pour l'énergie, essayer d'écrire un bilan d'impulsion entre  $t$  et  $t + dt$ . Nous voudrions écrire que la diminution de l'impulsion de champ associée à  $\Omega$  (par l'intermédiaire d'une impulsion volumique) est égale à la somme de deux termes : la quantité de mouvement communiquée aux particules contenues dans  $\Omega$  à l'instant  $t$ , et une "impulsion" s'échappant à travers  $S$  par suite des phénomènes de propagation. Pour évaluer cette dernière, il serait souhaitable (§1) de définir un "courant d'impulsion". Mais ici apparaissent des complications : l'impulsion ayant déjà un caractère vectoriel, le "courant" associé est nécessairement un être mathématique plus compliqué qu'un vecteur. C'est en fait un tenseur [6]. Un développement tant soit peu complet nous conduirait donc à un exposé (ou au moins à un rappel) de calcul tensoriel. Nous nous en dispenserons par un artifice ; après choix d'un référentiel cartésien orthonormé, on raisonnera sur les grandeurs scalaires que sont les composantes de l'impulsion. On peut espérer définir pour la  $i^{\text{ème}}$  d'entre elles un vecteur courant  $\vec{\Pi}_i$ , dont les composantes  $\Pi_{i,j}$  pourront être rangées en une colonne de trois nombres ( $j = 1, 2, 3$ ). En plaçant côte à côte ces trois colonnes, on obtiendra un être à neuf composantes  $\Pi_{i,j}$  qui n'est autre que la représentation dans le référentiel considéré du tenseur d'impulsion de champ. Pour réaliser le programme que nous venons d'esquisser, commençons par établir, à partir des équations de Maxwell, un résultat qui joue un rôle semblable à celui de l'indentité de Poynting dans les questions d'énergie.

6.2. Identité fondamentale. Exprimons tout d'abord la force volumique  $\rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$  à l'aide des seuls champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Partant des équations de Maxwell dans le vide (I, §4), nous obtenons successivement :

$$(20) \quad \rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}, \quad (21) \quad \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$(22) \quad \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} = (\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} \wedge \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{B}.$$

En ajoutant au second membre de (22) le terme nul  $\mu_0^{-1} \operatorname{div} \vec{B}$ , en y faisant apparaître la dérivée de  $\vec{E} \wedge \vec{B}$ , et en tenant compte de  $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ , on arrive finalement à :

$$(23) \quad \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \wedge \vec{B}) + \epsilon_0 ((\operatorname{div} \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \wedge \operatorname{rot} \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} ((\operatorname{div} \vec{B})\vec{B} - \vec{B} \wedge \operatorname{rot} \vec{B}).$$

Pour obtenir l'identité que nous avons en vue, il ne reste plus qu'à transformer les composantes du second membre de (23). C'est un problème que chacun résoudra à sa guise et plus ou moins rapidement suivant son habileté en calcul vectoriel. Le but est de mettre en évidence la divergence d'un vecteur dans l'expression de chacune de ces composantes. Avec éventuellement un peu de patience, on vérifiera que :

$$(23') \quad (\rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B})_i = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \wedge \vec{B})_i + \epsilon_0 \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i E_j - \frac{\vec{E}^2}{2} \delta_{j,i}) + \frac{1}{\mu_0} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (B_i B_j - \frac{\vec{B}^2}{2} \delta_{j,i}), \quad \times$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$(24) \quad -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})_i = (\rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B})_i + \operatorname{div} \vec{\Pi}_i,$$

où  $\vec{\Pi}_i$  est un vecteur de composantes  $\Pi_{i,j}$  données par :

$$(24') \quad \Pi_{i,j} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}) \delta_{i,j} - \epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j.$$

L'identité (24) peut être considérée comme fondamentale pour toute question liée à l'impulsion de champ.

6.3. Densité et courant "d'impulsion de champ". Après intégration de (24) dans  $\Omega$  et transformation d'une intégrale de volume en intégrale de surface, il apparaît que :

$$(25) \quad - \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} (\epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})_1 d\tau = \iiint_{\Omega} (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B})_1 d\tau + \iint_S \vec{n} \cdot \vec{\Pi}_1 dS$$

On est ainsi conduit à définir une impulsion volumique  $\vec{p} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{P}$  (égale au vecteur de Poynting  $\vec{P}$  au coefficient multiplicatif  $\epsilon_0 \mu_0$  près) et à faire jouer au tenseur de composante  $\Pi_{1,j}$  le rôle du "courant d'impulsion". On veillera à ne pas confondre  $\vec{p}$  avec la grandeur scalaire  $p$  définie au §5. L'opposé du tenseur d'impulsion est souvent appelé tenseur des contraintes électromagnétiques [6] ; ses composantes  $T_{1,j}$  sont donc :

$$(24'') \quad T_{1,j} = - \Pi_{1,j} = \epsilon_0 E_1 E_j + \frac{1}{\mu_0} B_1 B_j - \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) \delta_{1,j} .$$

Il y a en effet une analogie frappante entre l'expression des lois de la Mécanique des milieux déformables (qui fait appel au tenseur des contraintes) et l'égalité (25) écrite sous la forme :

$$(25') \quad \iint_S \sum_j - \Pi_{1,j} n_j dS = \iiint_{\Omega} (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B})_1 + \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} (\epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})_1 d\tau$$

soit, en introduisant la matrice  $T$  de composantes  $T_{1,j}$  :

$$(25'') \quad \iint_S T \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B})_1 d\tau + \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} d\tau ,$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire de la normale dirigé vers l'extérieur de  $S$ .

Nous pouvons interpréter ce résultat, comme on le fait en Mécanique, en disant que le premier membre représente la résultante de forces exercées par le champ sur le domaine  $\Omega$  limité par la surface fermée  $S$ . Alors, la formule (25'') ne fait que traduire l'égalité de cette résultante et de la dérivée de l'impulsion totale du système champ-particules intérieur à  $S$ . En effet, la première intégrale figurant au second membre (résultante des forces appliquées aux particules chargées en mouvement) est la dérivée de leur quantité de mouvement ou impulsion mécanique associée à  $\Omega$ . Le second membre tout entier est donc la dérivée de l'impulsion totale, somme de l'impulsion mécanique et de l'impulsion de champ.

6.4. Conséquences.

a) Remarque sur les interactions électromagnétiques. En Mécanique, la conservation de la quantité de l'impulsion (alors identifiée à la quantité de mouvement) implique le "principe de l'action et de la réaction". Ce dernier doit être remis en cause en Electromagnétisme [6]. Soit, par exemple, un ensemble de particules chargées évoluant sous le seul effet de leurs interactions électromagnétiques. L'impulsion de ce système est indépendante du temps, mais ceci n'implique pas l'invariance de la quantité de mouvement qui ne représente qu'une fraction de l'impulsion (il ne faut pas oublier l'impulsion de champ).

b) Forces exercées par un champ électromagnétique sur la matière. En Physique macroscopique, on a souvent été tenté d'admettre qu'un champ électromagnétique exerce des actions mécaniques sur les objets matériels. Cette hypothèse, déjà formulée par Kepler, est aujourd'hui spectaculairement confirmée par les expériences de lévitation optique : un faisceau laser focalisé sur une petite bille (de quelques microns de diamètre) exerce sur celle-ci des actions mécaniques suffisamment importantes pour équilibrer son poids. L'explication théorique de ces belles expériences [10] semble encore loin d'être achevée. Il est tentant de faire appel au tenseur des contraintes électromagnétiques (défini au paragraphe précédent, dans une situation beaucoup plus simple) pour déterminer les actions subies par la bille. On peut alors considérer que chaque élément  $dS$  de sa surface (orientée vers l'extérieur) est soumis à une force  $d\vec{f}$  définie à partir de la matrice  $T$  représentant ce tenseur dans le référentiel utilisé :

$$(26) \quad d\vec{f} = T \vec{n} dS .$$

Il se peut, qu'au moins en certains points de  $S$ ,  $\vec{n}$  soit vecteur propre de  $T$ . Alors, en ces points :

$$(27) \quad d\vec{f} = - r \vec{n} dS .$$

Puisque  $T$  est réelle et symétrique, le scalaire  $r$ , qui est une valeur propre, est nécessairement réel. Comme il a les dimensions d'une pression, on l'appelle pression de radiation. Nous ne discuterons pas son signe ; disons seulement qu'il se révèle positif dans les cas simples que l'on propose traditionnellement en exercice (réflexion d'une onde plane sur un plan infiniment conducteur, par exemple). L'important semble surtout de connaî-

tre son ordre de grandeur : de l'ordre de  $10^{-5}$  Pa pour la lumière solaire arrivant à la surface de la terre, il peut atteindre plusieurs milliers de pascals (quelques centièmes d'atmosphère) dans le cas d'un faisceau laser.

## 7. INTRODUCTION AUX RELATIONS DE RECIPROCITE.

7.1. Théorème de réciprocité de Lorentz. Soit, en régime harmonique, deux champs électromagnétiques  $\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{E}_2, \mathcal{H}_2$  respectivement engendrés par des courants décrits par les distributions  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  dans un même milieu isotrope de permittivité  $\epsilon(\vec{r})$ , de perméabilité  $\mu(\vec{r})$ . Notre hypothèse est en fait beaucoup trop forte ; il suffirait de supposer que  $\epsilon$  et  $\mu$  sont des opérateurs représentés par des matrices symétriques. Les deux premières équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathcal{E}_1 &= i\omega \mu \mathcal{H}_1, & \text{rot } \mathcal{E}_2 &= i\omega \mu \mathcal{H}_2, \\ \text{rot } \mathcal{H}_1 &= \mathcal{J}_1 - i\omega \epsilon \mathcal{E}_1, & \text{rot } \mathcal{H}_2 &= \mathcal{J}_2 - i\omega \epsilon \mathcal{E}_2. \end{aligned}$$

Calculons  $\text{div}(\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{H}_2 - \mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{H}_1)$  en éliminant les rotationnels des vecteurs de champ :

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{H}_2) &= -\mathcal{E}_1 \cdot \text{rot } \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_2 \cdot \text{rot } \mathcal{E}_1, \\ &= -\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{J}_2 + i\omega \epsilon \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2 + i\omega \mu \mathcal{H}_2 \cdot \mathcal{H}_1, \\ \text{div}(\mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{H}_1) &= -\mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{J}_1 + i\omega \epsilon \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{E}_1 + i\omega \mu \mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}_2, \end{aligned}$$

$$(28) \quad \text{div}(\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{H}_2 - \mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{H}_1) = -\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{J}_2 + \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{J}_1.$$

Cette relation (28), vraie au sens des distributions dans la mesure où l'on peut donner un sens aux produits scalaires figurant dans son deuxième membre, peut être considérée comme la forme générale du théorème de réciprocité de Lorentz. Dans le cas où  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  sont des densités de courant volumique  $J_1$  et  $J_2$ , elle devient une égalité entre fonctions, égalité que l'on peut intégrer sur un domaine  $\Omega$  limité par une surface fermée  $S$ . Après transformation d'une intégrale de volume en intégrale de surface :

$$(28') \quad \iint_S \vec{n} \cdot (\mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{H}_2 - \mathcal{E}_2 \wedge \mathcal{H}_1) dS = \iiint_{\Omega} (\mathcal{E}_2 \cdot J_1 - \mathcal{E}_1 \cdot J_2) d\tau.$$

Si les distributions  $\mathfrak{J}_1$  et  $\mathfrak{J}_2$  décrivent respectivement des courants superficiels  $J_{s,1}$  et  $J_{s,2}$  sur des surfaces fermées  $S_1$  et  $S_2$  n'ayant aucun point commun ( $\mathfrak{J}_1 = J_{s,1}\delta_{S_1}$ ,  $\mathfrak{J}_2 = J_{s,2}\delta_{S_2}$ ), les fonctions  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont respectivement définies sur  $S_2$  et  $S_1$  et les produits scalaires  $\mathcal{E}_1 \cdot J_{s,2}\delta_{S_1}$  et  $\mathcal{E}_2 \cdot J_{s,1}\delta_{S_1}$  ont un sens. Par exemple :

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \quad \langle \mathcal{E}_1 \cdot J_{s,2}\delta_{S_2}, \varphi \rangle = \iint_{S_2} \mathcal{E}_1 \cdot J_{s,2}\varphi \, dS .$$

En faisant agir les deux membres de (28) sur une fonction  $\varphi$  appartenant à  $\mathfrak{D}$  et égale à 1 sur un domaine  $\Omega$ , limité par une surface fermée  $S$  et contenant  $S_1$  et  $S_2$ , on est conduit à :

$$(28'') \quad \iint_S \vec{n} \cdot (\mathcal{E}_1 \wedge \mathfrak{H}_2 - \mathcal{E}_2 \wedge \mathfrak{H}_1) \, dS = - \iint_{S_2} \mathcal{E}_1 \cdot J_{s,2} dS + \iint_{S_1} \mathcal{E}_2 \cdot J_{s,1} dS$$

comme on l'explique en fin de chapitre (§7.3).

Enfin, si  $\mathfrak{J}_1$  et  $\mathfrak{J}_2$  sont respectivement égaux à  $\vec{A}_1\delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$  et  $\vec{A}_2\delta(\vec{r} - \vec{r}_2)$  et si  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  sont associés à des points intérieurs à  $S$  :

$$(28''') \quad \iint_S \vec{n} \cdot (\mathcal{E}_1 \wedge \mathfrak{H}_2 - \mathcal{E}_2 \wedge \mathfrak{H}_1) \, dS = - \mathcal{E}_1(\vec{r}_2) \cdot \vec{A}_2 + \mathcal{E}_2(\vec{r}_1) \cdot \vec{A}_1 .$$

La compréhension de ce dernier résultat (28''') passe évidemment par l'interprétation physique des sources représentées par un courant de type  $J = \vec{A}\delta(\vec{r})$  où  $\vec{A}$  est le produit d'un complexe  $A$  par un vecteur unitaire  $\vec{u}$ . Il est pour cela plus commode de raisonner sur la distribution de charge  $\rho$  qui se déduit de  $\vec{J}$  par la loi de conservation de la charge (II, §2.4) :

$$\rho = - \frac{i}{\omega} \operatorname{div} (\vec{A}\delta(\vec{r})) = - \frac{iA}{\omega} \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \delta(\vec{r}) .$$

Une telle distribution (I et II) correspond à un doublet dont le moment est parallèle à  $\vec{u}$  ; on peut la représenter par deux charges  $q \cos(\omega t + \varphi)$  et  $-q \cos(\omega t + \varphi)$  placées en deux points très voisins de l'origine de sorte que la droite qui les joint soit parallèle à  $\vec{u}$ . L'interprétation de  $\vec{A}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  est analogue ; les deux charges sont alors voisines du point repéré par  $\vec{r}_0$ .

A titre d'exercice, on vérifiera sans peine que le théorème de Lorentz peut être étendu à deux champs vectoriels  $\mathcal{E}_1^*, \mathfrak{H}_1^*$  et  $\mathcal{E}_2^*, \mathfrak{H}_2^*$  (êtres mathémati-

ques auxquels on ne cherchera pas pour l'instant à attribuer un sens physique) vérifiant des équations un peu plus compliquées (mais plus symétriques) que les équations de Maxwell, savoir :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathcal{E}_1^* &= -\mathcal{J}_{m,1} + i\omega\mu \mathcal{H}_1^* , & \operatorname{rot} \mathcal{E}_2^* &= -\mathcal{J}_{m,2} + i\omega\mu \mathcal{H}_2^* , \\ \operatorname{rot} \mathcal{H}_1^* &= \mathcal{J}_{e,1} - i\omega\epsilon \mathcal{E}_1^* , & \operatorname{rot} \mathcal{H}_2^* &= \mathcal{J}_{e,2} - i\omega\epsilon \mathcal{E}_2^* . \end{aligned}$$

De tels champs, que l'on est souvent amené à considérer en Electromagnétisme théorique, peuvent être considérés comme engendrés, non seulement par des courants électriques  $\mathcal{J}_e$ , mais aussi par des courants magnétiques  $\mathcal{J}_m$ . On arrive alors à :

$$(29) \quad \operatorname{div} (\mathcal{E}_1^* \wedge \mathcal{H}_2^* - \mathcal{E}_2^* \wedge \mathcal{H}_1^*) = -\mathcal{E}_1^* \cdot \mathcal{J}_{e,2} + \mathcal{E}_2^* \cdot \mathcal{J}_{e,1} + \mathcal{H}_1^* \cdot \mathcal{J}_{m,2} - \mathcal{H}_2^* \cdot \mathcal{J}_{m,1} .$$

Le problème des courants magnétiques (de plus en plus utilisés dans les traités d'Electromagnétisme) est généralement mal compris des débutants. Il n'est sans doute pas inutile d'illustrer cette notion par un exemple simple. Soit donc un champ électromagnétique  $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$  associé à des courants électriques volumiques nuls en dehors d'une surface fermée  $S$ . Considérons les champs vectoriels  $\mathcal{E}^*$  et  $\mathcal{H}^*$  qui, par définition, sont nuls à l'intérieur de  $S$  et respectivement égaux à  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  à l'extérieur. Calculons, au sens des distributions, le rotationnel de la fonction vectorielle  $\mathcal{E}^*$ , discontinue sur  $S$  :

$$\operatorname{rot} \mathcal{E}^* = (\operatorname{rot} \mathcal{E}^*) + \vec{n} \wedge (\mathcal{E} - \vec{0}) \delta_S .$$

Or, au sens des fonctions,  $\operatorname{rot} \mathcal{E}^* = i\omega\mu \mathcal{H}^*$  dans le complémentaire de  $S$ . C'est évidemment à l'intérieur de  $S$  (où  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  sont nuls) et ceci traduit la première équation de Maxwell à l'extérieur. En d'autres termes,  $(\operatorname{rot} \mathcal{E}^*) = \operatorname{rot} \mathcal{E}^*$  et finalement :

$$\operatorname{rot} \mathcal{E}^* = i\omega\mu \mathcal{H}^* + \vec{n} \wedge \mathcal{E} \delta_S .$$

C'est la distribution  $-\vec{n} \wedge \mathcal{E} \delta_S$  qui peut être considérée comme un courant magnétique superficiel.

7.2. Exemple d'utilisation. Ne serait-ce que pour tenter de justifier le mot "réciprocité", voici dès maintenant une application.

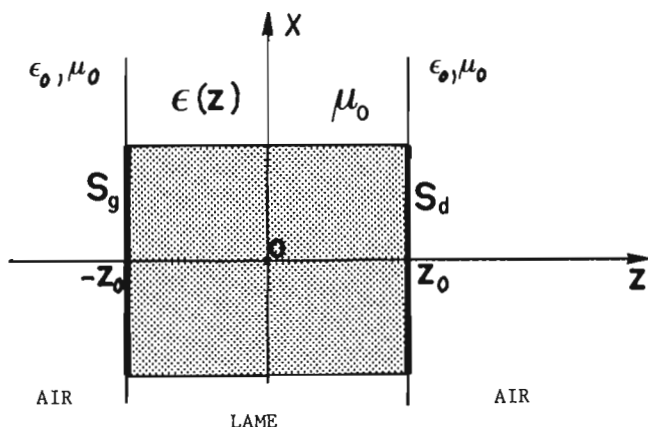


Figure 13 : Les bases  $S_d$  et  $S_g$  du cylindre en pointillé sont représentées en trait gras.

Soit (fig.13) une lame L dont la permittivité  $\epsilon$ , éventuellement complexe est fonction de la seule variable  $z$ . Cette lame, correspondant à  $|z| < z_0$ , est baignée par l'air de permittivité  $\epsilon_0$ . On suppose qu'en tout point la perméabilité est  $\mu_0$  (fig.13). L est éclairée en incidence normale par une onde plane et, par hypothèse, le champ électrique vibre parallèlement à Ox. Il peut donc être décrit par la donnée d'une seule fonction, sa composante  $\mathcal{E}(z)$  sur Ox. Alors, en tout point :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{i\omega \mu_0} \text{rot} (\mathcal{E} \vec{e}_x) = \frac{1}{i\omega \mu_0} \text{grad} \mathcal{E} \wedge \vec{e}_x = \frac{1}{i\omega \mu_0} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \vec{e}_y$$

$$\text{et } \mathcal{E} \wedge \mathcal{H} = \frac{1}{i\omega \mu_0} \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = -\frac{i}{\omega \mu_0} \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \vec{e}_z$$

Considérons maintenant deux situations, notées 1 et 2, dans lesquelles l'onde plane incidente éclaire respectivement la face gauche ( $z = -z_0$ ) et la face droite ( $z = z_0$ ) de la lame. Anticipant un peu sur ce qui sera développé au chapitre VIII, on admettra qu'en posant  $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ , l'introduction de coefficients complexes ( $r_1$  et  $t_1$  dans la situation 1, et  $r_2$  et  $t_2$  dans la situation 2) permet de donner la forme du champ électrique à l'extérieur de L dans chacune de ces situations :

$$(30) \quad \mathcal{E}_1(z) = \begin{cases} \exp(ikz) + r_1 \exp(-ikz) & \text{si } z \leq -z_0 \\ t_1 \exp(ikz) & \text{si } z \geq z_0 \end{cases}$$



$$(31) \quad \mathcal{E}_2(z) = \begin{cases} t_2 \exp(-ikz) & \text{si } z \leq -z_0 \\ \exp(-ikz) + r_2 \exp(ikz) & \text{si } z \geq z_0 \end{cases}$$

Ces expressions, sans doute déjà signalées dans les cours de premier cycle, expriment seulement que l'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise. Utilisons-les pour écrire (28') en prenant pour surface  $S$  la frontière d'un cylindre d'axe  $Oz$  (domaine en pointillé de la figure 14) dont les bases  $S_g$  et  $S_d$  sont deux disques égaux appartenant respectivement aux plans  $z = -z_0$  et  $z = z_0$ . Ici  $J_1 = J_2 = 0$  et nous obtenons :

$$(32) \quad \iint_{S_g} \left( \mathcal{E}_1 \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial z} - \mathcal{E}_2 \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial z} \right) dS - \iint_{S_d} \left( \mathcal{E}_1 \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial z} - \mathcal{E}_2 \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial z} \right) dS = 0$$

puisque, compte tenu de la polarisation choisie, la contribution de la surface latérale  $\Sigma$  de  $S$  est nulle. L'expression  $\mathcal{E}_1 \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial z} - \mathcal{E}_2 \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial z}$  prend donc la même valeur en  $z = \pm z_0$  ce qui, d'après (30) et (31) conduit à :

$$(33) \quad t_2 = t_1 .$$

Le coefficient de transmission  $t$  ne dépend donc pas du sens de propagation de la lumière incidente. Ce résultat, qui est intuitif lorsque  $\epsilon(z)$  est une fonction paire, n'est pas trivial dans le cas général. On notera que le coefficient de réflexion  $r$  ne possède pas, en général, cette propriété. Quant à la justification du mot "réciprocité", elle ne saute toujours pas aux yeux. Sans doute, faut-il penser à un énoncé du genre : soit  $t$  le coefficient de transmission quand la lumière arrive par la droite et ressort par la gauche, ce coefficient est inchangé quand "réciproquement" elle arrive par la gauche et ressort par la droite. Une fois de plus, il s'agit de vocabulaire traditionnel que l'on doit connaître ; souvent un "théorème de réciprocité" est utilisé pour d'établir l'invariance d'une grandeur lors d'un changement du sens de propagation.

7.3. Compléments d'ordre mathématique. L'égalité (28) se présente sous la forme :

$$(34) \quad \operatorname{div} \vec{f} = T_1 + T_2 .$$

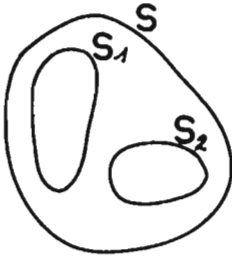


Figure 14

$T_1$  et  $T_2$  sont des distributions singulières dont les supports disjoints sont deux surfaces fermées  $S_1$  et  $S_2$  contenues dans un domaine  $\Omega$  lui-même limité par la surface fermée  $S$  (fig.14). C'est dire, qu'au sens des fonctions, la divergence de  $f$  est nulle dans le complémentaire de  $S_1 \cup S_2$  donc, en particulier à l'extérieur de  $S$ . Introduisons la fonction  $\vec{F}$  presque partout définie comme suit :

$$\vec{F} = \begin{cases} \vec{f} & \text{à l'intérieur de } S \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur de } S \end{cases}, \quad \vec{f} - \vec{F} = \begin{cases} \vec{0} & \text{à l'intérieur de } S \\ \vec{f} & \text{à l'extérieur de } S. \end{cases}$$

La fonction  $\vec{f} - \vec{F}$  a, au sens des fonctions, une divergence nulle dans le complémentaire de  $S$ . Autrement dit ([7], III), sa divergence sans précaution ( $\text{div}(\vec{f} - \vec{F})$ ) est nulle et, au sens des distributions :

$$(35) \quad \text{div}(\vec{f} - \vec{F}) = \vec{n} \cdot \vec{f} \delta_S = \text{div } f - \text{div } F = T_1 + T_2 - \text{div } F.$$

Ainsi, si  $\varphi$  est une fonction appartenant à  $\mathcal{D}$  et égale à 1 sur  $\Omega$  :

$$(36) \quad \langle \vec{n} \cdot \vec{f} \delta_S, \varphi \rangle = \langle T_1 + T_2, \varphi \rangle - \langle \text{div } \vec{F}, \varphi \rangle.$$

Mais, par définition de la dérivation en théorie des distributions :

$$(37) \quad - \langle \text{div } \vec{F}, \varphi \rangle = - \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial F_j}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \sum_{j=1}^3 \left\langle F_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = 0$$

car, quel que soit  $j$ , le terme  $\left\langle F_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = 0$ . Désignant par  $\Omega'$  le complémentaire de  $\Omega$ , on a en effet :

$$\left\langle F_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \int_{\Omega} F_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \int_{\Omega'} F_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

et chacune des intégrales figurant au second membre est nulle : la première car  $\partial \varphi / \partial x_j = 0$  dans  $\Omega$ , la seconde car  $F_j = 0$  dans  $\Omega'$ .

En conclusion, (36) et (37) impliquent :

$$(38) \quad \iint_S \vec{n} \cdot \vec{f} \, dS = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle,$$

relation utilisée au §7.1 pour établir (28'') et (28''').

## Chapitre V

# *L'onde plane en régime sinusoïdal*

Dans ce chapitre, on s'intéresse uniquement à la propagation dans un milieu homogène et isotrope en l'absence de sources. Bien que non surmontées d'une flèche, les lettres  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{H}$  représentent les champs vectoriels complexes vérifiant les équations de Maxwell harmoniques :

$$(1) \quad \text{rot } \mathcal{E} = i\omega \mu \mathcal{H} ,$$

$$(2) \quad \text{rot } \mathcal{H} = -i\omega \epsilon \mathcal{E} ,$$

$$(3) \quad \text{div } \mathcal{E} = 0 ,$$

$$(4) \quad \text{div } \mathcal{H} = 0 .$$

Supposant le milieu magnétiquement parfait,  $\mu$  n'est autre que la perméabilité mesurée en Statique. Par contre, pour tenir compte de la dispersion, la permittivité  $\epsilon$  dépend de  $\omega$ . Nous savons déjà (II) que, dans ces conditions,  $\mathcal{E}(\vec{r})$  et  $\mathcal{H}(\vec{r})$  vérifient l'équation de Helmholtz :

$$(5) \quad \Delta \mathcal{E} + \omega^2 \epsilon \mu \mathcal{E} = 0 ,$$

$$(5') \quad \Delta \mathcal{H} + \omega^2 \epsilon \mu \mathcal{H} = 0 .$$

$\mathcal{E}_0$  et  $\vec{k}$  étant deux vecteurs complexes fixés, on désigne sous le nom d'onde plane un champ électromagnétique tel que :

$$(6) \quad \mathcal{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) .$$

Le vecteur  $\vec{k}$  est dit "vecteur d'onde" et, d'après une remarque précédente, l'équation de Helmholtz impose la valeur de son carré scalaire :

$$(7) \quad \vec{k}^2 = \vec{k} \cdot \vec{k} = \omega^2 \epsilon \mu .$$

1. L'ONDE PLANE DANS UN MILIEU NON ABSORBANT.

Dans un tel milieu,  $\epsilon(\omega)$  est réel positif. Il est donc possible de satisfaire (7) en prenant  $\vec{k}$  réel ; il suffit que sa norme  $k$  soit égale à  $\omega\sqrt{\epsilon\mu}$ , c'est-à-dire au "ka" du milieu (II, §5.2). Supposons cette condition remplie et étudions plus en détail le champ électromagnétique.

1.1. Relation entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ . Récrivant (1) en tenant compte de (6), il vient :

$$\text{rot}(\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \mathcal{E}_0) = \text{grad}(\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})) \wedge \mathcal{E}_0 = i\vec{k} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \wedge \mathcal{E}_0 = i\omega\mu \mathcal{H}$$

et finalement, en désignant par  $\vec{u} = \vec{k}/k$  le vecteur unitaire de  $\vec{k}$  :

$$(8) \quad \mathcal{H} = \frac{\vec{u} \wedge \mathcal{E}}{\eta} \quad \text{avec} \quad (9) \quad \eta = \frac{\omega \mu}{k} = \frac{\omega \mu}{\omega \sqrt{\epsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Ainsi  $\mathcal{H}$ , qui peut s'écrire sous la forme  $\mathcal{H}_0 \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$  (avec  $\mathcal{H}_0 = \frac{\vec{u} \wedge \mathcal{E}_0}{\eta}$ ), est de la même forme que  $\mathcal{E}$  (6).

On vérifie facilement que  $\sqrt{\mu/\epsilon}$  a même dimension qu'une impédance ( $\epsilon E^2$  et  $\mu H^2$  ont même dimension,  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  s'expriment respectivement en V/m et A/m). Pour cette raison,  $\eta$  est appelé impédance du milieu. L'impédance du vide (soit  $\eta_0$ ) a une valeur qu'il est bon de retenir. Sachant que  $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$  :

$$(10) \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0^2 c_0^2}{\epsilon_0 \mu_0 c_0^2}} = \mu_0 c_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 3 \cdot 10^8 = 120\pi$$

L'impédance d'un milieu quelconque ( $\epsilon, \mu$ ) est reliée à  $\eta_0$  de façon simple :

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \eta_0 / \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

soit, dans le cas usuel ou  $\mu_r = 1$ , si  $n$  est l'indice du milieu :

$$(9') \quad \eta = \eta_0/n$$

On remarquera que (8) implique :

$$\text{Re}(\mathcal{H} \exp(-i\omega t)) = \text{Re} \left( \frac{\vec{u} \wedge \mathcal{E} \exp(-i\omega t)}{\eta} \right)$$

ce qui, puisque  $\eta$  est réel, entraîne :

$$(8') \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t)}{\eta} .$$

Ainsi, la relation (8) reste vraie quand on remplace les vecteurs complexes par les vecteurs réels.

1.2. Relation entre les champs et le vecteur d'onde. Compte tenu de (6), (3) s'écrit :

$$i\vec{k} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \mathcal{E}_0 = i\vec{k}\vec{u} \cdot \mathcal{E} = 0 .$$

Ainsi :

$$(11) \quad \vec{u} \cdot \mathcal{E}(\vec{r}) = 0 ,$$

et de même, partant de (6) et (4) :

$$(12) \quad \vec{u} \cdot \mathcal{H}(\vec{r}) = 0 .$$

Puisque  $\vec{u}$  est réel, (11) et (12) entraînent :

$$(11') \quad \vec{u} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 ,$$

$$(12') \quad \vec{u} \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) = 0 .$$

1.3. Structure de l'onde plane. Il faut retenir qu'en un point donné, et à tout instant :

- a) les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation (d'après (11') et (12')) ;
- b) les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont perpendiculaires entre eux et le quotient de leurs normes  $E$  et  $H$  est égal à l'impédance du milieu (d'après (8') et (11')). On hésite souvent entre  $E/H = \eta$  et  $H/E = \eta$ . La deuxième hypothèse n'est pourtant pas acceptable si l'on songe aux unités utilisées pour les trois grandeurs mises en cause : l'unité d'impédance est l'ohm ou volt/ampère.

1.4. Grandeurs associées à l'onde plane. On peut, sans perte de généralité, supposer que  $\vec{u}$  est porté par Ox. Alors, remplaçant  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  par  $kx$  :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\mathcal{E} \exp(-i\omega t)) = \text{Re}(\mathcal{E}_0 \exp(ikx - i\omega t))$$

et, désignant par  $A_i = \rho_i \exp(i\varphi_i)$  les composantes de  $\mathcal{E}_0$ , les composantes  $E_i$  de  $\vec{E}$  sont de la forme :

$$(13) \quad E_i = \rho_i \cos(\omega t - kx - \varphi_i) .$$

Ainsi, en un point donné (pour  $x$  fixé), chaque composante  $E_i$  du champ électrique est une fonction sinusoïdale du temps, de période  $T = 2\pi/\omega$ . De même, à un instant donné (pour  $t$  fixé),  $E_i$  est une fonction sinusoïdale de la variable d'espace  $x$ . Sa période, que l'on désigne traditionnellement par  $\lambda$ , est égale à  $2\pi/k$ . On l'appelle longueur d'onde ou encore période spatiale, ce qui conduit à considérer  $k$  comme une pulsation spatiale. On notera bien qu'à une fréquence fixée, la longueur d'onde dépend du milieu dans lequel a lieu la propagation :

$$(14) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} = cT$$

où  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$  est la grandeur déjà introduite (III, §3) sous le nom de vitesse de la lumière. Quand, sans plus de précision, on parle de la longueur d'onde d'une radiation monochromatique, il s'agit, sauf indication contraire, de la longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide. Puisque  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ , on trouve rapidement la relation entre  $\lambda$ ,  $\lambda_0$  et l'indice optique  $n$  du milieu :

$$(15) \quad \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{k}{k_0} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} = n .$$

Désignons par  $\psi$  l'argument du cosinus dans (13). Cet argument, que certains appellent la phase (A2), peut être considéré comme une fonction de  $x$  dépendant du paramètre  $t$  :

$$(16) \quad \psi_t(x) = \omega t - kx - \varphi_i = -k \left( x - \frac{\omega t}{k} \right) - \varphi_i .$$

On vérifie sans peine que :

$$(17) \quad \psi_t(x) = \psi_{t_0} \left( x - \frac{\omega}{k}(t - t_0) \right) .$$

Ainsi, d'après (13) et (17), le graphe de  $E_i(x)$  à l'instant  $t$  (fig.15) se déduit du graphe de  $E_i(x)$  à l'instant  $t_0$  par une translation d'amplitude  $\frac{\omega}{k}(t - t_0)$ . Le quotient  $\omega/k$ , qui a les dimensions d'une vitesse, est appelé vitesse de phase. On peut dire aussi que la vitesse de phase est la vitesse du mouvement rectiligne uniforme qu'il faudrait imposer à un point d'abscisse  $x(t)$  pour que, dans la formule (13), l'argument du cosinus, calculé en ce point, ne varie pas au cours du temps.

Puisque  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ , la vitesse de phase  $\omega/k = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$  n'est autre que la vitesse de la lumière  $c$  dans le milieu considéré (III, §3). Sauf si le milieu est parfait, la vitesse de phase dépend de  $\omega$  par l'intermédiaire de  $\epsilon$ . On dit qu'il y a dispersion.

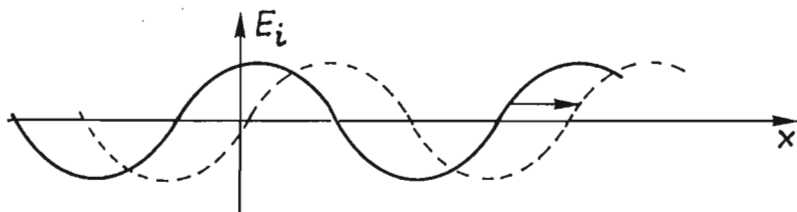


Figure 15 : Graphes de  $E_i$  à l'instant  $t_0$  (—) et à l'instant  $t > t_0$  (- - -). La flèche représente la translation  $c(t - t_0)$ .

Intéressons nous enfin aux grandeurs énergétiques définies au chapitre IV. Compte tenu de (8) et (11), et puisque  $\vec{u}$  et  $\eta$  sont réels, le vecteur de Poynting complexe  $\mathcal{P}$  (IV, 10) est donné par :

$$(18) \quad 2\eta\mathcal{P} = \mathcal{E} \wedge (\vec{u} \wedge \bar{\mathcal{E}}) = (\mathcal{E} \cdot \bar{\mathcal{E}})\vec{u} - (\mathcal{E} \cdot \vec{u})\bar{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \cdot \bar{\mathcal{E}})\vec{u} - 0 = (\mathcal{E}_0 | \mathcal{E}_0) \vec{u} .$$

Ainsi  $\mathcal{P}$  est réel ; il est, comme  $\vec{u}$ , perpendiculaire aux surfaces équiphasés et son module est proportionnel au quotient du carré de la norme hermitienne de  $\mathcal{E}_0$  par l'impédance du milieu.

Pour l'énergie volumique, on constate que :

$$(19) \quad \langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \text{Re} (\epsilon \mathcal{E} \cdot \bar{\mathcal{E}}) = \frac{1}{4} \text{Re} (\mu \mathcal{H} \cdot \bar{\mathcal{H}}) = \langle w_m \rangle .$$

Il suffit, en effet, de noter que :

$$\mathcal{H} \cdot \bar{\mathcal{H}} = \frac{(\vec{u} \wedge \mathcal{E}) \cdot \bar{\mathcal{H}}}{\eta} = \frac{(\mathcal{E} \wedge \bar{\mathcal{H}}) \cdot \vec{u}}{\eta} = \frac{\mathcal{E} \wedge (\vec{u} \wedge \bar{\mathcal{E}})}{\eta^2} \cdot \vec{u} = \frac{(\mathcal{E} \cdot \bar{\mathcal{E}})}{\eta^2} \vec{u} \cdot \vec{u} = \epsilon \frac{\mathcal{E} \cdot \bar{\mathcal{E}}}{\mu} .$$

On remarquera enfin que si l'un des axes du trièdre de référence est parallèle à la direction de propagation, celle-ci est direction propre pour le tenseur des contraintes (IV, §6.3). Par exemple, si  $\vec{u} = \vec{e}_3$ , on constate que  $T_{31} = T_{32} = T_{13} = T_{23} = 0$ . Autrement dit, on peut, dans ces conditions, définir une pression de radiation (IV, §6.4). On vérifiera, à titre d'exercice, que la valeur moyenne de cette pression n'est autre que la valeur moyenne  $\langle w \rangle$  de l'énergie électromagnétique volumique (IV, §4.2).

1.5. Polarisation des champs. Les considérations développées au chapitre II, §6, conduisent ici à des résultats très simples. En reprenant les notations utilisées dans ce chapitre, on voit que le passage d'un point  $M_1$  ( $\vec{r}_1$ ) à un point  $M_2$  ( $\vec{r}_2$ ) revient à multiplier  $\mathcal{E}$  par le complexe  $\exp(i\vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))$ . L'état de polarisation (II, §6.1) est donc le même en tout point. Il peut être étudié en se plaçant à l'origine ( $\vec{r} = 0$ ) où  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$  se confond avec  $\mathcal{E}_0$ . Si donc on désigne respectivement par  $\mathcal{E}'_0$  et  $\mathcal{E}''_0$  la partie réelle et la partie imaginaire de  $\mathcal{E}_0$ , on arrive aux conclusions suivantes :

. En général la polarisation est elliptique.

. Elle dégénère en polarisation rectiligne si  $\mathcal{E}_0$  est le produit d'un vecteur réel par un nombre complexe (C'est en particulier le cas si  $\mathcal{E}_0$  est réel ou imaginaire pur).

. La polarisation circulaire correspond au cas particulier où  $\mathcal{E}'_0$  et  $\mathcal{E}''_0$  sont des vecteurs de même norme et perpendiculaires entre eux.

. On notera que le sens de parcours de l'ellipse est lui-même indépendant du point considéré. Certains auteurs disent que l'ellipse est décrite dans le sens direct si son sens de parcours est celui qui est induit par le sens de propagation. D'autres, surtout en Optique, utilisent une convention différente. Ils parlent de vibration "droite" ou "gauche" suivant que l'ellipse semble décrite dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire, pour un observateur fictif supposé "recevoir" l'onde étudiée.

## 2. L'ONDE PLANE DANS UN MILIEU ABSORBANT.

2.1. Généralités. Soit un milieu de perméabilité  $\mu_0$  et de permittivité complexe  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ . Intéressons nous toujours aux solutions de l'équation de Helmholtz pour lesquelles :

$$(6) \quad \mathcal{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$$

en supposant maintenant que  $\vec{k}$  est un vecteur complexe dont la partie réelle  $\vec{k}'$  et la partie imaginaire  $\vec{k}''$  sont deux vecteurs parallèles et de même sens. On peut, sans perte de généralité, supposer que  $\vec{k}'$  et  $\vec{k}''$  sont portés par Ox ( $\vec{k}' = k' \vec{e}_x$ ,  $\vec{k}'' = k'' \vec{e}_x$ ,  $\vec{k} = (k' + ik'')\vec{e}_x$ ) et en posant  $k = k' + ik''$ , remplacer (6) par :

$$(6') \quad \mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 \exp(ikx), \quad \text{avec} \quad (7') \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon = \omega^2 \mu_0 (\epsilon' + i\epsilon'').$$



La détermination de  $k'$  et  $k''$  peut se faire en égalant partie réelle et partie imaginaire des deux membres de (7') :

$$(20) \quad k'^2 - k''^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon' , \quad (20') \quad 2k'k'' = \omega^2 \mu_0 \epsilon'' ,$$

ce qui impose, puisque  $\epsilon''$  est toujours positif, que  $k'$  et  $k''$  soient de même signe.

On est alors ramené à un problème classique : trouver deux nombres ( $k'^2$  et  $-k''^2$ ) connaissant leur somme et leur produit. Une méthode plus élégante [11] consiste à transformer le second membre de (7') après avoir posé  $\text{tg } \delta = \epsilon''/\epsilon'$  et  $\tilde{k}^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon'$ . En supposant, par exemple,  $k' > 0$ , il vient :

$$(21) \quad k^2 = \tilde{k}^2 (1 + i \text{tg } \delta) = \frac{\tilde{k}^2 \exp(i\delta)}{\cos \delta} ,$$

$$(22) \quad k = k' + ik'' = \frac{\tilde{k} \exp(i\delta/2)}{\sqrt{\cos \delta}} = \frac{\tilde{k}}{\sqrt{\cos \delta}} \left( \cos \frac{\delta}{2} + i \sin \frac{\delta}{2} \right)$$

$$(22') \quad k' = \frac{\tilde{k} \cos(\delta/2)}{\sqrt{\cos \delta}} ; \quad k'' = \frac{\tilde{k}}{\sqrt{\cos \delta}} \sin(\delta/2) .$$

On notera que  $\delta$  est l'angle de perte déjà introduit au chapitre IV, tandis que  $\tilde{k}$  serait le "ka" du milieu si on négligeait ses pertes (c'est-à-dire si l'on faisait  $\epsilon'' = 0$ ).

On utilise souvent, pour décrire  $\mathcal{E}$ , une forme équivalente à (6') obtenue en introduisant  $k_0$  (le "ka" du vide) :

$$(6'') \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp(ik_0 n x) .$$

Le complexe  $n = k/k_0 = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} = \sqrt{\epsilon_r}$  est l'indice complexe  $n = \nu + i\kappa$  très utilisé en Optique. ( $\kappa$  est la lettre grecque kappa). Il faut évidemment préciser la signification de  $\sqrt{\epsilon_r}$ , puisqu'il existe deux complexes (opposés l'un de l'autre) dont le carré est égal à  $\epsilon_r$ . L'un d'entre eux a sa partie réelle et sa partie imaginaire positives ; c'est celui que nous retiendrons. Compte tenu de (22') et si nous supposons toujours  $\epsilon' > 0$  :

$$(23) \quad \nu = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} \frac{\cos(\delta/2)}{\sqrt{\cos \delta}} , \quad \kappa = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}} \frac{\sin(\delta/2)}{\sqrt{\cos \delta}} .$$

En remplaçant  $n$  par  $\nu + i\kappa$ , la formule (6'') devient :

$$(6''') \quad \mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_0 \exp(-k_0 \kappa x) \exp(ik_0 \nu x) ,$$

ce que le Physicien interprète souvent en parlant d'onde plane qui s'amortit en cours de propagation. En effet, toute composante  $E_i$  de  $\vec{E}$ , qui est alors de la forme :

$$E_i = A_i \exp(-k_0 \kappa x) \cos(\omega t - k_0 \nu x - \varphi_i) ,$$

peut être considérée comme une onde plane (se propageant dans le sens de  $x$  croissant) dont l'amplitude  $A_i \exp(-k_0 \kappa x)$  décroît exponentiellement avec  $x$ . Cette amplitude est divisée par  $e$  chaque fois que  $z$  augmente de  $1/k_0 \kappa$ . La longueur  $\ell = 1/k_0 \kappa = \lambda_0 / (2\pi \kappa)$  est généralement appelée longueur d'atténuation. On retiendra qu'elle est de l'ordre du dixième de longueur d'onde si  $\kappa$  est de l'ordre de l'unité (cas des métaux usuels en lumière visible).

2.2. Structure de l'onde amortie. En dépit d'une grande analogie formelle, on prendra garde de ne pas étendre trop rapidement à l'onde plane amortie les propriétés données pour l'onde plane au paragraphe précédent. Voici quelques remarques qui devraient suffire à clarifier une question trop souvent mal assimilée par les étudiants.

a) Pour l'onde plane amortie, les plans équiphases ( $x = Cte$ ) sont aussi des plans équiampplitudes. Il ne s'agit donc pas d'une onde dissociée (II, §5.21).

b) Le champ associé à une onde amortie, qui croît exponentiellement quand  $x \rightarrow -\infty$ , n'est pas une distribution tempérée. Il n'a donc pas de transformée de Fourier, même au sens des distributions [7].

c) Compte tenu de (6'), la relation  $\text{div } \mathcal{E} = 0$  impose encore :

$$(24) \quad \vec{e}_x \cdot \mathcal{E} = \vec{e}_x \cdot (\mathcal{E}' + i\mathcal{E}'') = 0 ,$$

ce qui prouve que la partie réelle de  $\mathcal{E}$  et sa partie imaginaire sont deux vecteurs  $\mathcal{E}'$  et  $\mathcal{E}''$  perpendiculaires à  $Ox$ , donc situés dans le plan  $yOz$  :

$$(25) \quad \vec{E}(x, t) = \text{Re}(\mathcal{E} \exp(-i\omega t)) = \mathcal{E}' \cos \omega t + \mathcal{E}'' \sin \omega t .$$

d) La relation  $\mathcal{H} = (\vec{e}_x \wedge \mathcal{E})/\eta$  est encore valable puisqu'elle découle de (6') et de la première équation de Maxwell, mais on notera bien que l'impédance du milieu est complexe car, d'après (22) et si  $\eta_0$  est l'impédance du vide :

$$(26) \quad \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{k_0}{k} = \frac{k_0}{\tilde{k}} \sqrt{\cos \delta} \exp(-i\delta/2) .$$

Il en résulte qu'on ne peut plus déduire la formule (8') de la formule (8). Autrement dit, l'orthogonalité des vecteurs complexes  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  n'entraîne pas, qu'en un point donné, les vecteurs réels  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  soient à tout instant perpendiculaires. Il est commode, pour s'en convaincre, d'introduire le vecteur  $\mathcal{H}_v = \vec{e}_x \wedge \mathcal{E}/\eta_0$  qui serait associé à  $\mathcal{E}$  dans le vide. Compte tenu de (9') et (23) :

$$\mathcal{H}_v = \frac{\eta}{\eta_0} \mathcal{H} = \frac{1}{\nu + i\kappa} \mathcal{H} = \sqrt{\frac{\cos(\delta/2)}{\nu}} \exp(-\frac{i\delta}{2}) \mathcal{H} .$$

On sait (propriété de l'onde plane) que  $\vec{H}_v$  et  $\vec{E}$  sont à tout instant perpendiculaires. Pour qu'il en soit de même pour  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$ , il faudrait donc qu'à tout instant  $\vec{H}$  et  $\vec{H}_v$  soient parallèles. Ceci n'est pas vrai dans le cas général d'une polarisation elliptique, car alors, posant :  $\mathcal{H} = (\vec{A} + i \vec{B})$ , il vient :

$$H(\vec{r}, t) = \text{Re}(\mathcal{H} \exp(-i\omega t)) = \vec{A} \cos \omega t + \vec{B} \sin \omega t$$

$$H_v(\vec{r}, t) = \text{Re}(\mathcal{H}_v \exp(-i\omega t)) = \frac{\cos(\delta/2)}{\nu} (\vec{A} \cos(\omega t + \frac{\delta}{2}) + \vec{B} \sin(\omega t + \frac{\delta}{2}))$$

et le produit vectoriel  $\vec{H} \wedge \vec{H}_v = \frac{1}{2\nu} \vec{A} \wedge \vec{B} \sin(\delta)$  n'est pas nul.

### 3. COMMENTAIRES SUR LES ONDES PLANES.

Les deux paragraphes précédents sont loin d'avoir épuisé le problème de l'onde plane. Nous nous sommes contentés d'étudier les champs décrits par (6) dans deux cas particuliers pour lesquels les surfaces équiphases sont aussi des équiampplitudes. Nous n'avons rien dit des "ondes dissociées" pour lesquelles  $\vec{k}$  est un vecteur complexe ayant une partie réelle  $\vec{k}'$  non colinéaire à sa partie imaginaire  $\vec{k}''$ . Rappelons simplement que, pour ces "ondes dissociées", les plans équiphases sont distincts des plans équiampplitudes (II, §5.2). On les rencontre dans les publications spécialisées sous des noms très variés (onde de surface, onde de fuite, ...). Une harmonisation du vocabulaire employé par les différents auteurs serait souhaitable. En attendant, il faut reconnaître que le terme d'onde plane n'est pas toujours suffisamment clair. Il semble au moins nécessaire de préciser si  $\vec{k}$  est réel ou complexe. Dans le premier cas, on peut parler de "vraie onde plane" ; dans le second, il n'est souvent pas superflu de dire si l'onde est ou n'est pas "dissociée".

Déjà familiarisés avec la "vraie onde plane" par leurs études antérieures, les étudiants de Maîtrise sont, par contre, souvent rebutés par les autres types dont ils ne voient pas, disent-ils, le sens physique. Même l'onde amortie du §2 leur semble parfois suspecte ; ils n'apprécient pas le caractère non borné de son "amplitude". En fait, même la "vraie onde plane" n'a pas de sens physique évident. Dans une région d'étendue limitée (un laboratoire par exemple) correspondant à l'intérieur d'une surface  $S$ , le champ électromagnétique ne peut évidemment pas être décrit par une telle onde qui ne saurait satisfaire les conditions aux limites imposées par  $S$ . Par contre, il arrive, qu'au moins localement, un champ puisse être considéré comme une "superposition" d'ondes planes. Le plus souvent d'ailleurs, ce mot ne désigne pas une somme, mais plutôt une série, une intégrale, voire une intégrale symbolique comme celle que l'on utilise dans les calculs formels relatifs à la transformation de Fourier. En fait, c'est la suite du cours qui montrera l'intérêt de l'onde plane et sans doute vaut-il mieux nous limiter pour l'instant à une analogie avec un domaine plus simple. En Théorie du signal, on commence par l'étude des signaux sinusoïdaux  $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  qui évidemment n'existent pas réellement puisqu'ils sont de durée infinie ; l'existence, supposée au lycée, d'un pendule oscillant selon une telle loi porterait un rude coup à l'industrie horlogère ! En fait, si l'étude des signaux sinusoïdaux est intéressante c'est en raison de la théorie de Fourier ; en pratique, une fonction  $s(t)$  peut le plus souvent s'écrire (au moins formellement) sous la forme :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega ,$$

ce qui peut s'interpréter comme une décomposition en fonctions sinusoïdales. Le théorème de Cauchy [7] permet de remplacer cette intégrale par une intégrale sur un chemin  $\gamma$  du plan complexe  $\omega$  :

$$s(t) = \int_{\gamma} \hat{s}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega .$$

Sous cette forme, un signal borné  $s(t)$  apparaît comme une superposition de signaux élémentaires  $\hat{s}(\omega) \exp(i\omega t)$  qui, dans la mesure où  $\omega$  est complexe, ne sont pas bornés. Autrement dit encore, un signal peut être considéré comme "superposition" de signaux sinusoïdaux ayant éventuellement des fréquences complexes. De la même façon, en Electromagnétisme, une fonction de  $\vec{r}$  (l'amplitude complexe d'un champ) peut être représentée par une superposition d'ondes planes ayant éventuellement des vecteurs d'ondes complexes... et ceci surprend en général les débutants.

## Chapitre VI

# *Le paquet d'ondes*

Le paquet d'ondes est, comme l'onde plane, un modèle mathématique souvent utilisé. Il permet notamment la représentation des champs que l'on peut décrire qualitativement comme des "perturbations électromagnétiques" se déplaçant au cours du temps. De tels champs ne relèvent évidemment pas des régimes harmoniques puisqu'ils dépendent en général de quatre variables (trois variables d'espace et le temps). Par souci de simplicité, nous nous limiterons ici à des paquets d'ondes dépendant seulement de deux variables.

### 1. INTRODUCTION ET DEFINITIONS.

Soit un milieu homogène magnétiquement parfait ( $\mu = \mu_0$ ), mais électriquement imparfait (I, §4). Lorsqu'en l'absence de sources, un champ électromagnétique se propage dans un tel milieu, on sait (II, §1) que les vecteurs champs  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  (ainsi que leurs signaux analytiques  $\vec{\tilde{E}}$ ,  $\vec{\tilde{D}}$ ,  $\vec{\tilde{H}}$ ,  $\vec{\tilde{B}}$ ) vérifient les équations de Maxwell homogènes :

$$(1) \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2) \quad \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0,$$

$$(3) \quad \text{div } \vec{D} = 0, \quad (4) \quad \text{div } \vec{B} = 0,$$

tandis que leurs transformées de Fourier temporelles  $\hat{\vec{E}}$ ,  $\hat{\vec{D}}$ ,  $\hat{\vec{H}}$ ,  $\hat{\vec{B}}$  vérifient les équations de Maxwell harmoniques.

Dans cette leçon et pour satisfaire à l'usage, nous appellerons  $\omega$  plutôt que  $\nu$  la variable de Fourier conjuguée de  $t$ . Plus précisément, nous utiliserons une transformation de Fourier de type  $\mathcal{F}^+$  pour laquelle, si  $\hat{g}(\omega)$  est la transformée d'une fonction sommable  $g(t)$  :

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(i\omega t) dt \quad \text{et} \quad g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Grâce aux généralisations vues dans le cours de Mathématiques [7], on sait que cette transformation s'applique à toute distribution tempérée, ce qui suffit pour l'étude que nous avons en vue. On n'oubliera pas que la transformée d'une distribution tempérée est encore une distribution tempérée. Les principales règles de calcul pourront être trouvées dans l'annexe 4 de [7] ; avec les notations de cette annexe, il faudra prendre :  $c = -1$ ,  $a = 1/2\pi$ ,  $b = 1$ .

Rappelons que, par la transformation de Fourier ( $\mathcal{F}^+$  en  $t$ ), les équations de Maxwell deviennent :

$$(1') \quad \text{rot } \hat{\vec{E}} - i\omega \hat{\vec{B}} = 0, \quad (2') \quad \text{rot } \hat{\vec{H}} + i\omega \hat{\vec{D}} = 0,$$

$$(3') \quad \text{div } \hat{\vec{D}} = 0, \quad (4') \quad \text{div } \hat{\vec{B}} = 0,$$

et que, compte tenu de  $\hat{\vec{D}} = \epsilon(\omega) \hat{\vec{E}}$  et de  $\hat{\vec{B}} = \mu_0 \hat{\vec{H}}$ , on en déduit l'équation de Helmholtz :

$$(5) \quad \Delta \hat{\vec{E}} + \omega^2 \epsilon(\omega) \mu_0 \hat{\vec{E}} = 0.$$

Dans cette équation,  $\epsilon(\omega)$  est la fonction à symétrie hermitienne précédemment définie (II, §3). Il importe de bien noter que les relations (1'-4') et (5) sont aussi vérifiées par les transformées de Fourier  $\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{D}}, \tilde{\vec{H}}, \tilde{\vec{B}}$  de  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$  car, répétons-le, ces dernières fonctions vérifient aussi les équations de Maxwell. Ceci peut encore se comprendre en se souvenant qu'à un coefficient multiplicatif près, la transformée de Fourier (T.F.) d'un signal analytique se déduit de la T.F. du signal par multiplication par la fonction de Heaviside.

Limitons-nous désormais à des champs tempérés dépendant d'une seule variable spatiale  $x$ . Soit  $u(x,t)$  l'une des composantes d'un tel champ,  $\tilde{u}(x,t)$  son signal analytique et  $\hat{u}(x,\omega)$  sa T.F. Pour fixer les idées, disons que  $u(x,t)$  est la composante sur  $Oy$  de  $\vec{E}(x,t)$ . La considération de  $\tilde{u}$ , plutôt que  $u$ , a l'avantage d'alléger les calculs par élimination des fréquences négatives. D'après (5),  $\hat{u}$  doit vérifier l'équation :

$$(5') \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \omega^2 \epsilon(\omega) \mu_0 \hat{u} = 0.$$

Dans cette leçon, et par souci de simplicité, nous nous intéresserons désormais uniquement aux solutions de la forme :

$$(6) \quad \hat{u}(x, \omega) = \frac{1}{2} A(\omega) \exp(i\omega \sqrt{\epsilon(\omega)\mu_0} x) ,$$

le coefficient  $1/2$  étant introduit uniquement pour des questions de commodité. Pour que  $\hat{u}$  (T.F. d'une fonction réelle) possède la symétrie hermitienne et reste une distribution tempérée en  $\omega$  même si le support  $\Omega$  de  $A(\omega)$  n'est pas borné, nous supposons de plus :

a) que  $\epsilon(\omega)$  est réelle et paire sur le support  $\Omega$  de  $A(\omega)$  ,

b) que  $A(\omega)$  possède la symétrie hermitienne :  $\Omega$  est alors la réunion de deux ensembles  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  symétriques par rapport à l'origine et  $\forall \omega \in \Omega$ ,

$$A(-\omega) = \bar{A}(\omega) .$$

Ces conditions sont réalisées si  $\Omega_+$  appartient à une bande de transparence (II, §3.12) du milieu dans lequel se fait la propagation. Alors, posant :

$$(7) \quad k(\omega) = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon(\omega)} ,$$

$u$  et  $\tilde{u}$  sont respectivement donnés par :

$$(8) \quad u(x, t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} A(\omega) \exp(ik(\omega)x - i\omega t) d\omega ,$$

$$(8') \quad \tilde{u}(x, t) = \int_{\Omega_+} A(\omega) \exp(ik(\omega)x - i\omega t) d\omega .$$

C'est ce type de champ, défini par (8) ou (8'), que l'on appelle traditionnellement un paquet d'ondes. La relation (7) liant  $k$  et  $\omega$  est la formule de dispersion et la restriction à  $\Omega_+$  de la fonction réelle  $\epsilon(\omega)$  décrit les variations de la permittivité complexe en fonction de la fréquence. Comme  $\epsilon(\omega)$  est une fonction paire sur  $\Omega$  ayant une dérivée positive sur  $\Omega_+$  (II, §3.12), la fonction  $k(\omega)$  définie par (7) est une fonction impaire ayant une dérivée paire positive sur  $\Omega$  (puisque  $\frac{1}{k} \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{\omega} + \frac{1}{2\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\omega}$ , avec  $\omega$  et  $d\epsilon/d\omega$  positifs). Ainsi,  $k(\omega)$  est une fonction monotone et la relation (7) établit une correspondance bijective entre  $\omega$  et  $k$  (figure 16). Cette bijection permet d'obtenir, par un simple changement de variable, deux nouvelles expressions pour  $u(x, t)$  et  $\tilde{u}(x, t)$ . Posant  $A(\omega) d\omega = a(k) dk$ , il vient :

$$(9) \quad u(x, t) = \int_K \frac{1}{2} a(k) \exp(ikx - i\omega(k)t) dk ,$$

$$(9') \quad \tilde{u}(x, t) = \int_{K_+} a(k) \exp(ikx - i\omega(k)t) dk$$

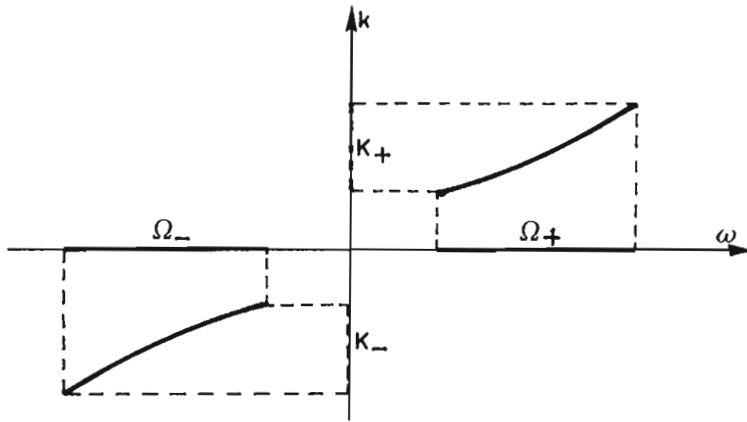


Figure 16. Allure du graphe de  $k(\omega)$  en supposant  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  bornés. A une valeur de  $\omega$  correspond une valeur de  $k$  et réciproquement. L'image  $K$  de  $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$  se compose aussi de deux ensembles de points  $K_+$  et  $K_-$  symétriques par rapport à l'origine.

Ainsi,  $u(x, t)$  peut s'interpréter de deux façons comme une T.F.D'après (8) :

$$(10) \quad u(x, t) \xrightarrow[\text{(variables } t \text{ et } \omega)]{\mathcal{F}^+} \frac{1}{2} A(\omega) \exp(ik(\omega)x) ,$$

et d'après (9) :

$$(10') \quad u(x, t) \xrightarrow[\text{(variables } x \text{ et } k)]{\mathcal{F}^-} \frac{1}{2} a(k) \exp(-i\omega(k)t) .$$

Dans les deux cas,  $k$  et  $\omega$  sont liées par la formule de dispersion (7), mais on notera bien que, contrairement à la transformation associée aux variables  $t$  et  $\omega$ , la transformation associée aux variables  $x$  et  $k$  est une transformation de type  $\mathcal{F}^-$  pour laquelle :

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \exp(-ikx) dx , \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(k) \exp(ikx) dk .$$

Les règles de calcul associées à cette transformation  $\mathcal{F}^-$  peuvent à nouveau s'obtenir en utilisant l'annexe 4 de [7], mais il faut prendre maintenant  $c = 1$ ,  $a = 1/2\pi$  et  $b = 1$ .



2. PROPAGATION DU PAQUET D'ONDES ; CENTRE D'ONDE ; VITESSE DE GROUPE.

Il est clair que le paquet d'ondes peut être utilisé pour représenter des champs scalaires (pouvant être l'une des composantes d'un champ vectoriel) qui, pour  $t$  fixé, ont une amplitude nulle (ou pratiquement nulle) en dehors d'un intervalle borné de  $Ox$  : il suffit d'après (9) que  $\frac{1}{2} a(k) \exp(-i\omega(k)t)$  soit la T.F. en  $x$  de  $u(x,t)$ . De tels champs "se déforment" en cours de propagation ; le graphe  $G$  de  $u$ , à un certain instant, ne peut pas se déduire par translation de celui correspondant à un instant antérieur. En effet, les différentes sinusoïdes dont la superposition constituent  $G$ , à un instant donné, glissent le long de  $Ox$  avec des vitesses  $\omega/k$  différentes (phénomène de dispersion). Dans de nombreuses applications où cette déformation reste faible, une grandeur intéressante à considérer est la "vitesse de propagation du paquet". Encore faut-il clarifier ce terme puisque initialement la notion de vitesse est uniquement définie pour un mobile ponctuel. Une façon de faire consiste à définir, à chaque instant, un "centre d'onde", permettant de localiser la perturbation étudiée, un peu comme un centre de gravité localise un morceau de matière en mouvement. Pour un champ  $u(x,t)$ , nous définirons l'abscisse  $X$  du centre d'onde par :

$$(11) \quad X(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x u \bar{u} \, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} u \bar{u} \, dx} ,$$

c'est-à-dire, si l'on conserve l'image du centre de gravité, en utilisant une "densité" proportionnelle à  $|u|^2$ . Ceci suppose que  $u$  soit de carré sommable. Plus généralement, les calculs faits dans ce chapitre imposeront à  $u(x,t)$  des conditions de régularité (voir A3) que nous supposerons implicitement satisfaites. D'après la formule de Parseval-Plancherel [7], on peut, au second membre de (11), remplacer  $u$  et  $xu$  par leur T.F. ( $\mathcal{F}^-$  en  $x$ ). Or :

$$u(x,t) \xrightarrow{\mathcal{F}^-} \hat{u}(k,t) = \frac{1}{2} a(k) \exp(-i\omega(k)t) ,$$

$$xu(x,t) \xrightarrow{\mathcal{F}^-} i \frac{d\hat{u}}{dk} = \frac{i}{2} \left( \frac{da}{dk} - i a \frac{d\omega}{dk} t \right) \exp(-i\omega(k)t) .$$

On arrive ainsi à :

$$(11') \quad X(t) = \frac{\int_K \left( i \bar{a} \frac{da}{dk} + a \bar{a} \frac{d\omega}{dk} t \right) dk}{\int_K a \bar{a} dk},$$

soit encore, compte tenu de la symétrie hermitienne de  $a(k)$  et de la parité de  $d\omega/dk$  :

$$(11'') \quad X(t) = X_0 + Vt,$$

où  $X_0$  et  $V$  sont deux constantes réelles définies par :

$$(12) \quad X_0 = \frac{\int_K i \bar{a} \frac{da}{dk} dk}{\int_K a \bar{a} dk}, \quad (13) \quad V = \frac{\int_K a \bar{a} \frac{d\omega}{dk} dk}{\int_K a \bar{a} dk} = \frac{\int_{K_+} a \bar{a} \frac{d\omega}{dk} dk}{\int_{K_+} a \bar{a} dk}.$$

On vérifiera que  $X_0$  est effectivement réel en notant que les parties réelle et imaginaire de  $a(k)$  sont respectivement paire et impaire ; alors, d'après (12),  $\Im(X_0)$  est nulle comme intégrale d'une fonction impaire.

En conclusion, si un paquet d'ondes est décrit par le signal analytique :

$$(9') \quad \tilde{u}(x,t) = \int_{K_+} a(k) \exp(ikx - i\omega(k)t) dk,$$

son centre d'onde se déplace d'un mouvement uniforme à la vitesse :

$$(13) \quad V = \frac{\int_{K_+} a(k) \bar{a}(k) \frac{d\omega}{dk}(k) dk}{\int_{K_+} a(k) \bar{a}(k) dk}.$$

Interprétant le paquet d'ondes (9') comme une superposition d'ondes planes ayant chacune une amplitude  $a(k)$  et une vitesse de phase  $\omega/k$ , la vitesse  $V$  n'est autre que la moyenne pondérée de la vitesse de phase compte tenu d'un "poids" égal au carré du module de l'amplitude  $a(k)$ .

Il arrive souvent, dans les applications, que l'on s'autorise à négliger les variations de  $d\omega/dk$  sur  $K_+$  ou, du moins, sur la partie de  $K_+$  qui contribue essentiellement au calcul de l'intégrale (13). Alors le terme  $d\omega/dk$ , supposé constant, "sort du signe intégrale" et, après simplification par  $\int_{K_+} a \bar{a} dk$ , on arrive à :

$$(14) \quad v = \frac{d\omega}{dk} .$$

On reconnaît en  $V$  la vitesse de groupe  $v_g$ , introduite de façon plus élémentaire dans les cours de 1er cycle, et égale à  $d\omega/dk$  au "point moyen" du support du paquet. On utilise, si besoin est, de meilleures approximations de  $V$  en remplaçant  $d\omega/dk$  par quelques termes de son développement de Taylor au voisinage de  $k_0 \in K_+$  :

$$\frac{d\omega}{dk}(k) = \frac{d\omega}{dk}(k_0) + (k - k_0) \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0) + \dots$$

L'identification de  $V$  à la vitesse du groupe  $v_g$  revient à limiter ce développement au terme constant. Enfin, pour un milieu parfait non dispersif, où la vitesse de phase de toute onde plane est égale à la vitesse de la lumière, on a tout simplement  $v = c$ .

### 3. ETENDUE OU LARGEUR DU PAQUET. DEFORMATION EN COURS DE PROPAGATION.

Convenons de choisir l'origine du temps à l'instant où le centre d'onde a son abscisse nulle. Ceci impose  $X_0 = 0$  dans (11) et :

$$(15) \quad X(t) = Vt .$$

A l'instant  $t$ , on peut définir une "étendue" ou "largeur d'onde"  $L$  par :

$$(16) \quad L^2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - Vt)^2 u \bar{u} \, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} u \bar{u} \, dx} .$$

$L^2$  est l'analogue d'une variance (en Statistiques) ou d'un moment d'inertie par rapport au centre de gravité (en Mécanique). Après changement de variable et en posant  $u(x + Vt, t) = U(x, t)$ , la relation (16) devient :

$$(16') \quad L^2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 U \bar{U} \, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} U \bar{U} \, dx} .$$

Or :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) & \xrightarrow{\mathcal{F}^-} \hat{u}(k, t) = \frac{1}{2} a(k) \exp(-i\omega(k)t) \\
 U = u(x + Vt, t) & \xrightarrow{\mathcal{F}^-} \hat{U}(k, t) = \hat{u}(k, t) \exp(ikVt) , \\
 xU & \xrightarrow{\mathcal{F}^-} i \frac{d\hat{U}}{dk} = i \frac{d}{dk} (\hat{u} \exp(ikVt)) \\
 & = i \left( \frac{d\hat{u}}{dk} + iVt\hat{u} \right) \exp(ikVt)
 \end{aligned}$$

et d'après la formule de Parseval-Plancherel et la symétrie hermitienne des fonctions mises en cause :

$$(17) \quad L^2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} -i^2 \frac{d\hat{U}}{dk} \frac{d\bar{\hat{U}}}{dk} dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U} \bar{\hat{U}} dk} = \frac{\int_0^{+\infty} \left| \frac{d\hat{U}}{dk} \right|^2 dk}{\int_0^{+\infty} \hat{u} \bar{\hat{u}} dk} .$$

Finalement, en supposant  $a(k)$  réel pour simplifier l'exercice, on trouve, après un calcul facile demandant néanmoins un peu de soin :

$$(17') \quad L^2(t) = \frac{\int_{K_+} \left( \left| \frac{da}{dk} \right|^2 + |a|^2 t^2 \left( V - \frac{d\omega}{dk} \right)^2 \right) dk}{\int_{K_+} a \bar{a} dk} .$$

Ainsi, le carré de  $L^2$  est de la forme :

$$(17'') \quad L^2(t) = L^2(0) + \rho^2 t^2 ,$$

où  $\rho$  est la constante positive définie par :

$$\rho^2 = \frac{\int_{K_+} a \bar{a} \left( V - \frac{d\omega}{dk} \right)^2 dk}{\int_{K_+} a \bar{a} dk} .$$

Si  $a(k)$  est complexe, il apparaît un terme en  $t$  dans (17'') mais ceci ne modifie pas l'importante remarque faite en fin de paragraphe sur le point d'inflexion.

Une estimation de  $\rho$  peut être obtenue en utilisant une expression approchée de  $d\omega/dk$  sur  $K_+$  et en remplaçant  $V$  par la vitesse de groupe  $v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0)$  :

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dk}(k_0) + (k - k_0) \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0) ,$$

$$\left(v - \frac{d\omega}{dk}\right)^2 = \left(v_g - \frac{d\omega}{dk}\right)^2 = (k - k_0)^2 \omega''^2(k_0) .$$

Alors :

$$(18) \quad \rho^2 = \omega''^2(k_0) \frac{\int_{K_+} (k - k_0)^2 a \bar{a} dk}{\int_{K_+} a \bar{a} dk}$$

et, au coefficient multiplicatif  $\omega''(k_0)$  près,  $\rho$  s'interprète comme une "largeur en  $k$ " au voisinage de  $k_0$ .

En conclusion, la "largeur L du paquet" varie au cours de la propagation. On peut minimiser ce phénomène en "centrant le paquet" sur une valeur  $k_0$  qui annule  $d^2\omega/dk^2$ . Ceci est possible si, pour  $k = k_0$ , la courbe de dispersion (c'est-à-dire le graphe de la formule de dispersion) présente un point d'inflexion.

Remarques :

- D'après (17"), L est minimale pour  $t = 0$ . Ceci est dû à notre choix particulier de l'origine en début de paragraphe.

- L'identification de la vitesse de paquet  $V$  à la vitesse de groupe  $v_g$  est d'autant mieux justifiée que la dispersion est faible et que les supports  $K_+$  ou  $\Omega_+$  sont plus étroits. Désignant par  $\Delta\omega$  la "largeur" de  $\Omega_+$  et supposant que  $u(0, t)$  est un signal sinusoïdal modulé par une gaussienne de "largeur"  $\Delta t$ , on sait [7] que  $\Delta t \Delta\omega \approx 1$ . Il en résulte que  $\Delta\omega/\omega_0 \approx 1/2\pi\nu_0\Delta t$ . Ainsi, même si  $\Delta t$  est très faible ( $10^{-12}$  s. par exemple),  $\Delta\omega/\omega_0$  est de l'ordre de  $10^{-3}$  en Optique et ceci explique le succès de l'approximation. Il n'en sera plus ainsi le jour où les impulsions d'une femtoseconde ( $\Delta t \approx 10^{-15}$  s.) seront devenues d'emploi courant.

#### 4. IMPORTANCE DE LA NOTION DE PAQUET D'ONDES.

Les considérations développées dans ce chapitre trouvent leur place dans beaucoup d'autres domaines de la Physique (Mécanique quantique, Acoustique, ...). Même en se limitant à l'Electromagnétisme, elles sont utiles en de nombreuses circonstances. Remarquons tout d'abord que le paquet d'ondes  $u(x, t)$  peut être regardé, pour  $x$  fixé, comme une fonction du temps souvent appelée "signal". On peut alors définir l'époque  $\tau$  et la durée du

signal. On posera par exemple :

$$(19) \quad \tau(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t u \bar{u} dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} u \bar{u} dt} .$$

Alors  $\tau(x_2) - \tau(x_1)$  est appelé "temps de vol" entre les points d'abscisse  $x_1$  et  $x_2$ . Le quotient de  $x_2 - x_1$  par le temps de vol associé se révèle constant et on l'appelle vitesse de signal. On pourra se reporter à [12,13] pour approfondir ce point de vue.

Nous préférons ici attirer l'attention sur un autre type de paquet d'ondes souvent employé pour décrire des faisceaux. Posant  $\alpha = k_0 \sin \theta$  et  $\beta = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2} = k_0 \cos \theta$ , on sait qu'en régime harmonique  $\exp(i(\alpha x - \beta(\alpha)y))$  représente une onde plane se propageant sous l'incidence  $\theta$  dans un milieu homogène repéré par  $k_0$ . Il en résulte que :

$$(20) \quad u(x,y) = \int \frac{1}{2} a(\alpha) \exp(i(\alpha x - \beta(\alpha)y)) d\alpha$$

peut être considéré comme un paquet d'ondes planes se propageant dans des directions différentes, chaque direction étant associée à une valeur de  $\alpha$  appartenant au support de  $a(\alpha)$ . Il ne s'agit plus d'un paquet spatio-temporel et  $u(x,y)$  est alors a priori complexe. L'analogie entre (20) et (9) saute aux yeux ; on obtient (20) à partir de (9) en remplaçant respectivement  $k$ ,  $t$  et  $\omega$  par  $\alpha$ ,  $y$  et  $\beta$ . On peut donc, pour  $y$  fixé, définir un "centre

de faisceau" par son abscisse  $X(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int x u \bar{u} dx}{\int u \bar{u} dx}$ . Alors, sans qu'il soit

nécessaire de refaire aucun calcul, on peut affirmer que  $X(y)$  est une fonction affine et que, par suite, les "centres de faisceaux" correspondant aux diverses valeurs de  $y$  sont alignés sur une droite  $\Delta$  d'équation  $X = X_0 + Vy$ . Nous serons évidemment tentés d'identifier  $\Delta$  au "rayon central" du faisceau étudié. Effectivement, si  $\theta_0$  correspond à la valeur  $\alpha_0$  sur laquelle est centré le support de  $a(\alpha)$ , on trouve dans l'approximation de la vitesse de groupe :

$$v = \frac{d\beta}{d\alpha} = - \operatorname{tg} \theta_0 , \quad X = X_0 - y \operatorname{tg} \theta_0 .$$

On reconnaît l'équation d'un rayon lumineux éclairant le dioptré  $y = 0$  sous l'incidence  $\theta_0$ . Dans la mesure où le support de  $a(k)$  est suffisamment étroit, (20) est un bon modèle de faisceau lumineux.

## Chapitre VII

# *Dioptre plan et milieux stratifiés*

### 1. INTRODUCTION ET NOTATIONS.

On se propose d'étudier, en régime harmonique, les champs électromagnétiques susceptibles d'exister en présence de deux milieux homogènes et isotropes séparés par une surface plane (dioptre plan) que nous supposons être le plan  $y = 0$ . Les demi-espaces  $y > 0$  et  $y < 0$  seront respectivement caractérisés par leur permittivité  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ . Nous supposerons par contre que la perméabilité est partout égale à la perméabilité  $\mu_0$  du vide. Cette hypothèse simplificatrice, qui suffit pour la plupart des applications, pourrait être abandonnée sans qu'il en résulte de complications théoriques (on pourra y réfléchir à titre d'exercice). Nous nous limiterons à des champs dépendant uniquement des deux variables spatiales  $x$  et  $y$  et, pour éviter le maniement de grandeurs vectorielles, nous ne considérerons que deux cas particuliers de polarisation rectiligne notés  $\vec{E} //$  et  $\vec{H} //$ . En  $\vec{E} //$ , le champ électrique est supposé parallèle à  $Oz$  ; il est décrit par un vecteur complexe  $\vec{E}$  de la forme :

$$(1) \quad \vec{E} = u(x,y) \vec{e}_z .$$

En  $\vec{H} //$ , c'est le champ magnétique qui est décrit par une expression de cette forme :

$$(1') \quad \vec{H} = u(x,y) \vec{e}_z .$$

En conclusion, nous raisonnerons toujours sur une fonction  $u(x,y)$  représentant, suivant le cas de polarisation étudié, l'unique composante non nulle (la composante sur  $Oz$ ) de  $\vec{E}$  ou de  $\vec{H}$ . Cette façon de faire est évidemment destinée à condenser la rédaction en évitant des redites inutiles.

2. GENERALITES SUR LA FONCTION  $u(x,y)$ .

2.1. Equation aux dérivées partielles. Posant  $k_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0}$  et  $k_2 = \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_0}$ , nous savons (II, §5) que  $u$  vérifie dans chacun des deux milieux une équation de Helmholtz :

$$(2) \quad \Delta u + k_1^2 u = 0 \quad \text{si } y > 0, \text{ milieu 1,}$$

$$(2') \quad \Delta u + k_2^2 u = 0 \quad \text{si } y < 0, \text{ milieu 2.}$$

2.2. Relations de passage en  $y = 0$ . Les relations de passage (II, §2.3), imposées aux vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  à la frontière des deux milieux, se traduisent ici par des conditions sur  $u$  et sa dérivée  $\partial u/\partial y$  en  $y = 0$ .

Quel que soit le cas de polarisation, le saut de  $u$  est nul en  $y = 0$  puisque  $u$  représente une composante tangentielle (de  $\vec{E}$  ou de  $\vec{H}$ ) qui se conserve. Le comportement de  $\partial u/\partial y$  est moins évident et dépend de la polarisation.

Dans le cas  $\vec{E} //$ , on peut, partant de (1), exprimer  $\vec{e}_y \wedge \vec{H}$  dans chacun des deux milieux à l'aide de la première équation de Maxwell :

$$\vec{e}_y \wedge \vec{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \vec{e}_y \wedge \text{rot } \vec{E} = \frac{1}{i\omega\mu} \vec{e}_y \wedge (\text{grad } u \wedge \vec{e}_z) = \frac{-1}{i\omega\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_z.$$

On voit que la conservation de  $\vec{e}_y \wedge \vec{H}$  impose celle de  $\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y}$ , donc de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  puisque  $\mu$  est partout égal à  $\mu_0$ .

Dans le cas  $\vec{H} //$ , l'utilisation de la deuxième équation de Maxwell conduit à :

$$\vec{e}_y \wedge \vec{E} = \frac{-1}{i\omega\epsilon} \vec{e}_y \wedge \text{rot}(u \vec{e}_z) = \frac{-1}{i\omega\epsilon} \vec{e}_y \wedge (\text{grad } u \wedge \vec{e}_z) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_z,$$

et la conservation de  $\vec{e}_y \wedge \vec{E}$  impose celle de  $\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y}$ .

En conclusion, il y a continuité de  $u$  et  $\partial u/\partial y$  en  $\vec{E} //$  et continuité de  $u$  et  $\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y}$  en  $\vec{H} //$ . Notons que si les deux milieux n'avaient pas même perméabilité, il faudrait, en  $\vec{E} //$ , remplacer  $\frac{\partial u}{\partial y}$  par  $\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y}$ .

2.3. Propriétés de  $\hat{u}(\alpha, x)$ . Les champs que l'on rencontre dans les applications correspondent très souvent, pour ne pas dire toujours, à des fonctions  $u$  qui, en tant que distributions, sont tempérées en  $x$ . Ce sont, par exemple, des fonctions qui, pour  $y$  fixé, ont leur module  $|u|$  majoré par une certaine puissance de  $|x|$ . Une telle hypothèse est en particulier



satisfaite par tout champ dont "l'intensité" reste bornée (cas d'une "vraie" onde plane) ou, a fortiori, décroît quand  $|x| \rightarrow \infty$ . On sait [7] que dans ces conditions,  $u(x,y)$  admet, au sens des distributions, une T.F.  $\hat{u}(\alpha,y)$  que nous supposons définie formellement par :

$$(3) \quad \hat{u}(\alpha,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y) \exp(-i\alpha x) dx ,$$

$$\text{et} \quad u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\alpha,y) \exp(i\alpha x) d\alpha .$$

Par transformation de Fourier, (2) et (2') deviennent :

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + (k_1^2 - \alpha^2) \hat{u} = 0 \quad \text{pour } y > 0 ,$$

$$(4') \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + (k_2^2 - \alpha^2) \hat{u} = 0 \quad \text{pour } y < 0 .$$

Ainsi, posant  $\beta_j^2 = k_j^2 - \alpha^2$  ( $j = 1,2$ ), on peut en déduire la forme de  $\hat{u}$  :

$$(5) \quad \hat{u}(\alpha,y) = A_1^-(\alpha) \exp(-i\beta_1 y) + A_1^+(\alpha) \exp(i\beta_1 y) \quad \text{si } y > 0 ,$$

$$(5') \quad \hat{u}(\alpha,y) = A_2^-(\alpha) \exp(-i\beta_2 y) + A_2^+(\alpha) \exp(i\beta_2 y) \quad \text{si } y < 0 .$$

Il s'agit là d'un résultat tout à fait général dans la mesure où  $u$  est tempérée en  $x$ . On n'oubliera pas que  $A_1^-$ ,  $A_1^+$ ,  $A_2^-$ ,  $A_2^+$  ne sont pas nécessairement des fonctions, mais peuvent être des distributions. On notera aussi que  $\beta_j$  doit être défini avec précision, notamment si  $\beta_j^2$  est complexe (voir §4.6). Dans le cas de deux milieux non absorbants ( $k_1$  et  $k_2$  réels), nous adopterons la définition usuelle suivante :

$$(6) \quad \beta_j = \begin{cases} \sqrt{k_j^2 - \alpha^2} & \text{si } |\alpha| < k_j , \\ i\sqrt{\alpha^2 - k_j^2} & \text{si } |\alpha| > k_j , \end{cases}$$

définition qui entraîne  $\beta_j$  ou  $\beta_j/i$  positif.

N.B. : On admet que  $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}$  est la T.F. par rapport à  $x$  de  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Cette règle, qui peut être fautive pour certaines fonctions, est toutefois vraie si  $u$  est tempérée par rapport à l'ensemble des deux variables  $x$  et  $y$ .

**2.4. Expression des relations de passage à l'aide de la T.F.** Admettant que

$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(\alpha, y)$  est la transformée de Fourier en  $x$  de  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$  et que, de plus, la continuité en  $y$  d'une fonction  $f(x, y)$  entraîne celle de sa T.F.  $\hat{f}(\alpha, y)$ , on peut, dans le cas  $\vec{E} //$ , résumer le paragraphe 2.2 par les deux égalités suivantes qui découlent immédiatement de (5) et (5') :

$$(7) \quad A_1^- + A_1^+ = A_2^- + A_2^+, \quad (8) \quad -\beta_1 A_1^- + \beta_1 A_1^+ = -\beta_2 A_2^- + \beta_2 A_2^+.$$

Dans le cas  $\vec{H} //$ , la relation (7) est inchangée, mais (8) doit être remplacée par :

$$(8') \quad -\frac{\beta_1}{\epsilon_1} A_1^- + \frac{\beta_1}{\epsilon_1} A_1^+ = -\frac{\beta_2}{\epsilon_2} A_2^- + \frac{\beta_2}{\epsilon_2} A_2^+,$$

qui s'écrit encore en introduisant les indices  $n_1$  et  $n_2$  des deux milieux :

$$(8'') \quad -\frac{\beta_1}{n_1^2} A_1^- + \frac{\beta_1}{n_1^2} A_1^+ = -\frac{\beta_2}{n_2^2} A_2^- + \frac{\beta_2}{n_2^2} A_2^+.$$

**3. REFLEXION ET REFRACTION D'UN FAISCEAU.**

Pour illustrer les considérations précédentes, intéressons-nous d'abord au cas particulier où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  (donc  $k_1$  et  $k_2$ ) sont réels, en supposant de plus  $A_2^\pm = 0$ . Au moins si  $A_1^+$  et  $A_1^-$  sont des fonctions, cette dernière hypo-

thèse permet de calculer les rapports  $r(\alpha) = \frac{\text{def } A_1^+(\alpha)}{A_1^-(\alpha)}$  et  $t = \frac{\text{def } A_2^-(\alpha)}{A_1^-(\alpha)}$ .

Utilisant (7), (8) et (8''), on obtient aisément pour le cas  $\vec{E} //$  :

$$(9) \quad r = \frac{A_1^+}{A_1^-} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}, \quad t = \frac{A_2^-}{A_1^-} = \frac{2\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}.$$

Il n'est pas nécessaire de reprendre les calculs pour  $\vec{H} //$ . Il suffit d'observer que l'on passe du couple d'équations (7,8) au couple (7,8'') en remplaçant respectivement  $\beta_1$  et  $\beta_2$  par  $\beta_1/n_1^2$  et  $\beta_2/n_2^2$ . On obtient donc les nouvelles valeurs de  $r$  et  $t$  en faisant la même substitution dans (9). On trouve ainsi :

$$(9') \quad r = \frac{\frac{\beta_1}{n_1^2} - \frac{\beta_2}{n_2^2}}{\frac{\beta_1}{n_1^2} + \frac{\beta_2}{n_2^2}}, \quad t = \frac{2 \frac{\beta_1}{n_1^2}}{\frac{\beta_1}{n_1^2} + \frac{\beta_2}{n_2^2}}.$$

Introduisant  $r$  et  $t$  dans (5) et (5'), on obtient la forme générale de  $\hat{u}$  :

$$(10) \quad \hat{u}(\alpha, y) = A_1^-(\alpha) \exp(-i\beta_1(\alpha)y) + r(\alpha) A_1^-(\alpha) \exp(i\beta_1(\alpha)y) \quad \text{pour } y > 0,$$

$$(10') \quad = t(\alpha) A_1^-(\alpha) \exp(-i\beta_2(\alpha)y) \quad \text{pour } y < 0.$$

Il ne reste qu'à inverser la transformation de Fourier pour trouver la forme générale de  $u(x, y)$ . Pour cela, supposons d'abord que  $A_1^-(\alpha)$  soit une fonction dont le support  $A$  est contenu dans l'intervalle  $[-k_1, k_1]$ . Alors, au moins formellement, et d'après (3) :

$$(11) \quad u(x, y) = \int_A A_1^-(\alpha) \exp(i\alpha x - i\beta_1(\alpha)y) d\alpha + \int_A r(\alpha) A_1^-(\alpha) \exp(i\alpha x + i\beta_1(\alpha)y) d\alpha$$

pour  $y > 0$ ,

$$(11') \quad = \int_A t(\alpha) A_1^-(\alpha) \exp(i\alpha x - i\beta_2(\alpha)y) d\alpha \quad \text{pour } y < 0.$$

Chacune des trois intégrales figurant dans (11) et (11') représente un paquet d'ondes planes (VII, §4). Nous les désignerons désormais par  $u^1(x, y)$ ,  $u^r(x, y)$ ,  $u^t(x, y)$  :

$$(12) \quad u^1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A A_1^-(\alpha) \exp(i\alpha x - i\beta_1(\alpha)y) d\alpha,$$

$$(12') \quad u^r(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A r(\alpha) A_1^-(\alpha) \exp(i\alpha x + i\beta_1(\alpha)y) d\alpha,$$

$$(13) \quad u^t(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A t(\alpha) A_1^-(\alpha) \exp(i\alpha x - i\beta_2(\alpha)y) d\alpha.$$

Puisque  $-k_1 < \alpha < k_1$ , on peut poser :

$$(14) \quad \alpha = k_1 \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

On a donc :

$$(15) \quad \beta_1 = \sqrt{k_1^2 - k_1^2 \sin^2 \theta} = k_1 \cos \theta .$$

Il en résulte que chacune des ondes planes constituant  $u^i(x,y)$  a un vecteur d'onde ayant une composante négative ( $-k_1 \cos \theta$ ) sur  $Oy$ . On dit qu'il s'agit d'une onde entrante (incoming wave) et on interprète  $u^i(x,y)$  comme un faisceau incident. Au contraire, toutes les ondes constituant le paquet  $u^r(x,y)$  se propagent dans le sens de  $Oy$  ( $k_1 \cos \theta > 0$ ). On dit qu'il s'agit d'ondes sortantes (outgoing waves) et  $u^r(x,y)$  est interprété comme un faisceau réfléchi. Enfin le paquet  $u^t(x,y)$ , dit aussi faisceau transmis, est formé d'ondes qui, suivant le signe de  $\beta_2^2$ , se propagent vers les  $y$  négatifs ou sont exponentiellement amorties quand  $y \rightarrow -\infty$ . On dit que le champ  $u$ , qui s'identifie au champ transmis  $u^t$  pour  $y < 0$ , vérifie une condition d'ondes sortantes ; il ne contient pas d'ondes entrantes en raison de notre hypothèse simplificatrice  $A_2^+ = 0$ . On remarquera que les adjectifs "sortantes" et "entrantes", qui font partie du langage de l'Ingénieur, sont définis par rapport à la surface de séparation. Est dit "entrant" ce qui se dirige vers le plan  $y = 0$  et "sortant" ce qui s'en éloigne. Nous reviendrons sur ces questions de vocabulaire qui sont souvent source d'incompréhension entre Physiciens et Mathématiciens. Pour l'instant, continuant nos calculs formels, introduisons un angle  $\theta_0$  fixé, posons  $\alpha_0 = k_1 \sin \theta_0$ , et remplaçons  $A_1^-(\alpha)$  par la "fonction de Dirac"  $\delta(\alpha - \alpha_0)$  avec  $\alpha_0 = k_1 \sin \theta_0$ . Alors, utilisant les propriétés de  $\delta(\alpha - \alpha_0)$  pour effectuer les intégrales (12,12',13):

$$(16) \quad u^i(x,y) = \exp(i\alpha_0 x - i\beta_1(\alpha_0)y) ,$$

$$(16') \quad u^r(x,y) = r(\alpha_0) \exp(i\alpha_0 x + i\beta_1(\alpha_0)y) ,$$

$$(16'') \quad u^t(x,y) = t(\alpha_0) \exp(i\alpha_0 x - i\beta_2(\alpha_0)y) .$$

Chacun des faisceaux incident, réfléchi et diffracté se réduit à une onde plane et nous retrouvons une situation étudiée en premier cycle. Il est donc possible de satisfaire les équations de Maxwell harmoniques en superposant dans le milieu 1 une onde plane incidente et une onde plane réfléchie ; le champ dans le milieu 2 se réduit alors à une onde transmise.

On considère souvent que l'onde réfléchie et l'onde transmise sont la "réponse du dioptré" à l'onde incidente. Cette façon de parler facilite en effet l'interprétation des formules (11) et (11'). Le faisceau incident est considéré comme une combinaison linéaire d'ondes planes et on dit que l'on

obtient le faisceau réfléchi (resp. transmis) en faisant la même combinaison linéaire sur la réponse en réflexion (resp. en transmission).

Remarque 1 : Les expressions (16), (16') et (16'') peuvent s'obtenir rigoureusement sans utiliser les recettes de calcul sur la "fonction de Dirac". Posant  $A_1^- = \delta(\alpha - \alpha_0)$ , on a, par exemple :

$$u^i(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{u^i}(\alpha, y) = \delta(\alpha - \alpha_0) \exp(-i\beta_1(\alpha)y) , \\ = \delta(\alpha - \alpha_0) \exp(-i\beta_1(\alpha_0)y) .$$

Pour trouver l'expression de  $u^i(x, y)$  à partir de  $\widehat{u^i}(\alpha, y)$  il suffit de savoir [7] que le remplacement de  $\alpha$  par  $\alpha - \alpha_0$  dans la T.F. revient à multiplier la fonction par  $\exp(i\alpha_0 x)$  :

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\alpha) ,$$

$$\exp(-i\beta_1(\alpha_0)y) \longrightarrow \delta(\alpha) \exp(-i\beta_1(\alpha_0)y) ,$$

$$\exp(i\alpha_0 x) \exp(-i\beta_1(\alpha_0)y) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\alpha - \alpha_0) \exp(-i\beta_1(\alpha_0)y) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque 2 : Dans ce paragraphe, le mot "faisceau" a été utilisé de façon légèrement abusive. On aurait peut-être mieux fait de parler de "nappe" (sheet) pour rappeler qu'il s'agit d'un paquet d'ondes formé d'ondes planes se propageant toutes parallèlement au plan  $xOy$ . Le faisceau le plus général serait une superposition d'ondes planes autorisées à se propager dans n'importe quelle direction. Alors, le vecteur d'onde de chacune d'entre elles dépendrait de deux paramètres angulaires. Il faudrait envisager une transformation de Fourier dans  $\mathbb{R}^2$  (par rapport à  $x$  et  $z$ ) et le problème ne pourrait plus être réduit à un problème scalaire par la considération de deux cas simples de polarisation.

#### 4. REFLEXION ET REFRACTION D'UNE ONDE PLANE. FORMULES DE FRESNEL.

4.1. Notations et rappels. En nous limitant toujours au cas de deux milieux diélectriques sans pertes, examinons plus en détail le champ décrit par les formules (16, (16') et (16'')), champ qui, dans le langage du Physicien, résulte de la réflexion et de la réfraction d'une onde plane incidente. Il est commode de faire un léger changement de notations pour avoir des formu-

les plus symétriques. Pour rappeler que l'onde incidente  $u^i(x,y)$  se propage dans le milieu 1, nous désignerons par  $\theta_1$  (au lieu de  $\theta_0$ ) son angle d'incidence, posant du même coup :

$$(17) \quad \alpha_1 = k_1 \sin \theta_1 ,$$

$$(17') \quad \beta_1 = k_1 \cos \theta_1 .$$

Les formules (16), (16') et (16'') seront donc remplacées par :

$$(18) \quad u^i(x,y) = \exp(i\alpha_1 x - i\beta_1 y) ,$$

$$(18') \quad u^r(x,y) = r(\alpha_1) \exp(i\alpha_1 x + i\beta_1 y) ,$$

$$(18'') \quad u^t(x,y) = t(\alpha_1) \exp(i\alpha_1 x - i\beta_2 y) .$$

La notation  $u^t$  sera conservée pour désigner l'onde transmise souvent appelée aussi onde réfractée (c'est une notation commode pour distinguer "réfléchi" et "réfracté" qui commencent par la même lettre). Les coefficients  $r$  et  $t$ , dits coefficients de réflexion et de transmission seront toujours donnés par (9) et (9') que l'on appelle les formules de Fresnel. En raison de leur importance, il faut essayer de retenir ces formules résumées dans le tableau n°4. Puisque  $k_j = k_0 n_j$  ( $\nabla$ , 15), on remarquera qu'après division du numérateur et du dénominateur par  $k_0$ , chacun des coefficients  $r$  et  $t$  dépend seulement des indices et de l'incidence. Par exemple, en  $\vec{E} //$  :

$$r = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{n_1 \cos \theta_1 + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} .$$

	Coefficient de reflexion r	Coefficient de transmission t
$\vec{E} //$	$\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}$	$\frac{2 \beta_1}{\beta_1 + \beta_2}$
$\vec{H} //$	Si $n_1$ et $n_2$ sont les indices des deux milieux, remplacer respectivement $\beta_1$ et $\beta_2$ par $\beta_1/n_1^2$ et $\beta_2/n_2^2$	

Tableau n° 4. Les formules de Fresnel. L'onde incidente se propage dans le milieu 1 sous l'incidence  $\theta_1$ . On a posé

$$\alpha_1 = k_1 \sin \theta_1, \quad \beta_1 = \sqrt{k_1^2 - \alpha_1^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{k_2^2 - \alpha_1^2} .$$

*Réflexion et réfraction d'une onde plane*

Quand on en a besoin, on peut, sans reprendre toutes les considérations théoriques précédentes, retrouver rapidement les formules de Fresnel en opérant comme suit :

a) Ecrire l'expression de l'onde plane incidente dont le vecteur d'onde a pour composantes  $(k_1 \sin \theta_1, -k_1 \cos \theta_1, 0)$ , c'est-à-dire  $(\alpha_1, -\beta_1, 0)$ . On trouve :

$$(19) \quad u^i(x, y) = \exp(i\alpha_1 x - i\beta_1 y) .$$

b) Remarquer que  $u^i$  est le produit de  $\exp(i\alpha_1 x)$  par une fonction de  $y$  et se souvenir que  $u^r$ ,  $u^t$  et  $u$  ont la même propriété (18-18"). On peut d'ailleurs établir cette propriété en admettant que le problème de la recherche de la réponse à une onde incidente a une solution unique (§6.1).

c) Poser  $u(x, y) = \exp(i\alpha_1 x) U(y)$ . Ecrire l'équation de Helmholtz dans chacun des deux milieux. En déduire les équations différentielles :

$$(20) \quad \frac{d^2 U}{dy^2} + (k_1^2 - \alpha_1^2) U = 0 \quad \text{pour } y > 0 ,$$

$$(20') \quad \frac{d^2 U}{dy^2} + (k_2^2 - \alpha_1^2) U = 0 \quad \text{pour } y < 0 .$$

d) Intégrer ces équations en tenant compte d'une condition d'onde sortante pour  $y \rightarrow -\infty$  ; on obtient ainsi la forme de  $U$  :

$$(21) \quad U(y) = \exp(-i\beta_1 y) + r \exp(i\beta_1 y) \quad \text{pour } y > 0 ,$$

$$(21') \quad U(y) = t \exp(-i\beta_2 y) \quad \text{pour } y < 0 .$$

e) Exprimer les relations de passage (à connaître par coeur) en  $y = 0$  :

$$(22) \quad \text{Conservation de } U \text{ et } \frac{dU}{dy} \text{ en } \vec{E} // ,$$

$$(22') \quad \text{Conservation de } U \text{ et } \frac{1}{n^2} \frac{dU}{dy} \text{ en } \vec{H} // .$$

N.B.: Il faut être capable de retrouver ainsi très rapidement l'expression des coefficients de Fresnel  $r(\alpha_1)$  et  $t(\alpha_1)$ .

4.2. Discussion géométrique. L'habitude, en Optique, est de considérer que  $\theta_1$  est positif dans le cas de la figure 17. Il est alors compris entre 0 et  $\pi/2$ , et  $|\alpha_1| < k_1$ .

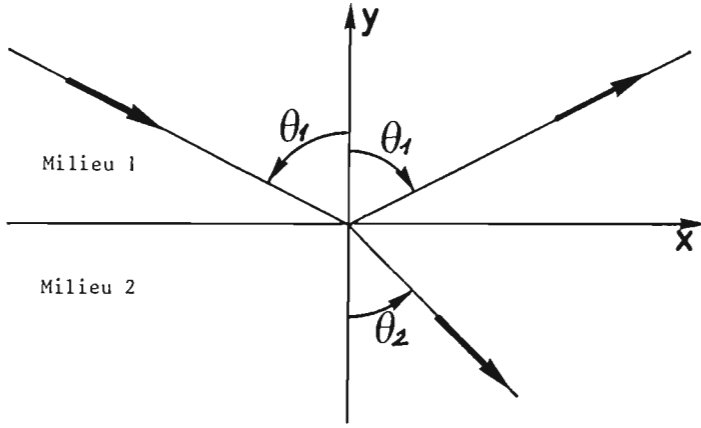


Figure 17. On a représenté les vecteurs d'onde incident, réfléchi et réfracté.

D'après (18'), les composantes du vecteur d'onde de l'onde réfléchie sont  $k_1 \sin \theta$  et  $k_1 \cos \theta$ . C'est dire que les vecteurs d'onde incident et réfléchi sont symétriques par rapport à Ox. Ceci constitue la première loi de Descartes (Snell law dans les ouvrages anglo-saxons).

L'étude de l'onde <sup>réfractée</sup> ~~réfléchi~~ mérite un peu plus d'attention car  $\beta_2$  (défini par  $\beta_2^2 = k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1$ ) peut être réel ou imaginaire pur. Ceci conduit à envisager deux cas :

a) Si  $n_1 < n_2$ , donc  $k_1 < k_2$ ,  $|\alpha_1|$  qui est inférieur à  $k_1$  est aussi inférieur à  $k_2$  et on peut poser :

$$(23) \quad \alpha_1 = k_2 \sin \theta_2, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}.$$

Alors :

$$(24) \quad \beta_2 = \sqrt{k_2^2 - \alpha_1^2} = k_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = k_2 \cos \theta_2,$$

et d'après (18'') :

$$(25) \quad u^t(x,y) = t \exp(ik_2(x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2)).$$



On reconnaît l'expression d'une onde plane se propageant dans le milieu 2 et dont le vecteur d'onde fait avec Oy l'angle  $\theta_2$  (Fig.17). La comparaison de (17) et (23) fournit immédiatement la deuxième loi de Descartes :

$$(26) \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2} .$$

b) Si  $n_1 > n_2$  , le raisonnement précédent n'est valable que pour  $|\alpha_1| < k_2$  ou encore  $|\sin \theta_1| < k_2/k_1$ . Dans le cas contraire, posant :

$$(27) \quad \beta_2 = i\tilde{\beta}_2 , \quad \tilde{\beta}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta_1 - k_2^2} ,$$

l'expression de  $u^t$  devient :

$$(28) \quad u^t(x,y) = t \exp(-\tilde{\beta}_2 y) \exp(ik_1 x \sin \theta_1) .$$

Il ne s'agit plus d'une "vraie" onde plane, mais d'une onde dissociée (II, §5.21) pour laquelle les surfaces équiampitudes (plans perpendiculaires à Oy) sont différentes des surfaces équiphases (plans perpendiculaires à Ox). On parle souvent d'onde évanescente et on peut considérer qu'une onde évanescente est une onde plane (en phase) se propageant le long de Ox et dont l'amplitude décroît exponentiellement en y. On notera que cette décroissance est très rapide. Prenant par exemple  $n_2 = 1$  et  $n_1^2 \sin^2 \theta_1 = 2$ , on trouve  $\tilde{\beta}_2 = k_0 = 2\pi/\lambda_0$  ; c'est dire que l'amplitude est divisée par plus de 500 quand  $|y|$  augmente d'une longueur d'onde. C'est pourquoi les ondes évanescentes ont été longtemps ignorées en Optique où les longueurs d'ondes sont de l'ordre du micron. Leur existence a été prouvée expérimentalement vers 1920 en utilisant des ondes hertziennes et un dioptre paraffine-air. Elles jouent aujourd'hui un rôle important en "Optique planaire" où les champs électromagnétiques se propagent dans des couches minces dont l'épaisseur est couramment de l'ordre du dixième de micron.

4.3. Module et argument des coefficients de Fresnel. On trouve en général de longs développements sur cette question dans les traités d'Optique [14, 15]. Il faut au moins retenir les généralités suivantes relatives au coefficient de réflexion  $r$ .

a) Si  $n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 > 0$  ,  $\beta_2$  est réel et  $r$  l'est aussi quel que soit le cas de polarisation étudié. On notera que cette inégalité est toujours

vérifiée si  $n_2 > n_1$ . Le signe de  $r$  ne peut être précisé sans information complémentaire sur l'incidence et la polarisation.

b) Si  $n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1 < 0$ , ce qui impose  $n_2 < n_1$  et  $\sin \theta_1 > n_2/n_1$ ,  $\beta_2$  est imaginaire pur et  $r = (\beta_1 - i\tilde{\beta}_2)/(\beta_1 + i\tilde{\beta}_2)$ , qui est le quotient de deux imaginaires conjugués, est de module unité (Fig.18). On peut donc poser  $r = \exp(-2i\varphi)$  avec  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ . Rappelons que, dans cette circonstance, l'onde transmise est évanescente et, puisque l'onde réfléchie a alors une amplitude égale en module à celle de l'onde incidente, on dit qu'il y a réflexion totale. Ainsi, si  $n_2$  est inférieur à  $n_1$  et si l'angle d'incidence  $\theta_1$  est supérieur à un certain angle  $\theta_\ell$ , la réflexion se traduit par un simple déphasage. L'angle  $\theta_\ell$ , qui est un angle d'incidence, est pourtant souvent appelé angle de "réfraction limite". Il est donné par la formule :

$$(29) \quad \theta_\ell = \text{Arcsin}(n_2/n_1) .$$

On a parfois besoin de calculer  $\varphi$ ,  $\frac{d\varphi}{d\alpha_1}$  ou  $\frac{d\varphi}{d\theta_1}$  pour des valeurs de  $\theta_1$  supérieures à  $\theta_\ell$ . Ce calcul n'étant pas très simple, voici quelques indications relatives au cas  $\vec{E}$ // (faire le cas H// en exercice). Partant de :

$$\exp(-2i\varphi) = \frac{\beta_1 - i\tilde{\beta}_2}{\beta_1 + i\tilde{\beta}_2} ,$$

on voit que :

$$(30) \quad \varphi = \text{Arctg} \left( \frac{\tilde{\beta}_2}{\beta_1} \right) = \text{Arctg} \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2}}{\cos \theta_1} \right) .$$

Or, compte tenu de  $\beta_1 = \sqrt{k_1^2 - \alpha_1^2}$  et  $\tilde{\beta}_2 = \sqrt{\alpha_1^2 - k_2^2}$  :

$$\frac{d\beta_1}{d\alpha_1} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} , \quad \frac{d\tilde{\beta}_2}{d\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\tilde{\beta}_2} ,$$

et finalement :

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = \frac{1}{1 + (\tilde{\beta}_2/\beta_1)^2} \times \frac{\frac{\alpha_1}{\tilde{\beta}_2} \beta_1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \tilde{\beta}_2}{\beta_1^2} = \frac{\alpha_1}{\tilde{\beta}_2 \beta_1} .$$

On obtient  $d\varphi/d\theta_1$  à partir de  $\alpha_1 = k_1 \sin \theta_1$  :

$$(31) \quad \frac{d\varphi}{d\theta_1} = \frac{d\varphi}{d\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{d\theta_1} = \frac{\alpha_1}{\tilde{\beta}_2 \beta_1} k_1 \cos \theta_1 = \frac{\alpha_1}{\tilde{\beta}_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - (n_2/n_1)^2}} .$$

On notera que  $d\varphi/d\theta_1$  est infini pour  $\theta = \theta_\ell$  et tend vers  $1/\sqrt{1 - (n_2/n_1)^2}$  quand  $\theta$  tend vers  $\pi/2$ . Ainsi l'argument  $-2\varphi$  de  $r$ , qui est nul pour  $\theta_1 < \theta_\ell$ , car  $r$  est alors réel et positif, varie rapidement au voisinage de la réflexion totale pour tendre vers  $-\pi$  quand  $\theta_1$  tend vers  $\pi/2$ .

Remarque : L'argument  $\psi$  d'un nombre complexe  $z = x + iy$  est souvent défini par  $z = |z| \exp(i\psi)$  avec  $-\pi < \psi < +\pi$ . On notera donc que d'une manière générale  $\psi$  est différent de  $\text{Arctg}(y/x)$  qui, par définition, est compris entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ .

4.4. Suppression de l'onde réfléchie : incidence Brewstérienne. Il est impossible d'annuler  $r$  dans le cas  $\vec{E} //$ . Ceci imposerait  $\beta_1 = \beta_2$ , donc  $k_1 = k_2$ , c'est-à-dire  $n_2 = n_1$  (il n'y a évidemment pas de réflexion si les deux milieux sont identiques!).

Par contre, dans le cas  $\vec{H} //$ ,  $r$  s'annule pourvu que :

$$(32) \quad \frac{\beta_1}{n_1^2} = \frac{\beta_2}{n_2^2} ,$$

ce qui entraîne :

$$(33) \quad \frac{\beta_1^2}{n_1^4} = \frac{\beta_2^2}{n_2^4} ,$$

$$\frac{k_1^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}{n_1^4} = \frac{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}{n_2^4} ,$$

ou encore, puisque  $\frac{k_1^2}{n_1^2} = \frac{k_2^2}{n_2^2} = k_0^2$  :

$$\sin^2 \theta_1 [n_1^4 - n_2^4] = n_2^2 [n_1^2 - n_2^2] ,$$

$$(34) \quad \sin^2 \theta_1 = \frac{n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}, \quad \text{d'où : } (35) \quad \cos^2 \theta_1 = \frac{n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}.$$

On peut, sans perte de généralité, supposer  $0 \leq \theta < \pi/2$ . Alors  $\theta_1$  peut être défini par sa tangente tirée de (34) et (35) :

$$(36) \quad \text{tg } \theta_1 = \frac{n_2}{n_1}.$$

C'est la formule de Brewster. Si un dioptre est éclairé sous l'incidence brewstérienne ( $\theta_1 = \text{Arctg } \frac{n_2}{n_1}$ ) et si le champ magnétique est perpendiculaire au plan d'incidence (défini par la normale au dioptre et le vecteur d'onde incident), il n'y a pas d'onde réfléchie. (Fig.18).

N.B. : Les deux équations (32) et (33) ne sont pas équivalentes. Il est vrai que (32) implique (33), mais (33) n'implique pas (32). En toute rigueur, il faudrait vérifier que, compte tenu de la formule de Brewster, les deux membres de (32) ont bien le même signe. Ce point de rigueur, qui peut paraître ici déplacé, sera repris plus loin (§5) dans le cas d'un indice  $n_2$  complexe.

4.5. Cas de l'incidence normale. Si  $\theta_1 = 0$ , les formules de Fresnel se simplifient beaucoup puisque,  $\alpha_1$  étant nul,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont respectivement égaux à  $k_0 n_1$  et  $k_0 n_2$ . Repérant respectivement les deux cas de polarisation  $\vec{E} //$  et  $\vec{H} //$  par les indices 1 et 2, on trouve :

$$(37) \quad r_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t_1 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2},$$

$$(37') \quad r_2 = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}, \quad t_2 = \frac{2n_2}{n_1 + n_2},$$

par exemple, pour  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 1,5$  :

$$\begin{array}{ll} r_1 = -0,2 & t_1 = 0,8 \\ r_2 = 0,2 & t_2 = 1,2 \end{array}.$$

Ces résultats méritent commentaire : on peut être surpris de ne pas trouver la même chose dans les deux cas de polarisation (alors que le plan d'inci-

dence est indéterminé) et la valeur de  $t_2$  (supérieure à 1) peut sembler suspecte. L'obtention de deux valeurs différentes pour  $r$  se comprend en remontant à la définition de la fonction  $u(x,y)$  associée tantôt au champ électrique, tantôt au champ magnétique (on y réfléchira à titre d'exercice sur la structure de l'onde plane). La possibilité d'obtenir un coefficient de transmission supérieur à 1 est liée à des considérations énergétiques. Désignant par  $\vec{\Phi}^i$ ,  $\vec{\Phi}^r$ ,  $\vec{\Phi}^t$  les vecteurs de Poynting respectivement associés à l'onde incidente, à l'onde réfléchie et à l'onde transmise, on vérifiera que si  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont les impédances des milieux 1 et 2, on a :

a) dans le cas  $\vec{E} //$  où  $\vec{E} = u \vec{e}_z$  :

$$(38) \quad \vec{\Phi}^i = - \frac{\vec{e}_y}{\eta_1}, \quad \vec{\Phi}^r = \frac{r_1 \bar{r}_1 \vec{e}_y}{\eta_1}, \quad \vec{\Phi}^t = \frac{-t_1 \bar{t}_1 \vec{e}_y}{\eta_2},$$

b) dans le cas  $\vec{H} //$  où  $\vec{H} = u \vec{e}_z$  :

$$(38') \quad \vec{\Phi}^i = - \eta_1 \vec{e}_y, \quad \vec{\Phi}^r = r_2 \bar{r}_2 \eta_1 \vec{e}_y, \quad \vec{\Phi}^t = - t_2 \bar{t}_2 \eta_2 \vec{e}_y.$$

En invoquant la conservation de l'énergie, on est conduit à dire qu'à travers une portion du plan  $y = 0$  le débit d'énergie incidente est égal à la somme du débit d'énergie réfléchie et du débit d'énergie transmise. Envisageant successivement les deux cas de polarisation, on arrive ainsi aux égalités :

$$(39) \quad \frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{\eta_1} |r_1|^2 + \frac{1}{\eta_2} |t_1|^2, \quad (39') \quad \eta_1 = \eta_1 |r_2|^2 + \eta_2 |t_2|^2.$$

Il est commode de définir deux nouveaux coefficients  $R$  et  $T$ , très naturellement appelés coefficients de reflexion et de transmission en énergie :

$$(40) \quad R \stackrel{\text{def}}{=} |r|^2.$$

$$(41) \quad T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\eta_1}{\eta_2} |t|^2 = \frac{\eta_2}{\eta_1} |t|^2 & \text{en } \vec{E} // \\ \frac{\eta_2}{\eta_1} |t|^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} |t|^2 & \text{en } \vec{H} // \end{cases}$$

Alors, (39) et (39') peuvent être résumés par une seule égalité valable quelle que soit la polarisation :

$$(42) \quad R + T = 1 .$$

Cette dernière égalité implique évidemment que R et T soient inférieurs à l'unité. On vérifiera qu'il en est ainsi avec les valeurs numériques que nous avons adoptées ( $R_1 = R_2 = 0.04$  ,  $T_1 = T_2 = 0.96$ ). Il importe de bien avoir en tête ces résultats pour discuter la luminosité des instruments d'optique : la traversée d'un dioptre air-verre s'accompagne, en incidence normale, d'une perte de lumière de l'ordre de quatre pour cent. Cette perte, due à la réflexion, a une valeur indépendante du sens de la traversée puisque  $R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$  est invariant par permutation des indices.

4.6. Réflexion sur un milieu à pertes. Nous avons jusqu'ici supposé que les deux indices  $n_1$  et  $n_2$  étaient réels. Dans ce paragraphe, nous supposons  $n_2$  complexe,  $n_1$  restant réel. Autrement dit, nous étudierons la réflexion d'une onde plane sur un métal ou un diélectrique à perte. La partie réelle  $\nu_2$  et la partie imaginaire  $\kappa_2$  de  $n_2$  sont parfois respectivement appelées indice de réfraction et indice d'extinction. Tout ce qui a été dit au §4.1 reste vrai mais, puisque  $k_2 = k_0 n_2$  est maintenant complexe, il faut préciser la signification de  $\beta_2$  dont seul le carré reste clairement défini :

$$\beta_2^2 = k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1 .$$

On hésite entre deux complexes opposés. Il est clair qu'il faut retenir celui dont la partie imaginaire  $\beta_2''$  est positive. D'après (18''), l'hypothèse contraire ( $\beta_2 = \beta_2' + i\beta_2''$ ,  $\beta_2'' < 0$ ) conduirait en effet à une conclusion physiquement inacceptable : l'onde transmise ne serait pas bornée pour  $y \rightarrow -\infty$ . Compte tenu de ce choix, les formules de Fresnel s'appliquent, mais la présence de racines carrées de nombres complexes rend leur utilisation un peu fastidieuse. On est rapidement tenté de faire appel à un ordinateur. La rédaction d'un programme est d'ailleurs très simple. Quelques instructions permettent d'obtenir r et t en  $\vec{E}$ // et il suffit ensuite de remplacer respectivement  $\beta_1$  et  $\beta_2$  par  $\beta_1/n_1^2$  et  $\beta_2/n_2^2$  pour obtenir les résultats en  $\vec{H}$ // . Voici, par exemple, le listing d'un programme écrit en Fortran  $\nabla$  pour calculer, dans les deux cas de polarisation, le module et la phase de r et t. De nombreuses lignes correspondent à des entrées-sorties ; le programme proprement dit en comprend seulement 14 (6 à 15, 19 à 21, 25). Noter l'emploi de la fonction ATAN2 pour calculer l'argument (la phase) d'un nombre complexe (voir remarque du §4.3).

```

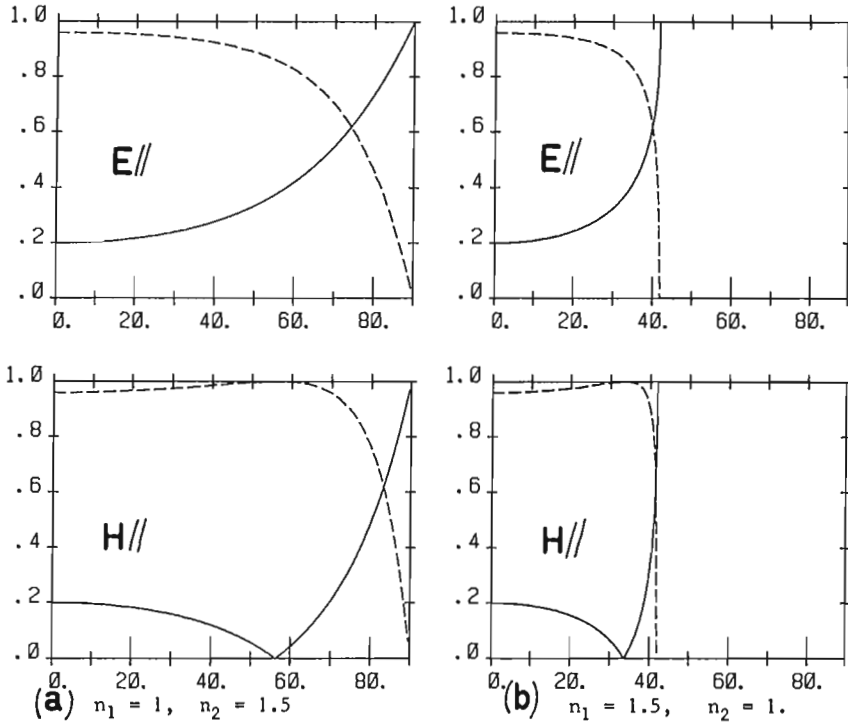
00001      program fresnel
00002      real nu1,modulr,modult
00003      complex nu2,betal,beta2,r,t,alpha
00004      read*,nu1,nu2,teta
00005      pi=3.141592654
00006      alpha=nu1*sin(teta*pi/180.)
00007      betal=csqrt(nu1**2-alpha**2)
00008      beta2=csqrt(nu2**2-alpha**2)
00009      do 1 k=1,2
00010          r=(betal-beta2)/(betal+beta2)
00011          t=2.*betal/(betal+beta2)
00012          modulr=cabs(r)
00013          phaser=atan2(aimag(r),real(r))
00014          modult=cabs(t)
00015          phaset=atan2(aimag(t),real(t))
00016          if(k.eq.1) then
00017              print 101,nu1,nu2,teta
00018              print 102
00019                  betal=beta1/nu1**2
00020                  beta2=beta2/nu2**2
00021          else
00022              print 103
00023          endif
00024          print 104,modulr,phaser,modult,phaset
00025 1      continue
00026 101     format(5x,'indice milieu superieur ',g13.6,15x,
00027          * ' indice milieu inferieur ',g13.6,' + i* ',g13.6/
00028          * 5x,'angle d incidence (degres) ',g13.6)
00029 102     format(//20x,'polarisation E// ',//)
00030 103     format(//20x,'polarisation H// ',//)
00031 104     format(5x,'coefficient de reflexion',/,5x,
00032          * 'module=',g13.6,10x,'phase (radians) =',g13.6,
00033          * //,5x,'coefficient de transmission',/,5x,
00034          * 'module=',g13.6,10x,'phase (radians) =',g13.6)
00035      end

```

L'examen de (18") montre que  $u^t$  n'est plus une "vraie onde plane", mais une onde dissociée dont les plans équiphases ( $\alpha_1 x - \beta_2 y = \text{Cte}$ ) ne sont pas perpendiculaires aux plans équiampplitudes ( $y = \text{Cte}$ ). L'angle  $\theta_2$  apparaissant dans le loi de Descartes (26) est complexe et n'a pas d'interprétation physique évidente. Aussi, introduit-on parfois l'angle  $\tilde{\theta}_2 = \text{Arctg}(\alpha_1/\beta_2')$  qui repère la direction orthogonale aux plans équiphases. On vérifiera que cette direction est celle du vecteur de Poynting associé à l'onde transmise. On est donc tenté de définir un "indice de réfraction pour l'énergie", soit  $\tilde{n}_2$ , en posant  $\tilde{n}_2 \sin \tilde{\theta}_2 = n_1 \sin \theta_1$ , mais  $\tilde{n}_2$  dépend de l'incidence! Il ne semble pas nécessaire de poursuivre dans cette voie, souvent source de confusion.

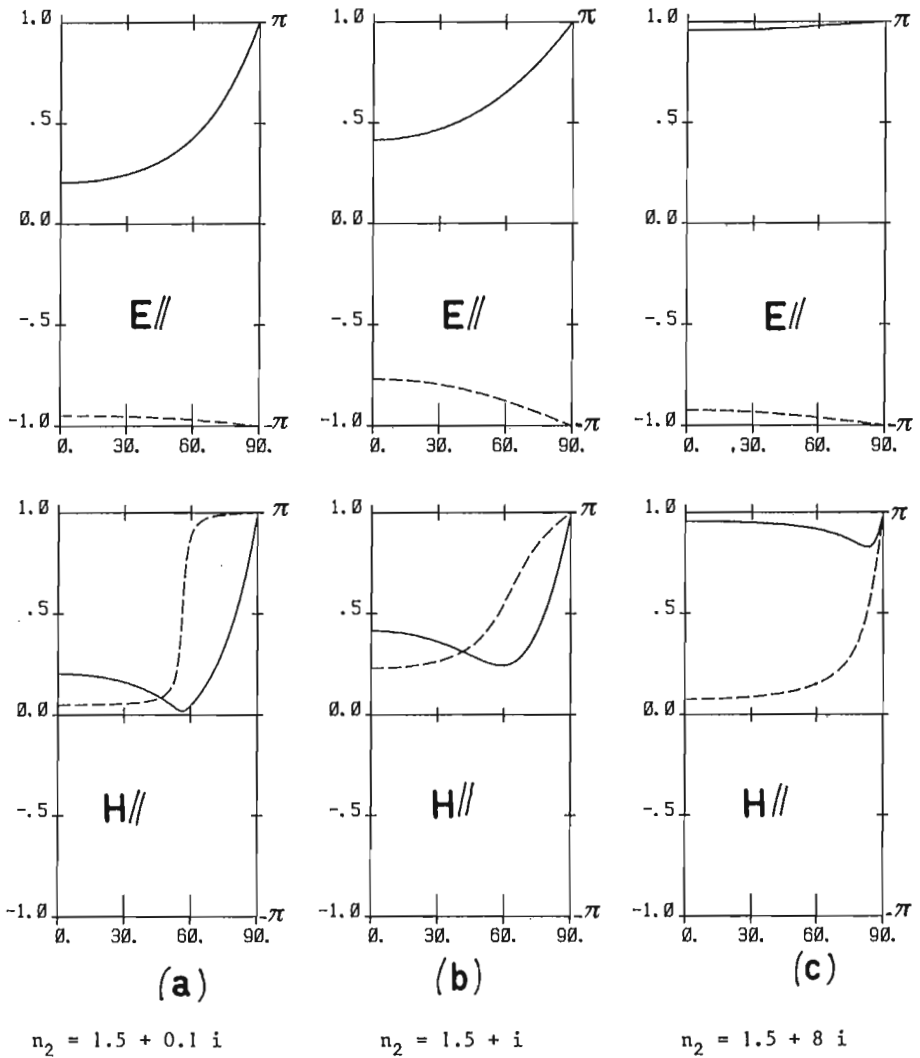
Il est par contre utile de s'appesantir sur le phénomène de Brewster. L'application brutale des formules (34), (35) ou (36) montre que l'annulation de  $r$  ne peut avoir lieu puisqu'elle nécessiterait un angle d'incidence

correspondant à des lignes trigonométriques complexes. On devine néanmoins, qu'au moins si la partie imaginaire  $\kappa_2$  de  $n_2$  reste faible, l'angle d'incidence  $\theta = \text{Arctg}(\nu_2/n_1)$  correspondra à une faible valeur de  $r$  et à une rapide variation de la phase (puisque pour  $\kappa_2 = 0$ , la phase présente un saut de  $\pi$  pour l'incidence brewstérienne). Pour vérifier cette prévision, on pourra se reporter aux figures 19 qui donnent, pour quelques valeurs de  $n_2 = \nu_2 + i\kappa_2$ , la valeur de  $|r|$  et de l'angle  $\psi$  défini par  $r = |r| \exp(i\psi)$  ( $-\pi < \psi < +\pi$ ). Ces courbes, comme celles de la figure 18 ont été obtenues à l'aide du programme précédemment décrit et tracées sur la table traçante d'un miniordinateur. On y observe l'effet du passage progressif d'un diélectrique comme le verre à un métal très conducteur. La figure 19(c) correspond à un métal dans le visible ou le proche infrarouge (pour l'aluminium,  $n_2 = 0,96 + 7,70 i$  si  $\lambda_0 = 0,9 \mu\text{m}$ ).



**Figure 18** : Réflexion sur un dioptré air-diélectrique. On a représenté  $|r|$  en trait plein et  $T$  (défini par (41)) en pointillé, en fonction de l'angle d'incidence mesuré en degrés. Les courbes de gauche (a) correspondent à  $n_1 < n_2$  ; les deux autres (b) à  $n_1 > n_2$ . Noter la réflexion totale sur les courbes (b) et le phénomène de Brewster en  $\vec{H} //$ .





**Figure 19** : réflexion d'une onde plane sur un milieu absorbant. Sur toutes les courbes l'échelle de gauche permet de connaître  $|r| = \sqrt{R}$  (courbe en trait plein) et l'échelle de droite donne la phase  $\psi$  en radians (courbe en pointillé). La polarisation et la valeur de  $n_2$  sont précisées sur chaque figure. L'indice  $n_1$  est toujours égal à l'unité.

4.7. Changement de polarisation par réflexion. Dans une onde plane ( $\mathbb{V}$ ), les champs sont liés par la relation  $\vec{\mathcal{H}} = (\vec{u} \wedge \vec{\mathcal{E}})/\eta$ . Si donc, par suite d'une réflexion, l'un des vecteurs  $\vec{\mathcal{E}}$  ou  $\vec{\mathcal{H}}$  (associé à un point du plan  $y = 0$ ) est multiplié par un complexe, il en est de même de l'autre. Après cette remarque préliminaire, considérons, en incidence oblique  $\theta_1$ , une onde plane incidente dont la direction de propagation est repérée par son vecteur unitaire  $\vec{u}$  de composantes  $u_x = \sin \theta_1$  et  $u_y = -\cos \theta_1$ . Soit  $\vec{\mathcal{E}}^i$  le champ électrique associé. Puisque  $\vec{u} \cdot \vec{\mathcal{E}}^i = 0$ , on peut, en introduisant le vecteur  $\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{e}_z \wedge \vec{u}$ , écrire  $\vec{\mathcal{E}}^i$  sous la forme :

$$(43) \quad \vec{\mathcal{E}}^i(x, y) = \mathcal{E}_z^i(x, y) \vec{e}_z + \mathcal{E}_v^i(x, y) \vec{v}.$$

Il est clair que les deux vecteurs électriques apparaissant au second membre sont respectivement associés à un champ électromagnétique de type  $\vec{E} //$  et à un champ de type  $\vec{H} //$ . C'est évident pour le premier, et la formule résumant la structure d'une onde plane ( $\vec{\mathcal{H}} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{\mathcal{E}}}{\eta_1}$ ) montre que l'excitation

magnétique liée au second est  $\frac{\mathcal{E}_v^i}{\eta_1} \vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{\mathcal{E}_v^i}{\eta_1} \vec{e}_z$ . Désignant par  $r_1$  et  $r_2$  les facteurs de réflexion respectivement associés aux cas  $\vec{E} //$  et  $\vec{H} //$ , et introduisant le vecteur  $\vec{v}'$  symétrique de  $\vec{v}$  par rapport à  $Oy$ , on vérifie que le champ électrique associé à l'onde réfléchie peut s'écrire :

$$(44) \quad \vec{\mathcal{E}}^r(x, y) = r_1 \mathcal{E}_z^i(x, -y) \vec{e}_z + r_2 \mathcal{E}_v^i(x, -y) \vec{v}'.$$

Il en résulte que, dans le cas général, l'onde incidente et l'onde réfléchie ne correspondent pas à un même état de polarisation ( $\mathbb{II}$ , §6). Ceci est particulièrement évident dans le cas de l'incidence brewsterienne où  $r_2 = 0$  : quelle que soit la polarisation de l'onde incidente, l'onde réfléchie est alors polarisée rectilignement, le champ électrique vibrant perpendiculairement au plan d'incidence.

On retiendra donc que le phénomène de réflexion (ou de réfraction) s'accompagne généralement d'une modification de la polarisation, les cas particuliers étudiés jusqu'ici ( $\vec{E} //$ ) et ( $\vec{H} //$ ) constituant des exceptions à la règle. Les conséquences et applications de ce résultat méritent d'être étudiées dans les ouvrages plus spécialisés [14, 15]. Revenant au cas général de l'incidence quelconque et d'un indice  $n_2$  éventuellement complexe, on

vérifiera néanmoins à titre d'exercice, et en utilisant les calculs développés au §6 du chapitre II, que si le champ incident est polarisé rectilignement, le champ réfléchi est, en général, polarisé elliptiquement. L'un des axes de l'ellipse associée est situé dans le plan d'incidence et les autres caractéristiques de cette conique (quand le champ incident et  $n_1$  sont donnés) dépendent de l'indice  $n_2 = \nu_2 + i\kappa_2$ . L'examen détaillé des formules obtenues montre que réciproquement, il est possible de déduire  $\nu_2$  et  $\kappa_2$  des caractéristiques de l'ellipse, supposées déterminées expérimentalement. C'est le principe de l'ellipsométrie qui permet la détermination de l'indice complexe de tout matériau susceptible d'être convenablement poli. Il est nécessaire d'opérer avec des surfaces parfaitement propres, car toute impureté, toute modification chimique superficielle, peuvent modifier de façon appréciable l'état de polarisation de l'onde réfléchie.

#### 5. ETUDE MATHÉMATIQUE DU COEFFICIENT DE RÉFLEXION D'UNE ONDE PLANE.

Après encore un léger changement de notation ( $\alpha$  désignera maintenant  $\sin \theta_1$  au lieu de  $k_1 \sin \theta_1$ ) et supposant  $n_1$  réel, le coefficient de réflexion  $r$  associé au diopre prend la forme :

$$(45) \quad r(\alpha) = \frac{p \beta_1(\alpha) - \beta_2(\alpha)}{p \beta_1(\alpha) + \beta_2(\alpha)}, \quad \text{avec}$$

$$(46) \quad \alpha = \sin \theta, \quad \beta_1 = \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{N^2 - \alpha^2},$$

$$(47) \quad N = \frac{n_2}{n_1}, \quad p = \begin{cases} 1 & \text{dans le cas } \vec{E} // \\ N^2 & \text{dans le cas } \vec{H} // \end{cases}.$$

$N$  étant éventuellement complexe, proposons nous d'étudier les pôles et les zéros de  $r(\alpha)$ , c'est-à-dire de trouver, si elles existent, les valeurs de  $\alpha$  éventuellement complexes susceptibles d'annuler  $r$  ou  $1/r$ . Il s'agit d'une étude purement mathématique qui peut surprendre le Lecteur puisque, quelle que soit l'onde incidente,  $\alpha$  est évidemment un réel de l'intervalle ouvert  $(-1, +1)$ . Il arrive cependant souvent que la compréhension des propriétés d'une grandeur physique  $G$ , dépendant d'une variable réelle  $x$ , soit facilitée par l'étude du prolongement de  $G(x)$  dans le plan complexe. Examinons par exemple le problème très classique de la recherche d'une solution sinusoïdale  $u(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  pour l'équation différentielle :

$$u'' + 2\mu u' + \omega_0^2 u = \cos \omega t$$

où  $\mu$  et  $\omega_0$  sont des réels positifs donnés. L'amplitude complexe  $\mathcal{U}$ , associée à  $u(t)$ , est une fonction de la variable réelle  $\omega$  ( $\mathcal{U}(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\mu\omega)^{-1}$ ) qui, considérée comme fonction d'une variable complexe, est une fonction méromorphe ayant deux pôles complexes. Si l'amortissement est faible ( $\mu \ll 1$ ), l'un de ces pôles ( $\omega_0 \sqrt{1 - \mu^2/\omega_0^2} - i\mu$ ) est très voisin du réel  $\omega_0$  et c'est lui qui est responsable de la grande valeur prise par  $|\mathcal{U}|$  lorsque la pulsation réelle  $\omega$  de l'excitation est voisine de  $\omega_0$ . Ainsi, le phénomène de résonance, si important en Physique des Vibrations, est étroitement lié à la présence d'un pôle complexe de  $\mathcal{U}(\omega)$  au voisinage de l'axe réel. De la même façon, il se trouve que de nombreux phénomènes aujourd'hui étudiés dans les cours avancés d'Electromagnétisme (plasmons et polaritons de surface, par exemple) sont liés à l'existence de pôles pour le coefficient de Fresnel.

Pour  $\alpha$  complexe, l'étude de  $r(\alpha)$  est compliquée par la présence de radicaux qui nécessitent, quel que soit  $N$ , la mise en place d'une coupure. On pourra éventuellement se reporter à [7] pour la définition d'une fonction racine mais il importe de ne pas oublier que le symbole  $\sqrt{w}$  (racine carrée du nombre complexe  $w = w' + iw''$ ) peut désigner l'un ou l'autre de deux nombres complexes opposés. Remarquant par exemple que dans (45) le remplacement de  $\beta_2$  par son opposé (sans toucher à  $\beta_1$ ) change  $r$  en son inverse, on comprend la nécessité de définir sans ambiguïté la fonction racine dans une étude comme celle-ci. Pour ne pas avoir à revenir sur les conventions du §2.3, nous devons faire en sorte que, pour  $w$  réel,  $\sqrt{w}$  ou  $\sqrt{w}/i$  soit positif. Un moyen simple d'y parvenir (qui n'est évidemment pas le seul) consiste à prendre comme coupure  $C_w$  le demi-axe imaginaire négatif du plan complexe  $\textcircled{w}$  (c'est-à-dire les points tels que  $w' = 0$  et  $w'' < 0$ ). On achève de déterminer  $\sqrt{w}$  en posant  $\sqrt{1} = 1$ .

Si  $w$  est de la forme  $w = a^2 - \alpha^2$ , situation à laquelle nous sommes confrontés pour définir  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ( $a$  valant respectivement 1 et  $N$ ), il est souhaitable de connaître les images  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  de la coupure initiale dans les plans complexes  $\textcircled{\alpha}$  et  $\textcircled{\beta}$  respectivement utilisées pour représenter  $\alpha$  et  $\beta = \sqrt{w}$ . On voit immédiatement que  $C_\beta$  est la seconde bissectrice : les parties réelle et imaginaire  $\beta'$  et  $\beta''$  doivent en effet vérifier :

$$(\beta' + i\beta'')^2 = \beta'^2 - \beta''^2 + 2i\beta'\beta'' = iw'', \quad w'' < 0$$

X

ce qui impose :

$$\beta' \beta'' < 0 \quad \text{et} \quad \beta' = -\beta''.$$

Quant à  $C_\alpha$ , c'est l'ensemble des points d'affixe  $\alpha' + i\alpha''$  tels que :

$$a^2 - \alpha^2 = (a' + ia'')^2 - (\alpha' + i\alpha'')^2 = iw'', \quad w'' < 0,$$

$$(48) \quad a'^2 - a''^2 - \alpha'^2 + \alpha''^2 = 0, \quad (48') \quad a'a'' - \alpha'\alpha'' < 0.$$

On reconnaît en (48) l'équation d'une hyperbole équilatère passant par les images  $A$  et  $A'$  de  $a$  et  $-a$  et ayant les bissectrices des axes comme asymptotes. D'après (48'),  $C_\alpha$  n'est qu'une partie de cette hyperbole. La figure 20 résume nos conclusions pour  $a = 1$ .

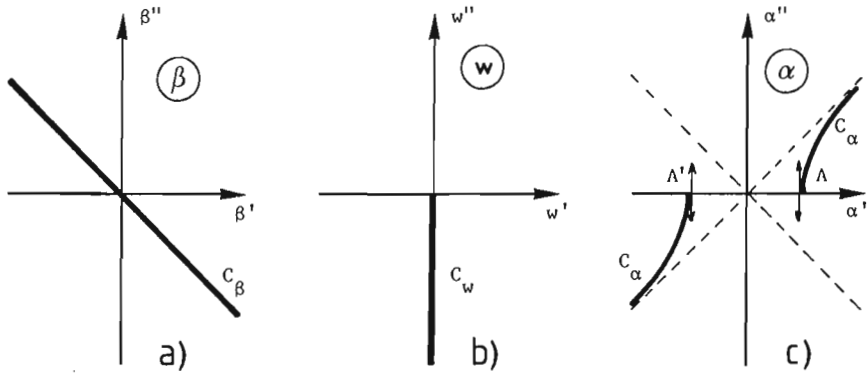


Figure 20 : La coupure et ses images dans les plans complexes  $\alpha$  et  $\beta$ . On remarquera que la tangente à l'hyperbole aux points situés sur l'axe réel ( $\alpha'' = 0$ ) est parallèle à l'axe imaginaire, car d'après (48) :  $\frac{d\alpha''}{d\alpha'} = \frac{\alpha'}{\alpha''}$ .

Revenant au vif du sujet, examinons en détail le cas  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = \nu_2 + i\kappa_2$  en supposant que nous sommes en polarisation H//. Alors :

$$(49) \quad r(\alpha) = \frac{N^2 \sqrt{1 - \alpha^2} - \sqrt{N^2 - \alpha^2}}{N^2 \sqrt{1 - \alpha^2} + \sqrt{N^2 - \alpha^2}}.$$

Pour que  $r$  s'annule, il faut que :

$$(50) \quad N^2 \sqrt{1 - \alpha^2} = \sqrt{N^2 - \alpha^2},$$

ce qui entraîne, après élévation au carré et réarrangement :

$$(51) \quad \alpha^2 = \frac{N^2}{1 + N^2} .$$

Par convention, nous nous intéresserons uniquement à :

$$(52) \quad \alpha = \frac{N}{\sqrt{1 + N^2}} ,$$

quoique la valeur opposée convienne également. Il est ici essentiel de noter que (50) implique (51) mais que réciproquement (51) implique seulement l'égalité des modules des deux membres de (50). Autrement dit, il est possible, au moins pour certaines valeurs de  $N$ , que la valeur de  $\alpha$  donnée par (51) corresponde non pas à un zéro mais à un pôle du coefficient de réflexion  $r$ . Soit  $f(N) = N^2\sqrt{1 + N^2}$  et  $g(N) = \sqrt{N^4/(1 + N^2)}$  les valeurs prises respectivement par le premier et le second membre de (50) quand on y remplace  $\alpha^2$  par la valeur donnée par (51). On a affaire à un zéro si  $f(N) = g(N)$  et à un pôle si  $f(N) = -g(N)$ . Seule la première éventualité peut être envisagée si  $N$  est réel (voir phénomène de Brewster au §4.4), mais on vérifiera par exemple que  $N = 1 + 10i$  entraîne  $f(N) = -g(N)$ . Pour cette valeur particulière de  $N$ ,  $f(N)$  et  $g(N)$  sont en effet respectivement voisins de  $N^2\sqrt{N}$  et  $\sqrt{N^2}$  ; or l'égalité de ces deux derniers nombres impliquerait  $\sqrt{1/N^2} = 1/\sqrt{N^2}$ , ce qui n'est manifestement pas possible (l'image de  $\sqrt{1/N^2}$  est dans le deuxième quadrant, tandis que celle de  $1/\sqrt{N^2}$  est dans le quatrième).

Pour éviter d'être sans cesse contraint à la comparaison fastidieuse de  $f(N)$  et  $g(N)$ , essayons de régler une bonne fois le problème en montrant qu'il est possible de conclure (pôle ou zéro) par un simple examen de la position de  $Z = N^2$  dans le plan complexe  $(Z)$ . Posant  $f(Z) = \sqrt{1/(1 + Z)}$  et  $g(Z) = \sqrt{Z^2/(1 + Z)}$ , répétons que la valeur de  $\alpha$  donnée par (51) et (52) correspond à un zéro si  $f(Z) = g(Z)$ . Cette égalité est notamment vérifiée pour  $Z = 1$ . Quand l'image de  $Z = X + iY$  se déplace continuellement dans  $(Z)$  en partant du point  $(1,0)$ , le zéro devient pôle (ou le pôle devient 0) chaque fois que l'image de  $1/(1 + Z)$ , ou celle de  $Z^2/(1 + Z)$ , rencontre le demi-axe imaginaire négatif ( $X = 0, Y = -i\gamma, \gamma > 0$ ) qui nous sert de coupure. Ceci se produit dans l'une ou l'autre des circonstances suivantes :

$$(53) \quad \frac{1}{1 + X + iY} = -i\gamma, \quad \gamma \geq 0$$

$$(54) \quad \frac{(X + iY)^2}{1 + X + iY} = -i\gamma, \quad \gamma \geq 0.$$

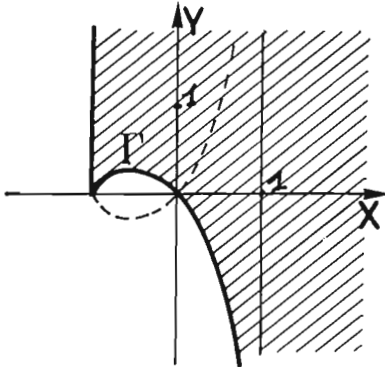
On voit immédiatement que tous les points  $Z = X + iY$ , définis par (53), sont sur la demi-droite  $X = -1$ ,  $Y > 0$ . L'étude un peu plus délicate de (54) conduit à :

$$(55) \quad X(X^2 + Y^2) = -(X^2 - Y^2), \quad (56) \quad Y(X^2 + 2X + Y^2) \leq 0.$$

En passant en coordonnées polaires ( $X = \rho \cos \theta$ ,  $Y = \rho \sin \theta$ ), on reconnaît que (55) correspond à la strophoïde [16] d'équation  $\rho = -\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ . La discussion du signe de  $Y(X^2 + 2X + Y^2)$  est évidente si l'on remarque que  $X^2 + Y^2 + 2X = 0$  est l'équation du cercle de rayon 1 passant par l'origine et le point  $(-2, 0)$ . Finalement, la réunion de la demi-droite  $X = -1$  et de la portion de strophoïde représentée sur la figure 21 est une courbe qui sépare le plan en deux régions. Celle qui contient le point  $(1, 0)$  correspond à des "zéros", l'autre à des pôles.

A titre d'exemple, étudions, pour  $\lambda_0 = 0.647 \mu\text{m}$ , le cas d'un dioptré air-aluminium; Alors,  $N = 1.3 + 7.1 i$ . En nous reportant à la figure 21, on voit que l'image de  $Z = N^2 = -48,72 + 18,46 i$  est dans la région hachurée. C'est dire que  $r$  présente un pôle pour :

$$\alpha = \frac{1.3 + 7.1 i}{\sqrt{-47.72 + 18.46 i}} = 1.0091 + 0.0035 i.$$



*Figure 21* : La partie inutile de la strophoïde a été représentée en tirets. La région hachurée correspond à des zéros.

Le lecteur intéressé par ces réflexions mathématiques (ou contraint à s'y intéresser par des travaux de recherche) pourra se reporter à [17] ou [18] pour plus d'information. La figure 22 extraite de [18] montre, dans le plan complexe  $\alpha$ , la trajectoire de  $\alpha$  (donné par (52)) quand, dans  $N(\kappa) = 1.3 + i\kappa$ ,  $\kappa$  varie de 0 (dioptre air-diélectrique) à 7,1 (dioptre air-aluminium). On passe d'un zéro à un pôle car, pour une valeur de  $\kappa$  voisine de 1.6, cette trajectoire traverse la portion d'hyperbole dont l'image par la transformation  $w^2 = 1 - \alpha^2$  est la coupure  $C_w$  (figure 20). Compte tenu de l'échelle utilisée en ordonnées, cette hyperbole se confond pratiquement avec la droite  $\alpha' = 1$ .

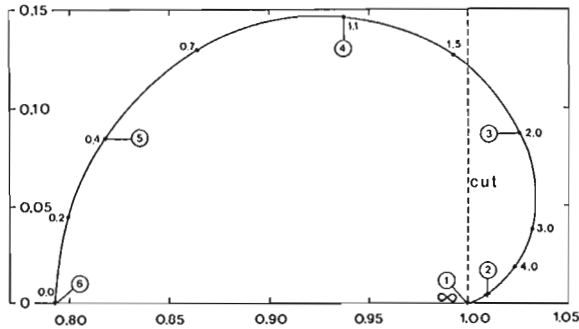


Figure 22 : Trajectoire de  $\alpha$  donné par (52) dans le plan complexe ( $\alpha$ ) pour  $N = 1.3 + i\kappa$  ( $0 < \kappa < \infty$ ). Le point 2 correspond au dioptre air-aluminium à  $\lambda_0 = 0.6470 \mu\text{m}$ . Le point 6 correspond à un dioptre air-diélectrique. La coupure (cut ou branch-cut) est représentée en trait interrompu.

6. NOTIONS SUR LES MILIEUX STRATIFIES.

6.1. Introduction. Considérons (Fig.23,a) un empilement S de lames minces, homogènes, reposant sur un substrat plan. Supposons d'abord cette structure stratifiée illuminée par une onde plane  $u^i$  se propageant dans le milieu 1 (dit parfois superstrat) sous l'incidence  $\theta_1$ . Définissant  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  comme en (17) et (17') et désignant l'amplitude par  $a_1^-$  (lire  $a_1$  moins) :

$$(57) \quad u^i(x,y) = a_1^- \exp(i\alpha_1 x - i\beta_1 y) .$$

Proposons nous de déterminer le champ total  $u(x,y)$ .



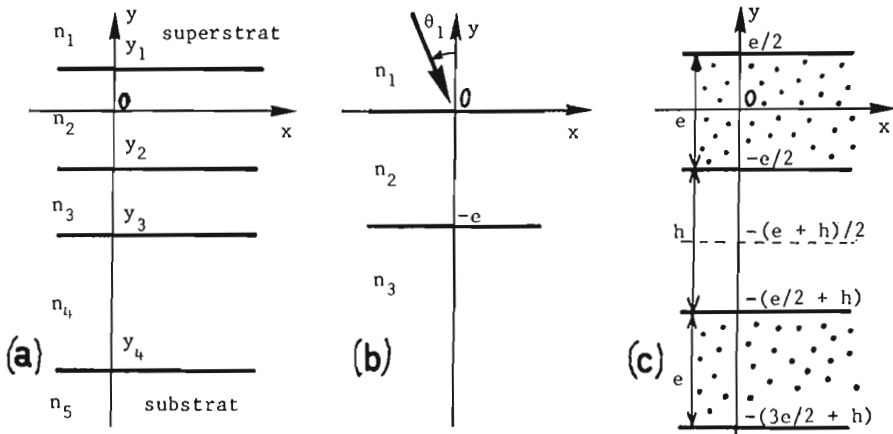


Figure 23.

a) Dans le cas de trois couches, il y a quatre dioptrés et a priori cinq milieux différents d'indice  $n_j$  ( $j=1,2,\dots,5$ )

b) Cas d'une seule lame d'épaisseur  $e$ , sur un substrat :  
 $y_1 = 0, y_2 = -e$

c) La région en pointillé correspond à un indice  $N$ , le reste à un indice  $n$ . La structure est symétrique par rapport au plan  $y = -(e+h)/2$

Remarquant tout d'abord que :

$$(58) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad u^1(x+b, y) = u^1(x, y) \exp(i\alpha_1 b),$$

montrons que  $u$  possède la même propriété, c'est-à-dire que :

$$(58') \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \quad u(x+b, y) = u(x, y) \exp(i\alpha_1 b).$$

Il suffit pour cela d'interpréter  $u(x+b, y)$  comme la réponse de  $S$  à  $u^1(x+b, y)$ . Le système étant évidemment linéaire, cette réponse se déduit de la réponse à  $u^1(x, y)$  en la multipliant par  $\exp(i\alpha_1 b)$ . On a donc :

$$u(x+b, y) = u(x, y) \exp(i\alpha_1 b) \quad (\text{C.Q.F.D.}).$$

La relation (58') écrite pour  $x = 0$  devient :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad u(b, y) = u(0, y) \exp(i\alpha_1 b)$$

soit, en changeant  $b$  en  $x$  et en posant  $u(0, y) = U(y)$  :

$$(59) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad u(x, y) = U(y) \exp(i\alpha_1 x) .$$

C'est cette relation qui fournira la clé du problème ; remarquons qu'elle est aussi vérifiée par  $u^i$  :

$$(59') \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u^i(x, y) = U^i(y) \exp(i\alpha_1 x) ; \quad U^i(y) = \exp(-i\beta_1 y) .$$

6.2. Une méthode générale d'étude. Il suffira, pour pouvoir appliquer les considérations développées dans ce paragraphe, que  $u$  vérifie (59),  $\alpha_1$  étant un paramètre fixé. Ecrivons l'équation de Helmholtz dans chacun des milieux homogènes, en posant dans la  $j^{\text{ième}}$  couche  $u(x, y) = U_j(y) \exp(i\alpha_1 x)$  :

$$(60) \quad \Delta u + k_j^2 u = 0 , \quad k_j^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_j$$

$$(61) \quad \frac{d^2 U_j}{dy^2} + \beta_j^2 U_j = 0 , \quad \beta_j^2 = k_j^2 - \alpha_1^2 .$$

Par suite,  $a_j^-$  et  $a_j^+$  désignant deux constantes complexes et  $\beta_j$  étant défini en utilisant la même fonction racine qu'au §5 :

$$(62) \quad U_j(y) = a_j^- \exp(-i\beta_j y) + a_j^+ \exp(i\beta_j y) ,$$

ce que nous pouvons encore écrire :

$$(63) \quad U_j(y) = U_j^-(y) + U_j^+(y) \quad \text{avec} \quad U_j^{\mp}(y) = a_j^{\mp} \exp(\mp i\beta_j y) .$$

La définition de  $U_j^{\mp}(y)$  montre immédiatement que, si les deux plans  $y = y_0$  et  $y = y_0 + h$  appartiennent au milieu  $j$  :

$$(64) \quad U_j^{\mp}(y_0 + h) = U_j^{\mp}(y_0) \exp(\mp i\beta_j h) .$$

Portons maintenant notre attention sur le dioptré  $y = y_j$  séparant les milieux  $j$  et  $j + 1$  et exprimons les relations de passage à l'aide des fonctions  $U_j$  et  $U_{j+1}$ . Des calculs formellement identiques à ceux du §2.4 conduisent, pour le cas  $\vec{E} //$ , à :

$$(65) \quad U_j^-(y_j) + U_j^+(y_j) = U_{j+1}^-(y_j) + U_{j+1}^+(y_j) ,$$

$$(66) \quad -\beta_j U_j^-(y_j) + \beta_j U_j^+(y_j) = -\beta_{j+1} U_{j+1}^-(y_j) + \beta_{j+1} U_{j+1}^+(y_j) .$$

Pour le cas  $\vec{H} //$ , la relation (65) est inchangée, mais il faut remplacer respectivement  $\beta_j$  et  $\beta_{j+1}$  par  $\beta_j/n_j^2$  et  $\beta_{j+1}/n_{j+1}^2$  dans (66).

Il est commode d'utiliser une notation matricielle pour écrire les égalités (64-66) sous une forme plus condensée. Soit  $\vec{U}_j$  la matrice colonne (ou vecteur) de composantes  $U_j^-$  et  $U_j^+$ . On vérifiera que :

$$(64') \quad \vec{U}_j(y_0 + h) = \mathbb{C}_{j,h} \vec{U}_j(y_0)$$

et qu'à la traversée du dioptre  $y = y_j$  :

$$(65') \quad \vec{U}_j(y_j) = \mathbb{T}_j \vec{U}_{j+1}(y_j)$$

où  $\mathbb{C}_{j,h}$  et  $\mathbb{T}_j$  sont des matrices carrées  $2 \times 2$  définies comme suit :

$$(67) \quad \mathbb{C}_{j,h} = \begin{vmatrix} \exp(-i\beta_j h) & 0 \\ 0 & \exp(i\beta_j h) \end{vmatrix}, \quad (67') \quad \mathbb{T}_j = \begin{vmatrix} s_j & d_j \\ d_j & s_j \end{vmatrix},$$

$$(68) \quad s_j = \frac{p_j \beta_j + p_{j+1} \beta_{j+1}}{2p_j \beta_j}, \quad d_j = \frac{p_j \beta_j - p_{j+1} \beta_{j+1}}{2p_j \beta_j}.$$

Le paramètre  $p_j$  rend compte de la polarisation ; par définition :

$$(68') \quad p_j = 1 \quad \text{en } \vec{E} //, \quad p_j = \frac{1}{n_j^2} \quad \text{en } \vec{H} //.$$

Ces considérations préliminaires montrent que la forme du champ dans le superstrat se déduit de la forme du champ dans le substrat par de simples produits matriciels. Avec les notations de la figure 23, a :

$$(69) \quad \begin{aligned} \vec{U}_1(y_1) &= \mathbb{T}_1 \mathbb{C}_2 \mathbb{T}_2 \mathbb{C}_3 \mathbb{T}_3 \mathbb{C}_4 \mathbb{T}_4 \vec{U}_5(y_4) \\ &= \mathbb{M} \vec{U}_5(y_4) \quad \text{avec} \quad \mathbb{M} = \mathbb{T}_1 \mathbb{C}_2 \mathbb{T}_2 \mathbb{C}_3 \mathbb{T}_3 \mathbb{C}_4 \mathbb{T}_4, \end{aligned}$$

et la matrice  $\mathbb{M}$  caractérise le système étudié. Elle est obtenue à partir des matrices de transitions  $\mathbb{T}_j$  et des matrices de couches  $\mathbb{C}_j$  si l'on convient que  $\mathbb{C}_j$  est la matrice obtenue à partir de  $\mathbb{C}_{j,h}$  (67) en y remplaçant  $h$  par l'épaisseur de couche  $e_j$ .

**6.3. Réponse à une onde plane.** Revenons au cas étudié en introduction et pour lequel  $\alpha_1 = k_1 \sin \theta_1$ . Dès que la matrice  $\mathbb{M}$  est déterminée, l'obtention du coefficient de réflexion et du coefficient de transmission est immédiate dans la mesure où ils sont clairement définis. Posant par exemple :

$$(70) \quad r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_1^+(y_1)}{U_1^-(y_1)} = \frac{a_1^+}{a_1^-} \exp(2i\beta_1 y_1), \quad t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_5^-(y_4)}{U_1^-(y_1)} = \frac{a_5^- \exp(-i\beta_5 y_4)}{a_1^- \exp(-i\beta_1 y_1)}$$

et notant que  $U_5^+(y_4) = 0$  car, par hypothèse, il n'y a pas d'onde entrante dans le milieu 5, il suffit d'exprimer l'égalité (69) en faisant intervenir les éléments  $M_{ij}$  de la matrice  $\mathbb{M}$  :

$$(71) \quad r = \frac{M_{21}}{M_{11}}, \quad (71') \quad t = \frac{1}{M_{11}}.$$

Remarques. On notera que  $r$  et  $t$  dépendent du choix des axes, contrairement à  $|r|$  et  $|t|$ . On vérifiera que dans le cas d'un seul dioptre, (71) et (71') s'identifient aux formules de Fresnel : puisque  $\mathbb{M}$  se réduit à la matrice de transition du dioptre  $y = 0$ , on a alors  $M_{11} = s$  et  $M_{21} = d$ .

A titre d'exemple, étudions maintenant le cas d'une seule lame reposant sur un substrat (Fig.23,b). On vérifiera d'abord que :

$$(72) \quad M_{11} = s_1 s_2 \exp(-i\beta_2 e) + d_1 d_2 \exp(i\beta_2 e),$$

$$(72') \quad M_{21} = d_1 s_2 \exp(-i\beta_2 e) + s_1 d_2 \exp(i\beta_2 e),$$

avec, en nous limitant au cas  $\vec{E} //$  :

$$(73) \quad s_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\beta_1}, \quad d_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2\beta_1}, \quad s_2 = \frac{\beta_2 + \beta_3}{2\beta_2}, \quad d_2 = \frac{\beta_2 - \beta_3}{2\beta_2}.$$

Alors, posant  $r = a_1^+ / a_1^-$  et  $t = a_3^- \exp(i\beta_3 e) / a_1^-$ , on obtient :

$$(74) \quad r = \frac{d_1 s_2 + s_1 d_2 \exp(2i\beta_2 e)}{s_1 s_2 + d_1 d_2 \exp(2i\beta_2 e)}, \quad (75) \quad t = \frac{\exp(i\beta_2 e)}{s_1 s_2 + d_1 d_2 \exp(2i\beta_2 e)}$$

ou, en introduisant les coefficients  $r_j = d_j / s_j$  et  $t_j = 1 / s_j$  :

$$(74') \quad r = \frac{r_1 + r_2 \exp(2i\beta_2 e)}{1 + r_1 r_2 \exp(2i\beta_2 e)}, \quad (75') \quad t = \frac{t_1 t_2 \exp(i\beta_2 e)}{1 + r_1 r_2 \exp(2i\beta_2 e)}.$$

Les conséquences de ces formules (74-75') sont développées dans les cours d'Optique [14, 15]. Les indices  $n_1$  et  $n_3$  étant donnés, ainsi que l'angle d'incidence  $\theta_1$ , on peut chercher à minimiser  $|r|^2$  en choisissant convenablement les caractéristiques de la lame ( $e$  et  $n_2$ ). C'est le principe des couches anti-reflets. Limitons nous au cas de l'incidence normale (pour ne pas avoir à distinguer les deux cas de polarisation) et employons les formules du cas  $\vec{E} //$ . Alors  $\beta_2 = k_2$  et, posant  $k_2 e = k_0 n_2 e = \varphi$  :

$$(76) \quad R = |r|^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(2\varphi)}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos 2\varphi}.$$

Pour  $n_2$  fixé et compris entre  $n_1$  et  $n_3$ ,  $R$  qui est une fonction homographe croissante de  $X = \cos 2\varphi$ , prend sa valeur minimale  $R_m = (r_1 - r_2)^2 / (1 - r_1 r_2)^2$  pour  $X = -1$ , c'est-à-dire, notamment, pour  $\varphi = \pi/2$ . On peut annuler  $R_m$  en choisissant  $n_2$  de sorte que :

$$r_1 = r_2, \quad \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}, \quad \text{soit} \quad n_2^2 = n_1 n_3.$$

En conclusion, si  $\lambda_2$  désigne la longueur d'onde dans le milieu constituant la lame, on peut, pour supprimer complètement la réflexion, prendre  $e = \lambda_2/4$  et  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ .

Remarques. Si les indices sont réels, des considérations énergétiques analogues à celles développées au §4.5 montreraient qu'en incidence normale :

$$(77) \quad |r|^2 + \frac{n_3}{n_1} |t|^2 = 1 = R + T \quad (\text{avec } R = |r|^2 \text{ et } T = \frac{n_3}{n_1} |t|^2).$$

On vérifie qu'il en est bien ainsi : exprimant le premier membre en fonction de  $\cos(2k_2 e)$ ,  $R_1 = |r_1|^2$ ,  $R_2 = |r_2|^2$ ,  $T_1 = \frac{n_2}{n_1} |t_1|^2$  et  $T_2 = \frac{n_2}{n_3} |t_2|^2$ , on obtient après simplification :

$$T_1 T_2 = 1 + R_1 R_2 - R_1 - R_2 = (1 - R_1)(1 - R_2),$$

égalité qui est vérifiée puisque  $R_1 + T_1 = R_2 + T_2 = 1$ .

On note par ailleurs que le coefficient de transmission  $T$  est inchangé par permutation de  $n_1$  et  $n_3$ , conformément à la relation de réciprocité (IV, §7.2) et ceci même si  $n_2$  est complexe.

6.4 **Exercice.** On se propose d'étudier les champs de la forme (59) dans le cas  $\vec{E} //$  et en présence de la structure décrite par la figure 23,c. On désigne respectivement par  $\beta_0 = \sqrt{k_0^2 n^2 - \alpha^2}$  et  $\beta_1 = \sqrt{k_0^2 N^2 - \alpha^2}$  les valeurs de  $\beta$  dans les diélectriques d'indice  $n$  et  $N$ , et on définit les matrices  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{D}$  par :

$$\begin{aligned} \vec{U}\left(\frac{e}{2} +\right) &= \mathfrak{A} \vec{U}(0) , & \vec{U}(0) &= \mathfrak{A}' \vec{U}\left(-\frac{e}{2} -\right) , \\ \vec{U}\left(\frac{e}{2} +\right) &= \frac{1}{4\beta_0\beta_1} \mathfrak{B} \vec{U}\left(-\frac{e}{2} -\right) , & \vec{U}\left(\frac{e}{2} +\right) &= \frac{1}{4\beta_0\beta_1} \mathfrak{D} \vec{U}\left(-\frac{e}{2} -\frac{h}{2}\right) , \end{aligned}$$

où  $\vec{U}(a+)$  et  $\vec{U}(a-)$  désignent les valeurs limites de  $\vec{U}(y)$  quand  $y$  tend vers  $a$  par valeurs supérieures ou inférieures.

Vérifier qu'en posant  $s = \beta_0 + \beta_1$  et  $d = \beta_0 - \beta_1$ , on trouve :

$$\begin{aligned} D_{11} &= (s^2 \exp(-i\beta_1 e) - d^2 \exp(i\beta_1 e)) \exp(-i\beta_0 \frac{h}{2}) , \\ D_{12} &= (-sd \exp(-i\beta_1 e) + sd \exp(i\beta_1 e)) \exp(i\beta_0 \frac{h}{2}) , \\ D_{21} &= (sd \exp(-i\beta_1 e) - sd \exp(i\beta_1 e)) \exp(-i\beta_0 \frac{h}{2}) , \\ D_{22} &= (-d^2 \exp(-i\beta_1 e) + s^2 \exp(i\beta_1 e)) \exp(i\beta_0 \frac{h}{2}) . \end{aligned}$$

N.B. : ce résultat sera utilisé dans l'étude des guides diélectriques (XI).

## Chapitre VIII

# *Le métal infiniment conducteur*

Pour étudier les phénomènes de diffraction par des obstacles métalliques, on utilise souvent, surtout en Micro-ondes, le modèle du métal infiniment conducteur. On se contente généralement de dire que ce "métal théorique" est la limite d'un métal réel quand la conductivité  $\sigma$  tend vers l'infini. Il est clair que la signification d'une telle phrase mérite d'être précisée. C'est ce que nous allons faire sur un exemple très simple et en utilisant uniquement des mathématiques accessibles à tout étudiant connaissant la théorie élémentaire des distributions [7]. On admettra que les résultats obtenus peuvent être généralisés.

En régime harmonique, on sait que pour des longueurs d'onde suffisamment grandes (à partir de l'infrarouge), un métal ohmique, de conductivité  $\sigma$ , peut être décrit par une permittivité complexe  $\epsilon(\omega)$  :

$$(1) \quad \epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega} .$$

Posant  $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , le "ka" du métal est donc défini par :

$$(2) \quad k^2 = (k' + ik'')^2 = \omega^2\mu_0\left(\epsilon_0 + \frac{i\sigma}{\omega}\right) = k_0^2\left(1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) .$$

N.B. : Le remplacement de  $\epsilon_0$  par un réel quelconque ne modifierait pas les conclusions auxquelles nous arriverons.

### 1. RETOUR SUR LE DIOPTRE EN INCIDENCE NORMALE.

Considérons le dioptre plan ( $y = 0$ ) séparant l'air ( $y > 0$ ) d'un métal ohmique ( $y < 0$ ). Chacun de ces milieux est décrit par sa permittivité, sa perméabilité et sa conductivité : soit  $\epsilon_0, \mu_0, 0$  pour l'air et  $\epsilon_0, \mu_0, \sigma$  pour le métal. En incidence normale, on peut, sans perte de généralité,

supposer que le champ électrique est de la forme  $\vec{E} = u \vec{e}_z$  avec :

$$(3) \quad u(y) = \begin{cases} \exp(-ik_0y) + r \exp(ik_0y) & \text{pour } y \geq 0 \\ t \exp(-iky) & \text{pour } y \leq 0 \end{cases}$$

où  $r$  et  $t$  sont les coefficients de Fresnel :

$$(4) \quad r = \frac{k_0 - k}{k_0 + k}, \quad (4') \quad t = \frac{2k_0}{k_0 + k} = r + 1.$$

En utilisant la fonction de Heaviside  $H$ , qu'il ne faudra pas ici confondre avec l'excitation magnétique, la loi d'Ohm s'écrit :

$$(5) \quad \vec{j}(y) = j(y) \vec{e}_z = \sigma H(-y) u(y) \vec{e}_z,$$

et l'effet Joule peut être mesuré par l'intégrale :

$$(6) \quad Q = \frac{\sigma}{2} \int_{-\infty}^0 |u|^2 dy = \frac{\sigma}{2} \int_{-\infty}^0 |t|^2 \exp(2k''y) dy = \frac{\sigma}{4k''} |t|^2.$$

Essayons maintenant de trouver les limites, quand  $\sigma \rightarrow \infty$ , des nombres  $r$ ,  $t$ ,  $Q$  et des fonctions  $u$  et  $j$ . Puisque dans ces conditions  $|k| \rightarrow \infty$ , on a immédiatement :

$$(7) \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} r = -1, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} t = 0,$$

et comme d'après (2) et (4) :

$$(8) \quad k^2 \sim \frac{ik_0^2 \sigma}{\epsilon_0 \omega}, \quad k'' \sim k' \sim k_0 \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}}, \quad |t| \sim \frac{2k_0}{|k|},$$

il est clair, d'après (6), que  $Q$  tend vers zéro.

Le champ  $u$  converge vers une fonction  $u^*$  que l'on déduit de (3) :

$$(9) \quad u^*(y) = \begin{cases} \exp(-ik_0y) - \exp(ik_0y) & \text{pour } y \geq 0 \\ 0 & \text{pour } y \leq 0 \end{cases}$$

Il s'agit même d'une convergence uniforme puisque  $|u - u^*|$  est majoré par  $|t|$  qui tend vers zéro quand  $\sigma$  tend vers l'infini.

La limite  $j^*(y)$  de  $j(\sigma, y)$  pose un problème un peu plus délicat. Pour le résoudre, introduisons la fonction :



$$(10) \quad f(y) = H(-y) \exp(-iky) = H(-y) \exp(-ik'y) \exp(k''y) .$$

Cette fonction, qui tend vers zéro pour  $y \neq 0$  et qui est majorée en module par la fonction localement sommable  $H(-y)$ , tend aussi vers zéro au sens des distributions [7]. On a donc :

$$(11) \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} (H(-y) \exp(-iky)) = 0 ,$$

d'ou, en dérivant par rapport à  $y$  au sens des distributions :

$$(12) \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} (-\delta(y) - ikH(-y) \exp(-iky)) = 0 .$$

Ceci prouve d'après (5) et (3) que lorsque  $\sigma$  tend vers l'infini :

$$(13) \quad \frac{k}{\sigma \tau} j(\sigma, y) \xrightarrow{\mathcal{D}'} i\delta(y) .$$

Mais, compte tenu de l'équivalent de  $k^2$  donné par (8) :

$$(14) \quad \frac{k}{\sigma \tau} = \frac{k(k_0 + k)}{2\sigma k_0} \rightarrow \frac{ik_0}{2\omega \epsilon_0}$$

et, considérant le premier membre de (13) comme le produit d'un nombre  $(k/(\sigma \tau))$  et d'une distribution dépendant du même paramètre  $\sigma$ , il apparaît que :

$$\frac{ik_0}{2\omega \epsilon_0} j^*(y) = i\delta(y) .$$

Ainsi, en introduisant l'impédance  $\eta_0$  du vide :

$$(15) \quad j^*(y) = \frac{2\delta(y)}{\eta_0} .$$

On peut résumer ce qui précède en disant qu'à la limite (pour  $\sigma = \infty$ ) le courant, qui se localise dans le plan  $y = 0$ , est décrit par la distribution singulière  $\vec{j}^* = \frac{2\delta(y)}{\eta_0} \vec{e}_z$ . Il est commode d'introduire le courant superficiel

$$\vec{j}_s = \frac{2}{\eta_0} \vec{e}_z .$$

En se reportant à (9), on peut calculer, pour  $y > 0$ , l'excitation magnétique  $\vec{h}^*$  associée à  $\vec{E}^* = u^* \vec{e}_z$  par la première équation de Maxwell :

$$(16) \quad \vec{H}^* = \frac{1}{i\omega \mu_0} \operatorname{rot} (u^* \vec{e}_z) = \frac{1}{i\omega \mu_0} \operatorname{grad} u \wedge \vec{e}_z ,$$

$$(16') \quad \vec{H}^*(0) = \frac{-2ik_0}{i\omega \mu_0} \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = -\frac{2}{\eta_0} \vec{e}_x .$$

On en déduit les conditions aux limites imposées, sur le plan  $y = 0$ , par le métal infiniment conducteur :

$$(17) \quad \vec{E}^*(0) = 0 , \quad (17') \quad \vec{e}_y \wedge \vec{H}^*(0) = \frac{2}{\eta_0} \vec{e}_z = \vec{j}_s .$$

Remarque. La limite  $j^*(y)$  peut aussi être obtenue de la façon suivante que certains trouveront peut-être plus élégante. Avant passage à la limite,  $u(\sigma, y)$  vérifie au sens des distributions :

$$(18) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha(y)u = 0 \quad \text{avec } \alpha(y) = \begin{cases} k_0^2 & \text{pour } y > 0 \\ k^2 = k_0^2 + i\omega \mu_0 \sigma & \text{pour } y < 0 \end{cases} .$$

Ceci peut encore s'écrire, à l'aide de la fonction  $H$  de Heaviside [7] :

$$(19) \quad u'' + k_0^2 u = (k_0^2 - k^2) H(-y) u(y) = -i\omega \mu_0 j(y)$$

et le lecteur familiarisé avec la théorie des distributions sait que cette égalité reste vraie quand on remplace  $u$  et  $j$  par leurs limites  $u^*$  et  $j^*$  :

$$(20) \quad u^{*''} + k_0^2 u^* = -i\omega \mu_0 j^* .$$

Or  $u^*$  est d'après (9) une fonction continue dont la dérivée présente un saut  $-2ik_0$  en  $y = 0$ . On a donc :

$$(21) \quad u^{*''} + k_0^2 u^* = (u^{*''}) - 2ik_0 \delta(y) + k_0^2 u^* = -2ik_0 \delta(y)$$

et en comparant avec (20), on trouve bien  $j^*(y) = \frac{2\delta(y)}{\eta_0}$  conformément à (15).

## 2. GENERALISATION ET PROPRIETES DU METAL INFINIMENT CONDUCTEUR.

Sur un exemple simple, nous avons pu établir que, lorsque la conductivité tend vers l'infini, les champs à l'intérieur du métal tendent vers zéro tandis que le courant devient superficiel. Une démonstration du même type permettrait de montrer que ces résultats restent vrais, en incidence quelconque, dans l'autre cas de polarisation ( $\vec{H} // Oz$ )... et plus généralement sans doute dans tout problème où, pour un champ incident donné, on est

capable de donner la forme explicite du champ total. Malheureusement, rares sont les problèmes où l'on sait exprimer les champs à l'aide de fonctions simples (fonctions algébriques et trigonométriques, fonctions spéciales). On doit le plus souvent se contenter d'une résolution numérique sur ordinateur. Il faut donc pouvoir prévoir les propriétés de la limite du champ électromagnétique (quand  $\sigma \rightarrow \infty$ ) en raisonnant uniquement sur les équations aux dérivées partielles vérifiées par ce champ. On y parvient grâce à des résultats relativement récents d'analyse fonctionnelle [19], mais les démonstrations sont délicates et ne peuvent être abordées dans un cours de Physique.

On retiendra que le métal infiniment conducteur est un matériau idéal ayant, en régime harmonique, les propriétés suivantes :

- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont nuls en chacun de ses points.
- Il est le siège d'un courant superficiel  $\vec{j}_s$  localisé sur sa surface  $S$ . Ce courant, qui se traduit par la présence de  $\vec{j}_s \delta_s$  dans le terme de source  $\vec{J}$  figurant dans la deuxième équation de Maxwell, n'entraîne pas de dissipation d'énergie par effet Joule. (On se reportera au chapitre III pour la définition précise de la distribution  $\vec{j}_s \delta_s$ ).

N.B. : On sait qu'en Statique, le champ électrique est nul dans un conducteur. Cette propriété reste vraie en régime harmonique pourvu que la conductivité soit infinie.

### 3. CONDITIONS AUX LIMITES IMPOSEES PAR UN METAL INFINIMENT CONDUCTEUR.

Elles sont rigoureusement établies dans un article déjà cité [19]. Pratiquement, on les obtient en partant des relations de passage (Chap. II) et en annulant les champs dans celui des deux milieux qui est infiniment conducteur. Supposant qu'il s'agisse du milieu 2, les relations :

$$\vec{n}_{21} \wedge (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0, \quad \vec{n}_{21} \wedge (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_s,$$

$$\vec{n}_{21} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0, \quad \vec{n}_{21} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$$

conduisent ainsi aux conditions aux limites :

$$(22) \quad \vec{n}_{21} \wedge \vec{E}_1 = 0, \quad (23) \quad \vec{n}_{21} \wedge \vec{H}_1 = \vec{j}_s,$$

$$(24) \quad \vec{n}_{21} \cdot \vec{B}_1 = 0, \quad (25) \quad \vec{n}_{21} \cdot \vec{D}_1 = \rho_s$$

qu'il faut évidemment savoir écrire sans hésitation.

Rappelons que (22) et (23) restent vraies si l'on remplace  $\vec{E}_1$  et  $\vec{H}_1$  par leur composante tangentielle  $(\vec{E}_1)_t$  et  $(\vec{H}_1)_t$ , puisque le produit vectoriel de  $\vec{n}_{21}$  par une composante normale est nul. On a donc :

$$(22') \quad \vec{n}_{21} \wedge (\vec{E}_1)_t = 0, \quad (23') \quad \vec{n}_{21} \wedge (\vec{H}_1)_t = \vec{j}_s.$$

L'égalité (22') exprime la nullité de la composante tangentielle du champ électrique, tandis que (23') permet de calculer le courant superficiel à partir de la composante tangentielle de l'excitation magnétique.

#### 4. REFLEXION D'UNE ONDE PLANE PAR UN MIROIR INFINIMENT CONDUCTEUR.

Avec les mêmes notations qu'au chapitre VIII, §4, supposons que la frontière air-métal soit le plan  $y = 0$  et que le milieu 2 soit infiniment conducteur. Puisque les champs sont nuls dans un tel milieu, on peut dire que le champ transmis est nul quel que soit le cas de polarisation envisagé. Ceci nous permet de déterminer le champ total  $u(x, y)$  au-dessus du miroir par la seule utilisation des conditions aux limites.

Dans le cas  $\vec{E} //$ , la composante tangentielle du champ électrique n'est autre que  $u^i(x, 0) + u^r(x, 0)$  et sa nullité entraîne immédiatement  $r = -1$ . Dans le cas  $\vec{H} //$ , l'annulation de  $\vec{e}_y \wedge \vec{E}_1$  (donc de  $\frac{\partial}{\partial y} (u^i + u^r)$ ), en  $y = 0$ , entraîne  $r = 1$ . Ainsi un métal infiniment conducteur a toujours un coefficient de réflexion en énergie égal à l'unité, mais le déphasage (en  $y = 0$ ) de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente dépend de la polarisation.

A titre d'exercice, étudions rapidement le champ total  $u(x, y)$  dans le cas  $\vec{E} //$  et en incidence normale. Au-dessus du miroir, donc pour  $y > 0$  :

$$(26) \quad u(x, y) = u^i(x, y) + u^r(x, y) = \exp(-ik_1 y) - \exp(ik_1 y) = -2i \sin(k_1 y),$$

et le champ physique  $\text{Re}(u \exp(-i\omega t)) = -2 \sin(k_1 y) \sin(\omega t)$  est le produit d'une "fonction d'espace" par une fonction sinusoïdale du temps. Tous les points vibrent en phase ou en opposition de phase. On dit que l'on a affaire à un système d'ondes stationnaires. Comme on l'a vu dans les cours antérieurs,  $u$  est constamment nul en certains points (les noeuds) ici définis par :

$$(27) \quad n\pi = k_1 y = \frac{2\pi}{\lambda_1} y, \quad n \text{ entier.}$$

On retrouve un résultat bien connu : la distance séparant deux noeuds consécutifs est égale à la demi-longueur d'onde dans le milieu, soit  $\lambda_1/2$ .

## Chapitre IX

# Guides d'ondes métalliques

### 1. INTRODUCTION

Soient (Fig.24) deux plans P et P' (d'équation  $x = e/2$  et  $x = -e/2$ ) séparant un milieu diélectrique transparent et homogène ( $\epsilon, \mu$ ) d'un métal infiniment conducteur (hachuré sur la fig.24). En régime harmonique,

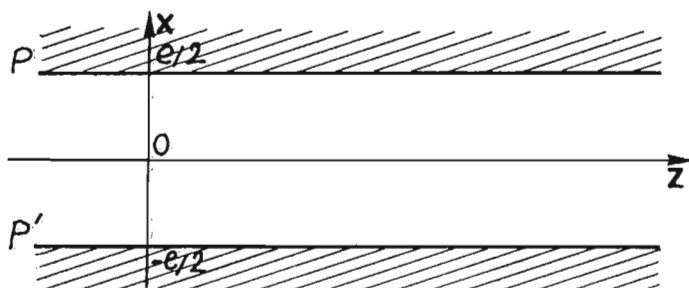


Figure 24. On a représenté la trace des plans P et P' sur le plan  $xOz$ . L'axe  $Oy$  est perpendiculaire au plan de figure et dirigé vers l'avant.

essayons de répondre à la question suivante : existe-t-il des champs électromagnétiques (on dit aussi des ondes) polarisés rectilignement parallèlement à  $Oy$  et susceptibles de se propager le long de  $Oz$  en l'absence de sources ? De tels champs doivent être des solutions des équations de Maxwell satisfaisant les conditions aux limites imposées sur P et P' par le métal infiniment conducteur. On peut songer à une onde plane de type  $\vec{E}(z) = \exp(ikz)\vec{e}_y$ , mais il est clair que cette solution est à rejeter puisque, ne s'annulant pas en  $x = \pm e/2$ , elle ne respecte pas la condition aux limites. On doit donc s'orienter vers un champ plus compliqué comme par exemple :

$$(1) \quad \vec{E}(x, z) = \mathcal{E}(x, y) \vec{e}_y = E(x) \exp(i\gamma z) \vec{e}_y ,$$

où  $E$  est une fonction a priori complexe et  $\gamma$  une constante de propagation différente de  $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ . La fonction de deux variables  $E(x) \exp(i\gamma z)$  doit, comme toute composante de champ en milieu homogène, vérifier l'équation de Helmholtz. Ceci implique que, sur l'intervalle  $[-e/2, e/2]$  la fonction  $E$  vérifie :

$$(2) \quad \frac{d^2 E}{dx^2} + (k^2 - \gamma^2)E = 0 .$$

Suivant que  $k^2 - \gamma^2$  est positif ou négatif, il est commode d'écrire la solution générale de cette équation différentielle sous forme d'une combinaison linéaire de deux fonctions trigonométriques ou de deux exponentielles de variable réelle. Mais l'éventualité de  $k^2 - \gamma^2 < 0$  est à rejeter car (comme on s'en aperçoit rapidement) elle ne permet pas de vérifier la condition aux limites :

$$(3) \quad E(e/2) = E(-e/2) = 0 .$$

Seules des valeurs de  $\gamma$  telles que  $k^2 - \gamma^2 > 0$  sont donc acceptables et pour celles-ci, posant  $k^2 - \gamma^2 = k_c^2$ ,  $E$  est nécessairement de la forme :

$$(4) \quad E(x) = A \cos(k_c x) + B \sin(k_c x) .$$

Il reste à déterminer les constantes  $A$  et  $B$  pour satisfaire les conditions aux limites (3), savoir :

$$(5) \quad A \cos(k_c \frac{e}{2}) + B \sin(k_c \frac{e}{2}) = 0 ,$$

$$(5') \quad A \cos(k_c \frac{e}{2}) - B \sin(k_c \frac{e}{2}) = 0 .$$

L'existence d'une solution (définie à une constante multiplicative près) suppose le déterminant du système nul, soit :

$$(6) \quad 2 \sin(k_c \frac{e}{2}) \cos(k_c \frac{e}{2}) = 0 .$$

Suivant que dans (6) on retient une valeur de  $k_c$  annulant le sinus ( $k_c = 2n\pi/e$ ) ou le cosinus ( $k_c = (2n+1)\pi/e$ ), la fonction  $E(x)$  est impaire ( $A = 0$ ) ou paire ( $B = 0$ ). Considérons par exemple une solution paire

( $B = 0$ ). Il apparaît que  $\mathcal{E}(x, z)$  résulte de la superposition de deux ondes planes vérifiant chacune l'équation de Helmholtz et se propageant symétriquement par rapport à Oz ; on le voit immédiatement en remplaçant  $\cos(k_c x)$  par :

$$\frac{1}{2} (\exp(i\sqrt{k^2 - \gamma^2} x) + \exp(-i\sqrt{k^2 - \gamma^2} x)) .$$

En résumé, il est possible de trouver des solutions de la forme envisagée (1). Elles correspondent à des valeurs de  $k_c^2 = k^2 - \gamma^2$  définies par (6) et dépendant donc de l'épaisseur  $e$  de la lame diélectrique. Nous dirons, utilisant le langage des laboratoires, qu'en fixant l'entier  $n$  dans (6), nous définissons un mode de propagation pour lequel  $k_c$  est fixé. L'obtention d'une valeur positive pour  $\gamma^2$  impose  $k^2 > k_c^2$ , c'est-à-dire :

$$(7) \quad \omega > \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} k_c .$$

Ainsi, pour un mode donné, la propagation impose à la fréquence  $\nu = \omega/2\pi$  d'être supérieure à une fréquence de coupure  $\nu_c = k_c/2\pi\sqrt{\epsilon\mu}$  et c'est évidemment le mot "coupure" qui a imposé l'indice  $c$  introduit de façon arbitraire jusqu'ici. Si  $k > k_c$ , la constante de propagation  $\gamma$  s'obtient par la formule :

$$(8) \quad k_c^2 = k^2 - \gamma^2 .$$

La plaque diélectrique insérée dans un métal infiniment conducteur (fig.24) constitue un exemple très simple de guide d'onde. Le champ décrit par (1) est dit onde guidée et il est conseillé d'avoir en tête les conclusions de ce paragraphe pour poursuivre avec fruit l'étude de ce chapitre. Certains termes de vocabulaire (guide, mode, fréquence de coupure, constante de propagation) doivent être, dès maintenant, assimilés.

## 2. ETUDE MATHÉMATIQUE D'UN CERTAIN TYPE D'ONDE.

Pour expliquer les propriétés des guides plus compliqués, nous serons amenés à considérer en milieu homogène ( $\epsilon, \mu$ ) des champs de la forme :

$$(9) \quad \vec{\mathcal{E}}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) \exp(i\gamma z) .$$

Il s'agit évidemment d'une généralisation de (1) : chaque composante  $\vec{E}_j$  de  $\vec{E}$  est une onde dont les équiphasés sont des plans perpendiculaires à Oz. On notera que, contrairement à la règle que nous essayons de respecter (II, §2.2), des majuscules d'imprimerie sont ici utilisées pour représenter des grandeurs qui, comme  $\vec{E}$ , sont a priori complexes. On remarquera aussi que l'onde plane décrite au chap. V est de la forme (9) ; elle correspond au cas particulier où  $\vec{E}$  est constant. En se référant à la variable z, on peut donc définir une vitesse de phase  $v_\varphi = \omega/\gamma$  et une vitesse de groupe  $d\omega/d\gamma$ . Enfin, il est facile de vérifier à partir de la première équation de Maxwell que  $\vec{H}$  est de la même forme que  $\vec{E}$ , savoir :

$$(9') \quad \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y) \exp(i\gamma z) .$$

2.1. L'équation de Helmholtz. En l'absence de sources, on sait que  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  vérifient l'équation de Helmholtz. Si  $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$  est le "ka" du milieu :

$$(10) \quad \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 , \quad (10') \quad \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 .$$

On en déduit immédiatement d'après (9) et (9') que :

$$(11) \quad \Delta \vec{E} + (k^2 - \gamma^2) \vec{E} = 0 , \quad (11') \quad \Delta \vec{H} + (k^2 - \gamma^2) \vec{H} = 0 .$$

Dans ces deux dernières équations,  $\Delta$  désigne évidemment l'opérateur Laplacien dans  $\mathbb{R}^2$  ; c'est dire qu'en "coordonnées cartésiennes rectangulaires" :

$$(12) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

2.2. Les deux premières équations de Maxwell. En l'absence de courant :

$$(13) \quad \text{rot}(\vec{E} \exp(i\gamma z)) = i\omega \mu \vec{H} \exp(i\gamma z) ,$$

$$(14) \quad \text{rot}(\vec{H} \exp(i\gamma z)) = -i\omega \epsilon \vec{E} \exp(i\gamma z) .$$

Par utilisation de la formule (16) de l'annexe 1, et notant que  $\text{grad}(\exp(i\gamma z)) = i\gamma \vec{e}_z \exp(i\gamma z)$ , on en déduit, après division des deux membres par le facteur non nul  $\exp(i\gamma z)$  :

$$(13') \quad i\gamma \vec{e}_z \wedge \vec{E} + \text{rot} \vec{E} = i\omega \mu \vec{H} , \quad (14') \quad i\gamma \vec{e}_z \wedge \vec{H} + \text{rot} \vec{H} = -i\omega \epsilon \vec{E} .$$



Décomposons maintenant chacun des deux vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  en une composante axiale parallèle à Oz ( $E_z \vec{e}_z$  ou  $H_z \vec{e}_z$ ) et en une composante dite transversale ( $\vec{E}_T$  et  $\vec{H}_T$ ) perpendiculaire à Oz, donc parallèle au plan xOy :

$$(15) \quad \vec{E} = \vec{E}_T + E_z \vec{e}_z ,$$

$$(16) \quad \vec{H} = \vec{H}_T + H_z \vec{e}_z .$$

Dire qu'un vecteur complexe  $\vec{A}$  est parallèle (resp. perpendiculaire) à un axe est évidemment un abus de langage ; il faut comprendre que sa composante réelle, ainsi que sa composante complexe, sont toutes deux parallèles (resp. perpendiculaire) à cet axe, ou encore, que si  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire de l'axe,  $\vec{u} \wedge \vec{A}$  (resp.  $\vec{u} \cdot \vec{A}$ ) = 0.

Puisque  $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = 0$ , les relations (13', 14') deviennent, compte tenu de (15, 16) :

$$(13'') \quad i\gamma \vec{e}_z \wedge \vec{E}_T + \text{rot } \vec{E}_T + \text{grad } E_z \wedge \vec{e}_z = i\omega\mu (\vec{H}_T + H_z \vec{e}_z) ,$$

$$(14'') \quad i\gamma \vec{e}_z \wedge \vec{H}_T + \text{rot } H_T + \text{grad } H_z \wedge \vec{e}_z = -i\omega\epsilon (\vec{E}_T + E_z \vec{e}_z) .$$

Après avoir vérifié que  $\text{rot } \vec{E}_T$  et  $\text{rot } \vec{H}_T$  sont portés par Oz (car  $\vec{E}_T$  et  $\vec{H}_T$  sont indépendants de z), projetons successivement chacune des équations (13'') et (14'') sur Oz, puis sur le plan xOy. On obtient :

$$(17) \quad \text{rot } \vec{E}_T = i\omega\mu H_z \vec{e}_z , \quad (18) \quad i\gamma \vec{e}_z \wedge \vec{E}_T + \text{grad } E_z \wedge \vec{e}_z = i\omega\mu \vec{H}_T ,$$

$$(17') \quad \text{rot } \vec{H}_T = -i\omega\epsilon E_z \vec{e}_z , \quad (18') \quad i\gamma \vec{e}_z \wedge \vec{H}_T + \text{grad } H_z \wedge \vec{e}_z = -i\omega\epsilon \vec{E}_T .$$

Ces quatre relations (17, 18, 17', 18') sont continuellement utilisées dans les problèmes d'ondes guidées. Aussi doit-on s'entraîner à les retrouver rapidement. On remarquera que l'on passe du couple (17, 18) au couple (17', 18') en remplaçant respectivement  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\mu$  par  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$ ,  $-\epsilon$ .

2.3. Expression des composantes transversales à partir des composantes axiales. Récrivant (18) en y remplaçant  $\vec{E}_T$  par sa valeur tirée de (18') et utilisant la règle du double produit vectoriel (A1, 4), on est conduit à :

$$-\gamma^2 (0 - \vec{H}_T) + i\gamma (\text{grad } H_z - 0) - i\omega\epsilon \text{grad } E_z \wedge \vec{e}_z = \omega^2\mu\epsilon \vec{H}_T ,$$

soit, compte tenu de  $\omega^2 \mu \epsilon = k^2$  :

$$(19) \quad \vec{H}_T (k^2 - \gamma^2) = i\gamma \text{ grad } H_z + i\omega \epsilon \vec{e}_z \wedge \text{grad } E_z .$$

On obtient de même, en éliminant  $\vec{H}_T$ , entre (18) et (18') :

$$(19') \quad \vec{E}_T (k^2 - \gamma^2) = i\gamma \text{ grad } E_z - i\omega \mu \vec{e}_z \wedge \text{grad } H_z .$$

Ainsi, pourvu que  $k^2 - \gamma^2$  ne soit pas nul, les composantes transversales  $\vec{E}_T$  et  $\vec{H}_T$  s'expriment linéairement à partir des composantes axiales  $E_z$  et  $H_z$  (19, 19').

On notera que pour une onde du type (9) la condition supplémentaire  $E_z = H_z = 0$  (qui caractérise les ondes TEM étudiées en détail plus loin) entraîne  $k^2 = \gamma^2$ , donc  $|\gamma| = k$ . Pour de telles ondes,  $|\gamma|$  est égale au "ka du milieu". Alors, d'après (11), toute composante de  $\vec{E}$ , donc en particulier  $E_z$ , vérifie l'équation de Laplace ( $\Delta E_z = 0$ ).

### 3. LE PROBLEME DES GUIDES METALLIQUES

3.1. Définitions. Rappelons tout d'abord qu'une surface cylindrique est, par définition, la surface engendrée par des droites (les génératrices) s'appuyant sur une courbe plane (la directrice) et parallèles à une direction fixe. Dans ce qui suit, la directrice sera toujours dans le plan  $xOy$  et les directrices seront supposées parallèles à  $Oz$ . Les figures 25a et 25b

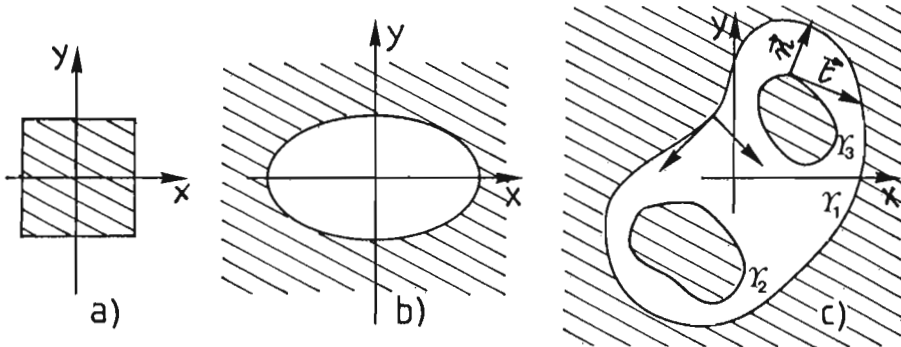


Figure 25. Le métal correspond à la partie hachurée.

représentent, en section droite, respectivement un barreau métallique cylindrique à section carrée et un tuyau cylindrique à section elliptique. La figure 25c correspond à un ensemble de conducteurs cylindriques limitant une région diélectrique ; dans un plan  $z = z_0$ , la région occupée par le diélectrique est un domaine  $\Omega$  dont la frontière  $\Gamma$  est constituée de plusieurs courbes  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ . En chaque point de  $\Gamma$  nous désignerons par  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la normale orienté vers le diélectrique et par  $\vec{t}$  le vecteur unitaire de la tangente orienté de sorte que le trièdre  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{e}_z)$  soit direct. C'est ce type de structure (Fig.25c) que nous appelons guide d'onde métallique au sens le plus général ; la fig.25b n'est bien sûr qu'un cas particulier. On se limitera au cas d'un métal infiniment conducteur et d'un diélectrique homogène sans perte ( $\epsilon, \mu$  réels).

Le problème du guide consiste à trouver des champs décrits par (9) et (9') vérifiant les équations de Maxwell dans le diélectrique et satisfaisant aux conditions aux limites imposées par le métal, savoir  $\vec{n} \wedge \vec{E} = 0$  et  $\vec{n} \cdot \vec{H} = 0$ . On peut montrer que la première entraîne la seconde et, par suite, peut seule être conservée. En effet, et puisque les champs sont nuls dans le métal,  $\vec{n} \wedge \vec{E} = 0$  sur  $\Gamma$  implique (au sens des distributions)  $\text{rot } \vec{E} = i\omega \mu \vec{H}$  qui implique à son tour  $\text{div } \vec{H} = 0$  ; ceci prouve que le saut de  $\vec{n} \cdot \vec{H}$  est nul en traversant  $\Gamma$ , donc que  $\vec{n} \cdot \vec{H}$  est nul dans le diélectrique au voisinage immédiat du métal.

3.2. Généralités. Compte tenu de leur importance, récrivons les équations (19) et (19') :

$$(19) \quad \vec{H}_T(k^2 - \gamma^2) = i\gamma \text{ grad } H_z + i\omega \epsilon \vec{e}_z \wedge \text{grad } E_z,$$

$$(19') \quad \vec{E}_T(k^2 - \gamma^2) = i\gamma \text{ grad } E_z - i\omega \mu \vec{e}_z \wedge \text{grad } H_z,$$

et la condition aux limites :

$$(20) \quad \vec{n} \wedge (\vec{E}_T + E_z \vec{e}_z) = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Les deux vecteurs  $\vec{n} \wedge \vec{E}_T$  et  $\vec{n} \wedge E_z \vec{e}_z$  étant respectivement, porté par Oz, et parallèle à xOy, sont nécessairement l'un et l'autre nuls. Ceci impose :

$$(20') \quad E_z = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$(20'') \quad \vec{n} \wedge \vec{E}_T = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Mais, comme d'après (20'),  $\Gamma$  est une courbe le long de laquelle  $\text{Re}(E_z)$  et

$\text{Im}(E_z)$  sont nuls (donc constants), il en résulte qu'en chacun de ses points  $\vec{n} \wedge \text{grad}(\text{Re}(E_z))$ ,  $\vec{n} \wedge \text{grad}(\text{Im}(E_z))$  et par suite  $\vec{n} \wedge \text{grad } E_z$  sont nuls. Explicitant (20"), compte tenu de (19') et en supposant  $k^2 - \gamma^2 \neq 0$ , on doit donc avoir sur  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} 0 &= i\gamma \vec{n} \wedge \text{grad } E_z - i\omega \mu \vec{n} \wedge (\vec{e}_z \wedge \text{grad } H_z) , \\ 0 &= 0 - i\omega \mu ((\vec{n} \cdot \text{grad } H_z) \vec{e}_z - 0) , \\ (21) \quad 0 &= \frac{dH_z}{dn} . \end{aligned}$$

Ainsi, en nous souvenant que  $E_z$  et  $H_z$  sont les composantes sur Oz des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  vérifiant les équations (11) et (11'), il apparaît que l'existence d'une solution suppose :

$$\begin{aligned} (22) \quad \Delta E_z + (k^2 - \gamma^2)E_z &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ (22') \quad E_z &= 0 \quad (\text{condition de Dirichlet}) \text{ sur } \Gamma, \\ (23) \quad \Delta H_z + (k^2 - \gamma^2)H_z &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ (23') \quad \frac{dH_z}{dn} &= 0 \quad (\text{condition de Neumann}) \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Or, (22) et (22') déterminent à elles seules un problème mathématique très classique, dit problème aux valeurs propres : posant  $k_c^2 = k^2 - \gamma^2$ , il s'agit de déterminer les valeurs de  $k_c^2$  pour lesquelles l'équation aux dérivées partielles (22) admet dans  $\Omega$  des solutions s'annulant sur  $\Gamma$ . Il en est de même pour (23) et (23') ; on a simplement remplacé l'annulation de la fonction par celle de sa dérivée normale. Il est donc souhaitable, avant de continuer l'étude des guides, d'ouvrir une parenthèse pour rappeler quelques résultats théoriques essentiels.

3.3. Valeurs propres et fonctions propres du Laplacien. En général, il n'existe pas de relation simple entre une fonction de deux variables et son Laplacien. Si par contre une fonction non identiquement nulle  $\psi(x,y)$ , s'annulant sur  $\Gamma$ , est telle que, dans  $\Omega$ ,  $\Delta \psi + a\psi = 0$  ( $a$  constante), on dit que  $\psi$  est une fonction propre du Laplacien (avec condition de Dirichlet) associée à la valeur propre  $a$ . La même phrase peut être répétée, en remplaçant "Dirichlet" par "Neumann", si c'est la dérivée normale de  $\psi$  (plutôt que  $\psi$  elle-même) qui s'annule sur  $\Gamma$ . Le domaine  $\Omega$  étant fixé, on établit que pour chacun des deux problèmes (Dirichlet et Neumann) :

a) les valeurs propres sont réelles, positives (éventuellement nulles) et forment une suite discrète ; c'est dire que si  $a_j$  est valeur propre, il

existe un intervalle contenant  $a_j$  et ne contenant aucune autre valeur propre. L'ensemble des valeurs propres est appelé spectre.

b) A chaque valeur propre correspond un ensemble de fonctions propres ayant une structure d'espace vectoriel. On démontre qu'un tel espace, dit espace propre, est de dimension finie N. Si  $N = 1$ , deux fonctions propres sont donc égales à un coefficient multiplicatif complexe près ; dans le cas contraire ( $N \neq 1$ ), on dit qu'il y a dégénérescence.

c) Enfin, aussi bien pour le problème de Neumann que pour celui de Dirichlet, deux fonctions propres associées à deux valeurs propres différentes sont orthogonales vis à vis du produit scalaire hermitien  $(u|v) = \iint_{\Omega} u \bar{v} \, dx \, dy$ .

Voici rapidement deux démonstrations dont le principe mérite d'être connu :

a) Les valeurs propres sont réelles positives :

$$\Delta\psi + a\psi = 0, \quad \bar{\psi} \Delta\psi + a\psi \bar{\psi} = 0,$$

$$\iint_{\Omega} \bar{\psi} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi) \, dx \, dy + a \iint_{\Omega} \psi \bar{\psi} \, dx \, dy = 0,$$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div}(\bar{\psi} \operatorname{grad} \psi) \, dx \, dy - \iint_{\Omega} \operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \bar{\psi} \, dx \, dy + a \iint_{\Omega} |\psi|^2 \, dx \, dy = 0.$$

La première intégrale, égale aussi à l'intégrale sur  $\Gamma$  de  $\bar{\psi} \vec{n} \cdot \operatorname{grad} \psi$ , est nulle quelle que soit la condition aux limites (Dirichlet ou Neumann). Ainsi, la valeur propre  $a$  est égale au quotient de deux quantités positives (C.Q.F.D.).

Remarquons que si  $\psi$  est fonction propre pour la valeur propre  $a$ , sa partie réelle  $\operatorname{Re}(\psi)$  l'est aussi car  $\operatorname{Re}(\Delta\psi) = \Delta(\operatorname{Re}(\psi))$  et, puisque  $a$  est réel,  $\operatorname{Re}(a\psi) = a \operatorname{Re}(\psi)$ . Ainsi, s'il n'y a pas dégénérescence (cas usuel),  $\psi$  est réelle à un facteur multiplicatif complexe constant près.

b) Relations d'orthogonalité. Soient  $\psi_1$  et  $\psi_2$  deux fonctions propres associées à deux valeurs propres  $a_1$  et  $a_2$  nécessairement réelles. On a dans  $\Omega$  :

$$\Delta\psi_1 + a_1\psi_1 = 0, \quad \Delta\psi_2 + a_2\psi_2 = 0, \quad \bar{\Delta\psi_2} + a_2\bar{\psi_2} = 0,$$

d'où :

$$\bar{\psi_2} \Delta\psi_1 - \psi_1 \bar{\Delta\psi_2} + (a_1 - a_2)\psi_1 \bar{\psi_2} = 0,$$

et par suite :

$$\iint_{\Omega} (\bar{\psi}_2 \Delta \psi_1 - \psi_1 \Delta \bar{\psi}_2) dx dy + (a_1 - a_2) \iint_{\Omega} \psi_1 \bar{\psi}_2 dx dy = 0 .$$

Utilisant la deuxième identité de Green (A1, §3), on montre que, quelle que soit la condition aux limites, la première intégrale est nulle. Alors, si  $a_1 \neq a_2$ , l'intégrale  $\iint_{\Omega} \psi_1 \bar{\psi}_2 dx dy$  est aussi nulle (C.Q.F.D.).

N.B. : Le caractère discret de la suite des valeurs propres, ainsi que le théorème sur la dimension des espaces propres, sont beaucoup plus difficiles à établir.

3.4. Retour au problème du guide. En général, pour une section droite donnée, les spectres respectivement associés à la condition de Neumann et à la condition de Dirichlet sont différents et les valeurs possibles de  $k_c^2$  se classent en deux catégories :

- Certaines (celles qui sont associées au problème de Neumann) permettent de définir un champ décrit par (9) et (9') en posant  $E_z(x,y) = 0$  et en identifiant  $H_z(x,y)$  à une fonction propre associée (définie par (23) et (23')). Un tel champ est dit appartenir à un mode H (dont le champ magnétique a une composante axiale non nulle) aussi appelé mode TE (transverse électrique).

- D'autres (celles qui sont associées au problème de Dirichlet) permettent de définir un champ décrit par (9) et (9') en posant  $H_z(x,y) = 0$  et en identifiant  $E_z(x,y)$  à une fonction propre associée (définie par (22) et (22')). Un tel champ est dit appartenir à un mode E (dont le champ magnétique a une composante axiale non nulle) aussi appelé mode TM (transverse magnétique).

Soit un champ électromagnétique (TE ou TM) décrit par (9) et (9') et tel que la constante de propagation  $\gamma$  soit liée à une valeur possible et fixée de  $k_c^2$  par la relation :

$$(24) \quad k^2 - \gamma^2 = k_c^2 .$$

Pour que ce champ corresponde à une propagation sans atténuation, il faut que  $\gamma$  soit réel ( $\gamma^2$  positif), c'est-à-dire que :

$$(25) \quad k^2 > k_c^2 , \quad k > k_c , \quad k_c > 0 .$$

Ainsi, pour un mode déterminé par une valeur de  $k_c$ , la propagation a lieu uniquement si  $\omega/c$  est supérieur à  $k_c$  ou, autrement dit, si la fréquence  $\nu$  est telle que :

$$(26) \quad \nu > \nu_c \quad \text{avec} \quad \nu_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} .$$

La fréquence  $\nu_c$  est dite fréquence de coupure (cut-off frequency). On peut énoncer le même résultat en termes de longueur d'onde : introduisant une longueur d'onde de coupure  $\lambda_c = 2\pi/k_c$ , la condition de propagation (25) devient :

$$(26') \quad \lambda < \lambda_c \quad \text{avec} \quad \lambda_c = 2\pi/k_c .$$

On notera bien que, dans (26'),  $\lambda$  ne désigne pas la longueur d'onde dans le vide, mais la longueur d'onde dans le milieu ( $\epsilon, \mu$ ).

Si  $\nu < \nu_c$  (ou  $\lambda > \lambda_c$ ),  $\gamma$  est imaginaire pur et le terme  $\exp(i\gamma z)$  traduit une décroissance exponentielle de l'amplitude des champs. On parle de mode évanescent et la décroissance est d'autant plus rapide que la valeur de  $k_c^2$  est plus élevée.

Revenant au cas de la propagation sans atténuation, (24) montre que, même si le guide est vide, la constante de propagation  $\gamma$  (que l'on peut supposer positive sans perte de généralité) dépend de  $\omega$ . Il en est de même de la vitesse de phase  $v_\phi = \omega/\gamma$  de l'onde guidée. On peut dire que le guide se comporte comme un milieu dispersif. La relation (24) est la formule de dispersion et le graphe de  $\omega(\gamma)$  pour  $\gamma > 0$  est la courbe de dispersion. Celle-ci se trace rapidement en récrivant (24) sous la forme :

$$(24') \quad \omega = \gamma c \sqrt{1 + \frac{k_c^2}{\gamma^2}}$$

ou  $c$  est la vitesse de la lumière dans le diélectrique ( $\epsilon, \mu$ ). Il s'agit d'un arc d'hyperbole (Fig.26) ayant une tangente à l'origine parallèle à l'axe des abscisses (24) et une asymptote oblique (24') d'équation  $\omega = c\gamma$ .

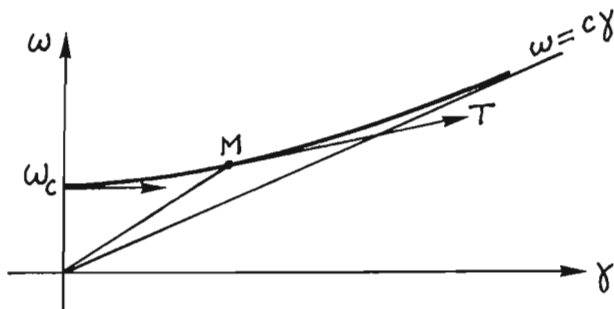


Figure 26. Courbe de dispersion

Pour un point  $(\gamma, \omega)$  donné, la vitesse de phase  $\omega/\gamma$  est la pente de OM. Elle est donc supérieure à la pente de l'asymptote, savoir la vitesse de la lumière  $c$ . Pour cette raison, on dit parfois que les ondes guidées sont des ondes rapides. On remarquera que, par contre, la vitesse de groupe  $d\omega/d\gamma$ , qui n'est autre que la pente de la tangente MT, est inférieure à  $c$ . Ces résultats se retrouvent facilement par le calcul :

$$\frac{\omega}{\gamma} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - k_c^2/k^2}} > c$$

et, puisque  $k^2 = \omega^2/c^2$ , la différentiation de (24) conduit à :

$$(27) \quad \frac{\omega}{\gamma} \frac{d\omega}{d\gamma} = c^2 ,$$

relation qui montre que  $\omega/\gamma > c$  implique  $\frac{d\omega}{d\gamma} < c$ . Il importe de bien comprendre que, du point de vue pratique, c'est la vitesse de groupe qui est intéressante à considérer. En régime harmonique, un mode est une solution des équations de Maxwell en présence des parois métalliques mais, comme l'onde plane dans "l'espace libre", cette solution n'a pas grande réalité physique. Un modèle plus intéressant est, pour un mode fixé, le paquet d'ondes guidées qui généralise la notion de paquet (spatio-temporel) d'ondes planes. La valeur instantanée du champ électrique, ou plutôt de son signal analytique, est alors :

$$(28) \quad \vec{e}(x, y, z, t) = \int a(\gamma) \vec{E}(x, y, \gamma) \exp(i\gamma z) \exp(-i\omega(\gamma)t) d\gamma ,$$

et, se reportant au chap. VI, on comprendra que l'on peut définir une vitesse de propagation des signaux dont une valeur approchée est  $d\omega/d\gamma$ .

3.5. Formule des guides d'ondes. On appelle ainsi la formule obtenue à partir de (24) par un simple changement de notation, qui consiste à remplacer  $\gamma$  par  $k_g$ . On écrit alors :

$$(29) \quad k^2 = k_g^2 + k_c^2 .$$

Dans  $k_g$ , l'indice  $g$  rappelle qu'il s'agit d'onde guidée. Puisque dans l'espace libre le "ka" du milieu s'identifie nécessairement à  $\gamma$  (supposé positif par suite d'un choix convenable des axes), il est en effet tentant, en propagation guidée, de désigner la constante de propagation  $\gamma$  par la lettre  $k$  indicée par  $g$ . On définit aussi une longueur d'onde guidée  $\lambda_g$  en



posant :

$$\lambda_g = 2\pi/k_g .$$

Alors, remplaçant respectivement  $k$ ,  $k_g$  et  $k_c$  par  $2\pi/\lambda$ ,  $2\pi/\lambda_g$  et  $2\pi/\lambda_c$ , (29) devient, après division des deux membres par  $4\pi^2$  :

$$(30) \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} .$$

N.B. : Répétons que cette formule traditionnelle fait double emploi avec (24). Pour son utilisation, ne pas oublier que si le guide est rempli d'un diélectrique  $(\epsilon, \mu_0)$  d'indice  $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ , et si  $\lambda_0$  est la longueur d'onde associée dans le vide à la fréquence  $\nu$  étudiée :

$$(31) \quad \lambda = \lambda_0/n .$$

3.6. Exemple de détermination des fréquences de coupure. Pour une section droite quelconque, la résolution du problème aux valeurs propres (§3.3) relève généralement des techniques de l'analyse numérique et nécessite l'emploi d'un ordinateur. C'est seulement pour quelques sections droites, de forme simple, que le problème peut être résolu élémentairement.

Exemple 1. Section droite rectangulaire :  $\Gamma$  est un rectangle de côtés  $a$  et  $b$  (Fig.27).

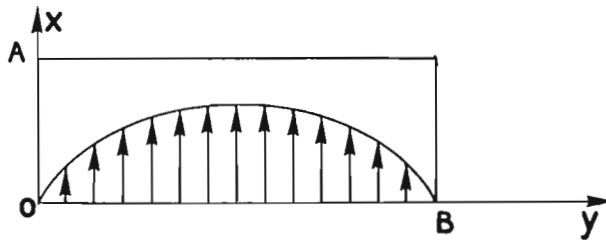


Figure 27.  $OA = a$ ,  $OB = b$ . L'axe  $Oz$  est dirigé vers l'arrière du plan de figure. Supposant  $E_0$  réel dans la formule (40), on a représenté par des flèches le vecteur  $\vec{E}_T$ .

Pour les modes TE, il s'agit de résoudre le problème suivant : trouver  $H_z(x,y)$  et  $k_c^2$  sachant que :

$$(32) \quad \Delta H_z + k_c^2 H_z = 0, \text{ dans l'intérieur } \Omega \text{ de } \Gamma,$$

$$(32') \quad \frac{dH_z}{dn} = 0, \text{ sur } \Gamma.$$

On établit mathématiquement (§5) que  $H_z$  est nécessairement le produit d'une fonction de  $x$  par une fonction de  $y$  :

$$(33) \quad H_z(x, y) = X(x) Y(y).$$

Utilisant ce résultat, (32) devient :

$$(34) \quad X''Y + XY'' + k_c^2 XY = 0, \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k_c^2 = 0.$$

Remarquant que  $X''/X$  et  $Y''/Y$  sont des fonctions d'une seule variable (respectivement  $x$  et  $y$ ), (34) implique :

$$(35) \quad \frac{X''}{X} = -\alpha^2,$$

$$(36) \quad \frac{Y''}{Y} = -\beta^2,$$

où  $\alpha^2$  et  $\beta^2$  sont des constantes vérifiant :

$$(37) \quad \alpha^2 + \beta^2 = k_c^2.$$

Supposant  $\alpha^2$  positif, (35) impose :

$$X = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x,$$

d'où :

$$X' = -A\alpha \sin \alpha x + B\alpha \cos \alpha x$$

et, puisque d'après (32') on doit avoir  $X'(0) = X'(a) = 0$ , on a nécessairement  $B = 0$  et  $\alpha a = n\pi$  ( $n$  entier positif). On vérifiera que l'hypothèse  $\alpha^2$  négatif (qui inciterait à représenter  $X$  sous forme d'une combinaison linéaire d'un sinus et d'un cosinus hyperboliques) est à rejeter car elle ne permet pas de satisfaire la condition aux limites.

De la même façon, (36) et (32') conduisent à  $Y = C \cos \beta x$  avec  $\beta b = m\pi$ .

Finalement,  $m$  et  $n$  étant deux entiers positifs, on a nécessairement :

$$(38) \quad H_z = H_0 \cos \left( \frac{n\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{m\pi}{b} y \right)$$

et, d'après (37) :

$$\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} = k_c^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_c^2},$$

$$(39) \quad \left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_c^2}.$$

Cette formule donne la suite discrète des longueurs d'onde de coupure. Un mode, repéré par les deux indices  $n$  et  $m$ , sera noté  $TE_{n,m}$ . La formule (38), dans laquelle  $H_0$  est une constante arbitraire, donne le champ magnétique axial d'où l'on peut déduire  $\vec{E}_T$  et  $\vec{H}_T$  (§2.3).

On appelle mode fondamental celui qui correspond à la plus grande longueur d'onde de coupure (c'est-à-dire à la plus petite fréquence de coupure). Le mode fondamental correspond donc à un choix des indices  $n$  et  $m$  rendant minimal le premier membre de (39). Le choix  $n = 0$  et  $m = 0$  qui entraînerait  $H_z = C^{te}$ , ne peut être retenu ; il correspondrait à  $k_c^2 = 0$ , contrairement à une hypothèse faite au §3.2. Il faut donc s'orienter vers  $n = 0, m = 1$  ou  $n = 1, m = 0$ . La conclusion dépend des valeurs de  $a$  et  $b$ . Supposons  $a < b$  (c'est toujours vrai si l'on convient de prendre l'axe  $Oy$  parallèle au grand côté du rectangle), alors  $1/(2b)^2 < 1/(2a)^2$  et c'est le mode  $TE_{0,1}$  qui correspond au fondamental. Pour ce mode  $TE_{0,1}$  :

$$\lambda_c = 2b, \quad H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad \text{grad } H_z = -H_0 \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \vec{e}_y,$$

$$(40) \quad \vec{E}_T = -\frac{i\omega\mu}{k_c^2} \vec{e}_z \wedge \text{grad } H_z = i\omega\mu H_0 \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \vec{e}_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_x.$$

Ainsi, seule la composante  $E_x$  du champ électrique est différente de zéro ; elle dépend uniquement de  $y$  et présente un seul maximum sur l'intervalle  $(0, b)$ . La longueur d'onde de coupure est deux fois la longueur du grand côté et ne dépend pas du diélectrique utilisé.

Plus généralement, on établit que, pour un tuyau métallique de section arbitraire, la longueur d'onde de coupure du mode fondamental est toujours du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques de la section droite ; elle est donc de l'ordre du centimètre ou du millimètre dans le domaine des micro-ondes où ce type de guide est surtout utilisé. On retiendra aussi que, contrairement au résultat trouvé pour le mode  $TE_{0,1}$  du guide rectangulaire,  $\vec{E}_T$  dépend généralement des deux variables  $x$  et  $y$  et ne reste pas parallèle à une direction fixe.

Le cas des modes TM se traite de façon tout à fait analogue. On part de :

$$(41) \quad \Delta E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (42) \quad E_z = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Appliquant encore la technique (mathématiquement justifiable) de "séparation des variables", on arrive à :

$$(43) \quad E_z = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad (44) \quad \frac{1}{\lambda_c^2} = \left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2.$$

Cependant,  $n$  et  $m$  doivent être tous deux différents de 0 puisque la nullité de l'un d'entre eux impliquerait  $E_z = 0$ . Compte tenu de cette remarque, le mode fondamental correspond à  $n = 1$  et  $m = 1$  (mode  $TM_{1,1}$ ). La longueur d'onde de coupure associée (donnée par  $1/\lambda_c^2 = 1/4a^2 + 1/4b^2$ ) est plus petite que  $2b$ . Ainsi, le mode  $TE_{0,1}$  est fondamental non seulement pour les modes TE, mais aussi pour l'ensemble des modes TE et TM.

Après cette étude, il apparaît que, dans le cas d'une section rectangulaire, le spectre associé au problème de Dirichlet est une partie du spectre associé au problème de Neumann. Il s'agit évidemment d'une circonstance très particulière et cette propriété est loin d'être générale. On notera cependant que si un réel positif est à la fois valeur propre pour le problème de Neumann et le problème de Dirichlet, les fréquences de coupure associées aux deux modes TE et TM sont les mêmes tandis que les "cartes de champ" sont différentes.

Exemple 2. Section circulaire :  $\Gamma$  est un cercle de rayon  $R$ . Il est alors judicieux d'utiliser des coordonnées cylindriques. Traitons par exemple le cas TM. On est ainsi conduit à rechercher  $E_z(r, \theta)$  et  $k_c^2$  tels que :

$$(45) \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + k_c^2 E_z = 0 \quad \text{si } r < R,$$

$$(46) \quad E(R, \theta) = 0, \quad \text{quel que soit } \theta.$$

On pourrait encore, comme il est d'usage de le faire dans les livres pour ingénieurs, admettre qu'une étude mathématique préliminaire a montré que  $E_z$  est le produit d'une fonction de  $r$  par une fonction de  $\theta$ . Nous préférons essayer de justifier cette technique de séparation des variables, ne serait-ce que pour présenter au Physicien une démonstration mathématique, certes un peu subtile, mais sans aucun doute très formatrice.

Le champ électrique étant une fonction de point,  $E_z(r, \theta)$  est, pour  $r$  fixé, une fonction périodique de la variable  $\theta$ . Cette fonction, de période  $2\pi$ , peut être représentée par sa série de Fourier :

$$(47) \quad E_z(r, \theta) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} u_p(r) \exp(ip\theta) .$$

En reportant cette série dans (45), il apparaît que :

$$\forall p \in \mathbb{Z} : \quad u_p'' + \frac{1}{r} u_p' + \left( k_c^2 - \frac{p^2}{r^2} \right) u_p = 0 .$$

Par suite  $u_p$  s'exprime à l'aide de fonctions de Bessel (A4, §2.7) :

$$u_p(r) = A_p J_p(k_c r) + B_p N_p(k_c r) .$$

La fonction de Neumann  $N_p$ , non bornée, ne pouvant être conservée :

$$(48) \quad u_p(r) = A_p J_p(k_c r) , \quad (48') \quad E_z(r, \theta) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} A_p J_p(k_c r) \exp(ip\theta) .$$

La condition aux limites (46) impose de plus :

$$(46') \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad A_p J_p(k_c R) = 0 .$$

Ces dernières égalités montrent que  $k_c R$  est nécessairement égal à un "zéro" d'une certaine fonction de Bessel d'indice entier positif (soit  $J_n$ ), sans quoi, d'après (46'), tous les  $A_p$  seraient nuls et on aurait, d'après (48'),  $E_z(r, \theta) = 0$ . Supposons donc que  $k_c R$  soit l'une des racines strictement positives de  $J_n$ , c'est à dire que l'on ait  $J_n(k_c R) = 0$ . Bien que l'auteur n'en connaisse pas la démonstration, nous admettrons (conjecture très vraisemblable d'après les ouvrages de Mathématiques que nous avons consultés) que, si  $n$  et  $m$  sont deux entiers positifs distincts, tout réel  $x$  non nul qui annule  $J_n$  n'annule pas  $J_m$ . Par ailleurs et puisque pour  $n$  entier  $J_{-n} = (-1)^n J_n$ , toute valeur de  $x$  qui annule  $J_n$  annule aussi  $J_{-n}$ . En conséquence, la condition aux limites (46') ne peut être vérifiée que si  $A_p = 0$  pour tout  $p \neq \pm n$ .

En résumé :

a) les valeurs admissibles de  $k_c$  sont les termes d'une suite dépendant de deux entiers positifs  $n$  et  $m$ . Si  $a_{nm}$  désigne le  $m^{\text{ième}}$  zéro de  $J_n$ ,  $(k_c)_{n,m} = a_{n,m}/R$

b)  $n$  et  $m$ , et par suite  $k_c$ , étant fixés,  $E_z(r, \theta)$  est nécessairement de la forme :

$$(49) \quad E_z(r, \theta) = A J_n(k_c r) \exp(in\theta) + B J_n(k_c r) \exp(-in\theta)$$

où  $A$  et  $C$  sont des constantes complexes arbitraires.

Après quelques manipulations algébriques classiques, et en introduisant les constantes réelles  $D$ ,  $D'$ ,  $\varphi$  et  $\varphi'$ , (49) peut aussi s'écrire :

$$(50) \quad E_z(r, \theta) = J_n(k_c r) [D \cos(n\theta - \varphi) + i D' \sin(n\theta - \varphi')] .$$

Il est clair que, sauf pour  $n = 0$ , l'ensemble des fonctions propres associées à une valeur donnée de  $k_c$  n'est pas de dimension 1, mais de dimension 2. Sauf pour les modes correspondant à  $n = 0$ , il y a dégénérescence.

Le cas TE se traite de façon analogue. Voici, à titre documentaire, quelques valeurs numériques (tableau n° 5) extraites du livre de Goudet et Chavance [20] auquel on se reportera pour plus d'information et notamment pour voir l'allure des lignes de champ. On pourra retenir que le fondamental (correspondant à la plus grande valeur de  $\lambda_c/R$ ) est, pour le guide à section circulaire, le mode  $TE_{1,1}$ .

Mode	$TE_{1,1}$	$TM_{0,1}$	$TE_{2,1}$	$TM_{1,1}$	$TE_{0,1}$	$TE_{2,1}$	$TM_{2,1}$
$\lambda_c/R$	3.41	2.61	2.06	1.64		1.50	1.22

Tableau n° 5

3.7. Champ transversal en mode TE ou H. Si  $E_z = 0$ , les formules générales (19) et (19') se simplifient et deviennent :

$$(51) \quad \vec{H}_T = \frac{i\gamma}{k_c^2} \text{grad } H_z, \quad (52) \quad \vec{E}_T = -\frac{i\omega \mu}{k_c^2} \vec{e}_z \wedge \text{grad } H_z .$$

S'il n'y a pas dégénérescence, on peut supposer  $H_z$  réel (en négligeant une constante multiplicative complexe).

Éliminant  $\text{grad } H_z/k_c^2$  entre (51) et (52), on obtient :

$$\vec{E}_T = -\frac{\omega \mu}{\gamma} \vec{e}_z \wedge \vec{H}_T ,$$

$$\vec{e}_z \wedge \vec{E}_T = -\frac{\omega \mu}{\gamma} \vec{e}_z \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{H}_T) = -\frac{\omega \mu}{\gamma} (0 - \vec{H}_T) = \frac{k}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\mu}{\gamma} \vec{H}_T = \frac{k}{\gamma} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}_T$$

soit finalement, en introduisant l'impédance  $\eta$  du diélectrique :

$$(53) \quad \vec{H}_T = \frac{\gamma}{k\eta} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_T .$$

On écrit plutôt, supposant  $\gamma$  positif :

$$(54) \quad \vec{H}_T = \frac{1}{\eta_H} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_T \quad \text{avec} \quad \eta_H = \frac{k}{\gamma} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{k}{\gamma} \eta .$$

Les champs transversaux  $\vec{E}_T$  et  $\vec{H}_T$  sont donc liés par une formule analogue à celle qui lie les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  (eux-mêmes transversaux) d'une onde plane (V, 8). Seule l'impédance a changé et on vérifie bien que  $\eta_H = \eta$  si  $\gamma = k$ . Tout ce qui a été dit au chap. V, §1.3, peut se répéter en remplaçant respectivement  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\eta$  par  $\vec{E}_T$ ,  $\vec{H}_T$ ,  $\eta_H$ . On a localement une structure d'onde plane.

Considérons maintenant (fig.28) une courbe d'équation  $H_z(x,y) = C^{te}$ .

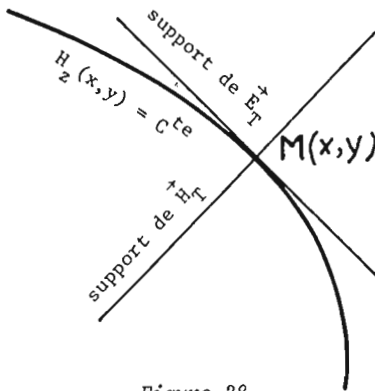


Figure 28

En un point  $M(x,y)$  de cette courbe, le vecteur  $\vec{H}_T$  (colinéaire à  $\text{grad } H_z$ ) est porté par la normale et  $\vec{E}_T$  qui lui est perpendiculaire (53) est porté par la tangente. Ainsi  $\vec{E}_T$  est-il tangent à la courbe  $H_z = C^{te}$ . Employant un langage à vrai dire assez peu clair, on conclut souvent en disant que les lignes  $H_z = C^{te}$  sont des lignes de champ électrique (songer aux lignes de champ en Electrostatique).

3.8. Champ transversal en mode TM ou E. Cette fois  $H_z = 0$  et les formules générales donnent, après suppression du terme en  $\text{grad } H_z$  :

$$(55) \quad H_T = \frac{i}{k_c^2} \omega \epsilon \vec{e}_z \wedge \text{grad } E_z ,$$

$$(56) \quad E_T = \frac{i\gamma}{k_c^2} \text{grad } E_z$$

d'où :

$$(57) \quad \vec{H}_T = \frac{k}{\gamma \eta} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_T ,$$

soit, pour  $\gamma > 0$  :

$$(58) \quad \vec{H}_T = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_T}{\eta_E} \text{ en introduisant l'impédance } \eta_E = \frac{\gamma}{k} \eta .$$

C'est maintenant le champ magnétique qui est tangent aux courbes d'équation  $E_z(x,y) = C^{te}$ .

#### 4. COMPLEMENTS SUR LE MODE $TE_{0,1}$ DU GUIDE RECTANGULAIRE.

A titre d'exercice, étudions plus en détail ce mode souvent utilisé.

4.1. Il faut avoir en tête (§3.6) qu'avec les notations de la fig.27, le vecteur  $\vec{E}$  a une expression simple très facile à retenir :

$$(59) \quad E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) , \quad E_y = 0 , \quad E_z = 0 .$$

La constante  $E_0$ , définie à un facteur multiplicatif complexe près, peut donc être supposée réelle et positive. Connaissant (59), il n'est pas nécessaire de recourir aux formules des ondes guidées pour en savoir davantage. Puisque  $\vec{E} = \vec{E} \exp(i\gamma z)$ , la première équation de Maxwell donne  $\vec{H}$  :

$$\begin{aligned} i\omega \mu \vec{H} &= \text{rot } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{e}_z \\ &= E_0 \left( i\gamma \sin\frac{\pi y}{b} \vec{e}_y - \frac{\pi}{b} \cos\frac{\pi y}{b} \vec{e}_z \right) \exp(i\gamma x) . \end{aligned}$$

On trouve donc très facilement les six composantes de champ :

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp(i\gamma z) , & H_x = 0 , \\ E_y = 0 , & H_y = \frac{\gamma}{\omega \mu} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp(i\gamma z) , \\ E_z = 0 , & H_z = \frac{i\pi}{b \omega \mu} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp(i\gamma z) . \end{array} \right.$$

On peut en déduire tout renseignement utile. Par exemple, la valeur de



$\lambda_c = 2\pi/k_c$  s'obtient en écrivant que  $H_z$  vérifie l'équation :  $\Delta H_z + k_c^2 H_z = 0$ . Rappelons que  $\lambda_c = 2b$ .

4.2. Vecteur de Poynting. Le vecteur de Poynting complexe  $\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}$  a une composante axiale  $\mathcal{P}_z = \frac{1}{2} \mathcal{E}_x \mathcal{H}_y$  réelle, une composante  $\mathcal{P}_y$  imaginaire pure et une composante  $\mathcal{P}_x$  nulle. Le flux de  $\text{Re}(\vec{\mathcal{P}})$  à travers une section droite du guide est donc :

$$(61) \quad \int_0^a \int_0^b \frac{1}{2} \mathcal{E}_x \mathcal{H}_y \, dx \, dy = \int_0^a \int_0^b \frac{\gamma E_0^2}{2\omega \mu} \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \, dx \, dy = \frac{E_0^2 ab\gamma}{4\omega \mu} = \frac{E_0^2 ab\gamma}{4k\eta}.$$

Pour un guide rempli d'air,  $\eta = 120 \pi$  et  $E_0$  ne peut guère dépasser  $3.10^6$  V/m sans provoquer une décharge dans le gaz. Pour le guide standard ( $a = 1,02$  cm,  $b = 2,29$  cm) et une longueur d'onde  $\lambda$  de 3,2 cm, on atteint une valeur de l'ordre du mégawatt.

4.3. Valeurs instantanées du champ magnétique. Désignant par  $\vec{h}(x,y,z,t) = \text{Re}(\vec{\mathcal{H}} \exp(-i\omega t))$ , la valeur instantanée du champ magnétique :

$$\begin{aligned} h_x &= 0, \\ (62) \quad h_y &= \frac{\gamma E_0}{\omega \mu} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - \gamma z), \\ h_z &= \frac{\pi E_0}{\omega \mu b} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - \gamma z). \end{aligned}$$

A l'instant  $t = 0$ , les lignes de champ (qui en tout point sont tangentes au vecteur  $\vec{h}$ ) sont, dans un plan  $x = \text{Cte}$ , définies par l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{h_y(y,z,0)} = \frac{dz}{h_z(y,z,0)}, \quad \text{soit} \quad \frac{dy \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)}{\gamma E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)} = \frac{-b \, dz \cos(\gamma z)}{\pi E_0 \sin(\gamma z)}.$$

L'intégration immédiate conduit à :

$$(63) \quad \sin \frac{\pi y}{b} |\sin \gamma z| = \text{Cte}.$$

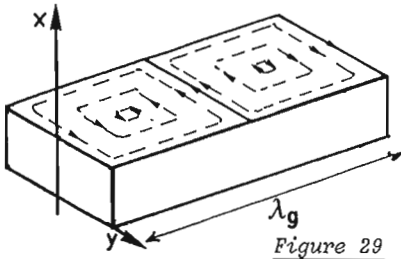


Figure 29

La constante doit évidemment être inférieure à 1. Cette famille de courbes est représentée sur la fig.29 extraite de [20]. Au cours du temps, l'ensemble glisse le long de Oz à la vitesse  $\omega/\gamma$ .

4.4. Lignes de courant dans les parois. Puisque le courant superficiel  $\vec{j}_s$  est à tout instant orthogonal à  $\vec{h}$ , les lignes de courant dans les parois sont les trajectoires orthogonales des lignes de champ. Pour  $x = a$ , elles

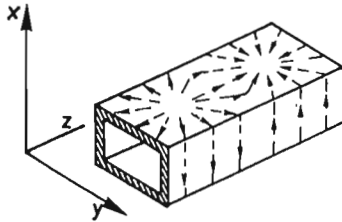


Figure 30

sont représentées sur la fig.30 encore extraite de [20]. On notera que, pour  $y = b/2$ ,  $h_z = 0$  ; quel que soit  $z$ ,  $\vec{j}_s$  est donc parallèle à Oz. Il existe ainsi une ligne de courant parallèle à Oz qui passe par le milieu du grand côté du rectangle.

On peut se demander quel est l'effet sur les propriétés du guide du percement d'une fente rectiligne étroite dans l'une de ses parois. Intuitivement, cet effet sera d'autant moins grand que la mise en place de la fente contrariera le moins possible la circulation initiale du courant. En d'autres termes, il faut éviter que la fente "coupe" des lignes de courant. L'expérience montre qu'effectivement l'ouverture d'une fente le long de la ligne de courant parallèle à Oz ne perturbe pas trop les champs à l'intérieur du guide et minimise les pertes par rayonnement vers l'extérieur. D'où l'intérêt de la dernière remarque soulignée (voir Travaux pratiques).

4.5. Atténuation en cours de propagation. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé les parois du guide infiniment conductrices. En réalité, le métal qui les constitue a une conductivité finie ; il est le siège d'un courant volumique qui entraîne une dissipation d'énergie par effet Joule. Il en résulte une atténuation progressive des champs en cours de propagation. Bien que ce phénomène soit très important en pratique, et limite l'utilisation des guides pour les transmissions à grande distance, nous ne

l'étudierons pas ici. L'étude rigoureuse de la propagation des ondes électromagnétiques en présence de parois conductrices est très compliquée. On se contente généralement de méthodes approchées qui permettent de dégager les paramètres importants dans la lutte contre les pertes. Le choix du métal, de la fréquence, du rapport  $a/b$  ne se fait pas au hasard comme on pourra s'en persuader en consultant un ouvrage plus spécialisé [20].

#### 5. RETOUR SUR LA RECHERCHE DES VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN DANS UN RECTANGLE (aspect mathématique), NOTION DE MODE DEGENERÉ.

Reprenant le rectangle de la fig.27 dont les côtés ont pour longueur  $a$  et  $b$  ( $b > a$ ), nous nous proposons de trouver les valeurs propres et les fonctions propres sans utiliser a priori la technique de séparation des variables, mais plutôt en développant des arguments similaires à ceux utilisés pour le guide à section circulaire. Pour être bref, nous nous bornerons au cas de la condition de Dirichlet.

Il s'agit de trouver les valeurs de  $k_c^2$  pour lesquelles il existe des fonctions  $E_z(x,y)$  non nulles, dites fonctions propres et telles que :

$$(64) \quad \Delta E_z + k_c^2 E_z = 0 \quad \text{dans le rectangle } (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b) ,$$

$$(65) \quad E_z(0,y) = E_z(a,y) = 0 , \quad (65') \quad E_z(x,0) = E_z(x,b) = 0 .$$

Pour  $x$  fixé, une telle fonction peut être considérée comme la restriction à l'intervalle  $(0,b)$  de la fonction impaire  $g_x(y)$  définie comme suit sur  $(-b,b)$  :

$$(66) \quad g_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} E_z(x,y) & \text{pour } 0 \leq y \leq b \\ -E_z(x,-y) & \text{pour } -b \leq y \leq 0 \end{cases} .$$

La fonction  $g_x(y)$  peut elle-même être considérée comme la restriction à  $(-b,b)$  d'une fonction périodique de période  $2b$ . Elle peut donc être décrite par sa série de Fourier qui, pour une fonction impaire, est une série de sinus. Finalement  $E_z(x,y)$  peut être développée comme suit :

$$(67) \quad E_z(x,y) = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} u_p(x) \sin \left( \frac{p\pi y}{b} \right) ,$$

et l'équation de Helmholtz impose :

$$(68) \quad u_p'' + \Omega_p^2 u_p = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

avec :

$$(68') \quad \Omega_p^2 = k_c^2 - p^2 \frac{\pi^2}{b^2}, \quad \Omega_p \text{ ou } \Omega_p/i \text{ positif.}$$

C'est dire que, compte tenu de (65), on a nécessairement :

$$(69) \quad u_p(x) = A_p \sin(\Omega_p x), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

$$(70) \quad u_p(a) = A_p \sin(\Omega_p a) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi, étant donné une valeur de  $k_c^2$ , de deux choses l'une :

- ou bien aucun des  $\Omega_p$  définis par (68') n'est multiple entier de  $\pi/a$  ; alors d'après (70) et puisque, quel que soit  $p$ ,  $\sin(\Omega_p a) \neq 0$ , tous les  $A_p$  sont nuls et (67) conduit à la solution inacceptable  $E_z = 0$  ;

- ou bien, pour certaines valeurs de  $p$ ,  $\Omega_p$  est multiple entier de  $\pi/a$ .

Alors  $k_c^2$  appartient au spectre et  $E_z(x,y)$  est donnée par (67) en limitant la sommation à ces valeurs de  $p$ .

La deuxième éventualité mérite un commentaire. Le plus souvent, pour un couple  $(a,b)$  fixé, la série (67) se réduit à un terme car il n'existe qu'un seul couple d'entiers, soient  $m$  et  $n$ , permettant de réaliser l'égalité (71) équivalente à la nullité de  $\Omega_p a$ , c'est-à-dire :

$$(71) \quad k_c^2 - n^2 \frac{\pi^2}{b^2} = \frac{m^2 \pi^2}{a^2}.$$

Alors  $k_c^2$  peut être repéré et calculé à partir de ces deux entiers et  $E_z$  est défini à une constante multiplicative près :

$$E_z(x,y) = A_n \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Il arrive cependant que, pour des valeurs particulières de  $a$  et  $b$ , (71) permette d'associer une même valeur de  $k_c$  à plusieurs couples d'entiers. Alors, la série (67) se réduit à une somme de plusieurs termes et les fonctions  $E_z$  associées à cette valeur de  $k_c$  forment un ensemble dépendant de plusieurs paramètres. Autrement dit, l'espace propre associé à  $k_c^2$  n'est plus de dimension un.

On peut illustrer ces remarques en étudiant le cas d'une section carrée ( $a = b$ ). La formule (71) donnant les valeurs possibles de  $k_c$  s'écrit

alors :

$$(72) \quad k_c^2 = \frac{\pi^2}{a^2} (n^2 + m^2)$$

et le couple (n,m) peut être remplacé par tout couple (n',m') tel que :

$$(72') \quad n^2 + m^2 = n'^2 + m'^2 .$$

Cette relation peut être satisfaite, non seulement en faisant  $n' = m$  et  $m' = n$  (conclusion banale), mais aussi pour des couples d'indices plus inattendus tels que (1,7) et (5,5) ou (7,4) et (8,1). Dans ces conditions, où une fréquence de coupure peut être repérée par l'un ou l'autre des deux couples (n,m) et (n',m'), on parle en Physique de dégénérescence. Si le mode  $TM_{n,m}$  est dégénéré :

$$E_z(x,y) = A \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + A' \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right) ,$$

où A et A' sont deux constantes arbitraires.

Il nous semble plus clair de dire que l'espace propre associé est de dimension deux. Quoi qu'il en soit, l'étude des dégénérescences peut parfois conduire à des problèmes non triviaux de Théorie des nombres.

## 6. ETUDE DES ONDES T.E.M.

6.1. Généralités. Comme nous avons déjà en l'occasion de le signaler au §2, les ondes T.E.M. (lire transverse électrique magnétique) sont des ondes pour lesquelles les champs électriques et magnétiques sont encore de la forme décrite par (9) et (9') avec, de plus (voir (15) et (16)) :

$$(73) \quad E_z = H_z = 0 .$$

On dit souvent que  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont perpendiculaires à l'axe de propagation Oz. Ceci semble sous-entendre que  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont deux vecteurs réels, ce qu'il n'est pas nécessaire de supposer a priori. Il semble donc préférable de ne pas employer l'adjectif "perpendiculaire" mais plutôt d'imposer :

$$(74) \quad \vec{E} \cdot \vec{e}_z = \vec{H} \cdot \vec{e}_z = 0 .$$

Dans ces conditions particulières où  $\vec{E} = \vec{E}_T$ , la condition aux limites (20), imposée par les parois infiniment conductrices, se réduit à :

$$(75) \quad \vec{n} \wedge \vec{E} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Nous avons déjà eu l'occasion de mentionner au passage quelques remarquables propriétés des ondes T.E.M. (par exemple,  $|\gamma| = k$ ) mais, compte tenu de l'importance de la question, nous allons reprendre, pour ce type d'ondes, les considérations générales développées précédemment pour les ondes TE ou TM. Récrivons donc, en l'absence de sources, les quatre équations de Maxwell :

$$(76) \quad \text{rot} (\exp(i\gamma z) \vec{E}) = i\omega \mu \vec{H} \exp(i\gamma z) ,$$

$$(77) \quad \text{rot} (\exp(i\gamma z) \vec{H}) = -i\omega \epsilon \vec{E} \exp(i\gamma z) ,$$

$$(78) \quad \text{div} (\exp(i\gamma z) \vec{E}) = 0 , \quad (79) \quad \text{div} (\exp(i\gamma z) \vec{H}) = 0 .$$

Par l'utilisation de formules qui nous sont désormais familières, (76) conduit à :

$$i\gamma \vec{e}_z \wedge \vec{E} + \text{rot} \vec{E} = i\omega \mu \vec{H} ,$$

soit par projection sur Oz et sur le plan xOy :

$$(76') \quad \text{rot} \vec{E} = 0 , \quad (76'') \quad \gamma \vec{e}_z \wedge \vec{E} = \omega \mu \vec{H} .$$

De façon analogue, on obtient, en parlant de (77) :

$$(77') \quad \text{rot} \vec{H} = 0 , \quad (77'') \quad \gamma \vec{e}_z \wedge \vec{H} = -\omega \epsilon \vec{E} .$$

Enfin, puisque  $\text{grad}(i\gamma z) = i\gamma \exp(ikz) \vec{e}_z$ , les formules (78, 79, 74) impliquent :

$$(78') \quad \text{div} \vec{E} = 0 , \quad (79') \quad \text{div} \vec{H} = 0 .$$

La compatibilité de (76'') et (77'') impose :

$$\gamma \vec{e}_z \wedge \left( \frac{-\gamma}{\omega \epsilon} \vec{e}_z \wedge \vec{H} \right) = \omega \mu \vec{H} ,$$

$$-\gamma^2 ((\vec{e}_z \cdot \vec{H}) \vec{e}_z - (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) \vec{H}) = \omega^2 \mu \epsilon \vec{H} = k^2 \vec{H} ,$$

soit finalement, puisque  $\vec{e}_z \cdot \vec{H} = 0$  et  $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$  :

$$(80) \quad |\gamma| = k .$$

Ainsi, pour les ondes T.E.M., la constante de propagation est, en valeur absolue, égale au "ka" du milieu.

Partant de l'une ou l'autre des relations (76") ou (77"), on établit une relation locale très simple entre  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  :

$$(81) \quad \vec{H} = \frac{\gamma}{\omega \mu} \vec{e}_z \wedge \vec{E} = \pm \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \wedge \vec{E} ,$$

où  $\eta = \omega \mu / k$  est l'impédance du milieu déjà introduite à propos de l'onde plane (IV, §1.1). Dans (81), il faut prendre le signe + ou le signe - suivant que  $\gamma$  est égal ou opposé à  $k$ . Il est clair que cette relation (qui implique  $\vec{H} = \pm \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \wedge \vec{E}$ ) est une généralisation à toute onde T.E.M. d'une formule déjà connue pour l'onde plane (IV, §1.1). Les ondes T.E.M. ont donc localement une structure d'onde plane.

Il importe avant tout de noter qu'il est impossible de faire propager des ondes T.E.M. dans un tuyau, c'est-à-dire dans un cylindre creux, dont la section droite supposée bornée est simplement connexe (comme par exemple dans les guides rectangulaires ou cylindriques précédemment étudiés en régime T.E. ou T.M.). On établit cette importante proposition en raisonnant par l'absurde. Désignons par  $\Omega$  le domaine simplement connexe correspondant à une section droite (l'intérieur de l'ellipse de la fig.25.b par exemple) et par  $\Gamma$  sa frontière. La possibilité d'une propagation entraînerait l'existence d'une fonction non nulle  $E(x,y)$  qui, d'après (76'), dériverait d'un potentiel  $V(x,y)$ . Ce potentiel serait une fonction harmonique puisque, d'après (78'), on aurait :

$$(82) \quad 0 = -\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = \Delta V .$$

La frontière  $\Gamma$  serait équipotentielle puisqu'en tout point orthogonale à  $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$ , d'après la condition aux limites (75). Appliquant la formule de Riemann (ou si l'on préfère le théorème de Green-Ostrogradsky dans  $\mathbb{R}^2$ ) à  $V \operatorname{grad} \vec{V}$ , on pourrait écrire successivement :

×

$$\int_{\Gamma} v \operatorname{grad} \bar{v} \cdot \vec{n} \, d\ell = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(v \operatorname{grad} \bar{v}) \, dS ,$$

$$v \int_{\Gamma} \operatorname{grad} \bar{v} \cdot \vec{n} \, d\ell = \iint_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \bar{v} \, dS + \iint_{\Omega} v \Delta \bar{v} \, dS ,$$

$$v \iint_{\Omega} \Delta \bar{v} \, dS = \iint_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \bar{v} \, dS + \iint_{\Omega} v \Delta \bar{v} \, dS ,$$

soit, puisque  $\Delta v = 0$ , dans  $\Omega$  :

$$0 = \iint_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \bar{v} \, dS = \iint_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 \right) dS ,$$

ce qui imposerait  $v = \text{Cte}$ , donc  $\vec{E} = 0$ , dans  $\Omega$ , en contradiction avec l'hypothèse initiale.

Par contre, il faut retenir que, si  $\Omega$  n'est pas simplement connexe, la propagation est possible, quelle que soit la fréquence. Le cas le plus usuel est celui du guide coaxial que nous allons étudier plus en détail. Il est formé d'un cylindre plein (conducteur n° 1) placé à l'intérieur d'un cylindre creux (conducteur n° 2). Ces deux cylindres sont coaxiaux, ce qui signifie que toutes leurs génératrices sont parallèles à une même direction (celle de l'axe Oz). Un tel guide est représenté en section droite sur la figure 31.

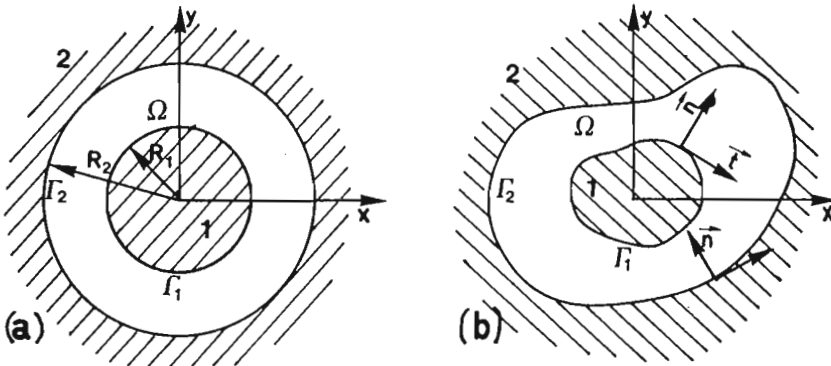


Figure 31. Le guide coaxial en section droite. La propagation se fait parallèlement à Oz, donc perpendiculairement au plan de figure.

On pourrait se contenter d'étudier le cas, presque suffisant en pratique, où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux cercles concentriques (Fig.31.a), mais l'étude du cas général n'est guère plus compliquée. C'est donc sur lui (Fig.31.b) que nous raisonnerons tout d'abord.



$\Omega$  n'étant pas simplement connexe, il faut avant tout se persuader que les relations (76') et (77') ne permettent pas, à elles seules, d'affirmer que  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  dérivent chacun d'un potentiel. On sait bien par exemple que  $\text{rot } \vec{H}$  est nul dans le complémentaire d'un fil rectiligne infiniment long parcouru par un courant constant sans que pour autant  $\vec{H}$  dérive d'un potentiel (sans quoi la circulation de  $\vec{H}$  sur un circuit entourant le fil serait nulle, en contradiction avec le théorème d'Ampère). Mais dans notre problème, et puisque sur  $\Gamma_1$  comme sur  $\Gamma_2$  on a  $\vec{n} \wedge \vec{E} = 0$ , il se trouve que l'égalité  $\text{rot } \vec{E} = 0$  (valable au sens des fonctions dans le complémentaire de  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ) est vraie au sens des distributions. On a en effet :

$$(83) \quad \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} \\ \text{au sens des distributions} \end{array} = \begin{array}{l} (\text{rot } \vec{E}) \\ \text{sans précaution} \end{array} + \vec{n} \wedge \vec{E} \delta_{\Gamma_1} + \vec{n} \wedge \vec{E} \delta_{\Gamma_2} .$$

$$= 0 + 0 + 0 .$$

Or on sait ([7], III, §11) qu'au sens des distributions :

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = - \text{grad } V .$$

Le même raisonnement ne peut être fait avec  $\vec{H}$ , car à cause du courant superficiel, l'égalité  $\vec{n} \wedge \vec{H} = 0$  n'est pas vérifiée sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Quoi qu'il en soit, il est commode, pour étudier la propagation d'ondes T.E.M., d'introduire un potentiel  $V(x,y)$  tel que :

$$(84) \quad \vec{E} = - \text{grad } V .$$

Puisque  $\text{div } \vec{E} = 0$ , ce potentiel vérifie l'équation de Laplace :

$$(85) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega .$$

On sait que c'est l'équation aux dérivées partielles vérifiée en Electrostatique et en dehors du support des sources, par un potentiel supposé fonction des variables  $x$  et  $y$ . Aussi les Mathématiques utilisées pour l'étude des ondes T.E.M. s'apparentent-elles beaucoup aux mathématiques de l'Electrostatique.

La possibilité d'une propagation à une fréquence donnée se ramène à la recherche d'une fonction  $V(x,y)$  satisfaisant l'équation de Laplace dans  $\Omega$  et

prenant deux valeurs préassignées  $V_1$  et  $V_2$  sur chacune des courbes équipotentielles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . L'existence et l'unicité d'une telle fonction sont mathématiquement assurées (problème de Dirichlet). On peut, sans perte de généralité, supposer  $V_2 = 0$ , ce qui revient à prendre  $\tilde{V} = V - V_2$  comme nouvelle fonction inconnue. Alors, posant  $u(x,y) = \tilde{V}/V_1$ , on est ramené à la recherche d'une nouvelle fonction harmonique  $u$ , nulle sur  $\Gamma_2$  et égale à 1 sur  $\Gamma_1$ . Cette fonction est réelle, puisque sa partie imaginaire est une fonction harmonique nulle sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , donc nulle dans  $\Omega$ . Autrement dit, à un facteur complexe constant près,  $V(x,y)$  est toujours réel. Il en est de même de son gradient et par suite du vecteur complexe  $\vec{E}$  (9). On a donc en tout point une polarisation rectiligne (II, §6.1).

En résumé, pour les ondes T.E.M., il n'y a pas ici de fréquence de coupure ; dans une section droite, la carte des lignes de champ ne dépend pas de la fréquence mais seulement de la géométrie. On notera bien que, dans cette dernière phrase, le mot "champ" désigne le champ de vecteur  $\vec{E}(x,y)$  qu'il ne faut pas confondre avec le champ  $\vec{E}(x,y,z)$  figurant dans les équations de Maxwell harmoniques.

On sait que  $U_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} V_1 - V_2$  représente la circulation de  $\vec{E}$  le long de tout chemin joignant, dans le plan d'une section droite, un point du conducteur n° 1 à un point du conducteur n° 2. Il est commode d'introduire une tension  $\mathcal{U}_{1,2}(z)$  et deux potentiels  $\mathcal{V}_1(z)$  et  $\mathcal{V}_2(z)$  :

$$(86) \quad \mathcal{U}_{1,2}(z) \stackrel{\text{def}}{=} U_{1,2}(z) \exp(ikz) = V_1 \exp(ikz) - V_2 \exp(ikz) \\ = \mathcal{V}_1(z) - \mathcal{V}_2(z) .$$

La considération de  $\mathcal{U}_{1,2}(z)$  permet de parler d'une onde de tension.

Passons au problème des courants. A tout point de la surface des conducteurs, on associe un courant superficiel complexe  $\vec{j}_s = \vec{n} \wedge \vec{H}$  qui, grâce à (81), peut s'exprimer en fonction de  $V$ . Supposant  $\gamma = k$  et donc positif :

$$(87) \quad \vec{j}_s = \frac{1}{\eta} \vec{n} \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{E}) \exp(ikz) = \frac{1}{\eta} (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{e}_z \exp(ikz) \\ = - \frac{1}{\eta} \frac{dV}{dn} \exp(ikz) \vec{e}_z .$$

Il est judicieux de poser :

$$(88) \quad -\frac{1}{\eta} \frac{dV}{dn} \vec{e}_z = \vec{J}_s$$

pour pouvoir écrire  $\vec{J}_s$  sous une forme analogue à celle utilisée pour les champs et le potentiel :

$$(89) \quad \vec{J}_s = \vec{J}_s \exp(ikz) .$$

On peut aussi définir deux intensités  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  (nombres complexes) sur chacun des conducteurs 1 et 2 par :

$$(90) \quad \mathcal{J}_1(z) = \int_{\Gamma_1} \vec{e}_z \cdot \vec{J}_s \, d\ell , \quad \mathcal{J}_2(z) = \int_{\Gamma_2} \vec{e}_z \cdot \vec{J}_s \, d\ell .$$

La considération de  $\mathcal{J}_1(z)$  et  $\mathcal{J}_2(z)$  permet d'associer à chacun des conducteurs une onde de courant. De nouveau, il est commode de poser :

$$(91) \quad \mathcal{J}_1(z) = I_1 \exp(ikz) , \quad \mathcal{J}_2(z) = I_2 \exp(ikz) ,$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont des réels indépendants de  $z$  et déterminés à partir de (90) et (87) :

$$(92) \quad I_1 = -\frac{1}{\eta} \int_{\Gamma_1} \vec{n} \cdot \text{grad } V \, d\ell , \quad I_2 = -\frac{1}{\eta} \int_{\Gamma_2} \vec{n} \cdot \text{grad } V \, d\ell .$$

Il en résulte que :

$$(93) \quad I_1 + I_2 = \frac{1}{\eta} \iint_{\Omega} \text{div}(\text{grad } V) \, dS = \frac{1}{\eta} \iint_{\Omega} \Delta V \, dS = 0 .$$

Ainsi,  $I_1 = -I_2$  ou, si l'on préfère, les intensités représentées par les complexes  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  sont, dans chaque section, en opposition de phase.

Considérons maintenant le rapport :

$$(94) \quad Z_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_1 - V_2}{I_1} = \frac{V_2 - V_1}{I_2} = \frac{\mathcal{U}_{1,2}}{\mathcal{J}_1} = \frac{\mathcal{U}_{2,1}}{\mathcal{J}_2} .$$

Il a manifestement les dimensions d'une impédance et nous allons montrer qu'il dépend uniquement de la géométrie de la section droite : on l'appelle impédance caractéristique de la ligne car on a l'habitude d'appeler "ligne" un guide utilisé en régime T.E.M. (Chap. X). La démonstration est fondée sur la linéarité des fonctionnelles liant la fonction potentiel  $V(x,y)$  aux

intensités  $I_1$  et  $I_2$  (92). Si l'on multiplie  $V(x,y)$  par une certaine constante  $A$ , les trois nombres  $V_1$ ,  $V_2$  et  $I_1$  sont aussi multipliés par  $A$  et, d'après (94),  $Z_c$  reste donc inchangé. On notera que  $Z_c$  est lié de façon simple à ce que l'on appelle en Electrostatique la capacité par unité de longueur du condensateur cylindrique ayant les conducteurs 1 et 2 pour armature. Cette dernière, soit  $\tilde{C}$ , est, avec des notations traditionnelles, définie comme suit :

$$(95) \quad \tilde{C} = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\int_{\Gamma_1} \sigma \, d\ell}{V_1 - V_2} = \frac{-\epsilon \int_{\Gamma_1} \frac{dV}{dn} \, d\ell}{V_1 - V_2} .$$

En se souvenant que  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , on voit, d'après (95, 92, 94), que :

$$(96) \quad \tilde{C} Z_c = \epsilon \eta , \quad (96') \quad \tilde{C} Z_c c = 1$$

en désignant par  $c$  la vitesse de la lumière dans le diélectrique.

6.2. Le "cable coaxial" à section circulaire. Il est difficile d'admettre qu'on puisse en ignorer l'existence puisqu'on peut aujourd'hui s'en procurer quelques mètres au rayon bricolage des grandes surfaces!

Pour l'étude théorique, il suffit d'appliquer les résultats du paragraphe précédent dans le cas particulier où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux cercles concentriques de rayon  $R_1$  et  $R_2$  (Fig.31.a). Le potentiel est alors une fonction radiale  $V(r)$  qui vérifie l'équation de Laplace dans le diélectrique :

$$(97) \quad \Delta V = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad R_1 < r < R_2 .$$

Posant  $dV/dr = u(r)$ , on arrive à :

$$\frac{u'}{u} = - \frac{1}{r}$$

qui implique :

$$(98) \quad u = \frac{A}{r} = \frac{dV}{dr} , \quad \text{d'où} \quad (99) \quad V = A \ln(r) + B .$$

Les constantes d'intégration se déterminent par les conditions aux limites :

$$(100) \quad V_1 = A \ln(R_1) + B , \quad V_2 = A \ln(R_2) + B .$$

On a donc :

$$(101) \quad A = \frac{V_1 - V_2}{\ln(R_1/R_2)}$$

ce qui permet de calculer le champ électrique :

$$(102) \quad E(r) = -\frac{dV}{dr} = -\frac{A}{r} = \frac{1}{r} \frac{V_1 - V_2}{\ln(R_2/R_1)} .$$

Il est dès lors facile de calculer l'impédance caractéristique  $Z_c$  :

$$(103) \quad I_1 = -\frac{1}{\eta} \int_{\Gamma_1} \frac{dV}{dr} d\ell = -\frac{1}{\eta} \int_0^{2\pi} \frac{A}{R_1} R_1 d\theta = -\frac{2\pi A}{\eta} = \frac{2\pi}{\eta} \frac{(V_1 - V_2)}{\ln(R_2/R_1)}$$

d'où :

$$(104) \quad Z_c = \frac{V_1 - V_2}{I_1} = \frac{\eta \ln(R_2/R_1)}{2\pi} .$$

Si la perméabilité du diélectrique est  $\mu_0$ , on peut exprimer  $\eta$  à partir de l'impédance  $\eta_0$  du vide et de la permittivité relative  $\epsilon_r$  ( $\eta = \eta_0/\sqrt{\epsilon_r}$ ). Dans le système légal,  $\eta_0 = 120 \pi$ , et par suite :

$$(105) \quad Z_c = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln(R_2/R_1) = \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \log(R_2/R_1) .$$

Par exemple, pour  $R_2/R_1 = 10$  et  $\epsilon_r = 2,3$  (polyéthylène), on trouve :  $Z_c = 91 \Omega$ . Il est bien entendu inutile de chercher à améliorer la précision du calcul, notamment s'il s'agit d'un coaxial souple du commerce. Dans un tel câble, les conducteurs sont souvent constitués par des torsades ou des tresses de fils fins ayant une conductivité finie ; le diélectrique qui permet de "centrer" le conducteur 1, est loin d'être homogène. La formule (104) doit donc seulement être employée pour dégager un ordre de grandeur. Le commerce du coaxial a été normalisé ; on peut uniquement se procurer facilement du câble correspondant à certaines valeurs de l'impédance caractéristique, par exemple, 50, 75, 100  $\Omega$ .

Remarque sur l'utilisation du coaxial. Bien que, répétons-le, un guide à section simplement connexe ne permette pas la propagation d'onde T.E.M., il n'y a évidemment aucune raison d'en déduire que la propagation de modes T.E. ou T.M. est impossible dans un coaxial. C'est cependant une erreur assez souvent commise pour qu'il soit nécessaire d'insister. Désignons res-

pectivement par  $f_{c,1}$  et  $f_{c,2}$  les fréquences de coupure du mode fondamental en régime T.E. et en régime T.M. Soit  $f_c$  la plus petite des deux. Pour que seules des ondes T.E.M. soient susceptibles de se propager dans un coaxial, il faut que la fréquence soit inférieure à  $f_c$ . C'est seulement dans ces conditions que le coaxial peut vraiment fonctionner comme une ligne ( $\bar{X}$ ).

6.3. La ligne bifilaire. C'est évidemment une autre ligne importante en pratique et vous l'avez peut être même rencontrée dès votre premier contact avec l'étude des ondes électromagnétiques (fils de Lecher). Elle est formée de deux conducteurs cylindriques dont les génératrices sont parallèles à Oz (Fig.32.a) et dont les sections droites, supposées simplement connexes, sont limitées par des courbes fermées  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

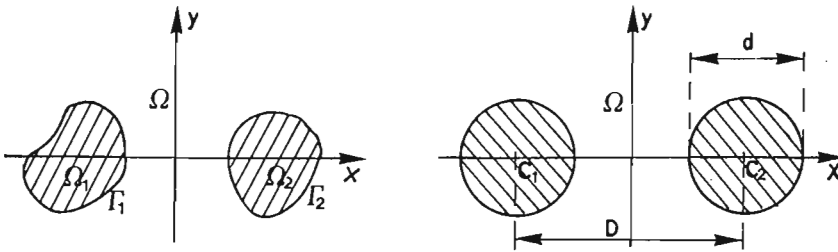


Figure 32

On dit parfois qu'il s'agit d'un guide ouvert pour lequel le support du champ (le complémentaire  $\Omega$  de la région hachurée occupée par le métal) est, a priori, non borné. La théorie générale (§6.1) s'applique encore, mais pour assurer l'unicité de la solution du problème de Dirichlet, il faut ajouter une condition supplémentaire sur  $V$ . On démontre qu'il suffit d'imposer l'existence de l'intégrale  $\iint_{\Omega} (\text{grad } V)^2 dx dy$ , ce qui, du point de vue physique, signifie que le flux du vecteur de Poynting à travers un plan de section droite reste fini.

Dans le cas usuel de fils à section circulaire (Fig.32.b), le calcul de l'impédance caractéristique  $Z_c$  conduit à :

$$(106) \quad Z_c = \frac{\eta}{\pi} \ln \left( \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right),$$

$D$  étant la distance des axes des deux fils, et  $d$  leur diamètre commun. Dans la mesure où  $D/d$  est suffisamment grand, les techniciens se contentent de la formule approchée :

$$(107) \quad Z_c \simeq \frac{\eta}{\pi} \ln \left( \frac{2D}{d} \right)$$

qui, si les fils sont baignés par l'air, devient avec les unités légales :

$$(107') \quad Z_c \simeq 276 \log \left( \frac{2D}{d} \right) .$$

La démonstration de (106), a priori délicate, peut résulter de considérations qui, aussi astucieuses qu'elles soient, ne dépassent pas le niveau du 1er cycle (Exercice A). On peut aussi (Exercice B) appliquer des techniques de "représentation conforme" (voir [7]), illustrant ainsi l'intérêt des fonctions analytiques en Electromagnétisme.

Exercice A. Soient (Fig.33) deux fils rectilignes  $F_1$  et  $F_2$  de section négligeable, parallèles à  $Oz$ , passant par les points  $A_1 (-a, 0)$  et  $A_2 (a, 0)$ . Ces deux fils, baignés par un milieu diélectrique  $(\epsilon, \mu)$ , sont chargés uniformément. La charge linéique est  $\lambda_1 = \lambda$  sur  $F_1$  et  $\lambda_2 = -\lambda$  sur  $F_2$  ( $\lambda > 0$ ).

a) Calculons le potentiel  $V$ . Il s'agit d'un problème classique d'Electrostatique.  $V$  est indépendant de  $z$  et, si  $r_1$  et  $r_2$  sont les distances respectives d'un point  $P$  du plan  $xOy$  à  $A_1$  et  $A_2$ , on peut prendre :

$$(108) \quad V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) ,$$

ce qui entraîne  $V = 0$  en tout point de  $Oy$ .

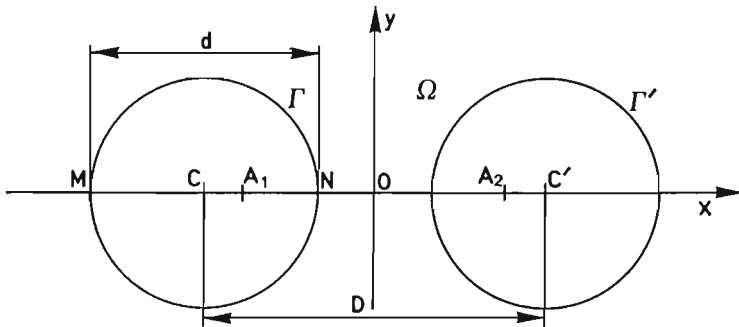


Figure 33.  $\overline{OA_2} = a > 0$ ,  $\overline{OA_1} = -a$ ,  $\Omega$  est le complémentaire de la réunion des deux disques ayant pour frontières  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .

b)  $V_0$  étant un réel positif, étudions l'équipotentielle  $V(x,y) = V_0$ . Soit, en posant  $\exp(2\pi\epsilon V_0/\lambda) = \rho$  et d'après (108) :

$$\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = \rho^2 ,$$

$$(109) \quad x^2 + y^2 - 2ax \frac{(1+\rho^2)}{(1-\rho^2)} + a^2 = 0 .$$

On reconnaît l'équation d'un cercle  $\Gamma$  de centre  $C(a(1+\rho^2)/(1-\rho^2), 0)$  et de rayon  $R = 2a\rho/(1-\rho^2)$ .

D'après (108), l'équation de l'équipotentielle  $V(x,y) = -V_0$  s'obtient en remplaçant  $\rho$  par  $1/\rho$  dans (109). Cette équipotentielle n'est autre que le cercle  $\Gamma'$ , symétrique de  $\Gamma$  par rapport à 0.

Soit  $D = 2a(\rho^2 - 1)/(1 + \rho^2)$  la distance des centres  $C$  et  $C'$  des cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , de même diamètre  $d = 2R$ . Il apparaît que  $\rho$  s'exprime simplement à partir de  $D$  et  $d$  :

$$\frac{D}{d} = \frac{1 + \rho^2}{2\rho} , \quad \rho^2 - 2\rho \frac{D}{d} + 1 = 0$$

et finalement  $\rho = \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}$  car l'autre racine ne peut être conservée puisque  $\rho$  doit être positif.

c) En application de ce qui précède, déterminons enfin le potentiel créé par deux tiges cylindriques  $T_1$  et  $T_2$  de même diamètre  $d$  donné, et respectivement portées au potentiel  $V_0$  et  $-V_0$ . Appelons  $D$  la distance de leurs axes.

Le potentiel  $V$  cherché est l'unique fonction vérifiant :

- i)  $\Delta V = 0$  dans le diélectrique,
- ii)  $V = V_0$  sur l'un des fils,  $V = -V_0$  sur l'autre,
- iii)  $\iint_{\Omega} (\text{grad } V)^2 dx dy$  existe.

$V$  nous est donc fourni par la question précédente (108). Si  $r_1$  et  $r_2$  désignent les distances d'un point  $P$  du plan aux axes des tiges :

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) ,$$

$\lambda$  étant déterminé par :

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left( \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right) .$$



Le Lecteur reconnaîtra sans doute la technique de "métallisation des équipotentielles" qui est en fait une conséquence d'un théorème d'unicité.

On sait que la charge  $Q_1$  portée par unité de longueur par le conducteur 1 est, d'après le théorème de Coulomb :

$$Q_1 = \int_{\Gamma} -\epsilon \vec{n} \cdot \text{grad } V \, d\ell .$$

l'intégrale peut être évaluée par application du théorème de Gauss à l'équipotentielle  $V(x,y) = V_0$  dans le problème initial des deux fils  $F_1$  et  $F_2$ . On est immédiatement conduit à :

$$\int_{\Gamma} -\vec{n} \cdot \text{grad } V \, d\ell = \frac{\lambda}{\epsilon} , \quad \text{d'où : } \quad Q_1 = \lambda .$$

On en déduit la capacité par unité de longueur du condensateur formé par les deux tiges :

$$C = \frac{Q_1}{2V_0} = \pi\epsilon / \ln \left( \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right) .$$

D'après (96'), l'impédance caractéristique de la ligne formée par  $T_1$  et  $T_2$  est donc :

$$Z_c = \frac{1}{C_c} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \left( \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \right) . \text{ C.Q.F.D.}$$

Exercice B.

a) Soit  $f(z)$  une fonction de variable complexe non constante, holomorphe dans un domaine  $\Omega$  du plan complexe ( $z$ ), qui établit une correspondance bijective entre  $\Omega$  et son image  $f(\Omega)$  dans le plan complexe ( $Z$ ) (Fig.34).

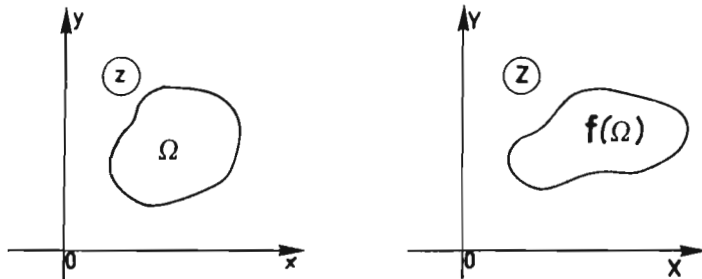


Figure 34.  $Z = X + iY = f(x + iy) = f(z)$  et  $x + iy = f^{-1}(X + iY)$ .

$V(x,y)$  étant une fonction réelle deux fois dérivable, posons  $V(x,y) = \Phi(X,Y)$ . Nous laissons au Lecteur le soin d'établir les deux formules suivantes où  $f'(z)$  est la dérivée de  $f(z)$  :

$$i) \quad \Delta v = \left| \frac{dz}{dz} \right|^2 \Delta \Phi = |f'|^2 \Delta \Phi$$

$$ii) \quad \iint_{f(\Omega)} \|\text{grad } \Phi\|^2 dx dy = \iint_{\Omega} \|\text{grad } V\|^2 dx dy .$$

Il s'agit d'un exercice de Mathématiques, un peu laborieux, sur les conditions de Cauchy ([7], §III) et la formule du changement de variable dans les intégrales doubles que nous rappelons ci-dessous :

$$\iint_{f(\Omega)} \Phi(X,Y) dx dy = \iint_{\Omega} V(x,y) |J| dx dy$$

où  $J$  est le déterminant de la matrice jacobienne :

$$J = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 = |f'|^2 .$$

b) Considérons maintenant (Fig.35.a), dans le plan  $z$ , deux cercles concentriques  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de centre  $O$  et de rayon  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha < 1$ ,  $\alpha\beta = 1$ ) limitant une couronne  $\Omega$ . Soit  $C$  la capacité du condensateur cylindrique associé et  $V(x,y)$  le potentiel dans  $\Omega$ . Pour ce condensateur "l'énergie emmagasinée par unité de longueur", savoir  $\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \|\text{grad } V\|^2 dx dy$  est égale à  $\frac{1}{2} C(V_1 - V_2)^2$ . De nouveau un condensateur cylindrique peut être associé à l'image  $f(\Omega)$  de  $\Omega$  par la transformation  $Z = f(z)$  (Fig.35.b). Ses armatures sont les courbes  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'_2$  d'équation  $\Phi(X,Y) = V_1$  et  $\Phi(X,Y) = V_2$ . Par suite de l'invariance de l'intégrale du carré de la norme du gradient (question précédente), les deux condensateurs respectivement associés aux figures (35.a) et (35.b) ont même capacité par unité de longueur. Il y a invariance de la capacité par unité de longueur, et par suite de l'impédance caractéristique, lors d'une "transformation conforme" de la section droite.

c) Prenons par exemple  $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$ . Le cercle  $\Gamma_1$  donne une courbe  $\Gamma'_1$  du plan complexe ( $Z$ ). Cette courbe, définie par  $|(Z + 1)/(Z - 1)| = \alpha$ , est elle-même un cercle  $\Gamma'_1$  de centre  $C'_1$

$(-(1 + \alpha^2)/(1 - \alpha^2), 0)$  et de rayon  $2\alpha/(1 - \alpha^2)$  comme le montrent des calculs analogues à ceux de l'exercice précédent. De même, l'image du cercle  $\Gamma_2$  est le cercle  $\Gamma'_2$ , de centre  $C'_2$ , symétrique de  $\Gamma'_1$  par rapport à  $O$  (Fig.35.c). Une étude plus attentive permet de décider quelle est la région qui doit être hachurée sur la fig.35.c. On reconnaît une ligne bifilaire pour laquelle :

$$D = 2 \overline{OC'_2} = \frac{2(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)}, \quad d = \frac{4\alpha}{1 - \alpha^2}.$$

L'impédance caractéristique  $Z_c$  de cette ligne est la même que celle du coaxial de la fig.35.a. On a donc d'après (104) :

$$Z_c = \frac{\eta}{2\pi} \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) = \frac{\eta}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{\alpha^2} \right) = \frac{\eta}{\pi} \ln \left( \frac{1}{\alpha} \right).$$

Il reste à exprimer  $1/\alpha$  en fonction de  $D/d$ , ce qui est immédiat puisque  $\frac{D}{d} = \frac{(1 + \alpha^2)}{2\alpha}$ . On retrouve la formule (106).

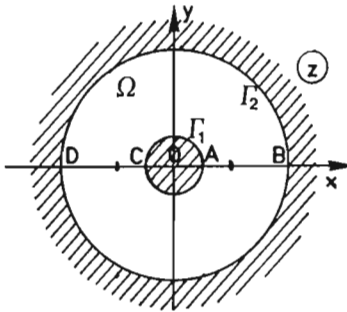


Figure 35.a.  $\overline{OA} = \alpha$ ,  $\overline{OB} = \beta$   
 $\alpha\beta = 1$

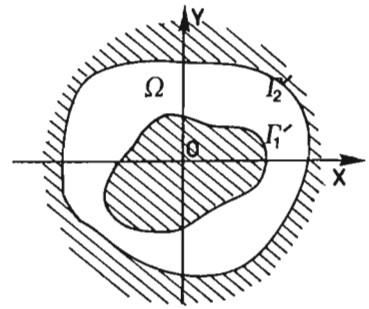


Figure 35.b

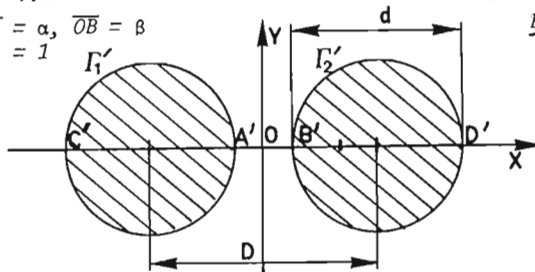


Figure 35.c.  $\overline{OA'} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ ,  $\overline{OB'} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = -\overline{OA'}$  ;  
 $\overline{OC'} = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$ ,  $\overline{OD'} = \frac{\beta + 1}{\beta - 1} = -\overline{OC'}$  .  
Noter que  $\overline{OC'} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB'} \cdot \overline{OD'} = 1$

**N.B.** : Une "petite escroquerie" a été commise dans cette élégante et classique démonstration. En fait, la fonction  $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$  n'est pas holomorphe dans la couronne  $\Omega$  de la figure 35.a, puisque  $z = -1$  est un pôle. Il faut en toute rigueur s'intéresser au domaine  $\Omega_\epsilon$  limité par les cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et un petit cercle  $\Gamma_\epsilon$ , de rayon  $\epsilon$ , centré en  $z = -1$ . Le transformé de  $\Gamma_\epsilon$  est un cercle  $\Gamma'_\epsilon$  centré sur OX dont le rayon  $R'$  tend vers l'infini quand  $\epsilon$  tend vers 0 (Fig.36).

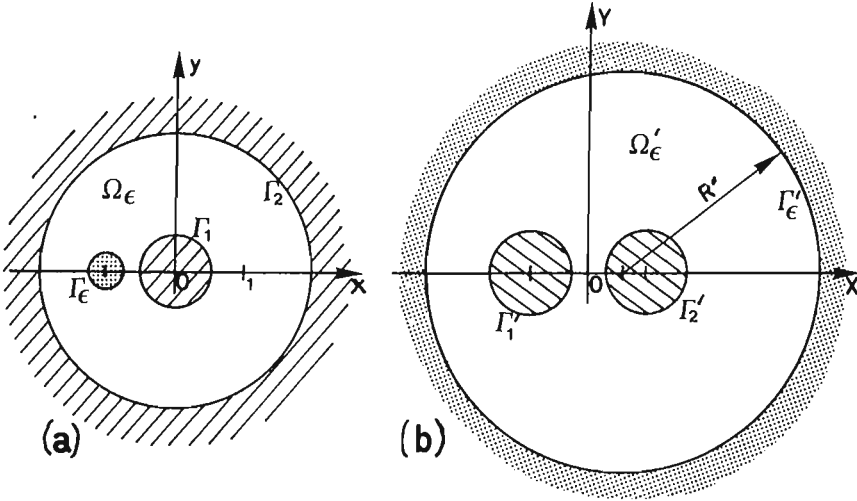


Figure 36.a. L'intérieur de  $\Gamma_\epsilon$  est pointillé.  $\Omega_\epsilon$  est le domaine ni hachuré, ni pointillé

Figure 36.b.  $\Omega'_\epsilon = f(\Omega_\epsilon)$  est le domaine ni hachuré, ni pointillé. Pour être plus clair, l'unité de longueur n'est pas la même que sur la figure 35.a.

Pour  $\epsilon$  fixé, la fonction  $\Phi(X,Y)$  vérifie :

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega'_\epsilon = f(\Omega_\epsilon) ,$$

$$\Phi = v_0 \quad \text{sur } \Gamma'_1 \quad \text{et} \quad \Phi = -v_0 \quad \text{sur } \Gamma'_2 ,$$

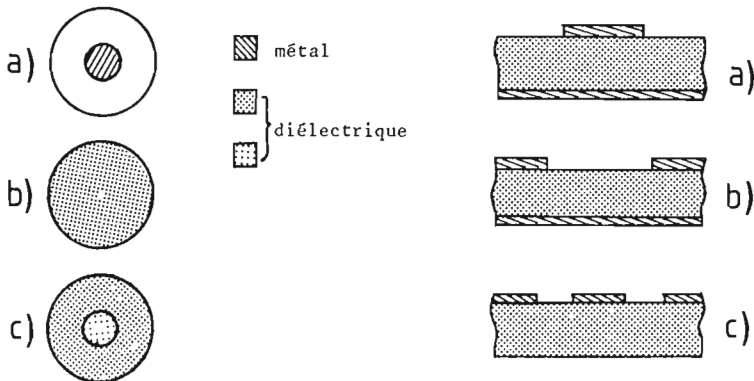
$$\iint_{f(\Omega_\epsilon)} (\text{grad } \Phi)^2 \, dX \, dY = \iint_{\Omega_\epsilon} (\text{grad } V)^2 \, dx \, dy ,$$

mais quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , l'intégrale  $\iint_{\Omega_\epsilon} (\text{grad } V)^2 \, dx \, dy$  admet une limite qui, à un coefficient multiplicatif près, n'est autre que l'énergie emmagasinée par unité de longueur. Il en résulte que la limite de

$\iint_{f(\Omega_\epsilon)} (\text{grad } \Phi)^2 \, dX \, dY$ , c'est-à-dire  $\iint_{f(\Omega)} (\text{grad } \Phi)^2 \, dX \, dY$  reste finie.  
 C'est ce qu'il fallait démontrer pour affirmer en toute rigueur que  $\Phi$  est bien le potentiel associé à la ligne de la fig.35.c.

### 7. LES LIGNES DE TRANSMISSION.

Il existe de nombreuses structures permettant la propagation guidée de champs électromagnétiques. Nous venons d'étudier trois d'entre elles (guides d'ondes métalliques, câble coaxial, ligne bifilaire) qui ont joué, et qui jouent encore, un rôle important en Hyperfréquences. Elles nous ont par ailleurs permis de présenter quelques unes des plus importantes méthodes de la Physique mathématique. De nos jours, de nombreuses autres lignes de transmission mériteraient d'être décrites. Nous reviendrons brièvement sur les fibres optiques (XI) et nous croyons nécessaire d'au moins signaler l'existence de diverses structures apparues sur le marché depuis une trentaine d'années (Fig.37 et 38). Nous ne pouvons en entreprendre l'étude théorique qui s'avère compliquée.



*Figure 37 : En section droite*

- a) ligne de Goubau
- b) fibre optique nue
- c) fibre optique avec gaine (cladding)

*Figure 38 : En section droite*

- a) ligne microruban
- b) ligne à fente
- c) ligne coplanaire

Il n'est en général plus possible de distinguer des modes TE, des modes TM et des modes TEM ; on est alors confronté au difficile problème des modes hybrides pour lesquels  $E_z$  et  $H_z$  sont tous deux différents de zéro. Les

solutions proposées sont le plus souvent des solutions approchées et le recours à l'Ordinateur est de rigueur. La lecture, voire l'évaluation, des publications est particulièrement ardue et il semble que l'Expérimentateur se contente généralement d'utiliser plus ou moins aveuglément des formules proposées par les spécialistes. Le Lecteur désirant en savoir davantage pourra par exemple consulter l'ouvrage récent de F. Gardiol [21]. Il y trouvera en quelques pages (et en français) les formules associées aux principales configurations décrites (Fig.37 et 38), ainsi que leurs conditions d'emploi. La plupart d'entre elles (ligne microruban, ligne à fente, ligne coplanaire) font aujourd'hui partie de l'arsenal des M.I.Cs (Microwave Integrated Circuits) rendus populaires par la "miniaturisation des hyperfréquences". Ce sont des circuits "planaires" obtenus par dépôts de parties métalliques sur l'une ou sur les deux faces d'une lame diélectrique. Leur fabrication fait appel à des techniques similaires à celles utilisées pour les circuits imprimés de l'Electronique [21].

#### 8. SUPERPOSITION D'ONDES GUIDEES : REGIME "SEMI-STATIONNAIRE".

Dans les études d'ondes guidées, il arrive que l'on ait à manipuler des fonctions du type :

$$U(x,y,z) = U(x,y) (\exp(i\gamma z) + r \exp(i\varphi) \exp(-i\gamma z)) , U \text{ réelle}, \gamma > 0.$$

Par exemple,  $U$  peut être une composante transversale de champ et  $\rho = r \exp(i\varphi)$  le coefficient de réflexion d'une onde incidente sur le plan  $z = 0$  ( $r > 0$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ). Pour  $x$  et  $y$  fixés,  $U$  est une fonction complexe de la variable réelle  $z$  :

$$U(x_0, y_0, z) = u(z) = A(\exp(i\gamma z) + r \exp(i\varphi) \exp(-i\gamma z)) , A \in \mathbb{R}, \gamma = 0.$$

Il est souvent judicieux d'écrire  $u$  sous la forme :

$$\begin{aligned} u(z) &= A \exp(i \frac{\varphi}{2}) (\exp(i(\gamma z - \frac{\varphi}{2})) + r \exp(-i(\gamma z - \frac{\varphi}{2}))) \\ &= A \exp(i \frac{\varphi}{2}) ((1+r) \cos \theta + (1-r) \sin \theta) , \\ &= A \exp(i \frac{\varphi}{2}) (1+r) (\cos \theta + i s \sin \theta) \end{aligned}$$

avec  $\theta = \gamma z - \frac{\varphi}{2}$  et  $s = (1 - r)/(1 + r)$ . Le réel  $s$ , ainsi défini, décroît de 1 à 0 quand  $r$  croît de 0 à 1 et :

$$|u|^2 = A^2(1 + r)^2 (\cos^2\theta + s^2 \sin^2\theta) = A^2(1 + r)^2 (1 - (1 - s^2) \sin^2\theta).$$

Ceci montre que  $|u|^2$  présente des maximums  $M$  et des minimums  $m$  régulièrement espacés. La distance entre deux maximums (ou deux minimums) consécutifs est  $d = \pi/\gamma = \lambda_g/2$ , et le rapport  $M/m$  n'est autre que  $s^2$ . Généralement  $|u|^2$  est accessible aux mesures, de sorte qu'il est possible de déterminer expérimentalement  $d$ ,  $s$  et  $r = (1 - s)/(1 + s)$ . Il est moins évident de déterminer  $\varphi$ . On peut pour cela remarquer que la distance du premier minimum à l'origine ( $z = 0$ ) est  $\ell = \pi/\gamma - \varphi/2\gamma$  ou  $-\varphi/2\gamma$ , suivant que  $\varphi$  est positif ou négatif. Cette distance  $\ell$  est donc supérieure ou inférieure à  $d/2$  suivant que  $\varphi$  est positif ou négatif. Aussi, mesure-t-on successivement  $d = \pi/\gamma$ , puis  $\ell$  ; après quoi la valeur de  $\varphi$  s'obtient par une formule qui dépend du signe de  $\ell - d/2$  :

$$\varphi = \begin{cases} 2\pi \left(1 - \frac{\ell}{d}\right) & \text{si } \ell \leq \frac{d}{2} \\ -2\pi \frac{\ell}{d} & \text{si } \ell < \frac{d}{2} \end{cases}$$

Le cas particulier  $s = 1$  ( $r = 0$ ) correspond à une onde progressive ; alors  $|u|$  est constant et il n'y a pas d'extremums. Si  $s = 0$  ( $r = 1$ ) les minimums sont nuls et on vérifie facilement qu'il s'agit d'un régime d'ondes stationnaires :  $\text{Re}(u(z) \exp(-i\omega t))$  est alors le produit d'une fonction de  $z$  (variable d'espace) par une fonction du temps. Les expérimentateurs disent parfois que le cas général ( $0 < s < 1$ ) correspond à un régime "semi-stationnaire" pour lequel ils définissent un paramètre appelé T.O.S. (taux d'ondes stationnaires) ou S.W.R. (standing wave ratio). Ce paramètre est bien sûr toujours lié à  $s$ , mais sa définition varie d'un auteur à l'autre. Ce peut être :  $s$ ,  $1/s$ ,  $1 - s$ , ... Il semble toutefois recommandé d'éviter que, compte tenu de la définition choisie, le T.O.S. soit plus grand pour une onde progressive que pour une onde stationnaire!

N.B. : Dans ce genre de mesures, on s'intéresse aux minimums plutôt qu'aux maximums ; ces derniers étant moins aigus, il est plus difficile de repérer leur position avec précision.

## Chapitre X

# *Notions sur la théorie des lignes en régime harmonique*

### 1. INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, nous appellerons ligne un guide métallique à deux conducteurs utilisé en régime TEM et dont la section droite (invariante par translation le long de Oz) n'est pas simplement connexe. On prendra systématiquement comme exemple le câble coaxial ou la ligne bifilaire, en supposant la fréquence inférieure à la fréquence de coupure  $f_c$  du fondamental de l'ensemble des modes TE ou TM (IX, §6.2). Tout physicien (et même tout technicien), appelé à manipuler des lignes, souhaite souvent disposer d'une théorie simple formulable dans le langage qu'il a l'habitude d'employer pour l'étude des "circuits basse fréquence" (B.F.). C'est une telle théorie que nous allons exposer ; elle fera uniquement appel aux notions familières de tension, de courant et d'impédance.

Une remarque préliminaire s'impose : en B.F., on manipule habituellement des amplitudes complexes associées à une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$ , utilisant ainsi une convention contraire à celle que nous avons décidé d'adopter dans ce cours (II, §2). Cette dernière, utilisée en B.F., conduirait par exemple à dire que l'impédance d'une "self" n'est pas  $iL\omega$  mais  $-iL\omega$ . Nous sommes donc confrontés à un embarrassant problème de choix :

- ou bien nous continuons à utiliser une dépendance temporelle en  $\exp(-i\omega t)$  et les techniciens devront, pour utiliser certaines formules que nous allons établir, modifier le signe des impédances complexes qu'ils ont pris l'habitude d'associer à une self ou à une capacité,

- ou bien nous décidons, à titre exceptionnel, d'utiliser dans ce chapitre une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$ . Ce sera alors à nous de modifier certaines de nos habitudes. Par exemple, si  $\gamma$  est un réel positif, il faudra nous souvenir que la fonction  $\exp(i\gamma z)$  représente une onde plane se propageant "vers les z négatifs".



Il semble plus raisonnable d'adopter la seconde attitude. C'est dire que dans ce chapitre on sous-entendra exceptionnellement une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$ . Il ne faut pas en déduire que toutes les formules établies au Chap. IX doivent être modifiées ; elles doivent simplement être remises en question. On remarquera ce faisant que la formule décrivant la structure du champ en régime TEM (IX, §6) est, quelle que soit la dépendance temporelle adoptée :

$$(1) \quad \vec{H} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{\eta}$$

pourvu que  $\vec{u}$  soit le vecteur unitaire de la direction de propagation, dirigé dans le sens de propagation. Rappelons que  $\eta$  est un réel positif dit impédance du diélectrique (IX, 81).

## 2. RAPPELS SUR LA THEORIE DES CIRCUITS B.F.

Certains lecteurs seront peut être vexés de se voir imposer une fois de plus un cours sur les "lois de Kirchhoff"... Mais l'Auteur a tellement vu d'étudiants trébucher sur ce sujet qu'il n'a pu s'empêcher de rappeler l'essentiel : une faute de signe est vite faite et elle peut être lourde de conséquences.

2.1. Courant continu. Soit un ensemble de points A, B, C, D, E, F. Relions certains d'entre eux par un dipôle formé d'une résistance en série avec un générateur de résistance interne nulle (Fig.39).

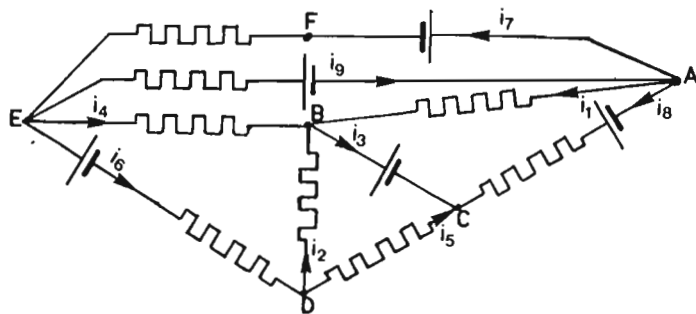


Figure 39. Sur la  $n^{\text{ième}}$  branche, on cherche  $i_n$  connaissant la résistance  $R_n$  et la f.e.m.  $E_n$  ; ces deux données sont des nombres positifs.

Nous obtenons un réseau de conducteurs. Tout point où arrivent au moins trois fils est un noeud ; A et C sont des noeuds, mais F n'en est pas un. Une branche est une portion de circuit comprise entre deux noeuds et le long de laquelle on ne trouve pas d'autre noeud ; AC, AFE sont deux branches, mais ABD n'en est pas une.

Etudier un réseau, c'est trouver dans chaque branche le sens du courant et l'intensité  $I$  (réel positif) connaissant les valeurs de toutes les résistances et de toutes les forces électromotrices (f.e.m.). Pour mettre en équations, il est conseillé d'opérer de la façon suivante :

a) Choisir sur chaque branche un sens conventionnel (donc arbitraire) indiqué par une flèche sur la fig.39. Ce sens n'est évidemment pas le sens du courant puisque ce dernier est inconnu.

b) Définir sur chaque branche une "intensité algébrique"  $i$  égale, par définition, au flux du vecteur densité de courant  $\vec{j}$  à travers une section droite orientée par le sens conventionnel choisi.  $i$  est donc un réel, positif si le sens du courant s'identifie au sens indiqué par la flèche, et négatif dans le cas contraire.

c) Ecrire pour chaque branche la loi d'Ohm généralisée :

$$(2) \quad V_A - V_B = Ri - e .$$

Tous les termes qui figurent dans cette formule doivent évidemment être définis avec soin. Il est entendu qu'en parcourant la branche dans le sens indiqué par la flèche on rencontre d'abord A, puis B :  $V_A$  et  $V_B$  sont les potentiels de ces deux points, tandis que  $e$ , dit "f.e.m. algébrique", est un réel égal au saut du potentiel lors de la traversée du générateur dont la f.e.m.  $E$  (réel positif) est supposée connue. Par exemple, sur la branche AFE :  $V_A - V_E = R_7 i_7 - (-E_7) = R_7 i_7 + E_7$ .

d) Ecrire qu'en chaque noeud la somme des "intensités algébriques" associées aux branches sur lesquelles la flèche est dirigée vers le noeud, est égale à la somme des intensités associées aux branches sur lesquelles la flèche n'est pas dirigée vers le noeud. C'est la "loi des noeuds" qui ne fait que traduire l'absence d'accumulation de charge en un point. On a par exemple au noeud B :  $i_1 + i_4 + i_2 = i_3$  ; au noeud C :  $i_8 + i_3 + i_5 = 0$ .

Une façon plus élégante d'énoncer cette loi consiste à définir en chaque noeud  $N$  un vecteur  $\vec{N}$  et un vecteur  $\vec{i}$ . Le vecteur  $\vec{N}$  a autant de composantes qu'il existe de branches ayant  $N$  pour extrémité. Une composante est égale à 1 ou -1 suivant que, sur la branche considérée, la flèche est ou n'est pas

dirigée vers N. Les composantes de  $\vec{i}$  sont les intensités  $i_k$  associées aux différentes branches. Par exemple, en B,  $\vec{i}$  et  $\vec{N}$  ont respectivement pour composantes  $(i_1, i_2, i_3, i_4)$  et  $(+1, +1, -1, +1)$ .

La loi des noeuds s'exprime alors sous forme condensée à l'aide du produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{N}$ . On a tout simplement :

$$(3) \quad \vec{N} \cdot \vec{i} = 0 ,$$

c'est-à-dire au point B :  $i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = 0$  .

Il est évidemment dangereux d'utiliser l'énoncé suivant, pourtant souvent proposé : La somme des intensités des courants qui arrivent est égale à la somme des intensités des courants qui partent. Encore une fois, on ne peut pas à priori distinguer les "courants qui arrivent" des "courants qui partent" puisque le sens du courant dans chaque branche est le plus souvent une inconnue du problème.

Remarques : Si sur l'une des branches se trouve un récepteur non polarisé (cuve à électrolyse par exemple), il faut le remplacer par un générateur en "opposition sur le courant". C'est dire qu'on ne peut pas déterminer le signe de  $e$ , donc mettre en équations, sans faire une supposition sur le signe de l'intensité algébrique  $i$ . Cette subtilité a peut-être trop souvent été utilisée jadis dans les problèmes de concours, mais qui ne l'a pas comprise ne maîtrise pas ses propres notations!

L'adjectif "algébrique" plusieurs fois employé dans ce paragraphe a été emprunté au langage de la Physique : les ingénieurs appellent souvent "nombre algébrique" ce que les mathématiciens appellent tout simplement un réel.

2.2. En B.F. Convenant que  $i$  représente l'intensité instantanée ( $i$  est alors une fonction du temps  $t$ ), la loi des noeuds garde la même forme. La loi d'Ohm généralisée doit par contre être modifiée puisqu'une branche est maintenant décrite par un dipôle R,L,C en série avec un générateur dont la f.e.m. algébrique instantanée  $e$  est une fonction de  $t$ .

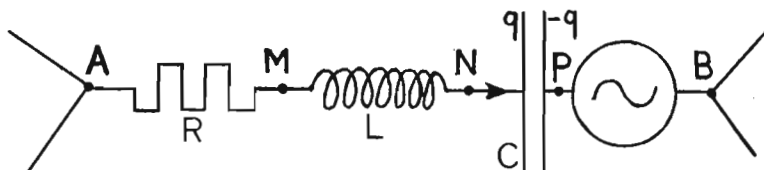


Figure 40. La flèche indique le sens conventionnel utilisé pour définir l'intensité instantanée  $i$ .

Si en parcourant la branche AB dans le sens de la flèche (Fig.40) on rencontre successivement M, N et P, on sait (1er cycle) que :

$$\begin{aligned} v_M - v_N &= L \frac{di}{dt}, & L > 0, \\ v_N - v_P &= \frac{q}{C}, & q = q_N, \\ i &= \frac{dq}{dt}, & v_A - v_M = Ri. \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$v_A - v_B = v_A - v_M + v_M - v_N + v_N - v_P + v_P - v_B = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} - e(t)$$

et par dérivation :

$$(4) \quad \frac{d}{dt} (v_A - v_B) = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i - \frac{de}{dt}.$$

2.3. En courant sinusoïdal. Introduisant les amplitudes complexes  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{E}$  associées aux fonction sinusoïdales  $v(t)$ ,  $i(t)$  et  $e(t)$  compte tenu d'une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$ , la relation (4) conduit à :

$$i\omega (V_A - V_B) = i\omega R \mathcal{J} + (i\omega)^2 L \mathcal{J} + \frac{1}{C} \mathcal{J} - i\omega \mathcal{E},$$

$$(5) \quad V_A - V_B = \mathfrak{Z} \mathcal{J} - \mathcal{E}.$$

Dans cette relation qu'il faut rapprocher de (2),  $\mathfrak{Z}$  est l'impédance complexe dont on rappelle l'expression :

$$(6) \quad \mathfrak{Z} = R + iL\omega + \frac{1}{iC\omega}.$$

Quant à la loi des noeuds, qui se traduit par la nullité d'une certaine combinaison linéaire d'intensité  $i_n$ , elle reste vraie quand on remplace ces intensités par leurs amplitudes complexes  $\mathcal{J}_n$ .

3. REPRESENTATION D'UNE LIGNE SANS PERTES PAR UN QUADRIPOLE A CONSTANTES REPARTIES.

Supposons tout d'abord qu'une onde TEM se propage le long de Oz, dans le sens de  $\vec{e}_z$ . Compte tenu de la dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$  :

$$(7) \quad \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) \exp(-ikz) , \quad (7') \quad \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y) \exp(-ikz)$$

avec :

$$(8) \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} , \quad (9) \quad \vec{E} \cdot \vec{e}_z = \vec{H} \cdot \vec{e}_z = 0 , \quad (10) \quad \vec{H} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{\eta} .$$

$V_2, V_1, I_1, I_2$  étant définis comme au Chap. IX, posons :

$$(11) \quad U = V_2 - V_1 , \quad I = I_2 = -I_1 ,$$

$$(12) \quad \mathcal{U} = U \exp(-ikz) , \quad \mathcal{J} = I_2 = I_2 \exp(-ikz) ,$$

en remarquant que  $\mathcal{J}$  est l'amplitude complexe associée à l'intensité algébrique  $I$ . Ce faisant, nous associons à toute valeur de  $z$  une intensité  $\mathcal{J}(z)$  et une tension  $\mathcal{U}(z)$ . Mais puisque, comme nous l'avons vu au Chap. IX :

$$(13) \quad \frac{U}{I} = \frac{V_2 - V_1}{I_2} = Z_c$$

où  $Z_c$  est l'impédance caractéristique de ligne, on constate que les dérivées  $\frac{d\mathcal{U}}{dz}$  et  $\frac{d\mathcal{J}}{dz}$  sont respectivement proportionnelles à  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{J}$  :

$$(14) \quad \frac{d\mathcal{U}}{dz} = -ik Z_c \mathcal{J} , \quad (14') \quad \frac{d\mathcal{J}}{dz} = -\frac{ik}{Z_c} \mathcal{U} ,$$

soit encore, en exprimant  $k$  en fonction de  $\omega$  et de la vitesse  $c$  de la lumière dans le diélectrique :

$$(15) \quad \frac{d\mathcal{U}}{dz} = -i\tilde{L}\omega \mathcal{J} , \quad (15') \quad \frac{d\mathcal{J}}{dz} = -i\tilde{C}\omega \mathcal{U}$$

avec :

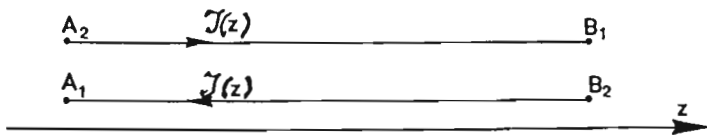
$$(16) \quad \tilde{L} = \frac{Z_c}{c} \quad \text{et} \quad \tilde{C} = \frac{1}{c Z_c} .$$

On vérifie aisément que  $\tilde{L}$  et  $\tilde{C}$  qui s'expriment respectivement en  $\Omega \cdot s/m$  et en  $s/\Omega \cdot m$  ont respectivement les dimensions d'une self par unité de longueur et d'une capacité par unité de longueur. Il faut connaître l'existence des deux relations suivantes, qui se déduisent immédiatement de (16) :

$$(17) \quad \tilde{L} \tilde{C} c^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{L}}{\tilde{C}} = Z_C^2 .$$

Les relations (15) et (15') ont été établies en supposant une propagation dans le sens de  $\vec{e}_z$ . On vérifiera (c'est un très bon exercice qu'il faut faire) qu'elles sont encore vraies dans le cas d'une propagation en sens contraire. Par suite de la linéarité des phénomènes étudiés, ces relations s'appliquent donc chaque fois que le champ électromagnétique peut être considéré comme la superposition de deux ondes TEM se propageant en sens contraire. C'est une hypothèse qui sera désormais sous-entendue, mais qu'il ne faudra pas oublier pour utiliser à bon escient la "théorie des lignes", c'est-à-dire pour tirer profit de l'équivalence ligne-quadripôle que nous allons maintenant établir.

Dans cette théorie, une ligne est schématisée par deux fils parallèles à Oz. Chacun de ces deux fils est parcouru par un courant sinusoïdal dont l'intensité complexe  $\tilde{J}$  dépend de  $z$ . Il en est de même pour la tension  $\tilde{U}(z)$  entre les fils (12). La figure 41 précise les notations en donnant notamment les sens conventionnels utilisés pour définir l'intensité  $\tilde{J}$  sur chacun des fils.



*Figure 41.* En pratique, une ligne est utilisée pour connecter un générateur (branché entre  $A_1$  et  $A_2$ ) à un dipôle d'utilisation (branché entre  $B_1$  et  $B_2$ ). Les sens conventionnels ont été choisis comme on l'aurait certainement fait en, B.F. dans une situation analogue.

Pour tenir compte de la variation de la tension et de l'intensité en fonction de  $z$ , on dit qu'un élément de ligne, de longueur  $dz$ , se comporte comme

un quadripôle  $M_1M_2N_1N_2$  constitué à partir d'une self  $\tilde{L} dz$  et d'une capacité  $\tilde{C} dz$  selon le schéma de la figure 42.

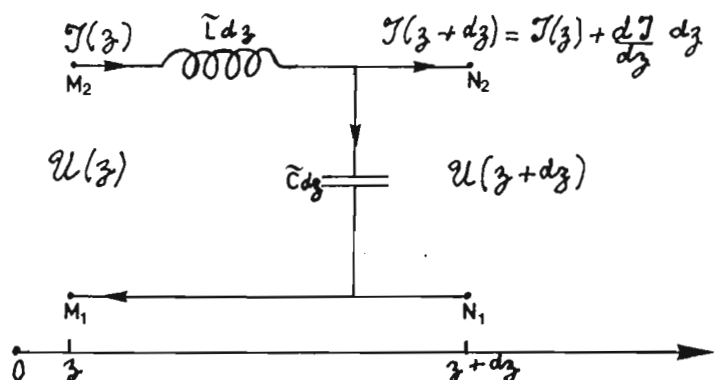


Figure 42.  $U(z)$  et  $U(z+dz)$  désignent respectivement les différences de potentiels  $V_{M_2} - V_{M_1}$  et  $V_{N_2} - V_{N_1}$ .

Dans ces conditions, l'utilisation des méthodes du calcul infinitésimal conduit à :

$$V_{M_1} - V_{N_1} = 0 = V_{M_1} - V_{M_2} + V_{M_2} - V_{N_2} + V_{N_2} - V_{N_1} ,$$

$$(18) \quad 0 = -U(z) + i\tilde{L}\omega J(z) dz + U(z+dz) = (i\tilde{L}\omega J + \frac{\partial U}{\partial z}) dz ,$$

$$J(z) = J(z+dz) + i\tilde{C}\omega dz (V_{N_2} - V_{N_1}) ,$$

$$(18') \quad 0 = \frac{dJ}{dz} + i\tilde{C}\omega U(z) .$$

On devra s'entraîner à retrouver ces résultats sans hésitation ; il suffit pour cela de connaître les impédances d'une self et d'une capacité et de se souvenir que seuls les termes du premier ordre doivent être conservés. Par exemple, pour déduire (18') de la relation précédente, on doit remplacer  $V_{N_2} - V_{N_1}$  par  $U(z)$  et non par  $U(z) + \frac{\partial U}{\partial z} dz$ , pour éviter de faire apparaître un terme en  $(dz)^2$ .

On constate que (18) et (18') sont identiques à (15) et (15'). Ainsi, pourvu que l'on connaisse  $Z_c$ , il n'est pas nécessaire de remonter aux équations de Maxwell pour établir (15) et (15'). Il y a un truc! Tout se passe comme si on avait affaire à une capacité et une self réparties le

long de la ligne selon le schéma de la fig.42. Notons au passage qu'en haute fréquence (H.F.), on ne peut donc pas négliger systématiquement l'impédance des fils de jonction comme on le fait en B.F.

#### 4. ETUDE DES LIGNES REELLES.

La ligne sans perte étudiée jusqu'ici n'est pas toujours un "bon modèle" pour l'étude des lignes réelles. Ces dernières sont toujours des "lignes à pertes" : le métal a une conductivité finie et le diélectrique une permittivité complexe. Dans ces conditions, l'étude rigoureuse des ondes TEM devient très difficile et c'est pourquoi elle n'a pas été abordée au chap. IX. Diverses méthodes approchées, uniquement développées dans les ouvrages spécialisés, permettent d'évaluer le rôle des pertes lorsqu'elles restent faibles. On propose souvent les conclusions suivantes :

a) Le modèle de la fig.42 peut être remplacé par celui de la fig.43 :  $\tilde{R} dz$  est une résistance montée en série avec la self  $\tilde{L} dz$  pour représenter les pertes dues à la conductivité finie du métal ;  $\tilde{G} dz$  est la conductance d'un dipôle résistif monté en parallèle sur la capacité  $\tilde{C} dz$  pour représenter les pertes dues à la conductivité du diélectrique imparfait.

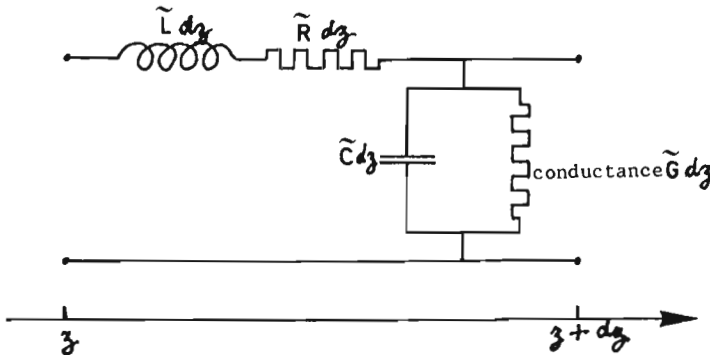


Figure 43. Quadripôle équivalent à un élément de ligne à perte. Les pertes sont prises en compte par deux dipôles ohmiques : l'un de résistance  $\tilde{R} dz$ , l'autre de conductance  $\tilde{G} dz$  (Se rappeler que la conductance est l'inverse de la résistance).

b) La résistance linéique  $\tilde{R}$  est, pour un coaxial ( $R_1, R_2$ ) et pour un métal de conductivité  $\sigma_m$  :



$$(19) \quad \tilde{R} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma_m}} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) .$$

Ne pas confondre  $\tilde{R}$  avec les rayons  $R_1$  et  $R_2$  des deux armatures du coaxial.

c) Pour le même coaxial, et pour un diélectrique de conductivité  $\sigma_d$ , la conductance linéique  $\tilde{G}$  peut être estimée par :

$$(19') \quad \tilde{G} = \frac{2\pi\sigma_d}{\ln(R_2/R_1)} .$$

Il importe de bien comprendre que ce modèle n'est plus une conséquence directe des équations de Maxwell. Il pourrait être présenté directement à partir du schéma de la fig.43. On doit le considérer comme un "modèle phénoménologique" susceptible de représenter une ligne réelle de bonne qualité (c'est-à-dire à faibles pertes) moyennant un choix judicieux de  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{R}$  et  $\tilde{G}$ . Par exemple, rien ne prouve a priori que le passage de la ligne idéale (Fig.42) à la ligne réelle (Fig.43) ne doive pas s'accompagner d'une modification des formules (16) donnant  $\tilde{L}$  et  $\tilde{C}$ . C'est en fait l'accord entre les prédictions théoriques et l'Expérience qui justifie avant tout l'utilisation des formules (16), (19) et (19').

Une fois le modèle adopté, la mise en équation est simple. Il suffit de remarquer que l'on passe du schéma de la fig.42 à celui de la fig.43 en remplaçant respectivement  $i\tilde{L}\omega$  par  $i\tilde{L}\omega + \tilde{R}$  et  $i\tilde{C}\omega$  par  $i\tilde{C}\omega + \tilde{G}$  (additivité des impédances ou des admittances de deux dipôles montés en série ou en dérivation). Les relations (15) et (15') doivent donc être remplacées par :

$$(20) \quad \frac{dU}{dz} = - (i\tilde{L}\omega + \tilde{R})J , \quad (20') \quad \frac{dJ}{dz} = - (i\tilde{C}\omega + \tilde{G})U .$$

On utilise plutôt le système équivalent :

$$(21) \quad \frac{d^2U}{dz^2} - (\tilde{R} + i\tilde{L}\omega) (\tilde{G} + i\tilde{C}\omega)U = 0 , \quad (21') \quad J = - \frac{1}{\tilde{R} + i\tilde{L}\omega} \frac{dU}{dz} .$$

Posant :

$$(22) \quad \beta^2 = - (\tilde{R} + i\tilde{L}\omega) (\tilde{G} + i\tilde{C}\omega) = \tilde{L}\tilde{C}\omega^2 - \tilde{R}\tilde{G} - i\omega(\tilde{L}\tilde{G} + \tilde{C}\tilde{R}) ,$$

et

$$(23) \quad \tilde{\beta}_c = \frac{\tilde{R} + i\tilde{L}\omega}{i\tilde{\beta}},$$

on en déduit la forme générale des fonctions  $\mathcal{U}(z)$  et  $\mathcal{J}(z)$ . Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{R}$  sont des constantes complexes respectivement associées à une "onde aller" et une "onde retour" :

$$(24) \quad \mathcal{U}(z) = \mathcal{A} \exp(-i\tilde{\beta}z) + \mathcal{R} \exp(i\tilde{\beta}z),$$

$$(24') \quad \mathcal{J}(z) = \frac{1}{\tilde{\beta}_c} (\mathcal{A} \exp(-i\tilde{\beta}z) - \mathcal{R} \exp(i\tilde{\beta}z)).$$

On n'oubliera pas que (22) définit  $\beta$  au signe près. Il existe en effet deux complexes opposés dont le carré est égal à un complexe donné. Puisque l'image de  $\beta^2$  est, pour de faibles pertes, située dans le quatrième quadrant, l'un de ces nombres a aussi son image dans le quatrième quadrant. C'est celui-ci que nous identifierons à  $\beta$ , pour que  $\beta$  tende vers le réel positif  $k$  lorsque les pertes deviennent de plus en plus faibles. On posera donc :

$$(25) \quad \beta = \gamma + i\alpha, \quad \text{avec} \quad \gamma > 0 \quad \text{et} \quad \alpha \leq 0.$$

Alors, si  $\tilde{R} = \tilde{G} = 0$  (ligne sans pertes), on a d'après (22) :

$$\tilde{L}\tilde{C}\omega^2 = \gamma^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\gamma,$$

ce qui entraîne  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = \omega\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}$ , et on a bien, compte tenu de (17) :

$$(26) \quad \beta = \gamma = \frac{\omega}{v} = k.$$

Si  $\tilde{R}$  et  $\tilde{G}$  sont différents de zéro (ligne à pertes),  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminés par (25) et les deux équations équivalentes à (22), savoir :

$$(27) \quad \gamma^2 - \alpha^2 = \tilde{L}\tilde{C}\omega^2 - \tilde{R}\tilde{G}, \quad (27') \quad 2\alpha\gamma = -\omega(\tilde{L}\tilde{G} + \tilde{R}\tilde{C}).$$

Dans le cas de faibles pertes, on peut se contenter de formules approchées obtenues en posant  $\gamma - k = \Delta\gamma$  et en négligeant les termes en  $(\Delta\gamma)^2$ ,  $\alpha^2$ ,  $\alpha\Delta\gamma$  et  $\tilde{R}\tilde{G}$  dans (27) et (27'). Tenant compte de  $\tilde{L}\tilde{C}\omega^2 = k^2$  et de  $\omega = kc$ , on trouve :

$$(28) \quad \Delta\gamma = 0 \quad \text{donc} \quad \gamma = k, \quad (28') \quad \alpha = -\frac{1}{2c} \left( \frac{\tilde{R}}{L} + \frac{\tilde{G}}{C} \right).$$

En l'absence de pertes, le nombre complexe  $\tilde{\mathcal{Z}}_c$  défini par (23) se réduit au réel  $\tilde{L}\omega/k$ , c'est-à-dire, d'après (16) à l'impédance caractéristique de ligne  $Z_c$ . C'est pourquoi  $\tilde{\mathcal{Z}}_c$  et  $\tilde{\mathcal{Y}}_c = 1/\tilde{\mathcal{Z}}_c$  sont respectivement appelés impédance et admittance caractéristiques de la ligne à pertes. Compte tenu de (22) :

$$(29) \quad \tilde{\mathcal{Z}}_c = \frac{\tilde{R} + i\tilde{L}\omega}{i\beta} = \frac{i\beta}{\tilde{G} + i\tilde{C}\omega} = \sqrt{\frac{\tilde{R} + i\tilde{L}\omega}{\tilde{G} + i\tilde{C}\omega}}.$$

On peut se contenter d'une valeur approchée :

$$(29') \quad \tilde{\mathcal{Z}}_c = \frac{\sqrt{i\tilde{L}\omega \left(1 - i \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}\omega}\right)}}{\sqrt{i\tilde{C}\omega \left(1 - i \frac{\tilde{G}}{\tilde{C}\omega}\right)}} \approx \sqrt{\frac{\tilde{L}}{\tilde{C}}} \left(1 - \frac{i}{2\omega} \left(\frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{C}}\right)\right) \approx Z_c \left(1 - \frac{i}{2\omega} \left(\frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{C}}\right)\right).$$

Alors, désignant par  $Y_c$  la partie réelle de l'admittance caractéristique  $\tilde{\mathcal{Y}}_c$ , on a, dans la même approximation,  $Y_c = 1/Z_c$  et la formule (28') peut s'écrire sous une forme symétrique plus facile à retenir :

$$(28'') \quad \alpha = -\frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{R}}{Z_c} + \frac{\tilde{G}}{Y_c} \right).$$

Il ne semble pas nécessaire de mémoriser toutes ces formules approchées. On retiendra surtout que les pertes croissent avec la fréquence : négligeables en ondes métriques, elles peuvent devenir importantes en ondes centimétriques et millimétriques (micro-ondes) où l'on préfère souvent utiliser des guides tubulaires. Dans le cas du coaxial, elles peuvent être minimisées par un bon choix du rapport  $R_2/R_1$  (de l'ordre de 3,6 si le métal des deux armatures est le même).

##### 5. IMPEDANCE ET THEORIE DES LIGNES.

Comme nous l'avons déjà signalé, une ligne est très souvent utilisée pour relier un générateur à un dipôle. Reportons-nous à la fig.41 et supposons le dipôle à droite et le générateur à gauche.

5.1. Impédance ; impédance ramenée. Toute section droite étant repérée par une valeur de  $z$ , on appelle impédance à l'abscisse  $z$  le rapport  $\mathcal{U}(z)/\mathcal{J}(z)$ . Convenant que l'abscisse  $z = 0$  correspond à l'entrée de la ligne dans le dipôle d'utilisation, posons  $z = -\ell$ . Chaque section droite peut être repérée par le nombre positif  $\ell$  (sa distance au dipôle) et l'impédance dans cette section, que l'on appelle "impédance ramenée", est un nombre complexe  $\mathfrak{Z}(\ell)$  que l'on calcule à partir de (24) et (24') :

$$(30) \quad \mathfrak{Z}(\ell) = \frac{\mathcal{U}(-\ell)}{\mathcal{J}(-\ell)} = \mathfrak{Z}_c \frac{\mathcal{A} \exp(i\beta\ell) + \mathcal{R} \exp(-i\beta\ell)}{\mathcal{A} \exp(i\beta\ell) - \mathcal{R} \exp(-i\beta\ell)} .$$

On utilise aussi une impédance normalisée  $\tilde{\mathfrak{Z}}(\ell)$ , grandeur sans dimension, définie par :

$$(30') \quad \tilde{\mathfrak{Z}}(\ell) = \frac{\mathfrak{Z}(\ell)}{\mathfrak{Z}_c} = \frac{\mathcal{A} \exp(i\beta\ell) + \mathcal{R} \exp(-i\beta\ell)}{\mathcal{A} \exp(i\beta\ell) - \mathcal{R} \exp(-i\beta\ell)} .$$

On a fréquemment à calculer  $\mathfrak{Z}(\ell)$  en fonction de l'impédance d'entrée  $\mathfrak{Z}(0)$  du dipôle :

$$(31) \quad \mathfrak{Z}(0) = \mathfrak{Z}_c \frac{\mathcal{A} + \mathcal{R}}{\mathcal{A} - \mathcal{R}} .$$

Il faut pour cela éliminer  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{R}$  entre (30') et (31). Le calcul est particulièrement simple si  $\mathfrak{Z}(0) = \mathfrak{Z}_c$ . Dans ce cas, (31) impose  $\mathcal{R} = 0$  et, par suite, d'après (30'),  $\tilde{\mathfrak{Z}}(\ell) = \mathfrak{Z}(\ell)/\mathfrak{Z}_c = 1$ . Ainsi, pour une ligne fermée sur son impédance caractéristique  $\mathfrak{Z}_c$  (appelée aussi impédance itérative), l'impédance ramenée est, quel que soit  $\ell$ , égale à  $\mathfrak{Z}_c$ . En notant que  $\mathcal{R} \exp(-i\beta\ell)$  représente une onde se dirigeant vers la gauche, on voit que la condition  $\mathfrak{Z}(0) = \mathfrak{Z}_c$  est équivalente à l'absence "d'onde de retour". On a donc un moyen de simuler une ligne infinie : il suffit de fermer la ligne sur son impédance caractéristique.

Revenons maintenant au cas général ( $\mathfrak{Z}(0) \neq \mathfrak{Z}_c$ ). S'il est mal conduit, le calcul peut devenir assez pénible. Il est conseillé d'introduire une nouvelle fonction  $\rho(\ell)$  :

$$(32) \quad \rho(\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{R} \exp(-i\beta\ell)}{\mathcal{A} \exp(i\beta\ell)} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{A}} \exp(-2i\beta\ell) = \rho(0) \exp(-2i\beta\ell) .$$

Alors, pour  $\ell$  fixé,  $\tilde{\mathfrak{Z}}$  apparaît comme une fonction homographique  $f$  de  $1/\rho$  :

$$(33) \quad \tilde{\rho} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = \frac{\frac{1}{\rho} + 1}{\frac{1}{\rho} - 1} = f\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

et

$$(33') \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\tilde{\rho} + 1}{\tilde{\rho} - 1} = f(\tilde{\rho}) .$$

Le calcul numérique est alors très facile, pourvu que l'on dispose au moins d'une "calculatrice programmable". On écrit d'abord un programme  $\mathbb{P}$  qui à tout complexe  $z$  (ne pas confondre avec la coordonnée  $z$ ) associe  $f(z) = (z + 1)/(z - 1)$ . Remarquant que  $1/\rho = f(\tilde{\rho})$  et que  $\tilde{\rho} = f(1/\rho)$ , on passe alors de  $\tilde{\rho}(0)$  à  $\tilde{\rho}(\ell)$  par les calculs suivants :

$$\begin{array}{lcl} \tilde{\rho}(0) & \rightarrow & \boxed{\text{Programme } \mathbb{P}} \rightarrow 1/\rho(0) \\ 1/\rho(0) & \rightarrow & \boxed{\text{Multiplication par } \exp(2i\beta\ell)} \rightarrow 1/\rho(\ell) . \\ 1/\rho(\ell) & \rightarrow & \boxed{\text{Programme } \mathbb{P}} \rightarrow \tilde{\rho}(\ell) \end{array}$$

Remarque : le passage de  $\tilde{\rho}$  à  $\rho$  ou de  $\rho$  à  $\tilde{\rho}$  peut aussi se faire par utilisation de l'abaque de Smith (voir §6), très employée par les ingénieurs avant le développement du calcul électronique.

Il peut aussi être intéressant, au moins pour certaines considérations théoriques, de disposer d'une formule reliant  $\tilde{\rho}(\ell)$  et  $\tilde{\rho}(0)$ . Partant de :

$$(32) \quad \rho(\ell) = \rho(0) \exp(-i2\beta\ell)$$

et tenant compte de (33'), on est conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\rho}(\ell) - 1}{\tilde{\rho}(\ell) + 1} &= \frac{\tilde{\rho}(0) - 1}{\tilde{\rho}(0) + 1} \exp(-2i\beta\ell) , \\ \tilde{\rho}(\ell) &= \frac{(1 + \exp(-2i\beta\ell))\tilde{\rho}(0) + 1 - \exp(-2i\beta\ell)}{(1 - \exp(-2i\beta\ell))\tilde{\rho}(0) + 1 + \exp(-2i\beta\ell)} , \\ (34) \quad \tilde{\rho}(\ell) &= \frac{\tilde{\rho}(0) + \text{th}(i\beta\ell)}{\tilde{\rho}(0) \text{th}(i\beta\ell) + 1} . \end{aligned}$$

On notera bien que cette formule se prête mal au calcul numérique sur calculatrice : elle contient des lignes hyperboliques d'argument complexe!

Toutefois, dans le cas des lignes sans pertes,  $\beta = k$ ,  $i\beta\ell$  est imaginaire pur, et (33) prend une forme plus agréable où figurent uniquement des lignes trigonométriques d'argument réel :

$$(34') \quad \tilde{\mathfrak{Z}}(\ell) = \frac{\tilde{\mathfrak{Z}}(0) + i \operatorname{tg}(k\ell)}{1 + i \tilde{\mathfrak{Z}}(0) \operatorname{tg}(k\ell)} .$$

5.2. Transformation d'impédance. Considérons (Fig.44) un dipôle d'utilisation D dont les bornes B<sub>1</sub> et B<sub>2</sub> sont reliées à deux points A<sub>1</sub> et A<sub>2</sub> par un tronçon de ligne de longueur  $\ell$ . On peut considérer que A<sub>1</sub> et A<sub>2</sub> sont les bornes d'un dipôle D' schématisé en trait interrompu. En B.F., où l'on négligerait l'impédance des fils de connexion, les impédances d'entrée  $\tilde{\mathfrak{Z}}_e$  et  $\tilde{\mathfrak{Z}}'_e$  de D et D' seraient les mêmes. Il n'en est pas de même en H.F. On peut même réaliser une transformation d'impédance par modification de  $\ell$ .

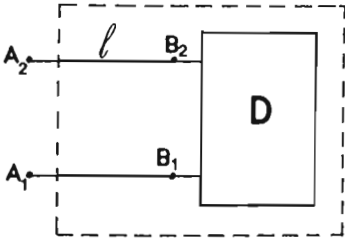


Figure 44

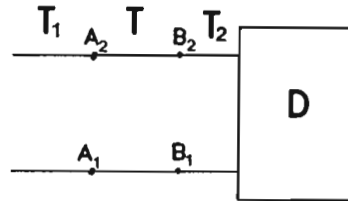


Figure 45

Bien que nous n'ayons pas l'intention d'étudier cette question en détail, quelques remarques générales s'imposent. On notera, en se limitant aux lignes sans pertes, que :

a) Pour  $\ell = \lambda/4$  (c'est-à-dire pour  $k\ell = \pi/2$ ), le second membre de (34') est indéterminé. On lève facilement l'indétermination en prenant les équivalents du numérateur et du dénominateur ; il apparaît que :

$$\tilde{\mathfrak{Z}}(\lambda/4) = 1/\tilde{\mathfrak{Z}}(0) , \quad \text{soit} \quad \tilde{\mathfrak{Z}}(\lambda/4) \tilde{\mathfrak{Z}}(0) = \tilde{\mathfrak{Z}}_c^2 .$$

On dit qu'une ligne de longueur  $\lambda/4$  est un inverseur d'impédance.

b) Pour  $\ell$  quelconque et  $\tilde{\mathfrak{Z}}(0) = 0$  :

$$\tilde{\mathfrak{Z}}(\ell) = i \operatorname{tg}(k\ell) .$$

Un tronçon de ligne en "court-circuit" est donc équivalent à une self. On

peut réaliser le court-circuit en plaçant perpendiculairement à l'axe Oz une plaque infiniment conductrice mais, en toute rigueur, la jonction des deux armatures d'un coaxial par un simple fil infiniment conducteur ne saurait convenir. Les conditions aux limites imposées au champ électrique par un tel fil sont en effet incompatibles avec l'hypothèse de deux ondes TEM

se propageant en sens contraire.

c) Pour  $\ell$  quelconque et pour  $\tilde{\mathcal{Z}}(0) = \infty$  :

$$\tilde{\mathcal{Z}}(\ell) = \frac{1}{i \operatorname{tg}(k\ell)}$$

et nous avons l'équivalent d'une capacité.

5.3. Exercice sur la mise en série de plusieurs lignes. La fig.45 montre trois tronçons de lignes  $T_1$ ,  $T$ ,  $T_2$ , montés en série et d'impédances caractéristiques  $\tilde{\mathcal{Z}}_{c,1}$ ,  $\tilde{\mathcal{Z}}_c$  et  $\tilde{\mathcal{Z}}_{c,2}$ . Par hypothèse,  $\tilde{\mathcal{Z}}_{c,2}$  est égale à l'impédance d'entrée du dipôle  $D$  auquel est reliée l'extrémité droite de  $T_2$ . Si  $\tilde{\mathcal{Z}}_{c,1}$  est donnée, peut-on choisir  $\tilde{\mathcal{Z}}_c$  pour qu'une onde se propageant sur  $\tilde{\mathcal{Z}}_1$  de gauche à droite ne soit pas accompagnée d'une onde de retour ?

La réponse est affirmative. Il suffit que  $T$  joue le rôle d'un transformateur d'impédance, transformant  $\tilde{\mathcal{Z}}_{c,2}$  en  $\tilde{\mathcal{Z}}_{c,1}$ . On y parvient en prenant  $A_2 B_2 = \ell = \lambda/4$  et  $\tilde{\mathcal{Z}}_{c,1} \tilde{\mathcal{Z}}_{c,2} = \tilde{\mathcal{Z}}_c^2$ .

5.4. Adaptation d'impédance. On sait qu'en courant continu la puissance  $P$  fournie par un générateur ( $E$ ,  $R_0$ ) dans une résistance  $R$  est maximale si  $R = R_0$  (d'après  $P = \frac{R E^2}{(R + R_0)^2}$ , d'où  $\frac{dP}{dR} = \frac{E^2(R_0 - R)}{(R + R_0)^3}$ ). Un résultat analogue existe en courant sinusoïdal. Soit  $\mathcal{E}$  la force électromotrice complexe (ne pas confondre avec le champ électrique) d'un générateur d'impédance interne complexe  $\tilde{\mathcal{Z}}_0 = A_0 + iB_0$  débitant dans un dipôle  $D$  d'impédance complexe  $\tilde{\mathcal{Z}} = A + iB$ .  $\mathcal{V}$  désignant la tension complexe aux bornes de  $D$  et  $\mathcal{J}$  l'intensité complexe, on sait que la puissance moyenne fournie au dipôle est :

$$P = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \mathcal{V} \bar{\mathcal{J}} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E} \tilde{\mathcal{Z}}}{\tilde{\mathcal{Z}} + \tilde{\mathcal{Z}}_0} \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\bar{\tilde{\mathcal{Z}}} + \bar{\tilde{\mathcal{Z}}}_0} \right) = \frac{1}{2} \mathcal{E} \bar{\mathcal{E}} \frac{A}{(A + A_0)^2 + (B + B_0)^2}.$$

$\mathcal{E}$  et  $\tilde{\mathcal{Z}}_0$  étant fixés, cherchons comment choisir  $\tilde{\mathcal{Z}}$  pour que  $P$  soit la plus grande possible. On prendra d'abord  $B = -B_0$ , puis on choisira  $A$  pour rendre  $A/(A + A_0)^2$  maximal, ce qui conduit à  $A = A_0$ . La puissance fournie au dipôle est donc maximale si  $\tilde{\mathcal{Z}} = \bar{\tilde{\mathcal{Z}}}_0$ . On dit alors que le générateur débite sur une charge adaptée ; il est utilisé au mieux.

En H.F., étant donné un générateur et un dipôle d'utilisation d'impédance d'entrée  $\tilde{\mathcal{Z}}$ , on peut espérer réaliser l'adaptation d'impédance par un choix convenable de la ligne de connexion. Il faut faire en sorte que l'impédance du dipôle, ramenée aux bornes du générateur, soit égale à l'impédance conjuguée de son impédance interne.

## 6. L'ABAQUE DE SMITH.

L'abaque de Smith (Fig.47), dont l'aspect rébarbatif effrayait les étudiants de ma génération, n'est autre qu'une partie de l'image d'une feuille de papier quadrillé dans la transformation conforme définie par  $g(z) = \frac{z-1}{z+1}$ . Pour étudier rapidement ses propriétés, nous utiliserons deux "plans complexes"  $z$  et  $Z$  pour représenter les complexes  $z = x + iy$  et  $Z = X + iY$ . Posant  $Z = g(z)$ , on a :

$$Z = X + iY = g(z) = \frac{z-1}{z+1} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy},$$

$$z = x + iy = g^{-1}(Z) = \frac{1+Z}{1-Z} = \frac{X+1+iY}{1-X-iY}.$$

Ces formules définissent une correspondance bijective entre le plan complexe  $(z)$  privé du point  $z = -1$  et le plan complexe  $(Z)$  privé du point  $Z = 1$ . Il est commode d'introduire un point à l'infini dans chacun des plans complexes. Le point  $Z = 1$  apparaît comme l'image du point à l'infini de  $(z)$ ; le point  $z = -1$  comme l'image du point à l'infini de  $(Z)$ . On sait [7] qu'une droite  $\delta$  de  $(z)$  se transforme en un cercle  $C$  (éventuellement dégénéré en une droite) de  $(Z)$  et tous ces cercles passent par le point  $Z = 1$ , image du point à l'infini de  $(z)$ .

L'axe réel de  $(z)$  (la droite  $y = 0$ ) donne l'axe réel de  $(Z)$  car, si  $z$  est réel,  $Z$  l'est aussi. Une droite  $x = x_0$  parallèle à  $Oy$  (donc orthogonale à  $Ox$ ) donne un cercle passant par  $Z = 1$  et orthogonal à  $OX$  (conservation des angles). Ce cercle recoupe  $OX$  en un point d'abscisse  $X_0$  qui ne peut être que le transformé du point  $z = x_0$ . On a donc  $X_0 = (x_0 - 1)/(x_0 + 1)$ . A titre d'exemple, on a représenté sur la fig.46.b les cercles  $C_0, C_1$  et  $C_2$  correspondant respectivement aux droites  $\delta_0, \delta_1$  et  $\delta_2$  de la fig.46.a qui ont pour équation  $x = 0, x = 1$  et  $x = 2$ .

Une droite  $\delta'$  d'équation  $y = y_0$  perpendiculaire à  $Oy$  (c'est-à-dire à  $\delta_0$ ) donne un cercle  $C'$  passant par  $Z = 1$  et orthogonal à  $C_0$ . Ce cercle est donc centré sur la droite  $X = 1$  qu'il recoupe en un point d'ordonnée  $Y_0$ . Partant de  $x + iy_0 = \frac{1 + (1 + iY_0)}{1 - (1 + iY_0)}$  et égalant les parties imaginaires, on trouve que  $Y_0 = 2/y_0$ . Il est donc à nouveau très facile de déterminer la droite  $\delta'$  associée à un cercle  $C'$ . Sur la fig.46.b on a représenté les cercles  $C'_1, C'_2, C'_{-1}, C'_{-2}$  respectivement associés aux droites  $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_{-1}, \delta'_{-2}$  ayant pour équation  $y = 1, y = 2, y = -1$  et  $y = -2$  et représentées sur la fig.46.a.



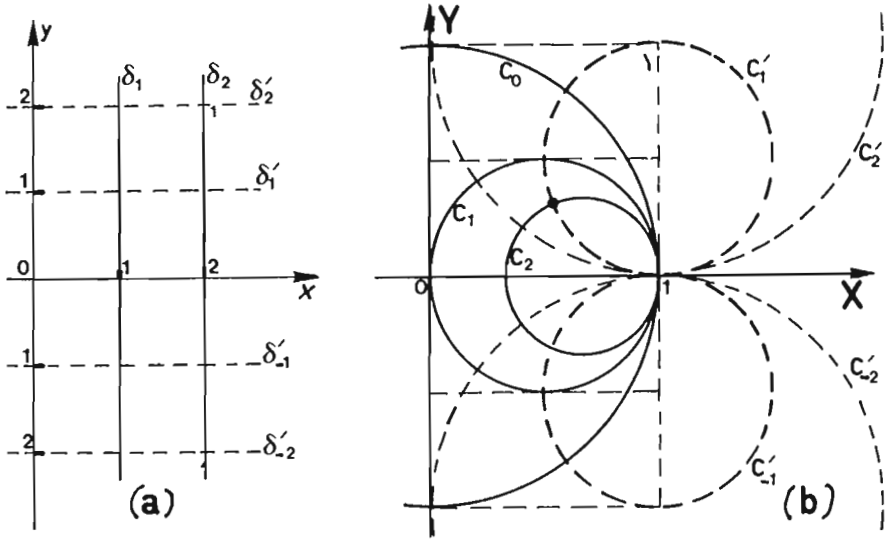


Figure 46.

(a) Le plan complexe  $(z)$  :  $\delta_0$  est confondue avec  $Oy$  et les droites  $\delta'_j$  sont représentées en trait interrompu ;

(b) Le plan complexe  $(Z)$  : les courbes  $C'_j$ , images des droites  $\delta'_j$ , sont aussi en trait interrompu.

On obtient l'abaque de Smith (Fig.47) en dessinant un grand nombre de cercles  $C$  et un grand nombre de cercles  $C'$  et en ne retenant que la partie du plan complexe  $(Z)$  correspondant à l'intérieur du cercle  $C_0$  (centre 0, rayon 1). Cet abaque peut être utilisé :

a) Pour déterminer  $Z$  à partir de  $z$ . Par exemple, sur la fig.46.b, le point  $P$  situé à l'intersection des cercles  $C_2$  et  $C'_1$  donne la valeur de  $Z$  pour  $z = 2 + i$ . Posant  $Z = R \exp(i\varphi)$ ,  $\varphi$  est l'angle de  $OX$  avec  $OP$  et  $|Z| = R$  est la longueur de  $OP$ .

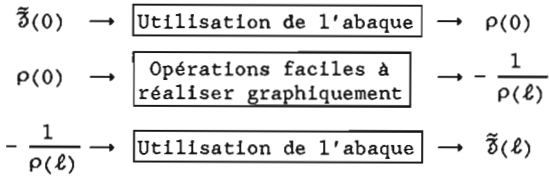
b) Pour déterminer  $z = x + iy$  à partir de  $Z$  ou, plus précisément, à partir de  $-1/Z = -\exp(-i\varphi)/R$ . On passe en effet de  $-1/Z$  à  $z$  de la même façon que l'on passe de  $z$  à  $Z = g(z)$  puisque :

$$g\left(-\frac{1}{Z}\right) = \frac{-\frac{1}{Z} - 1}{-\frac{1}{Z} + 1} = \frac{1 + Z}{1 - Z} = z .$$

C'est évidemment parce que le module de  $\rho$  est inférieur à 1 que l'intérieur du cercle  $C_0$  est la seule région intéressante.

Ce qui précède étant compris, l'utilisation de l'abaque pour les problèmes déjà étudiés au §5 n'est qu'une affaire d'entraînement (travaux pra-

tiques). Son emploi évite simplement l'écriture du programme  $\mathbb{P}$  (§5.1). On passe de  $\tilde{\zeta}(0)$  à  $\tilde{\zeta}(\ell)$  de la façon suivante :



L'auteur aurait volontiers relégué l'abaque au rayon des outils démodés, à côté de la règle à calcul. Il a finalement profité de l'occasion pour montrer l'éventuel intérêt des méthodes graphiques en calcul numérique.

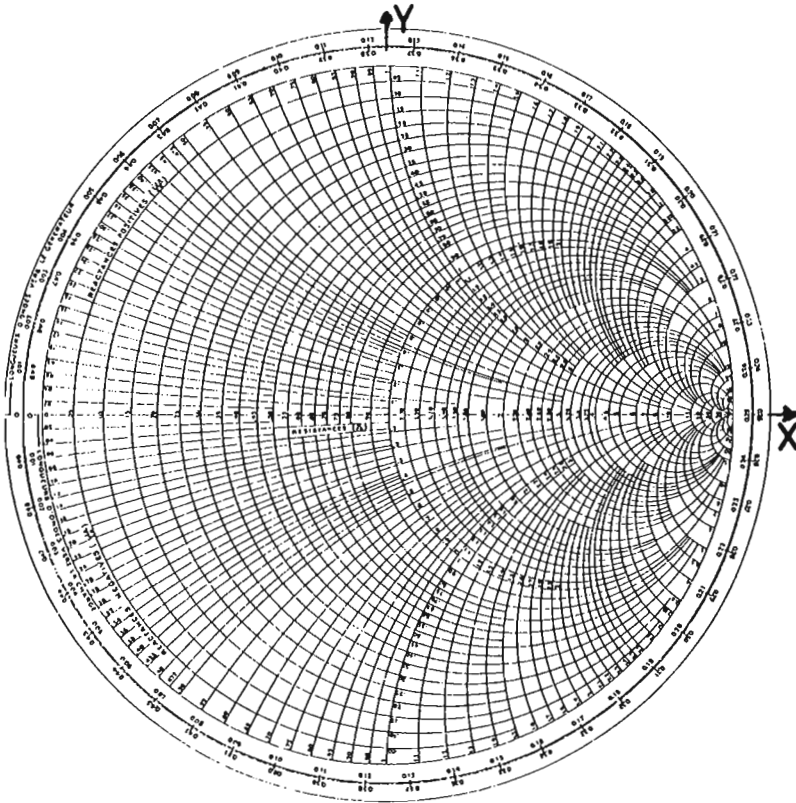


Figure 47. L'abaque de Smith, extraite d'un ouvrage de J. Quinet auquel on pourra par exemple se reporter pour des conseils d'emploi ("Théorie et pratique des circuits de l'électronique et des amplificateurs", chez Dunod, 1963). On a rappelé la position des axes OX et OY pour faciliter la comparaison avec la fig.46.b.

# Chapitre XI

## *Guides diélectriques*

### I. INTRODUCTION

Soit une structure diélectrique sans perte, invariante par translation suivant Ox. On peut se poser une question analogue à celle du début du chap. IX : existe-t-il, en régime harmonique et en l'absence de sources, des champs susceptibles de se propager le long de Ox ? Cette question pose un problème difficile que nous nous contenterons d'étudier moyennant deux hypothèses simplificatrices :

- a) les paramètres électromagnétiques de la structure dépendent d'une seule variable (que nous appellerons y) et les champs sont indépendants de z ;
- b) les champs sont rectilignement polarisés de sorte que, soit le champ électrique, soit le champ magnétique vibre parallèlement à Oz.

Ces hypothèses permettront de manipuler une seule fonction  $u(x,y)$  définie selon le cas de polarisation étudié par :

$$\vec{E} = u(x,y) \vec{e}_z, \quad \text{cas } \vec{E} // \quad \text{ou} \quad \vec{H} = u(x,y) \vec{e}_z, \quad \text{cas } \vec{H} // .$$

Les notations seront donc les mêmes qu'au chap. VIII. On traduira la propagation le long de Ox en posant  $u(x,y) = \Phi(y) \exp(i\alpha x)$ ,  $\alpha$  étant un réel que l'on supposera positif en convenant d'orienter Ox dans le sens de propagation. A priori la fonction  $\Phi$  dépendra de la constante de propagation  $\alpha$  mais, pour ne pas compliquer les notations, nous la noterons  $\Phi(y)$  plutôt que  $\Phi(y,\alpha)$  ou  $\Phi_\alpha(y)$ .

### 2. LE GUIDE "PLANS-PARALLELES" OU "SLAB"

2.1. Généralités. C'est un cas particulier de la structure précédente, qui doit être considéré comme un problème canonique auquel on se réfère cons-

tamment. Un slab (ce mot américain semble universellement utilisé) est un milieu stratifié formé d'une couche mince d'indice  $n_2$  et d'épaisseur  $e$ , reposant sur un substrat (substrate) d'indice  $n_1$  et recouverte d'un "superstrat" (superstrate) d'indice  $n_3$  (Fig.48). Compte tenu des matériaux utilisés en pratique, nous supposons que la perméabilité est partout  $\mu_0$ .

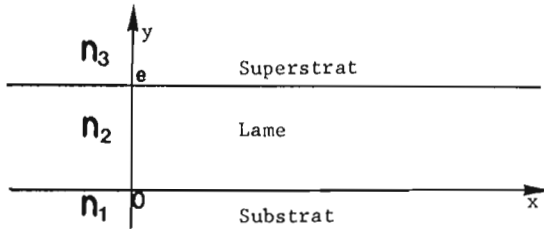


Figure 48. Le slab

Nous nous demandons s'il est possible de trouver un réel  $\alpha$  et une fonction  $\Phi$  tels que :

$$(1) \quad u(x,y) = \Phi(y) \exp(i\alpha x)$$

et, pour pouvoir parler d'onde guidée, nous souhaitons que  $|\Phi|$  prenne seulement des valeurs notables dans le voisinage de la lame centrale. Nous voulons en tout cas que  $\Phi(\pm\infty) = 0$ .

Quelle que soit la polarisation,  $u$  vérifie une équation de Helmholtz dans chacun des trois milieux homogènes. Si  $k_j = k_0 n_j$  est le "ka" du  $j^{\text{ième}}$  milieu :

$$(2) \quad \Delta u + k_j^2 u = 0, \quad \text{d'où} \quad (3) \quad \Phi'' + (k_j^2 - \alpha^2)\Phi = 0.$$

Posant  $\beta_j^2 = k_j^2 - \alpha^2$ , on en déduit que, dans chacun des trois milieux :

$$(4) \quad \Phi(y) = A_j^- \exp(-i\beta_j y) + A_j^+ \exp(i\beta_j y)$$

avec  $\beta_j = \sqrt{k_j^2 - \alpha^2}$  ou  $i\sqrt{\alpha^2 - k_j^2}$  suivant que  $\alpha$  est inférieur ou supérieur à  $k_j$ .

Si  $\alpha$  était inférieur à  $k_3$ ,  $\beta_3$  serait un réel positif et  $\Phi$  serait, pour  $y > e$ , une fonction sinusoïdale qui ne tendrait pas vers zéro à l'infini. Seules les valeurs de  $\alpha$  supérieures à  $k_3$  sont donc susceptibles de convenir ; alors  $i\beta_3 = -\sqrt{\alpha^2 - k_3^2}$  et, pour que  $\Phi$  reste borné,  $A_3^-$  doit être nul. Un raisonnement semblable montre que  $\alpha$  doit être supérieur à  $k_1$  et que  $A_1^+$  doit être nul. La constante de propagation  $\alpha$  est donc nécessairement supérieure au plus grand des deux nombres  $k_1$  et  $k_3$ .

Il est un peu plus difficile, mais instructif, d'établir que  $\alpha$  est néces-

sairement inférieur à  $k_2$  (c'est-à-dire que  $\beta_2^2 > 0$ ). On remarquera pour cela que, dans chacun des trois milieux :

$$(5) \quad \Phi'' + \beta_j^2 \Phi = 0, \quad (5') \quad \bar{\Phi} \Phi'' + \beta_j^2 \bar{\Phi} \Phi = 0,$$

$$\int_a^b \bar{\Phi} \Phi'' dy + \beta_j^2 \int_a^b \Phi \bar{\Phi} dy = 0,$$

$$(5'') \quad [\bar{\Phi} \Phi']_a^b - \int_a^b \bar{\Phi}' \Phi' dy + \beta_j^2 \int_a^b \Phi \bar{\Phi} dy = 0.$$

Dans le cas  $\vec{E} //$ , les relations de passage en  $y = 0$  et  $y = e$  imposent la continuité de  $\Phi$  et  $\Phi'$ , donc de  $\bar{\Phi} \Phi'$ . On a donc :

$$[\bar{\Phi} \Phi']_e^{+\infty} = \int_e^{+\infty} \Phi' \bar{\Phi}' dy - \beta_3^2 \int_e^{+\infty} \Phi \bar{\Phi} dy,$$

$$[\bar{\Phi} \Phi']_0^e = \int_0^e \Phi' \bar{\Phi}' dy - \beta_2^2 \int_0^e \Phi \bar{\Phi} dy,$$

$$[\bar{\Phi} \Phi']_{-\infty}^0 = \int_{-\infty}^0 \Phi' \bar{\Phi}' dy - \beta_1^2 \int_{-\infty}^0 \Phi \bar{\Phi} dy,$$

soit, en additionnant membre à membre :

$$(6) \quad [\bar{\Phi} \Phi']_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi' \bar{\Phi}' dy - \beta_3^2 \int_e^{+\infty} \Phi \bar{\Phi} dy - \beta_1^2 \int_{-\infty}^0 \Phi \bar{\Phi} dy - \beta_2^2 \int_0^e \Phi \bar{\Phi} dy.$$

Compte tenu de la forme retenue pour  $\Phi$  dans chacun des deux demi-espaces  $y > e$  et  $y < 0$ , le premier membre est nul et nécessairement :

$$(7) \quad -\beta_3^2 \int_e^{\infty} \Phi \bar{\Phi} dy - \beta_1^2 \int_{-\infty}^0 \Phi \bar{\Phi} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi' \bar{\Phi}' dy = \beta_2^2 \int_0^e \Phi \bar{\Phi} dy.$$

Les intégrales figurant dans (7) étant positives (intégrales de fonctions positives),  $\beta_3^2$  et  $\beta_1^2$  étant négatifs, il en résulte que  $\beta_2^2 > 0$  (C.Q.F.D.).

Finalement  $\alpha$  doit nécessairement vérifier la double inégalité :

$$(8) \quad \max(k_1, k_3) < \alpha < k_2.$$

Le lecteur vérifiera que ce résultat reste vrai dans le cas  $\vec{H} //$  (on rappelle que les conditions de passage se traduisent alors par la continuité de  $\Phi$  et  $\Phi'/\epsilon$ ). De la double inégalité (8) découle évidemment la première règle pratique à retenir : Pour qu'un slab puisse être utilisé comme guide,

il faut que l'indice de la couche centrale soit, à la fois, supérieur à l'indice du substrat et à l'indice du superstrat.

2.2. Forme du champ ; équation vérifiée par  $\alpha$ . Compte tenu de ce qui précède, toute fonction  $\Phi$  susceptible de convenir est de la forme :

$$(9) \quad \Phi(y) = \begin{cases} A_3^+ \exp(i\beta_3 y) & \text{si } y > e, \\ A_2^- \exp(-i\beta_2 y) + A_2^+ \exp(i\beta_2 y) & \text{si } 0 < y < e, \\ A_1^- \exp(-i\beta_1 y) & \text{si } y < 0, \end{cases} \quad \begin{aligned} \beta_3 &= i\sqrt{\alpha^2 - k_3^2} \\ \beta_2 &= \sqrt{k_2^2 - \alpha^2} \\ \beta_1 &= i\sqrt{\alpha^2 - k_1^2} \end{aligned}$$

Mais les relations de passage en  $y = 0$  et  $y = e$  imposent quatre relations entre les quatre constantes  $A_3^+$ ,  $A_2^-$ ,  $A_2^+$ ,  $A_1^-$ . Ces constantes peuvent donc, pour  $\alpha$  fixé, être considérées comme les inconnues d'un système linéaire homogène. Pour que ce système ait une solution non nulle, il faut que son discriminant  $\Delta$  (qui dépend de  $\alpha$ ) soit nul. Les valeurs de  $\alpha$  susceptibles de convenir sont donc les racines réelles de l'équation :

$$(10) \quad \Delta(\alpha) = 0 .$$

L'écriture explicite de cette équation est une affaire technique. Dans le cas  $\vec{E} //$ , écrivant la continuité de  $\Phi'/\Phi$  en  $y = e$  et  $y = 0$ , on obtient :

$$(11) \quad \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{-A_2^- \exp(-i\beta_2 e) + A_2^+ \exp(i\beta_2 e)}{A_2^- \exp(-i\beta_2 e) + A_2^+ \exp(i\beta_2 e)}, \quad (11') \quad \frac{-\beta_1}{\beta_2} = \frac{-A_2^- + A_2^+}{A_2^- + A_2^+} .$$

Posant  $r = A_2^+/A_2^-$ , on tire successivement de (11') et (11) :

$$(12) \quad r = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} \quad \text{et} \quad (12') \quad r \exp(2i\beta_2 e) = \frac{\beta_2 + \beta_3}{\beta_2 - \beta_3} .$$

L'élimination de  $r$  entre (12) et (12') montre que (10) est équivalente à :

$$(10') \quad \exp(2i\beta_2 e) = \frac{(\beta_2 + \beta_3)(\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_2 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_1)} .$$

Il s'agit d'une équation transcendante qui, a priori, exige une résolution numérique. Nous allons cependant montrer que la discussion du nombre de ses racines peut être faite graphiquement. Auparavant, deux remarques s'imposent :

a)  $\alpha$  étant supposé connu, les quatre coefficients  $A_3^+$ ,  $A_2^-$ ,  $A_2^+$ ,  $A_1^-$  sont déterminés à un facteur constant près car ce sont les solutions d'un système linéaire homogène.

b) Puisque  $\beta_2$  est réel, tandis que  $\beta_1$  et  $\beta_3$  sont imaginaires purs, il découle de (12) que le rapport  $r = A_2^+/A_2^-$ , quotient de deux imaginaires conjugués, est de module unité. On notera, en se reportant au Chap. VIII, que  $r$  n'est autre que le coefficient de réflexion de Fresnel associé à la réflexion totale d'une onde plane sur le dioptre formé par la frontière entre la lame (milieu 2) et le substrat (milieu 1).

Revenant à la résolution de (10'), il est commode de poser :

$$(13) \quad \beta_1 = ib_1, \quad \frac{b_1}{\beta_2} = t_1 = \operatorname{tg} \Phi_1, \quad 0 < \Phi_1 < \pi/2$$

$$(13') \quad \beta_3 = ib_3, \quad \frac{b_3}{\beta_2} = t_3 = \operatorname{tg} \Phi_3, \quad 0 < \Phi_3 < \pi/2.$$

Alors, (10') s'écrit :

$$\exp(2i\beta_2 e) = \frac{1 + it_1}{1 - it_1} \times \frac{1 + it_3}{1 - it_3},$$

soit, en prenant les arguments des deux membres :

$$(14) \quad 2e\beta_2 = 2 \operatorname{Arctg}(t_1) + 2 \operatorname{Arctg}(t_3) + 2m\pi.$$

Le premier membre étant positif sur l'intervalle qui contient les valeurs de  $\alpha$  susceptibles de convenir et la fonction Arctangente prenant ses valeurs dans l'intervalle  $(0, \pi/2)$ , l'entier  $m$  ne peut être négatif. Il est d'usage de définir une constante de propagation normalisée  $\tilde{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha/k_0$  où  $k_0$  est le "ka" du vide à la pulsation  $\omega$  ( $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ). Après quelques manipulations algébriques et compte tenu des définitions de  $b_1$ ,  $b_3$  et  $\beta_2$ , (14) devient :

$$(14') \quad \frac{2\pi e}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - \tilde{\alpha}^2}} \left( \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}^2 - n_1^2}{n_2^2 - \tilde{\alpha}^2}} + \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}^2 - n_3^2}{n_2^2 - \tilde{\alpha}^2}} + m\pi \right).$$

La nouvelle inconnue  $\tilde{\alpha}$  est un nombre sans dimension compris dans l'intervalle  $I = (\max(n_1, n_3), n_2)$ . En définissant une épaisseur normalisée  $\tilde{e} = 2\pi e/\lambda_0 = ek_0$  et en désignant par  $F_m(\tilde{\alpha})$  le second membre de (14'), on

peut construire les graphes  $C_m$  des fonctions  $F_m(\tilde{\alpha})$  sur l'intervalle I. Sans même avoir recours à la notion de dérivée, il apparaît que, pour m fixé ( $m \in \mathbb{N}$ ),  $F_m(\alpha)$  est une fonction monotone croissante admettant une asymptote verticale pour  $\tilde{\alpha} = n_2$ . Si nous supposons  $n_1 > n_3$ ,  $I = (n_1, n_2)$  :

$$F_m(n_1) = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \left( \text{Arctg} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_3^2}{n_2^2 - n_1^2}} + m\pi \right)$$

et l'on est conduit aux courbes de la fig.49 qui dépendent uniquement des valeurs des indices (ici  $n_1 = 1.515$ ,  $n_2 = 1.570$ ,  $n_3 = 1$ ).

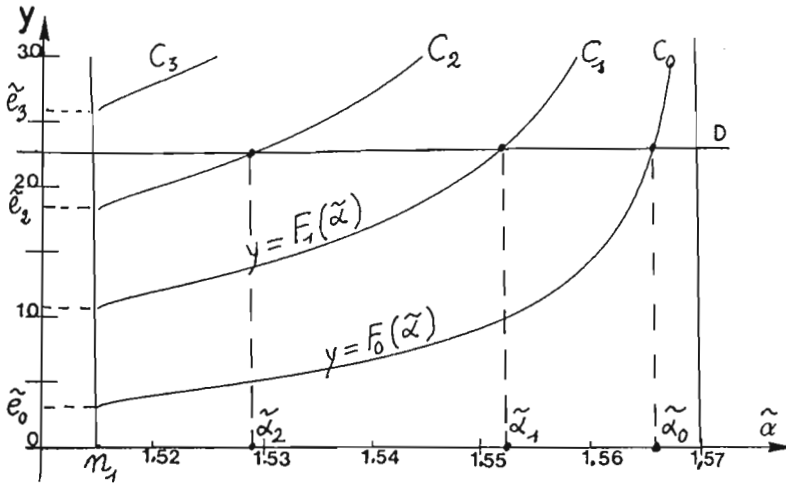


Figure 49.  $\tilde{e}_0, \tilde{e}_1 \dots \tilde{e}_n$  représentent les coordonnées des points d'intersection des courbes  $C_0, C_1 \dots C_n$  avec la droite  $\tilde{\alpha} = n_1$ . Une courbe  $C_n$  est la partie du graphe de  $y = F_n(\tilde{\alpha})$  correspondant à l'intervalle  $n_1 < \tilde{\alpha} < n_2$ . On notera que  $\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  forment une progression arithmétique de raison  $\frac{\pi \sqrt{n_2^2 - n_1^2}}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}$  et que

$$\tilde{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \text{Arctg} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_3^2}{n_2^2 - n_1^2}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}$$

La discussion de (10') est alors très facile. Soit  $c_0$  la vitesse de la lumière dans le vide. Achéons de déterminer le problème étudié en précisant l'épaisseur  $e$  et la valeur de  $\omega$ , donc en se donnant  $\tilde{e} = \frac{2\pi e}{\lambda_0} = \frac{2\pi e}{c_0 T} = \frac{\omega e}{c_0}$ . Les

valeurs possibles de  $\tilde{\alpha}$  sont les abscisses des éventuels points d'intersec-



tion de la droite D (d'équation  $y = \tilde{e}$ ) avec les différentes courbes  $C_n$ . Sur la fig.49, compte tenu de la valeur de  $\tilde{e}$  choisie, on a, par exemple, trois valeurs possibles  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  correspondant à  $m = 0, m = 1$  et  $m = 2$ . A chaque valeur de  $\alpha$  correspond une fonction  $\Phi(y)$  définie à une constante multiplicative près, fonction que l'on peut, sans perdre de généralité (§2.2, remarque b), supposer réelle. Le lecteur intéressé par la Physique mathématique ne manquera pas de remarquer que  $\alpha^2$  et  $\Phi$  sont respectivement valeur propre et fonction propre de l'opérateur auto-adjoint  $H = d^2/dy^2 + k^2(y)$  agissant sur les fonction d'un sous-espace de  $\mathbb{L}^2$ . Pour les expérimentateurs, un couple  $(\alpha, \Phi)$  définit un mode repéré par l'entier  $m$ . Une fois de plus, on constate que la notion physique de mode est liée à un problème aux valeurs propres.

2.3. Fréquence, longueur d'onde et épaisseur de coupure. Il importe de savoir utiliser la fig.49 pour résoudre les problèmes pratiques qui peuvent se poser dès que les trois indices  $n_1, n_2, n_3$  sont fixés.

a) La fréquence étant donnée,  $\tilde{e}$  est proportionnelle à l'épaisseur réelle de la couche.

Si  $\tilde{e} < \tilde{e}_0$  (soit  $e < \frac{\lambda_0}{2\pi} \tilde{e}_0$ ), il n'y a pas de solution.

Si  $\tilde{e}_0 < \tilde{e} < \tilde{e}_1$ , il y a une seule solution, le guide est monomode.

Si  $\tilde{e} > \tilde{e}_1$ , il y a plusieurs solutions et le guide est multimode.

L'épaisseur  $e_c = \lambda_0 \tilde{e}_0 / 2\pi$  au-dessous de laquelle tout guidage est impossible, est dite épaisseur de coupure ( $e_c = 0$  si  $n_1 = n_3$  puisqu'alors  $\tilde{e}_0 = 0$ ).

b) L'épaisseur  $e$  étant donnée,  $\tilde{e}$  est proportionnelle à  $\omega$ , donc à  $f = \omega/2\pi$ . La propagation exige alors que  $f$  soit supérieure à une fréquence de coupure  $f_c$  (définie par  $\tilde{e}_0 = 2\pi e f_c / c_0$ ). Cette propagation peut se faire sur un ou plusieurs modes suivant que  $\tilde{e}$  est inférieure ou supérieure à  $\tilde{e}_1$ . Si l'on raisonne en terme de longueur d'onde en posant  $\lambda_0 = c_0/f$ , alors la propagation exige  $\lambda_0 < \lambda_c$  (où  $\lambda_c$  est une longueur d'onde de coupure).

2.4. Paquet d'ondes guidées. L'onde guidée  $\Phi(y, \alpha) \exp(i\alpha x)$  n'est évidemment pas la représentation idéale des champs guidés rencontrés en pratique. Comme nous l'avons déjà dit à propos des guides métalliques (IX, §3.4), il est souvent nécessaire de faire appel au paquet d'ondes guidées associé à un mode donné (c'est-à-dire à une valeur de  $m$  dans (14)). Alors, supposant toujours que nous sommes dans le cas  $\vec{E} //$ , le signal analytique  $\tilde{E}_z$  de  $E_z$  est de la forme :

$$\tilde{E}_z(x, y, t) = \int A(\alpha) \Phi(y, \alpha) \exp(i\alpha x) \exp(-i\omega(\alpha)t) d\alpha .$$

Comme dans la théorie générale (VII),  $A(\alpha)$  est une fonction à support étroit centré sur un certain  $\alpha_0$ . Pour le mode considéré, on peut définir une vitesse de groupe  $V = d\omega/d\alpha$  qui décrit la propagation du paquet et une vitesse de phase  $\omega/\alpha$ . Ces deux vitesses ont une interprétation simple sur la courbe de dispersion. Cette courbe peut se tracer point par point à partir de la fig.49 ( $\omega$  étant donné, on calcule  $\tilde{e} = \omega e/c_0$  et l'abscisse du point d'intersection de la droite  $y = \tilde{e}$  avec la courbe  $C_m$  est la valeur de  $\alpha$ ). Il faut noter que la double inégalité  $n_1 < \alpha/k_0 < n_2$  impose :

$$\frac{n_1}{c_0} < \frac{\alpha}{\omega} < \frac{n_2}{c_0} , \quad \text{soit} \quad \frac{c_0}{n_2} < \frac{\omega}{\alpha} < \frac{c_0}{n_1} .$$

La courbe de dispersion est donc comprise dans un secteur angulaire défini à partir des droites d'équation  $\omega = \alpha c_0/n_2$  et  $\omega = \alpha c_0/n_1$  (Fig.50).

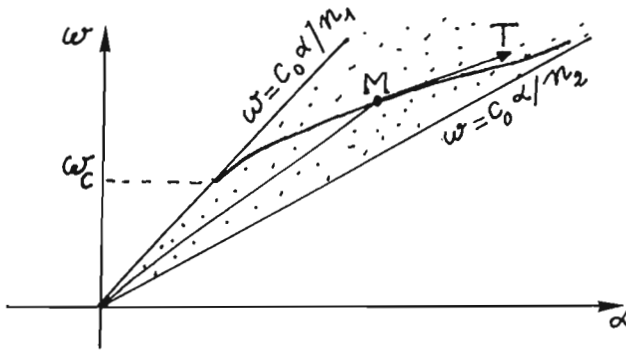


Figure 50. Courbe de dispersion associée à un mode donné, en supposant  $n_1 < n_3$ . La courbe est tout entière dans le secteur pointillé qui correspond en fait à un angle très faible si, comme c'est souvent le cas en Optique intégrée,  $n_1$  et  $n_2$  sont très voisins. Pour un point  $M(\alpha, \omega)$ , la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont respectivement associées à la pente de  $OM$  et à la pente de la tangente  $MT$ .

On notera que, pour  $\omega$  légèrement supérieur à la pulsation de coupure  $\omega_c$ , la vitesse de phase est pratiquement égale à la vitesse de la lumière  $c_0/n_1$  dans le substrat. La vitesse de groupe  $d\omega/d\alpha$  est positive puisque  $\omega$  est fonction croissante de  $\alpha$ . Un tracé minutieux, ou une étude algébrique fastidieuse, met en évidence un point d'inflexion (correspondant à l'annu-

lation de  $d^2\omega/d\alpha^2$ ) pour un certain  $\alpha_0$ . C'est sur cet  $\alpha_0$  qu'il est recommandé de centrer un paquet d'ondes guidées pour éviter son étalement en cours de propagation (VI, §3).

Nous ne nous attarderons pas plus longtemps sur l'étude générale du slab ; l'essentiel a été dit et nous préférons, dans ce cours non spécialisé, étudier plus en détail le cas du slab symétrique pour lequel  $n_1 = n_3$ . Ce cas particulier est intéressant pour au moins deux raisons. Du point de vue théorique, il permet d'illustrer, sur un cas simple, l'intérêt des considérations de symétrie en Physique mathématique. Du point de vue pratique, le slab symétrique peut être considéré comme un modèle unidimensionnel de fibre optique ; de nombreuses propriétés du slab restant qualitativement vraies pour les fibres, elles peuvent servir de fil conducteur pour l'étude des fibres monomodes, de plus en plus utilisées aujourd'hui.

2.5. Explication élémentaire du phénomène de guidage. Dans un cours à l'usage des techniciens, on peut se contenter d'une présentation plus accessible, basée sur l'Optique géométrique et connue aux U.S.A. sous le nom de "zigzag path theory". On explique alors le phénomène de guidage en faisant observer qu'un rayon lumineux peut être "piégé" à l'intérieur d'une lame pourvu qu'il subisse la réflexion totale sur chacun des dioptrés-frontières (Fig. 51).

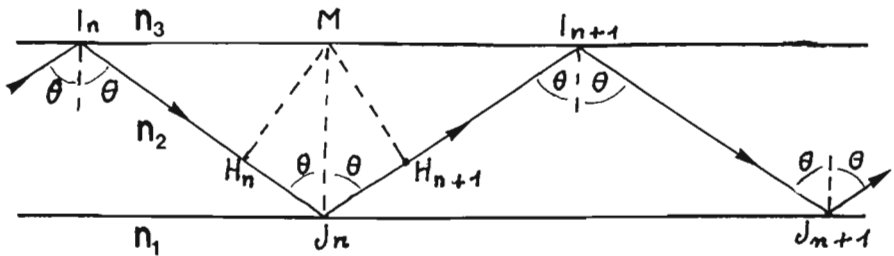


Figure 51. La "théorie du zigzag".

Si l'on remarque (voir plus loin) que l'épaisseur de la lame est toujours de l'ordre de la longueur d'onde, il y a lieu d'émettre quelques doutes sur la cohérence de ce raisonnement : n'enseigne-t-on pas ailleurs que l'Optique géométrique est une approximation valable seulement si la longueur d'onde est très petite devant les dimensions caractéristiques du système étudié. D'ailleurs, si un "rayon piégé" représentait vraiment un mode, il y aurait un continuum de modes et non pas un nombre fini comme nous l'avons montré. On est donc amené, dans la "théorie du zigzag", à imposer

une condition de quantification à l'angle  $\theta$ , imitant en quelque sorte Bohr qui, au prix d'une quantification ad hoc du moment cinétique, arrivait à expliquer l'atome d'hydrogène à l'aide de la Mécanique classique. Ici la règle de sélection est la suivante :

Seuls doivent être retenus les angles  $\theta$  pour lesquels deux rayons consécutifs tels que  $I_n J_n$  et  $I_{n+1} J_{n+1}$  présentent, au sens de l'Optique physique, une différence de phase  $\Delta\varphi = 2\pi m$  ( $m$  entier). C'est en effet dans ces conditions seulement que deux tels rayons peut être associés à une même onde plane décrite par  $A_2 \exp(i\alpha x - i\beta_2 y)$  au cours de notre analyse.

La mise en oeuvre de cette règle de sélection réclame une certaine expérience des méthodes de l'Optique physique. Il faut calculer :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda_0} + \varphi_{2,1} + \varphi_{1,2}$$

où  $\Delta$  est la différence de chemin optique et  $\varphi_{j,k}$  la différence de phase lors de la réflexion totale d'une onde plane sur le dioptre séparant les milieux d'indice  $n_j$  et  $n_k$ . Cette différence de phase, qui dépend de  $\theta$ , résulte des formules de Fresnel (VII). Quant au chemin optique  $\Delta$ , on le calcule très astucieusement en Optique en introduisant les projections  $H_n$  et  $H_{n+1}$  du milieu  $M$  de  $I_n I_{n+1}$  sur  $I_n J_n$  et  $J_n I_{n+1}$ . On montre alors que  $\Delta = (H_n J_n + J_n H_{n+1}) n_2 = 2en_2 \cos\theta$  (bien comprendre pourquoi). Ceci dit, le lecteur pourra vérifier, après sans doute plusieurs essais infructueux, que posant  $\alpha = k_0 n_2 \sin\theta$ , il arrive bien à l'équation (10'). L'auteur préfère de loin utiliser d'emblée la méthode exacte (§2.2) qui est, tout compte fait, beaucoup plus simple. Il n'en reste pas moins que la "théorie du zigzag" est un langage commode très utilisé chez les expérimentateurs. De plus, son intérêt heuristique est certain.

On notera au passage que la formule  $\tilde{\alpha} = \alpha/k_0 = n_2 \sin\theta$  établit un "pont" entre les deux méthodes d'étude. La constante de propagation normalisée  $\tilde{\alpha}$ , qui est ainsi reliée de façon simple à l'indice de la couche, est d'ailleurs parfois appelée indice effectif. Cette appellation est de plus justifiée par d'autres raisons que nous n'aurons pas l'occasion d'évoquer.

2.6. Remarques. Les considérations développées ici pour un cas de polarisation (E//) se généralisent facilement à l'autre (H//). Ceci pourra faire l'objet de travaux dirigés. Nous préférons ici mettre l'accent sur une subtilité théorique. Il s'agit de remarquer que si  $\Phi$  est la fonction définie par (9),  $\Phi(y) \exp(i\alpha x)$  peut s'interpréter comme le champ régnant autour du slab supposé éclairé dans le milieu 3 par un champ incident  $u^i(x,y) = a \exp(i\alpha x - i\beta_3(\alpha)y)$  d'amplitude nulle ( $a = 0$ ). Ceci permet de

dire que les valeurs possibles de la constante de propagation ne sont autres que les pôles du coefficient de réflexion  $r(\alpha)$  associé au slab. Ce coefficient a déjà été calculé (VIII, §6.2) ; il est donné par la formule (VIII, 74). Ses pôles sont les racines de l'équation :

$$\frac{(\beta_3 + \beta_1)(\beta_2 + \beta_3)}{4\beta_3\beta_2} + \frac{(\beta_3 - \beta_2)(\beta_2 - \beta_1)}{4\beta_3\beta_2} \exp(2i\beta_2 e) = 0$$

qui s'identifie à (10'). Ainsi, les constantes de propagation associées à une structure stratifiée ne sont autres que les pôles de son coefficient de réflexion. C'est une remarque fondamentale pour qui voudrait entreprendre l'étude approfondie des guides de l'Optique intégrée.

### 3. LE SLAB SYMETRIQUE EN POLARISATION $\vec{E} //$ .

C'est un slab pour lequel  $n_1 = n_3$ . Posant  $n_1 = n_3 = n$  et  $n_2 = N$ , on peut donc dire qu'il s'agit d'une lame d'indice  $N$  baignée par un milieu d'indice  $n$ .

3.1. Généralités. Bien entendu, la théorie générale s'applique et l'inégalité  $N > n$  doit nécessairement être vérifiée. Les formules se simplifient un peu et, par exemple, (14') devient :

$$(15) \quad \tilde{\epsilon} = F_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N^2 - \tilde{\alpha}^2}} \left( 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}^2 - n^2}{N^2 - \tilde{\alpha}^2}} + m\pi \right), \quad m \in \mathbb{N},$$

Ceci montre que  $F_0(n) = 0$  et que, par suite, il n'y a plus ni épaisseur, ni fréquence de coupure : on a toujours au moins une solution.

Il est cependant recommandé, comme toujours en Physique, d'exploiter la symétrie créée par l'égalité des deux indices  $n_1$  et  $n_3$ . Remplaçons donc la fig.49 par la fig.52 correspondant à un nouveau choix des axes. On peut alors établir que les fonctions  $\Phi(y)$  sont paires ou impaires. La démonstration mérite d'être connue. Elle résulte du fait que l'opérateur  $H = \frac{d^2}{dy^2} + k^2(y)$ , dont les fonctions  $\Phi$  sont les fonctions propres, commute avec l'opérateur parité  $\mathbb{P}$  qui, par définition, transforme toute fonction  $u(y)$  en  $u(-y)$ .

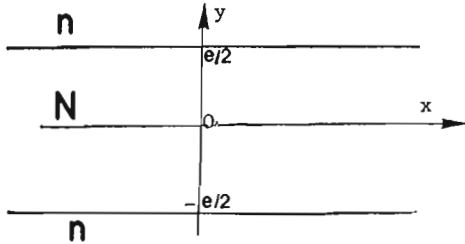


Figure 52. Le slab symétrique : la bande d'indice  $N$  est symétrique par rapport à  $Ox$ .

On montre en effet que, puisque  $k^2(y) = k^2(-y)$  :

$$\mathbb{P} \mathbb{H} \Phi(y) = \mathbb{H} \mathbb{P} \Phi(y) .$$

Alors, si  $\Phi$  est une fonction propre de  $\mathbb{H}$  associée à la valeur propre  $\alpha^2$  :

$$\mathbb{H} \Phi = \alpha^2 \Phi \quad \text{et} \quad \mathbb{P} \mathbb{H} \Phi = \mathbb{H} \mathbb{P} \Phi = \alpha^2 \mathbb{P} \Phi .$$

C'est dire que  $\mathbb{P} \Phi$  est aussi fonction propre associée à  $\alpha^2$ . Par suite, en supposant que l'espace propre est de dimension un, les fonctions  $\mathbb{P} \Phi$  et  $\Phi$  diffèrent seulement par un coefficient multiplicatif  $A$  :

$$\mathbb{P} \Phi = A \Phi .$$

On détermine  $A$  en faisant agir  $\mathbb{P}$  sur les deux membres de cette égalité :

$$\mathbb{P} \mathbb{P} \Phi = A \mathbb{P} \Phi , \quad \text{d'où} \quad \Phi = A^2 \Phi .$$

Ainsi  $A = \pm 1$  (C.Q.F.D.). La valeur  $A = 1$  correspond à  $\Phi$  paire ( $\Phi(-y) = \Phi(y)$ ), la valeur  $A = -1$  correspond à  $\Phi$  impaire ( $\Phi(-y) = -\Phi(y)$ ).

3.2. Etude des fonctions propres paires (modes symétriques). Limitons nous toujours au cas  $\vec{E} //$ . Avec les notations de la fig. 52, et tirant profit de l'étude générale faite au §2, on arrive aux conclusions suivantes qui respectent la parité de  $\Phi$  :

$$(16) \quad \Phi(y) = \begin{cases} B \exp(-\gamma y) & \text{pour } y > e/2 \\ A \cos(\beta y) & \text{pour } -\frac{e}{2} < y < \frac{e}{2} \\ B \exp(\gamma y) & \text{pour } y < -e/2 \end{cases}$$

avec :

$$(16') \quad \beta = \sqrt{k_0^2 N^2 - \alpha^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - k_0^2 n^2} .$$

Compte tenu de la symétrie, les relations de passage se réduisent à la continuité de  $\Phi'/\Phi$  en  $y = e/2$ . On arrive à :

$$(17) \quad \gamma = \beta \operatorname{tg} \left( \frac{\beta e}{2} \right)$$

ce qui fournit l'équation en  $\alpha$ . On résout habituellement cette équation transcendante en posant :

$$(18) \quad X = \frac{\beta e}{2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\gamma e}{2} ,$$

ce qui conduit à :

$$(19) \quad Y = X \operatorname{tg} X \quad \text{et} \quad (19') \quad X^2 + Y^2 = \frac{e^2}{4} (\beta^2 + \gamma^2) = \frac{e^2}{4} k_0^2 (N^2 - n^2) .$$

Le second membre de (19') est souvent désigné par  $V^2$ , introduisant ainsi une expression V qui contient tous les paramètres opto-géométriques :

$$(20) \quad V \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi e}{\lambda_0} \sqrt{N^2 - n^2} .$$

Cette expression, que certains appellent le "vé du guide", en utilisant un langage emprunté à la théorie des fibres, est en fait une épaisseur normalisée. On discute le nombre de solutions en étudiant les intersections (situées dans le premier quadrant) du graphe de  $Y = X \operatorname{tg} X$  avec le cercle de centre O et de rayon V (Fig.53). L'abscisse d'un point d'intersection fournit immédiatement la constante de propagation  $\alpha$  grâce à (18) et (16').

3.3. Etude des fonctions propres impaires (modes antisymétriques). On a maintenant :

$$(21) \quad \Phi(y) = \begin{cases} B \exp(-\gamma y) & \text{pour } y > e/2 \\ A \sin(\alpha y) & \text{pour } -\frac{e}{2} < y < \frac{e}{2} \\ -B \exp(\gamma y) & \text{pour } -e/2 \end{cases}$$

et la continuité de  $\Phi'/\Phi$  en  $y = e/2$  conduit à :

$$(21') \quad Y = -X \operatorname{cotg} X .$$

C'est le graphe de cette fonction - ou plus précisément sa réduction au premier quadrant - qu'il faut maintenant couper par le cercle (Fig.53). Quel que soit V, il y a au moins une solution.

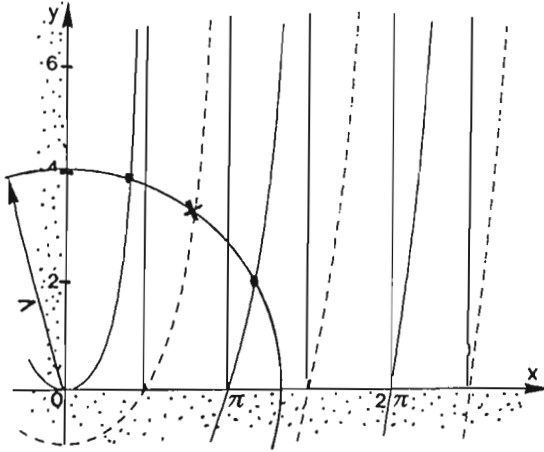


Figure 53. La région en pointillé est inutile. Les courbes associées aux modes symétriques et antisymétriques sont respectivement en trait plein et en trait interrompu. Pour  $\pi < V < 3\pi/2$ , il y a deux modes symétriques (•) et un mode antisymétrique (x).

3.4. Commentaires. Si  $V < \pi/2$ , il n'y a qu'une solution et la fonction  $\Phi(y)$  correspondante est paire ; le guide est dit monomode. D'après (20), ceci se produit pour :

$$\frac{\pi e}{\lambda_0} \sqrt{N^2 - n^2} < \frac{\pi}{2}, \quad \text{soit :} \quad e < e_1 \quad \text{avec} \quad e_1 = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{N^2 - n^2}}.$$

On retiendra que  $e_1$  est de l'ordre de  $\lambda_0$  mais peut cependant atteindre quelques dizaines de longueurs d'ondes si  $N$  et  $n$  sont suffisamment voisins (par exemple,  $N^2 - n^2 = 10^{-3}$  conduirait à  $e_1 \simeq 16 \lambda_0$ ). En Optique du visible, les guides monomodes sont donc constitués de couches très minces dont l'épaisseur est de l'ordre du micron.

S'il y a au contraire plusieurs solutions (guide multimode), le nombre  $M$  de modes possibles (modes symétriques et modes antisymétriques) est relié simplement à  $V$  :  $M - 1$  n'est autre que la partie entière de  $V/\frac{\pi}{2}$ .

L'allure du diagramme de dispersion est donné par la fig.54. On notera que la courbe associée à un mode donné est tangente à la droite d'équation  $\omega = \omega c_0/n$ . Ce résultat pourra être établi en travaux dirigés, en s'aidant éventuellement d'ouvrages plus spécialisés [22].



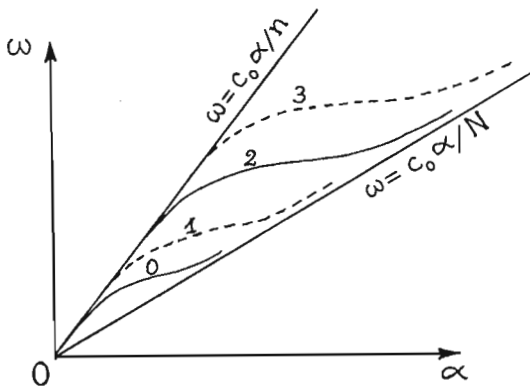


Figure 54. Allure du diagramme de dispersion des modes guidés symétriques (—) et antisymétriques (- - -)

#### 4. LE "DOUBLE SLAB" EN $\vec{E} //$ . NOTION DE COUPLAGE.

Considérons maintenant (Fig.23.c, Chap. VII) deux lames identiques d'indice  $N$ , baignées par un milieu d'indice  $n$ , et séparées par une distance  $h$ . Essayons à nouveau de trouver pour cette structure (double slab) une solution de la forme :

$$(1) \quad u(x,y) = \Phi(y) \exp(i\alpha x) .$$

On établit, comme au §2.1, que la constante de propagation  $\alpha$ , supposée positive, est comprise entre  $k_0 n$  et  $k_0 N$ . De plus, puisque la structure est symétrique par rapport à la droite  $y = -(e+h)/2$ , un raisonnement analogue à celui du §2.1 permet de prouver que, pour tout  $y$  :

$$(22) \quad \Phi(y) = a\Phi(-e-h-y) ; \quad a = \pm 1 .$$

Supposons d'abord  $a = 1$  (modes symétriques) et posons :

$$(23) \quad \beta_0 = \sqrt{k_0^2 n^2 - \alpha^2} = i\gamma_0 , \quad \beta = \sqrt{k_0^2 N^2 - \alpha^2} .$$

D'après la théorie générale des milieux stratifiés (VII), on sait que  $\Phi$  est nécessairement de la forme :

$$(24) \quad \Phi(y) = A^- \exp(-i\beta_0 y) + A^+ \exp(i\beta_0 y) \quad \text{pour } y > e/2 ,$$

$$(24') \quad \Phi(y) = B^- \exp(-i\beta y) + B^+ \exp(i\beta y) \quad \text{pour } -e/2 < y < e ,$$

$$(24'') \Phi(y) = C^- \exp(-i\beta_0 y) + C^+ \exp(i\beta_0 y) \quad \text{pour } -(e/2 + h) < y < -e/2.$$

Ici  $\beta_0 = i\gamma_0 = i\sqrt{\alpha^2 - k_0 n^2}$ ,  $A^- = 0$ , et en écrivant d'après (22) que la dérivée de  $\Phi$  doit s'annuler pour  $y = -(e + h)/2$ , il apparaît que  $C^- = C^+ \exp(\gamma_0(e + h))$ . Il suffit alors, pour obtenir l'équation donnant les valeurs possibles de  $\alpha$ , d'expliciter une relation matricielle déjà établie à titre d'exercice (VIII, §6.4). On vérifiera que :

$$(25) \begin{vmatrix} 0 & \\ A^+ \exp(-\gamma_0 \frac{e}{2}) & \end{vmatrix} = \frac{1}{4\beta_0\beta} \mathbb{D} \begin{vmatrix} C^- \exp(\gamma_0(-\frac{e}{2} - \frac{h}{2})) & \\ C^+ \exp(-\gamma_0(-\frac{e}{2} - \frac{h}{2})) & \end{vmatrix}$$

où  $\mathbb{D}$  est une matrice  $2 \times 2$  dont les éléments sont connus (VIII, §6.4). Par suite de la relation liant  $C^-$  et  $C^+$ , (25) est équivalente à :

$$(25') 0 = \mathbb{D}_{11} + \mathbb{D}_{12}, \quad (25'') \frac{A^+}{C^+} = \frac{1}{4\beta_0\beta} (\mathbb{D}_{21} + \mathbb{D}_{22}) \exp(\gamma_0(e + \frac{h}{2})).$$

Compte tenu des valeurs de  $\mathbb{D}_{11}$  et  $\mathbb{D}_{12}$  et posant  $s = \beta_0 + \beta$ ,  $d = \beta_0 - \beta$ , (25') devient :

$$(26) 0 = (s^2 \exp(-i\beta e) - d^2 \exp(i\beta e)) + sd(\exp(i\beta e) - \exp(-i\beta e)) \exp(-\gamma_0 h)$$

$$(27) 0 = (\gamma_0^2 - \beta^2) \sin(\beta e) + 2\gamma_0\beta \cos(\beta e) - (\gamma_0^2 + \beta^2) \sin(\beta e) \exp(-\gamma_0 h).$$

Cette équation transcendante étant compliquée, il est prudent de faire quelques vérifications en donnant à  $h$  des valeurs particulières.

Pour  $h = 0$ , on obtient bien l'équation donnant les valeurs de  $\alpha$  associées aux modes pairs du slab d'épaisseur  $2e$ , savoir :

$$(27') \gamma_0 = \beta \operatorname{tg}(\beta e).$$

Si  $h \rightarrow \infty$ , le second membre de (27) se factorise et on arrive à :

$$(27'') \left( \gamma_0 \cos\left(\frac{\beta e}{2}\right) - \beta \sin\left(\frac{\beta e}{2}\right) \right) \left( \beta \cos\left(\frac{\beta e}{2}\right) + \gamma_0 \sin\left(\frac{\beta e}{c}\right) \right) = 0.$$

En annulant le premier ou le second facteur on trouve les valeurs de  $\alpha$  correspondant respectivement aux modes pairs et aux modes impairs du slab d'épaisseur  $e$ .

Le cas des modes antisymétriques ( $a = -1$ ) se traite de façon analogue ; c'est maintenant la fonction  $\Phi$ , et non sa dérivée, qui s'annule pour  $y = -(e + h)/2$ . L'équation (27) est remplacée par :

$$(28) \quad (\gamma_0^2 - \beta^2) \sin(\beta e) + 2\gamma_0\beta \cos(\beta e) + (\gamma_0^2 + \beta^2) \sin(\beta e) \exp(-\gamma_0 h) = 0 .$$

Pour  $h = 0$ , cette équation fournit les valeurs de  $\alpha$  associées aux modes impairs du slab d'épaisseur  $2e$  ; pour  $h \rightarrow \infty$  on retrouve l'équation (27").

Au terme de ces calculs, une remarque s'impose. Puisque le slab d'épaisseur  $2e$  (qui est un double slab correspondant à  $h = 0$ ) a un mode pair quel que soit  $e$ , on prévoit par continuité, que le double slab a un mode symétrique pour  $h$  suffisamment faible. On peut en fait montrer qu'un double slab formé de deux slabs monomodes a un mode symétrique quel que soit  $h$ . A vrai dire, la démonstration n'est pas triviale, comme d'ailleurs beaucoup d'autres dans ce domaine. L'existence d'un mode antisymétrique dépend par contre des paramètres opto-géométriques (Tableau n°6).

$h/\lambda_0$	$N = 1.5, \quad n = 1, \quad e/\lambda_0 = 0.2$		$N = 1.5, \quad n = 1.4, \quad e/\lambda_0 = 0.5$	
0.1	1.269089	1.014205	1.461722	<del>1.411153</del>
0.2	1.237841	1.065146	1.456975	1.411153
0.4	1.204891	1.131129	1.450621	1.420962
0.6	1.189643	1.157143	1.446686	1.427687
0.8	1.182255	1.167564	1.444130	1.431904
1.0	1.178677	1.171960	1.442429	1.434506
2	1.175530	1.175392	1.439404	1.438445
5	1.175461	1.175461	1.438939	1.438937
10	1.175461	1.175461	1.438938	1.438938
	mode symétrique	mode anti-symétrique	mode symétrique	mode anti-symétrique

Tableau n°6. Valeur de la constante de propagation normalisée  $\tilde{\alpha} = \alpha/k_0$  pour le double slab de la fig.23.c. La croix (~~X~~) indique l'absence de mode antisymétrique.

Ainsi, et sauf peut-être pour de faibles valeurs de  $h$ , à toute constante de propagation  $\alpha$  du slab d'épaisseur  $e$ , on peut associer deux constantes de propagation  $\alpha_s$  et  $\alpha_a$  (très voisines de  $\alpha$ ) correspondant respectivement à un mode symétrique et un mode antisymétrique du double slab. Après une normalisation convenable, les fonctions réelles  $\Phi_s(y)$  et  $\Phi_a(y)$ , respecti-

vement associées à  $\alpha_s$  et  $\alpha_a$ , ont des graphes pratiquement confondus pour  $y > -(e+h)/2$ . Cette propriété, qu'il est possible de vérifier par le calcul numérique, peut se comprendre en notant que dans cette région (pour  $y > -(e+h)/2$ ),  $\Phi_s$ ,  $\Phi_a$  et la fonction  $\Phi$  (associée à  $\alpha$  pour le slab unique) vérifient des équations différentielles "voisines" et des relations de passage identiques.

Les conclusions obtenues dans ce paragraphe méritent d'être énoncées dans un autre langage, sans doute plus apprécié des expérimentateurs. Compte tenu de la linéarité des équations de Maxwell, on peut envisager, pour le double slab, une solution de la forme :

$$(29) \quad u(x,y) = \Phi_s(y) \exp(i\alpha_s x) + \Phi_a(y) \exp(i\alpha_a x) ,$$

qui conduit à :

$$I \stackrel{\text{def}}{=} |u|^2 = \sqrt{\Phi_s^2 + \Phi_a^2 + 2\Phi_s \Phi_a \cos((\alpha_s - \alpha_a)x)}$$

Par suite :

$$(30) \quad I(x,y) = \begin{cases} |\Phi_s(y) + \Phi_a(y)| & \text{si } (\alpha_s - \alpha_a)x = 2p\pi, p \in \mathbb{Z} \\ |\Phi_s(y) - \Phi_a(y)| & \text{si } (\alpha_s - \alpha_a)x = \pi + 2q\pi, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La fig.55 donne l'allure des graphes des fonctions mises en cause :

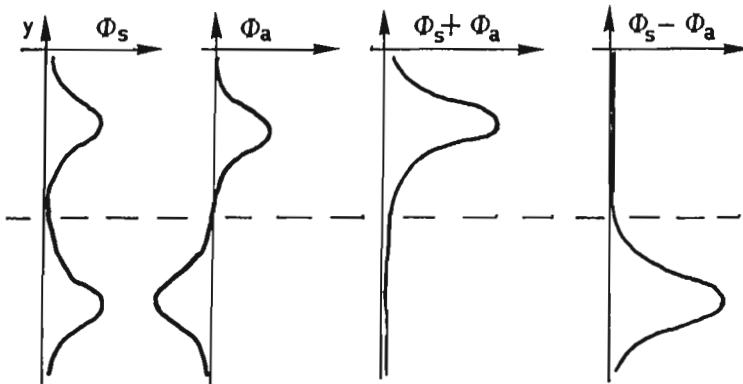


Figure 55. Le trait interrompu correspond à la droite  $y = -(e+h)/2$  sur la figure 23(c)

On voit que, suivant les valeurs de  $x$ , la lumière est "concentrée" dans la lame supérieure ou dans la lame inférieure. On peut dire que les guides identiques, constitués par chacune des deux lames, sont couplés. Ce phénomène est caractérisé par une longueur  $\ell$ , dite longueur de couplage (Fig.56). D'après (30), on trouve :

$$(31) \quad \ell = \frac{\pi}{|\alpha_s - \alpha_a|}, \quad (31) \quad \ell = \frac{\lambda_0}{2|\tilde{\alpha}_s - \tilde{\alpha}_a|}.$$

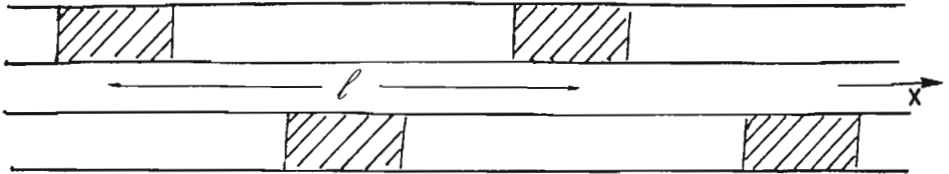


Figure 56. Les zones ombrées correspondent aux régions très éclairées.

En Optique où  $\lambda_0$  est de l'ordre du micron, il faut, pour que  $\ell$  atteigne un ordre de grandeur macroscopique (quelques millimètres), que  $|\tilde{\alpha}_a - \tilde{\alpha}_s|$  soit de l'ordre de  $10^{-3}$ .

Le lecteur, plus familiarisé avec la Mécanique qu'avec l'Electromagnétisme, ne manquera pas de faire une analogie avec un système de deux pendules identiques couplés : la variable est alors le temps  $t$  (qui remplace  $x$ ) et la fréquence temporelle est à rapprocher de  $\alpha$ . Les mécaniciens savent bien que "le couplage dédouble la fréquence propre". En Optique guidée, le couplage faible "dédouble" chaque valeur possible de la constante de propagation  $\alpha$ .

La période des "battements" observés en Mécanique est à rapprocher de la longueur de couplage  $\ell$ .

## Chapitre XII

# Notions sur la théorie des fibres optiques

### 1. INTRODUCTION

Le chapitre précédent a été consacré à l'étude des ondes guidées dans des milieux stratifiés. Compte tenu de l'importance actuelle des fibres optiques, il est difficile de complètement passer sous silence l'étude beaucoup plus générale de la propagation dans un milieu invariant par translation le long d'une certaine direction. Il s'agit malheureusement d'une question difficile pouvant être présentée comme un problème aux valeurs propres bidimensionnel. Ce problème fait encore actuellement l'objet de recherches mathématiques [23]. Nous nous bornerons donc à quelques indications sur la fibre à section circulaire supposée constituée d'un diélectrique homogène (fibre à saut d'indice). Pour nous permettre d'utiliser certaines formules du chap. IX, nous appellerons Oz l'axe de la fibre, axe selon lequel se fait évidemment la propagation (Fig.57).

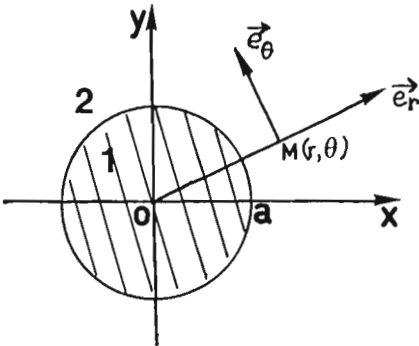


Figure 57. La fibre "à saut d'indice". Les régions 1 ( $r < a$ ) et 2 ( $r > a$ ) sont respectivement caractérisées par leurs permittivités  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  supposées réelles (milieux sans perte) et leurs perméabilités  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Un point M est repéré par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .

Comme au chap. IX, nous nous intéresserons à des solutions de la forme :

$$(1) \quad \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r, \theta) \exp(i\gamma z) = (\vec{E}_T(r, \theta) + E_z(r, \theta)\vec{e}_z) \exp(i\gamma z) ,$$

$$(2) \quad \vec{H}(r, \theta, z) = \vec{H}(r, \theta) \exp(i\gamma z) = (\vec{H}_T(r, \theta) + H_z(r, \theta) \vec{e}_z) \exp(i\gamma z) .$$

On sait ([X, 19, 19']) que, dans un milieu homogène  $(\epsilon, \mu)$ ,  $\vec{E}_T$  et  $\vec{H}_T$  s'expriment linéairement en fonction de  $E_z$  et  $H_z$  :

$$(3) \quad \vec{E}_T = \frac{1}{\chi^2} (i\gamma \text{ grad } E_z + i\omega \mu \text{ grad } H_z \wedge \vec{e}_z) ,$$

$$(4) \quad \vec{H}_T = \frac{1}{\chi^2} (i\gamma \text{ grad } H_z - i\omega \epsilon \text{ grad } E_z \wedge \vec{e}_z) ,$$

$$(5) \quad \chi^2 = k^2 - \gamma^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \gamma^2 .$$

En coordonnées polaires, il est commode de poser :

$$(6) \quad \vec{E}_T = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta , \quad (6') \quad \vec{H}_T = H_r \vec{e}_r + H_\theta \vec{e}_\theta ,$$

ce qui revient à décomposer  $\vec{E}_T$  et  $\vec{H}_T$  sur les vecteurs unitaires  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dont la définition est rappelée fig.57. Se rappelant que :

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta ,$$

on voit que l'ensemble des relations (3) et (4) est équivalent à :

$$(3') \quad E_r = \frac{1}{\chi^2} \left( i\gamma \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{i\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right) , \quad (3'') \quad E_\theta = \frac{1}{\chi^2} \left( \frac{i\gamma}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - i\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) ,$$

$$(4') \quad H_r = \frac{1}{\chi^2} \left( i\gamma \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{i\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right) , \quad (4'') \quad H_\theta = \frac{1}{\chi^2} \left( \frac{i\gamma}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + i\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) .$$

Nous supposons de plus :

- que les champs décroissent plus vite que  $1/\sqrt{r}$  de sorte que le flux d'énergie par unité de longueur à travers un cylindre de rayon  $r$  tende vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini (phénomène de guidage) ;
- que  $E_z$  et  $H_z$  sont de la forme :

$$(7) \quad E_z(r, \theta) = \Phi(r) \exp(in\theta) , \quad (8) \quad H_z(r, \theta) = \Psi(r) \exp(in\theta) , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

pour rappeler que le champ est inchangé quand on augmente  $\theta$  de  $2\pi$ .

Puisque  $E_z$  et  $H_z$  vérifient une équation de Helmholtz,  $\Phi(r)$  et  $\Psi(r)$  sont

nécessairement des fonctions de Bessel d'argument  $\chi r$  (A4, §2.7).

Dans le milieu 1, les champs, qui doivent être bornés, peuvent être décrits à l'aide de fonctions de Bessel régulières  $J_n$ . Si  $\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - \gamma^2}$  :

$$(9) \quad \Phi(r) = A J_n(\chi_1 r) ,$$

$$(10) \quad \Psi(r) = B J_n(\chi_1 r) .$$

Dans le milieu 2, il faut, pour assurer la décroissance imposée aux champs, utiliser des fonctions  $H_n^+$  d'argument imaginaire pur :

$$(11) \quad \Phi(r) = C H_n^+(\chi_2 r) ,$$

$$(12) \quad \Psi(r) = D H_n^+(\chi_2 r) ,$$

avec :

$$(12') \quad \chi_2 = i \sqrt{\gamma^2 - k_2^2} = i\eta_2 , \quad \text{donc} \quad \gamma > k_2 .$$

En résumé, désignant par  $J_n'$  et  $H_n^{+'}$  les dérivées de  $J_n$  et  $H_n^+$ , et après avoir utilisé (3") et (4") pour exprimer  $E_\theta$  et  $H_\theta$ , les champs que nous considérons sont de la forme suivante.

- Dans le milieu 1, c'est-à-dire pour  $r < a$  :

$$(13) \quad E_z = A J_n(\chi_1 r) \exp(in\theta) , \quad (14) \quad H_z = B J_n(\chi_1 r) \exp(in\theta) ,$$

$$(15) \quad E_\theta = \left[ -\frac{n\gamma}{\chi_1^2 r} A J_n(\chi_1 r) - \frac{i\omega \mu_1}{\chi_1} B J_n'(\chi_1 r) \right] \exp(in\theta) ,$$

$$(16) \quad H_\theta = \left[ \frac{i\omega \epsilon_1}{\chi_1} A J_n'(\chi_1 r) - \frac{n\gamma}{\chi_1^2 r} B J_n(\chi_1 r) \right] \exp(in\theta) .$$

- Dans le milieu 2, c'est-à-dire pour  $r > a$  :

$$(13') \quad E_z = C H_n^+(\chi_2 r) \exp(in\theta) , \quad (14') \quad H_z = D H_n^+(\chi_2 r) \exp(in\theta) ,$$

$$(15') \quad E_\theta = \left[ -\frac{n\gamma}{\chi_2^2 r} C H_n^+(\chi_2 r) - \frac{i\omega \mu_2}{\chi_2} D H_n^{+'}(\chi_2 r) \right] \exp(in\theta) ,$$

$$(16') \quad H_\theta = \left[ \frac{i\omega \epsilon_2}{\chi_2} C H_n^{+'}(\chi_2 r) - \frac{n\gamma}{\chi_2^2 r} D H_n^+(\chi_2 r) \right] \exp(in\theta) .$$



2. EQUATION DE DISPERSION.

La valeur de l'entier  $n$  étant fixée dans (7) et (8), nous avons à déterminer quatre constantes complexes  $A, B, C, D$  non toutes nulles et un réel  $\gamma$  de façon à assurer la continuité des composantes tangentielles  $E_z, H_z, E_\theta$  et  $H_\theta$  en  $r = a$ . Ceci conduit à :

$$(17) \quad J_n(x_1 a)A - H_n^+(x_2 a)C = 0,$$

$$(18) \quad -\frac{n\gamma}{x_1^2} J_n(x_1 a)A - \frac{i\omega \mu_1}{x_1} J_n'(x_1 a)B + \frac{n\gamma}{x_2^2} H_n^+(x_2 a)C + \frac{i\omega \mu_2}{x_2} H_n^{+'}(x_2 a)D = 0,$$

$$(19) \quad J_n(x_1 a)B - H_n^+(x_2 a)D = 0,$$

$$(20) \quad \frac{i\omega \epsilon_1}{x_1} J_n'(x_1 a)A - \frac{n\gamma}{x_1^2} J_n(x_1 a)B - \frac{i\omega \epsilon_2}{x_2} H_n^{+'}(x_2 a)C + \frac{n\gamma}{x_2^2} H_n^+(x_2 a)D = 0.$$

La constante de propagation  $\gamma$  étant supposée déterminée, ces relations (17-20) peuvent être considérées comme un système linéaire homogène en  $A, B, C, D$ . L'existence d'une solution non nulle impose à son déterminant  $\Delta$  d'être nul. Ceci fournit "l'équation de dispersion" permettant de déterminer  $\gamma$  ; elle s'écrit :

$$(21) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{n\gamma}{ax_1^2} & -\frac{i\omega \mu_1}{x_1} \tilde{J}_n & \frac{n\gamma}{x_2^2 a} & \frac{i\omega \mu_2}{x_2} \tilde{H}_n \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{i\omega \epsilon_1}{x_1} \tilde{J} & -\frac{n\gamma}{ax_1^2} & -\frac{i\omega \epsilon_2}{x_2} \tilde{H}_n & \frac{n\gamma}{x_2^2 a} \end{vmatrix} = 0,$$

avec :

$$(22) \quad \tilde{J}_n = \frac{J_n'(x_1 a)}{J_n(x_1 a)}, \quad \tilde{H}_n = \frac{H_n^{+'}(x_2 a)}{H_n^+(x_2 a)}.$$

On peut simplifier (21) en utilisant les règles de calcul sur les déterminants. Remplaçant la troisième colonne de  $\Delta$  par la somme des colonnes 1 et 3, on obtient après développement par rapport à la première ligne :

$$(21') \Delta = \begin{vmatrix} -\frac{i\omega \mu_1}{x_1} \tilde{J}_n & \frac{n\gamma}{a} \left( \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2} \right) & \frac{i\omega \mu_2}{x_2} \tilde{H}_n \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{n\gamma}{ax_1^2} & i\omega \left( \frac{\epsilon_1}{x_1} \tilde{J}_n - \frac{\epsilon_2}{x_2} \tilde{H}_n \right) & \frac{n\gamma}{x_2^2 a} \end{vmatrix} = 0 .$$

Répétant la même opération sur (21'), en développant cette fois par rapport à la deuxième ligne, on arrive finalement à :

$$(21'') \begin{vmatrix} \frac{n\gamma}{a} \left( \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2} \right) & -i\omega \left( \frac{\mu_1 \tilde{J}_n}{x_1} - \frac{\mu_2 \tilde{H}_n}{x_2} \right) \\ i\omega \left( \frac{\epsilon_1 \tilde{J}_n}{x_1} - \frac{\epsilon_2 \tilde{H}_n}{x_2} \right) & \frac{n\gamma}{a} \left( \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2} \right) \end{vmatrix} = 0 ,$$

soit :

$$(23) \frac{n^2 \gamma^2}{a^2} \left( \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2} \right)^2 - \omega^2 \left( \frac{\mu_1 \tilde{J}_n}{x_1} - \frac{\mu_2 \tilde{H}_n}{x_2} \right) \left( \frac{\epsilon_1 \tilde{J}_n}{x_1} - \frac{\epsilon_2 \tilde{H}_n}{x_2} \right) = 0 .$$

Même sous cette forme, la relation de dispersion reste compliquée...

C'est seulement pour  $n = 0$ , c'est-à-dire pour des champs dépendant uniquement de  $r$ , qu'une simplification apparaît. On doit alors avoir, soit :

$$(24) \frac{\mu_1 \tilde{J}_0}{x_1} - \frac{\mu_2 \tilde{H}_0}{x_2} = 0 , \quad \text{soit : } (24') \frac{\epsilon_1 \tilde{J}_0}{x_1} - \frac{\epsilon_2 \tilde{H}_0}{x_2} = 0 ,$$

avec :

$$(25) \tilde{J}_0 = \frac{J'_0(x_1 a)}{J_0(x_1 a)} = -\frac{J_1(x_1 a)}{J_0(x_1 a)} \quad \text{et} \quad (26) \tilde{H}_0 = \frac{H_0^+(x_2 a)}{H_0^-(x_2 a)} = -\frac{H_1^+(x_2 a)}{H_0^+(x_2 a)} .$$

Partant de (24) et supposant  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , on trouve à partir de (17) et (20) que nécessairement les constantes A et C sont nulles, ce qui d'après (13) et (13') entraîne  $E_z = 0$  (champ TE ou H). Au contraire, (24') conduit à  $B = D = 0$  (champ TM ou E). On retiendra donc que les solutions indépen-

dantes de  $\theta$  sont, soit TE, soit TM.

La discussion de (23) est beaucoup plus délicate pour  $n \neq 0$ . Elle se fait généralement dans les ouvrages spécialisés au prix de manipulations algébriques qui n'ont rien d'intuitif et qu'il semble inutile d'aborder dans un cours d'enseignement général.

### 3. EXERCICE.

Ne serait-ce que pour nous familiariser avec les fonctions de Bessel, essayons d'étudier les solutions de type TE pour  $n = 0$  et  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ . Dans ces conditions, et pour  $\omega$  fixé, les valeurs possibles de  $\gamma$  sont les éventuelles solutions de (24) qui s'écrit alors plus explicitement :

$$(27) \quad \frac{J_1(x_1 a)}{x_1 J_0(x_1 a)} = \frac{H_1^+(x_2 a)}{x_2 H_0^+(x_2 a)} .$$

Il est commode d'introduire la fonction  $K_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^+(iz)$ , fonction qui est réelle pour  $z$  réel et dont il existe des tables. Alors, en se souvenant que  $x_2$  doit être imaginaire pur et sachant que  $x_2^2 = \omega^2 \mu_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1) + x_1^2$ , on montre que la détermination de  $x_1$  (donc de  $\gamma$ ) se ramène à la résolution de l'équation :

$$(28) \quad G(x_1 a) = F\left( a \sqrt{\omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) - x_1^2} \right)$$

où :

$$(28') \quad G(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{J_1(x)}{x J_0(x)} \quad \text{et} \quad F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x} \frac{K_1(x)}{K_0(x)} .$$

Les figures 58 et 59 donnent l'allure des graphes des fonctions  $G(x)$  et  $F(x)$ . Posons  $a^2 \omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) = \delta^2$  et  $x_1 a = X$ . L'existence de solutions exige que les graphes de  $G(X)$  et  $F(\sqrt{\delta^2 - X^2})$  se coupent en des points d'abscisse positive. Ces deux graphes sont superposés sur la fig.60. On voit immédiatement que toute propagation est impossible si  $\delta < 2.405$  ou, autrement dit, si la pulsation  $\omega$  est inférieure à une pulsation de coupure  $\omega_c = 2.405/a\sqrt{\mu_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}$ . L'existence d'une solution unique suppose  $\omega_c < \omega < \omega_1$  avec  $\omega_1 = 5.520/a\sqrt{\mu_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}$ .

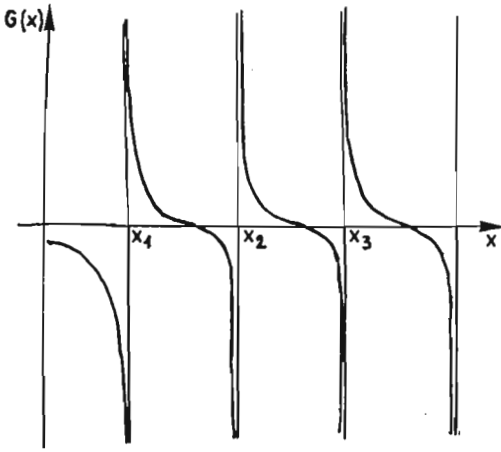


Figure 58.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont les "zéros" de  $J_0$  (A4, §2.5).  $x_1 = 2.405$ ,  $x_2 = 5.520$

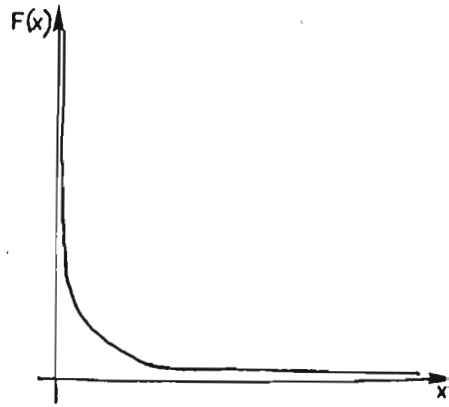


Figure 59

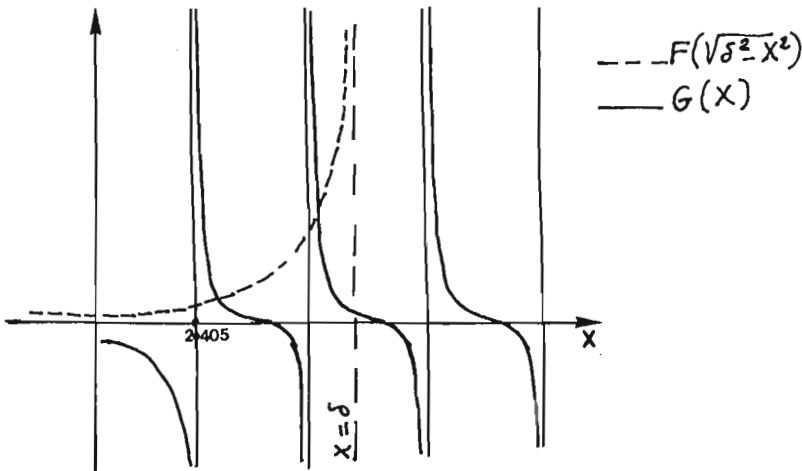


Figure 60.  $X = x_1 a$ ,  $\delta = a\omega \sqrt{\mu_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)}$ , pour le graphe de  $F(\delta^2 - X^2)$  noter que la droite  $X = \delta$  est une asymptote "verticale".

Le lecteur pourra conduire une étude analogue dans l'autre cas de polarisation (TM) et conclure à l'existence d'une fréquence de coupure égale à la précédente. Il montrera pour ce faire que (28) doit être remplacée par :

$$(29) \quad G(\chi_1 a) = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} F\left(a \sqrt{\omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) - \chi_1^2}\right).$$

Il notera que si  $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$ , le graphe de  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} F \sqrt{\delta^2 - X^2}$  prend une allure très particulière (il vient "se coller" contre l'axe OX et la droite  $X = \delta$ ). Par conséquent, pour toute valeur de  $\chi_1$  susceptible de convenir, le produit  $a\chi_1 = X$  est l'une des racines de l'équation  $J_1(X) = 0$ .

#### 4. QUELQUES IDEES A RETENIR.

Les résultats obtenus aux paragraphes précédents, à partir de (23) et pour  $n = 0$ , sont évidemment loin de fournir la réponse aux nombreuses questions que pose aujourd'hui l'étude des fibres optiques. Ils ont tout au plus attiré notre attention sur le genre de calculs rencontrés et nous ont permis de dégager les notions essentielles. Voici, pour terminer, un résumé contenant quelques renseignements complémentaires donnés sans démonstration. Rappelons qu'il concerne uniquement la fibre diélectrique homogène à section circulaire étudiée en régime harmonique.

a) Les valeurs possibles de la constante de propagation  $\gamma$  correspondent à des valeurs positives de  $\chi_1^2 = k_1^2 - \gamma^2$  et à des valeurs négatives de  $\chi_2^2 = k_2^2 - \gamma^2$ . Sur le diagramme de dispersion, et comme pour le "slab", tout point  $M(\gamma, \omega)$  est donc situé dans le secteur angulaire défini par les demi-droites  $D_1$  et  $D_2$  d'équation  $\omega = c_0\gamma/n_1$  et  $\omega = c_0\gamma/n_2$ .

b) On a vu que, pour  $n = 0$  et pour  $\omega$  fixé, plusieurs valeurs de  $\gamma$  (soit  $\gamma_{0,1}, \gamma_{0,2}, \dots, \gamma_{0,n}$ ) sont envisageables. Ceci se révèle vrai pour tout  $n$ . Les constantes de propagation possibles peuvent être repérées à l'aide d'un couple de deux entiers  $n$  et  $m$ . C'est à un tel couple que correspond la notion physique de mode. Sur le diagramme de dispersion, les points associés à un mode sont sur une ligne  $L$  (on devrait dire  $L_{n,m}$ ) qui part d'un point  $M_2$  de la demi-droite  $D_2$  pour rejoindre asymptotiquement  $D_1$  (Fig. 61). Le cut-off correspond au point  $M_2$  dont les coordonnées  $\gamma_2$  et  $\omega_2$  annulent  $\chi_2$  et rendent par suite  $\chi_1^2$  égal à  $\omega^2 \mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2)$ . Evidemment  $\omega_2/2\pi$  n'est autre que la fréquence de coupure en dessous de laquelle toute propagation est impossible pour le mode considéré. Dans le milieu 2, le champ décroît d'autant plus vite que  $\sqrt{\gamma^2 - k_2^2}$  est grand. Il est d'autant plus concentré dans le milieu 1 (le coeur) que  $M$  est éloigné de  $M_2$ , c'est-à-dire que l'on est "loin du cut-off".

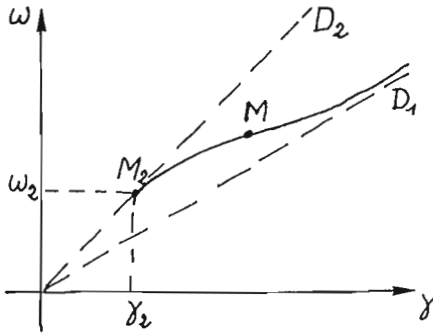


Figure 61. Allure de la courbe de dispersion associée à un mode donné :  $\omega_2$  est la pulsation de coupure.

c) Une étude approchée du diagramme de dispersion (ensemble des lignes L correspondant aux différents modes) peut être faite, à partir de (23) et au voisinage du cut-off ( $x_2(\omega, \gamma)$  est alors voisin de 0), en utilisant l'équivalent des fonctions de Hankel  $H_n^+(x_2 a)$  pour les faibles valeurs de leur argument. Les calculs redeviennent accessibles mais restent très techniques et incompatibles avec une allergie aux fonctions de Bessel.

On peut aussi se demander s'il existe des modes ayant une fréquence de coupure nulle. La réponse est affirmative : le mode correspondant à  $n = m = 1$  possède cette propriété. On le note généralement  $HE_{11}$  et on l'appelle fondamental. Il faut retenir qu'il n'est ni TE, ni TM ; c'est un mode hybride pour lequel le champ électrique et le champ magnétique ont tous deux une composante axiale.

d) Le tableau n°7 donne, pour  $\epsilon_1/\epsilon_2 = 1.1$ , les valeurs de  $a x_1$  au cut-off pour différents modes repérés par un couple d'entier  $n, m$ . On en déduit que la fibre reste monomode pourvu que  $\omega$  soit inférieur à  $\omega_c$  du mode  $TE_{01}$ ,

c'est-à-dire pourvu que :  $\omega < \frac{2.405 \sqrt{10} c_0}{a n_2}$ ,  $n_2$  désignant ici l'indice  $(\epsilon_2/\epsilon_0)^{1/2}$  du milieu 2.

n \ m	1	2	3	Polarisation
0	2.405	5.52	8.654	TE    TM
1	0.000	3.832	7.016	HE
1	3.832	7.016	10.173	EH
2	2.445	5.538	8.665	HE
2	5.136	8.417	11.620	EH

Tableau n°7. Valeurs de  $a x_1$  au cut-off pour  $\epsilon_1/\epsilon_2 = 1.1$ . Les notations HE ou EH désignent deux variétés de modes hybrides définies dans le livre de D. Marcuse [24] duquel ce tableau est extrait.

## Chapitre XIII

# Notions sur les cavités

### 1. EXERCICE PRELIMINAIRE

Au chapitre IX nous avons étudié le guide infiniment conducteur à section rectangulaire. Supposant sa section droite donnée par la figure 27 du chapitre IX (c'est un rectangle de côtés  $a$  et  $b$  avec  $a < b$ ), nous avons établi qu'en régime sinusoïdal (pulsation  $\omega$ ), les équations de Maxwell, ainsi que les conditions aux limites imposées par les parois, sont satisfaites par un champ  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  du type :

$$(1) \quad \mathcal{E}_{1,x} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp(i\gamma z) \quad \mathcal{E}_{1,y} = 0 \quad \mathcal{E}_{1,z} = 0$$

$$\vec{H}_1 = \frac{1}{i \omega \mu} \text{rot } \vec{E}_1,$$

pourvu que la constante de propagation  $\gamma$  (désignée aussi par  $k_g = 2\pi/\lambda_g$ ) soit égale à  $\pi/b$ . Un tel champ, défini à la constante multiplicative  $E_0$  près, appartient au mode  $TE_{0,1}$ .

Il est facile de vérifier que le champ  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  défini par :

$$(1') \quad \vec{E}_2(y, z) = \vec{E}_1(y, -z) ; \quad \vec{H}_2 = \frac{1}{i \omega \mu} \text{rot } \vec{E}_2$$

vérifie aussi les équations de Maxwell et les conditions aux limites. Il en est de même pour le champ  $\vec{E}, \vec{H}$  défini à partir des précédents par :

$$(2) \quad \vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2, \quad \vec{H} = \frac{1}{i \omega \mu} \text{rot } \vec{E} :$$

En explicitant les composantes de  $\vec{E}$  :

vérifie  
 $k^2 - \gamma^2 = \frac{\pi^2}{b^2}$

$$(3) \quad \mathcal{E}_x = 2iE_0 \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \sin(\gamma z) \quad \mathcal{E}_z = 0 \quad \mathcal{E}_y = 0,$$

il apparaît que ce champ s'annule si  $\gamma z = k_g z = p\pi$ , soit :

$$(4) \quad z = \frac{p\pi}{k_g} = p \frac{\lambda_g}{2}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, le champ  $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$  vérifie la condition aux limites imposée par les parois infiniment conductrices, savoir  $\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{n} = 0$ , non seulement dans le guide tubulaire, mais aussi dans un parallélépipède de côtés  $a, b, c$ , pourvu que la longueur  $c$  de son troisième côté soit un nombre entier de demi-longueur d'onde guidée.

Un raisonnement semblable peut être fait en partant de n'importe quel autre mode,  $TE_{p,q}$  par exemple). On en déduit qu'un champ électromagnétique sinusoïdal de type TE (par rapport à Oz) peut régner dans une cavité parallélépipédique de côtés  $a, b, c$  pourvu que les trois relations suivantes soient simultanément vérifiées :

$$(5) \quad c = r \lambda_g / 2, \quad r \in \mathbb{N}^* \quad (6) \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2},$$

$$(7) \quad \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 = \left(\frac{p}{2a}\right)^2 + \left(\frac{q}{2b}\right)^2, \quad p \in \mathbb{N}^*, \quad q \in \mathbb{N}^*.$$

Dans la relation (6) (c'est-à-dire dans la formule des guides d'onde),  $\lambda$  désigne la longueur d'onde associée, dans le milieu qui remplit la cavité, à la pulsation  $\omega$  correspondant au régime harmonique étudié. La relation (7) définit la longueur d'onde de coupure  $\lambda_c$  du mode  $TE_{p,q}$ . L'élimination de  $\lambda_g$  et  $\lambda_c$  entre (5), (6) et (7) conduit à :

$$(8) \quad \frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{p}{2a}\right)^2 + \left(\frac{q}{2b}\right)^2 + \left(\frac{r}{2c}\right)^2.$$

Ainsi, à un triplet d'entiers  $(p, q, r)$  correspond une longueur d'onde  $\lambda$ , dite de résonance, donnée par (8) et à laquelle on peut évidemment associer une fréquence de résonance  $\nu$  ( $\lambda \nu \sqrt{\epsilon \mu} = 1$ ). On peut a priori penser qu'il existe d'autres longueurs d'onde de résonance que celles données par (8). Une étude détaillée montre qu'il n'en est rien. En particulier, on obtient les mêmes valeurs en partant d'un mode TM au lieu d'un mode TE. Ceci est dû aux symétries du parallélépipède et au fait que, pour un guide à section rectangulaire, toute fréquence de coupure d'un mode TM est aussi fréquence de coupure d'un mode TE (chap. IX, § 3.6).



## 2. LA CAVITE DE FORME QUELCONQUE

2.1. Le problème fondamental. Soit (Figure 62) une surface fermée  $S$  dont l'extérieur et l'intérieur  $\Omega$  sont respectivement remplis d'un métal infiniment conducteur et d'un diélectrique non absorbant ( $\epsilon, \mu$ ). Est-il possible, en régime harmonique, de trouver un champ  $\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r})$  vérifiant :

- les équations de Maxwell en l'absence de sources dans  $\Omega$  ;
- la condition aux limites  $\vec{n} \wedge \vec{E} = 0$  sur  $S$ .

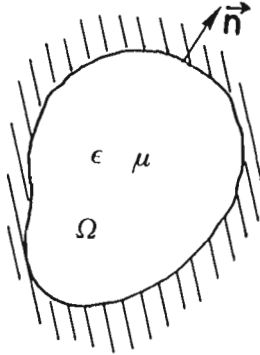


Figure 62: Le métal correspond à la région hachurée;  $\epsilon$  et  $\mu$  sont réels.

L'étude mathématique de ce problème conduit aux résultats, donnés ci-dessous sans démonstration, et généralisant ceux que nous avons donnés au paragraphe précédent pour cavité de forme simple. L'existence d'une solution non nulle impose à la pulsation  $\omega$  d'appartenir à une suite discrète de nombres positifs (pulsations de résonance) qui dépendent de la forme de la cavité. A une valeur donnée de la pulsation de résonance correspond une famille de champs qui forment un espace vectoriel de dimension finie  $N$ . Si  $N = 1$ , le champ est défini à un facteur multiplicatif près. Dans le cas contraire, on dit qu'il y a dégénérescence.

2.2. Principales propriétés. Si pour une fréquence de résonance donnée,  $\vec{E}(\vec{r})$  est une solution, il en est de même pour la partie réelle  $\vec{E}'(\vec{r})$  et sa partie imaginaire  $\vec{E}''(\vec{r})$ . En l'absence de dégénérescence, on a donc  $\vec{E}'' = a \vec{E}'$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) et par suite  $\vec{E} = (1 + ia) \vec{E}'$ . On peut ainsi, sans perte de généralité, supposer qu'en l'absence de dégénérescence le vecteur électrique  $\vec{E}$  d'un champ résonant est réel. Il en résulte que le vecteur magnétique  $\vec{H} = \frac{1}{i \omega \mu} \text{rot } \vec{E}$  est imaginaire pur. Dire que  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont respectivement réel et imaginaire pur c'est dire, qu'en tout point de la cavité, le champ électrique et le champ magnétique sont tous deux polarisés rectilignement et "vibrent en quadrature". Il se trouve que, pour la plupart des cavités utilisées en pratique, les vecteurs  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  sont à tout instant perpendiculaires, mais cette propriété n'est pas générale.

Du point de vue énergétique, il faut retenir que l'énergie électromagnétique associée à une cavité reste constante et que la valeur moyenne de

l'énergie "d'origine électrique" est égale à la valeur moyenne de l'énergie "d'origine magnétique". Ceci résulte immédiatement des propriétés du flux du vecteur de Poynting complexe  $\vec{\mathcal{P}}$  (IV, § 4). Ce flux est nul à travers S car la condition aux limites  $\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{E}} = 0$  impose  $\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}) = \vec{\mathcal{H}} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{E}}) = 0$ .

Enfin, il faut connaître l'existence de relations entre les champs  $(\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{\mathcal{H}}_1)$  et  $(\vec{\mathcal{E}}_2, \vec{\mathcal{H}}_2)$  associés à deux fréquences de résonance  $\omega_1$  et  $\omega_2$  différentes. Posant  $k_1^2 = \omega_1^2 \epsilon \mu$  et  $k_2^2 = \omega_2^2 \epsilon \mu$  l'écriture des équations de Maxwell harmoniques dans  $\Omega$  conduit à :

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{\mathcal{E}}_1 &= k_1^2 \vec{\mathcal{E}}_1 & \text{rot rot } \vec{\mathcal{E}}_2 &= k_2^2 \vec{\mathcal{E}}_2 \\ \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot \text{rot rot } \vec{\mathcal{E}}_1 - \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot \text{rot rot } \vec{\mathcal{E}}_2 &= (k_1^2 - k_2^2) \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot \vec{\mathcal{E}}_2 \end{aligned}$$

soit, d'après la formule :  $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b} + \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a}$

$$\text{div}(\vec{\mathcal{E}}_1 \wedge \text{rot } \vec{\mathcal{E}}_2) - \text{div}(\vec{\mathcal{E}}_2 \wedge \text{rot } \vec{\mathcal{E}}_1) = (k_1^2 - k_2^2) \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot \vec{\mathcal{E}}_2$$

et le théorème de Green-Ostrograsky donne :

$$\iint_S (\vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_1 \wedge \text{rot } \vec{\mathcal{E}}_2) - \vec{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_2 \wedge \text{rot } \vec{\mathcal{E}}_1)) dS = (k_1^2 - k_2^2) \iiint_{\Omega} \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot \vec{\mathcal{E}}_2 dv$$

D'après la condition aux limites imposée à  $\vec{\mathcal{E}}$  ( $\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{E}} = 0$  sur S), les produits mixtes figurant au premier membre sont nuls ; ainsi, pourvu que  $\omega_1$  soit différent de  $\omega_2$  :

$$(9) \quad \iiint_{\Omega} \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot \vec{\mathcal{E}}_2 dv = 0.$$

On établit de façon analogue que :

$$(9') \quad \iiint_{\Omega} \vec{\mathcal{H}}_1 \cdot \vec{\mathcal{H}}_2 dv = 0.$$

Les égalités (9) et (9') sont des exemples de relations d'orthogonalité, relations qui jouent un grand rôle dans toute étude approfondie de l'électromagnétisme. C'est grâce à elles que "l'énergie emmagasinée dans la cavité" par un champ résultant de la superposition de plusieurs modes résonnants, est la somme des énergies associées à chacun de ces modes. La détermination théorique des fréquences propres et des champs associés est évidemment un problème difficile dès que la forme de la cavité est un peu compliquée. Tout au plus peut-on espérer une détermination approchée par utilisation des techniques de l'Analyse numérique. Il est bon de retenir que la plus grande longueur d'onde de résonance (dite fondamentale) est toujours

l'ordre de grandeur des dimensions de la cavité. Par exemple, pour parallélépipède, elle est égale à deux fois le plus grand côté (8).

### 3. LES CAVITES REELLES ET LE PROBLEME DES PERTES

D'après ce qui précède, une cavité à parois infiniment conductrices peut être utilisée pour "stocker de l'énergie électromagnétique". Or il existe, en théorie élémentaire des circuits, un montage capable de jouer le même rôle ; c'est le fameux circuit résonnant constitué d'une capacité C et d'une "self pure" L (Figure 63 a).

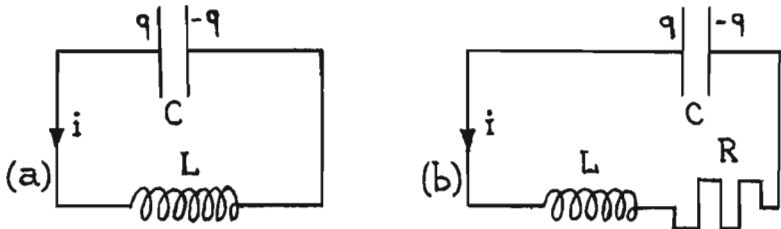


Figure 63. La flèche désigne le sens choisi pour définir  $i$ .

Pour ce circuit, la charge  $q$  de l'une des armatures du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$(10) \quad Lq'' + \frac{q}{C} = 0$$

qui a des solutions sinusoïdales de pulsation  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Mais on sait que la "self pure" est une vue de l'esprit et que les bobines réelles ont non seulement un coefficient d'auto-induction  $L$ , mais aussi une résistance  $R$  (Fig. 56.b). L'équation (10) est alors remplacée par :

$$(10') \quad Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0$$

et posant  $R/L = 2a$ , on est conduit à :

$$(11) \quad q(t) = q_0 \exp(-at) \cos \omega t \quad \text{avec} \quad (12) \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{a^2}{\omega_0^2}}$$

Pour des pertes suffisamment faibles,  $\omega$  est donc très voisin de  $\omega_0$ .

Dans le cas idéal ( $a = 0$ ) où l'on néglige les pertes dues à l'effet Joule, on peut définir l'énergie  $W_e(t)$  "emmagasinée" dans le condensateur, l'énergie  $W_m(t)$  "emmagasinée" dans la self et l'énergie  $W = W_e + W_m$  "emmagasinée" dans l'ensemble du circuit :

$$(13) \quad W(t) = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2} L \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L q_0 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{q_0^2}{2C} = \text{cte} .$$

Dans le cas réel ( $a$  voisin de 0), la charge  $q(t)$  peut être considérée comme une grandeur sinusoïdale (de pulsation  $\omega_0$ ) dont l'amplitude  $q_0 \exp(-at)$  est une fonction lentement variable du temps. Cette façon de faire pousse les ingénieurs à parler d'une énergie  $W(t) = \frac{1}{2C} q_0^2 \exp(-2at)$  et l'on sait que posant  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , ils caractérisent le circuit RLC par le nombre  $Q = L\omega_0/R$  dit "facteur de qualité", et défini par :

$$(14) \quad \frac{Q}{2\pi} = \frac{W(t)}{W(t) - W(t + T_0)} = \frac{1}{1 - \exp(-2aT_0)} \approx \frac{1}{2aT_0} \approx \frac{\omega_0 L}{2\pi R}$$

Revenons maintenant à une cavité creusée dans un métal réel. Pour tenir compte de la dissipation d'énergie dans le métal et dans le diélectrique ( $\epsilon, \mu$ ), il est d'usage, par analogie avec le cas du circuit résonant, d'associer à la cavité une énergie électromagnétique  $W(t)$  décroissant lentement en fonction du temps. Pour un mode fixé, correspondant à une pulsation  $\omega_0$  en l'absence de pertes, on pose :

$$(15) \quad \frac{Q}{2\pi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W(t)}{W(t) - W(t + 2\pi/\omega_0)} .$$

Avec cette définition, on notera que si les pertes peuvent être attribuées à deux causes (absorption par le métal, d'une part, et par le diélectrique, d'autre part), ce sont les inverses des  $Q$  et non les  $Q$  eux-mêmes qui s'ajoutent. Il faut retenir que plus les pertes sont faibles, plus  $Q$  est grand. En assimilant la période  $2\pi/\omega_0$  à un accroissement  $dt$ , on obtient :

$$W\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = W(t) + \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{dW(t)}{dt} ,$$

d'où, à partir de (15), l'équation différentielle :

$$(16) \quad \frac{dW}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q} W \quad \text{et} \quad (17) \quad W(t) = W_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q} t\right) .$$

Ainsi, pour  $Q$  de l'ordre de  $10^4$  (valeur couramment rencontrée) et pour une fréquence de 10 GHz, l'énergie stockée dans la cavité est divisée par  $e$  après quelques dixièmes de microseconde.

La formule (17) implique qu'une quelconque composante de champ soit aussi amortie exponentiellement. Puisque l'énergie varie comme le carré du

module du champ, on peut dire qu'en un point fixé, une telle composante  $u(t)$  (ou plutôt son signal analytique) est de la forme :

$$(18) \quad u(t) = u_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \exp(-i\omega_0 t).$$

On notera qu'une telle fonction n'est ni bornée ni périodique. Toutefois, si  $H(t)$  est la fonction de Heaviside,  $U(t) = H(t) u(t)$  admet une transformation de Fourier  $\tilde{U}(\omega) = \int_0^{\infty} u(t) \exp(i\omega t) dt$  dont le carré du module est proportionnel à  $\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0/2Q)^2}$ . L'allure du graphe de  $f(\omega)$  est donné sur la figure (64). La droite  $y = f_m/2$  coupe la courbe en deux points A et A' dont les abscisses diffèrent de  $\omega_0/Q$ . On dit que  $\omega_0/Q$  est la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance. D'un point de vue pratique, on retiendra que, pour "exciter une cavité", il faut utiliser des fréquences de l'intervalle  $(\omega_0 - \omega_0/2Q, \omega_0 + \omega_0/2Q)$ .

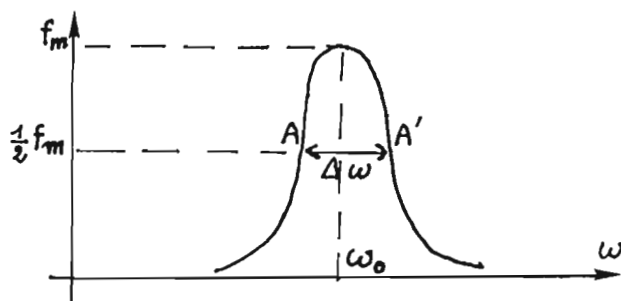


Figure 64 : Graphe de  $f(\omega) = |\hat{U}(\omega)|^2$ . C'est une "Courbe lorentzienne". Le maximum  $f_m$  est atteint pour  $\omega = \omega_0$  et  $\Delta\omega = \omega_0/Q$ .

Remarque : Nous ne dirons rien du calcul du coefficient  $Q$  qui nécessiterait une évaluation des pertes, évaluation à laquelle nous avons déjà renoncé dans le cas des guides. Pour plus d'information, il faudra se reporter aux traités d'électromagnétisme [5,8,20,21]. De tels traités devront aussi être consultés par les lecteurs qui voudraient se documenter sur l'utilisation des cavités comme éléments de circuits HF ou comme instruments de mesure (ondemètres, discriminateurs,...). Après avoir cité quelques expériences simples pouvant faire l'objet de travaux pratiques, on tombe vite sur des développements théoriques relativement complexes si l'on n'accepte pas de se borner à des exposés purement descriptifs.

## Chapitre XIV

# Rayonnement

Nous appelons problème de rayonnement la détermination d'un champ électromagnétique à partir des "sources", c'est-à-dire des distributions décrivant les charges et les courants. Le rayonnement a donc déjà été partiellement étudié au chapitre III. Ici, nous allons donner d'abord quelques compléments sur la façon de conduire les calculs en régime harmonique, puis nous aborderons le difficile problème de l'émission de radiations électromagnétiques par des charges en mouvement.

### 1. QUELQUES CALCULS RENCONTRES EN THEORIE DES ANTENNES

1.1. Généralités. Nous nous proposons de calculer le champ rayonné par une distribution de courant à support borné  $\Omega$ . C'est dire que nous donnant une fonction densité de courant  $\vec{j}(\vec{r}')$ , nous voulons déterminer les champs  $\vec{E}(\vec{r})$  et  $\vec{H}(\vec{r})$  associés. Cette question, déjà étudiée à propos des potentiels (III, §4) conduit à des calculs assez fastidieux qu'il est bon d'avoir fait une fois jusqu'au bout. Il s'agit en fait d'une initiation à la théorie des antennes d'émission.

Dans un milieu homogène non absorbant ( $\epsilon, \mu$ ), on calcule successivement :

$$(1) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \mu \iiint_{\Omega} \vec{j}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' \quad (2) \quad \mathcal{V}(\vec{r}) = \frac{1}{i \omega \mu \epsilon} \operatorname{div} \vec{A}$$

avec :

$$(3) \quad G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\exp(ikR)}{4\pi R}; \quad R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|.$$

On obtient ensuite les champs à partir des potentiels  $\vec{A}$  et  $\mathcal{V}$  :

$$(4) \quad \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{\mathcal{A}} \quad (5) \quad \vec{\mathcal{E}} = -\operatorname{grad} \mathcal{V} + i\omega \vec{\mathcal{A}} .$$

soit, d'après (12) et puisque  $\omega^2 \epsilon \mu = k^2$  :

$$(5') \quad \vec{\mathcal{E}} = \frac{i}{\omega \mu \epsilon} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathcal{A}} + k^2 \vec{\mathcal{A}}) .$$

Dans la mesure où  $\vec{r}$  correspond à un point extérieur à  $\Omega$ , le problème est mathématiquement sain ; il s'agit de dériver par rapport à  $\vec{r}$  des intégrales par rapport à  $\vec{r}'$  (Fig. 62). Les difficultés rencontrées sont uniquement techniques.

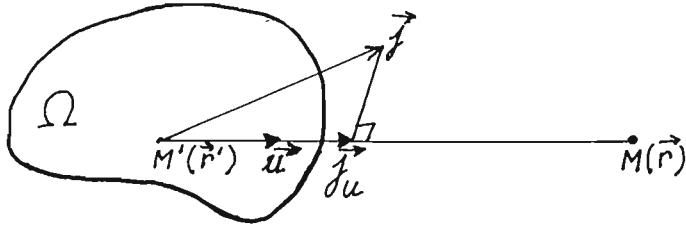


Figure 65 :  $R = \|\vec{r} - \vec{r}'\| = M'M$  ;  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire de  $M'M$  dirigé vers  $M$ . On rappelle qu'avec les notations de l'annexe 1 :  $\vec{u} = \operatorname{grad}_M(R)$ . La notation  $\operatorname{grad}_M$  rappelle que les dérivations sont faites par rapport aux coordonnées  $x, y, z$  du point  $M$  repéré par le vecteur  $\vec{OM} = \vec{r}$  .

1.2. Conseils pour les calculs. Les calculs à effectuer résultent pour la plupart des formules d'analyse vectorielle rappelées en Annexe 1.

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_M \vec{\mathcal{A}} = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot}_M (G \vec{j}(\vec{r}')) d\vec{r}' = \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad}_M G) \wedge \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' ,$$

$$(6) \quad \operatorname{grad}_M G = \frac{dG}{dR} \vec{u} = \left( ik - \frac{1}{R} \right) G \vec{u} ,$$

$$(7) \quad \vec{\mathcal{H}} = \iiint_{\Omega} \left( ik - \frac{1}{R} \right) G \vec{u} \wedge \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (7') \quad \vec{\mathcal{H}} = \frac{k}{4\pi} \iiint_{\Omega} \left( i - \frac{1}{kR} \right) \vec{u} \wedge \vec{j}(\vec{r}') \frac{\exp(ikR)}{R} d\vec{r}' .$$

De même, pour le calcul de  $\vec{\mathcal{E}}$

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{div}_M \vec{\mathcal{A}} = \iiint_{\Omega} \frac{dG}{dR} \vec{u} \cdot \vec{j} d\vec{r}' ,$$

$$\frac{1}{\mu} \text{grad}_M(\text{div}_M \vec{A}) = \iiint_{\Omega} \frac{d^2G}{dR^2} (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{u} \, d\vec{r}' + \iiint_{\Omega} \frac{dG}{dR} \text{grad}_M(\vec{u} \cdot \vec{j}) \, d\vec{r}'.$$

Le calcul de  $\vec{C} \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad}_M(\vec{u}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}'))$  réclame un peu d'attention :

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \sum_{m=1}^3 \left( \frac{x_m - x'_m}{R} \right) j_m(\vec{r}') \right) \vec{e}_n = \sum_n \sum_m \left( \left( \frac{\delta_{n,m}}{R} - \frac{u_m u_n}{R} \right) j_m \right) \vec{e}_n \\ &= \frac{\vec{j}}{R} - \frac{1}{R} (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{u}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\frac{1}{\mu} \text{grad}_M(\text{div}_M \vec{A}) = \iiint_{\Omega} \frac{d^2G}{dR^2} (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{u} + \frac{1}{R} \frac{dG}{dR} \vec{j} - \frac{1}{R} \frac{dG}{dR} (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{u} \, d\vec{r}'$$

soit, d'après (5') et en posant  $(\vec{j} \cdot \vec{u}) \vec{u} = \vec{j}_u$  :

$$(8) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\omega \epsilon} \iiint_{\Omega} \left( \frac{d^2G}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{dG}{dR} \right) \vec{j}_u + \left( k^2 G + \frac{1}{R} \frac{dG}{dR} \right) \vec{j} \, d\vec{r}'.$$

Il ne reste qu'à exprimer  $\frac{dG}{dR}$  et  $\frac{d^2G}{dR^2}$  en fonction de G. On aboutit à :

$$\begin{aligned} (8') \quad \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{\omega \epsilon} \iiint_{\Omega} \left[ \left( \frac{3}{R^2} - \frac{3ik}{R} - k^2 \right) \vec{j}_u + \left( -\frac{1}{R^2} + \frac{ik}{R} + k^2 \right) \vec{j} \right] G \, d\vec{r}' \\ &= \frac{ik^2}{4\pi\omega\epsilon} \iiint_{\Omega} \left[ \left( \frac{3}{k^2 R^2} - \frac{3i}{kR} - 1 \right) \vec{j}_u - \left( \frac{1}{k^2 R^2} - \frac{i}{kR} - 1 \right) \vec{j} \right] \frac{\exp(ikR)}{R} \, d\vec{r}' \end{aligned}$$

On notera que  $\vec{j}_u$  a une interprétation géométrique simple : c'est la projection du vecteur  $\vec{j}$  sur le vecteur  $\vec{u}$  (Fig. 65).

**1.3. L'approximation des grandes distances et la "formule des antennes".** Si le point M est suffisamment éloigné des sources, c'est-à-dire de façon plus précise si  $\forall M' \in \Omega, kR \gg 1$  (donc  $R \gg \lambda/2\pi$ ), on peut, en négligeant les puissances négatives de  $kR$  devant l'unité, simplifier considérablement



les formules (7,7') et (8,8') qui deviennent ainsi :

$$(9) \quad \vec{\mathfrak{H}}(\vec{r}) = \frac{ik}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{u} \wedge \vec{j}(\vec{r}') \frac{\exp(ikR)}{R} d\vec{r}'$$

$$(10) \quad \vec{\mathfrak{E}}(\vec{r}) = \frac{ik\eta}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{u} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{u}) \frac{\exp(ikR)}{R} d\vec{r}'$$

en désignant par  $\eta$  l'impédance du milieu ( $\epsilon, \mu$ ) et en se rappelant que :

$$(11) \quad \vec{u} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{u}) = \vec{j} - (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{u} = \vec{j} - \vec{j}_u.$$

Pour exploiter ces formules, utilisons un référentiel dont l'origine  $O$  appartient à  $\Omega$ . Pour tout point  $M'$  de  $\Omega$ , on peut alors confondre le vecteur unitaire de  $\vec{OM}$  avec le vecteur unitaire  $\vec{u}_0$  de  $\vec{OM}$ . Introduisant le champ de vecteurs :

$$(12) \quad \vec{\mathfrak{R}}(\vec{r}) = \iiint_{\Omega} \vec{u}_0 \wedge \vec{j}(\vec{r}') \frac{\exp(ikR)}{R} d\vec{r}'$$

on est conduit aux formules approchées :

$$(13) \quad \vec{\mathfrak{H}}(\vec{r}) = \frac{ik}{4\pi} \vec{\mathfrak{R}} \quad \text{et} \quad \vec{\mathfrak{E}}(\vec{r}) = -\frac{ik\eta}{4\pi} \vec{u}_0 \wedge \vec{\mathfrak{R}}.$$

On déduit de ces deux relations :

$$(14) \quad \vec{u}_0 \wedge \vec{\mathfrak{E}} = -\frac{ik\eta}{4\pi} \vec{u}_0 \wedge (\vec{u}_0 \wedge \vec{\mathfrak{R}})$$

$$(14) \quad \vec{u}_0 \wedge \vec{\mathfrak{E}} = -\frac{ik\eta}{4\pi} ((\vec{u}_0 \cdot \vec{\mathfrak{R}}) \vec{u}_0 - \vec{\mathfrak{R}}) = \eta \vec{\mathfrak{H}} \quad (\text{car } \vec{u}_0 \cdot \vec{\mathfrak{R}} = 0).$$

On reconnaît en (14) la relation caractérisant la structure de l'onde plane (Chap.V, § 1.1). Ce résultat assez intuitif doit être retenu. Il entraîne que le vecteur de Poynting complexe est  $\frac{1}{2\eta} (\vec{\mathfrak{E}} \cdot \vec{\mathfrak{E}}) \vec{u}_0 = \frac{1}{2\eta} (\vec{\mathfrak{E}} | \vec{\mathfrak{E}}) \vec{u}_0$ .

On appelle souvent "formule des antennes", la formule permettant, dans le cadre de ces approximations, d'obtenir  $\vec{\mathfrak{E}}$  en fonction de  $\vec{j}$ . On l'obtient à partir de (10) en y remplaçant respectivement  $\vec{u}$ ,  $R$  et  $\exp(ikR)$  par  $\vec{u}_0$ ,  $r$  et  $\exp(ikr - ikr' \cos\theta')$  (Fig. 66). On a donc finalement :

$$(15) \quad \vec{\mathfrak{E}}(\vec{r}) = \frac{ik\eta}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{u}_0 \wedge \iiint_{\Omega} \vec{j}(\vec{r}') \wedge \vec{u}_0 \exp(-ikr' \cos\theta') d\vec{r}'$$

avec, dans le vide,  $\eta = 120 \pi$ , soit  $\frac{ik\eta}{4\pi} = 30 ik$ .

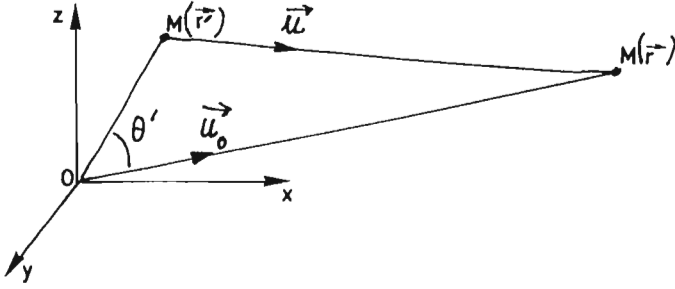


Figure 66 : Etablissement de la formule des antennes.

$$\begin{aligned} \overline{MM'}^2 &= R^2 = (\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM})^2 = r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\theta' \\ &= r^2(1 - \frac{2r'}{r} \cos\theta + (\frac{r'}{r})^2) \end{aligned}$$

Si  $\frac{r'}{r} \ll 1$ ,  $R \simeq r - r'\cos\theta$  ;  $\exp(ikR) \simeq \exp(ikr - ikr'\cos\theta')$

Dans le cas d'antennes filiformes (fil  $\Gamma$  parcouru par un courant d'intensité  $\mathcal{J}(\vec{r}')$ ), il faut remplacer  $\vec{j}(\vec{r}')d\vec{r}'$  par  $\mathcal{J}(\vec{r}')\vec{t}(\vec{r}')d\ell'$  où  $\vec{t}$  est le vecteur unitaire de la tangente au fil au point  $M'$ . Ce faisant, l'intégrale de volume devient une intégrale curviligne de sorte que, dans le vide, et avec les unités du système légal :

$$(15') \quad \vec{E}(\vec{r}) = 30 ik \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{u}_0 \wedge \int_{\Gamma} \mathcal{J}(\vec{r}') \vec{t}(\vec{r}') \wedge \vec{u}_0 \exp(-ikr'\cos\theta') d\ell'$$

1.4. Le rayonnement d'une antenne filiforme rectiligne. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\Gamma$  est une portion de l'axe Oz. Alors  $\vec{t} d\ell' = \vec{e}_z dz$ ,  $\theta'$  n'est autre que l'angle  $\theta$  de  $\vec{OM}$  avec Oz, et :

$$\vec{u}_0 \wedge (\vec{t} \wedge \vec{u}_0) = \vec{u}_0 \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{u}_0) = \vec{e}_z - (\vec{u}_0 \cdot \vec{e}_z) \vec{u}_0.$$

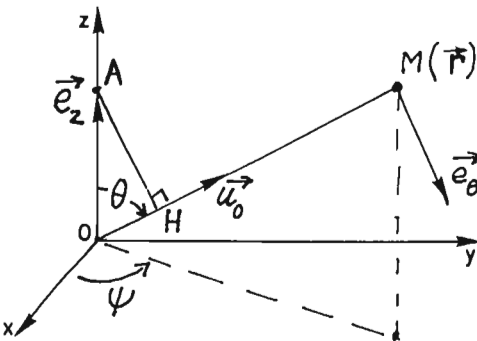


Figure 67 : Cas de l'antenne filiforme.

$r, \theta, \psi$  sont les coordonnées sphériques.

$$\vec{OA} = \vec{e}_z.$$

Soit  $\vec{e}_\theta$  le vecteur unitaire de la tangente au cercle décrit par M quand, pour  $r$  et  $\psi$  fixés,  $\theta$  varie en croissant. Puisque  $(\vec{u}_0 \cdot \vec{e}_z) \vec{u}_0$  est la projection  $\vec{OH}$  de  $\vec{OA}$  sur  $OM$ ,  $\vec{u}_0 \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{u}_0) = \vec{OA} - \vec{OH} = \vec{HA} = -\sin\theta \vec{e}_\theta$ . Ainsi :

$$(16) \quad \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \left[ -30 ik \sin\theta \frac{\exp(ikr)}{r} \int_a^b \mathcal{J}(z) \exp(-ikz \cos\theta) dz \right] \vec{e}_\theta.$$

Cette formule, dans laquelle  $a$  et  $b$  repèrent évidemment les extrémités de l'antenne, montre que le champ électrique vibre rectilignement parallèlement à  $\vec{e}_\theta$ , c'est-à-dire dans le plan méridien défini par le point M et le fil constituant l'antenne.

Si la longueur de l'antenne, supposée centrée sur l'origine, est suffisamment petite devant  $\lambda$  pour que l'on puisse admettre que  $\mathcal{J}(z)$  est constant, on peut, dans (16), remplacer l'intégrale par  $\mathcal{J} \ell$ , et :

$$(17) \quad \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -30 ik \mathcal{J} \ell \sin\theta \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{e}_\theta = \mathcal{E} \vec{e}_\theta.$$

A la direction repérée par  $\vec{u}_0$ , associons alors un vecteur  $\vec{OS} = |\sin\theta| \vec{u}_0$ . D'après (17), la norme  $|\sin\theta|$  de ce vecteur peut servir à représenter l'intensité du champ rayonné dans cette direction (à une distance  $r$  fixée). Quand pour  $\psi$  fixé ( $\psi = 0$  par exemple)  $\theta$  varie de  $0$  à  $\pi$ ,  $S$  décrit un cercle de diamètre unité centré sur  $Ox$  (Fig.68). Ce cercle peut jouer le rôle d'indicatrice (ou diagramme) de rayonnement. Le rayonnement est maximal dans la direction perpendiculaire à l'antenne et nul dans la direction de celle-ci.

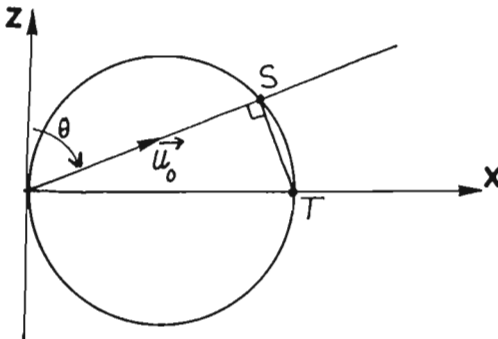


Figure 68 : La perpendiculaire en  $S$  à  $OS$  coupe  $Ox$  en un point  $T$  fixe :

$$OT = \frac{OS}{\sin\theta} = 1.$$

Un autre exemple, souvent traité, est celui du "doublet accordé". C'est une antenne de longueur  $\lambda/2$  ( $a = -b = \lambda/4$ ) pour laquelle on suppose :

$$(18) \quad \mathcal{A}(z) = I_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$

Le courant s'annule donc aux deux extrémités. Le calcul est encore faisable à la main et on peut considérer que les résultats font partie de la culture scientifique générale. On vérifiera que, d'après (16), on a dans ce cas :

$$(19) \quad \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\frac{i}{2\pi} \eta I_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \frac{\exp(ikr)}{r} \vec{e}_\theta = \mathcal{E}(r, \theta) \vec{e}_\theta.$$

Le diagramme de rayonnement, associé maintenant à  $\vec{OS} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{r \sin\theta} \vec{u}_0$ , reste voisin d'un cercle car, comme le montre le tableau 8, les deux fonctions  $f(\theta) = \sin\theta$  et  $g(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta}$  prennent des valeurs voisines pour  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Le maximum de rayonnement correspond à  $\theta = \pi/2$  et le rayonnement tend vers 0 quand  $\theta \rightarrow 0$  (car  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \sim \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\theta^2}{4}\right) \sim \sin\frac{\pi\theta^2}{4} \sim \frac{\pi\theta^2}{4}$ ).

Le vecteur de Poynting  $\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\eta} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}) \vec{u}_0$  est réel et porté par OM. Son flux à travers une sphère, de rayon  $r$ , centrée sur l'origine, représente la puissance moyenne  $P$  rayonnée à travers cette sphère. On trouve évidemment que  $P$  est indépendant de  $r$  :

$\theta$	$f(\theta)$	$g(\theta)$
0	0.	0.
$\pi/6$	0.500	0.417
$\pi/4$	0.707	0.628
$\pi/3$	0.866	0.816
$\pi/2$	1.	1.

Tableau 8.

$$(20) \quad P = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}})}{2\eta} r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \frac{\eta}{4\pi} I_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \, d\theta.$$

Il est d'usage de définir une "résistance de rayonnement"  $R$  en posant  $P = \frac{1}{2} R I_0^2$ .

Dans le vide, où  $\eta = 120 \pi$ , on est conduit à :

$$(20') \quad R = 60 \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \, d\theta = 120 \int_0^1 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} u\right)}{1-u^2} \, du.$$

Cette intégrale, qui n'est pas élémentaire est l'intégrale d'une fonction bornée sur un support borné. Elle peut donc être évaluée numériquement. On trouve  $R \approx 73 \Omega$ . A titre indicatif, on donne ci-dessous le listing, en BASIC, d'un petit programme utilisant la méthode des trapèzes :

```
10 INPUT N : 20 D=1/N : 30 S=0.5 : 40 FOR I=1 TO N-1 : 50 XI=I/N : 60
A=PI*XI/2 : 70 CI=COS A : 80 FI=CI*CI/(1-XI*XI) : 90 S=S+FI : 100 NEXT I :
110 RE=120*S/N : 120 PRINT RE
```

On constatera que seules des instructions très simples ont été utilisées. De nos jours, un étudiant devrait être capable de faire un tel calcul... même un jour d'examen. Ce programme a été testé sur l'ordinateur de poche PC 1500. Si l'intervalle d'intégration est divisé en N intervalles, on trouve respectivement  $R = 73,125 ; 73,128 ; 73,129$  pour  $N = 50, 100, 150$ .

## 2. CHAMP CREE PAR UNE CHARGE EN MOUVEMENT DANS LE VIDE

Les particules électrisées émettent des radiations électromagnétiques quand elles sont animées d'un mouvement accéléré. Ces radiations sont aujourd'hui étudiées par les chercheurs qui se pressent, sans cesse plus nombreux, autour des grands accélérateurs initialement construits pour l'étude des collisions entre particules élémentaires.

2.1. Potentiels de Lienard-Wiechert. Une charge ponctuelle  $q$ , animée d'un mouvement décrit par la fonction vectorielle  $\vec{\alpha}(t)$ , doit être représentée par les distributions  $\vec{\rho}$  et  $\vec{J}$  formellement définies par :

$$(21) \quad \rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{\alpha}(t)), \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = q\vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}$$

Cette charge crée donc (III) des potentiels  $V$  et  $\vec{A}$  définis par :

$$(22) \quad \frac{4\pi}{q} \epsilon_0 V(\vec{r}, t) = g(\vec{r}, t) * \delta(\vec{r} - \vec{\alpha}(t))$$

$$(22') \quad \frac{4\pi}{q\mu_0} \vec{A}(\vec{r}, t) = g(\vec{r}, t) * \delta(\vec{r} - \vec{\alpha}(t)) \vec{v}(t)$$

où, après un léger changement de notation par rapport au chap. III,  $g(\vec{r}, t)$  est, à un coefficient près, la solution élémentaire du d'Alembertien. Si  $c$

désigne la vitesse de la lumière dans le vide :

$$(23) \quad g(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Comme la distribution  $g$  n'a pas été définie avec toute la rigueur nécessaire (III, §2), sa manipulation peut poser quelques problèmes. Pour effectuer les produits de convolution dans  $\mathbb{R}^4$ , qui interviennent dans (22) et (22'), il est commode de considérer  $g$  comme dérivée d'une fonction de Heaviside :

$$(24) \quad g(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} H\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Ceci permet de préciser l'action de  $g$  sur les fonctions-tests de  $\mathcal{D}$  :

$$(25) \quad \forall \varphi(\vec{r}, t) \in \mathcal{D}, \langle g, \varphi \rangle = \left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} H\left(t - \frac{r}{c}\right), \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{1}{r} H\left(t - \frac{r}{c}\right), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle$$

$$= \iiint \left( \int_{t > r/c} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \right) d\vec{r} = \iiint \frac{1}{r} \varphi\left(\vec{r}, \frac{r}{c}\right) d\vec{r}$$

Connaissant la signification de  $\langle g, \varphi \rangle$ , on peut alors calculer  $T(\vec{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} g(\vec{r}, t) * \delta(\vec{r} - \vec{\alpha}(t))$  en appliquant formellement, mais avec soin, la définition du produit de convolution [7] :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T, \varphi \rangle = \langle g(\vec{r}, t) \delta(\vec{r}' - \vec{\alpha}(t')), \varphi(\vec{r} + \vec{r}', t + t') \rangle$$

$$= \left\langle g(\vec{r}, t), \int \varphi(\vec{r} + \vec{\alpha}(t'), t + t') dt' \right\rangle$$

$$(26) \quad = \int \int \int \int \frac{1}{r} \varphi\left(\vec{r} + \vec{\alpha}(t'), \frac{r}{c} + t'\right) dt' d\vec{r} \quad (\text{d'après (25)})$$

$$= \int \int \int \int \frac{1}{r} \varphi\left(\vec{r} + \vec{\alpha}(t), \frac{r}{c} + t\right) dt d\vec{r}$$

Pour effectuer cette dernière intégrale quadruple, utilisons le changement de variable défini par :

$$(27) \quad \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{\alpha}(t) \\ t_1 = \frac{r}{c} + t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_1 = x + \alpha_1(t) \\ y_1 = y + \alpha_2(t) \\ z_1 = z + \alpha_3(t) \\ t_1 = \frac{r}{c} + t \end{cases}$$

Dans la mesure où ces relations sont inversibles et désignant par  $J = D(x, y, z, t) / D(x_1, y_1, z_1, t_1)$  le déterminant fonctionnel ou Jacobien (à ne pas confondre avec le courant) :

$$(28) \quad \langle T, \varphi \rangle = \iiint \int \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{\alpha}(t)\|} \varphi(\vec{r}_1, t_1) |J| d\vec{r}_1 dt_1$$

où  $t$  est lié à  $\vec{r}_1$  et  $t_1$  par :  $t = t_1 - \frac{r}{c} = t_1 - \frac{\|\vec{r}_1 - \vec{\alpha}(t)\|}{c}$

$$(29) \quad c(t_1 - t) = \|\vec{r}_1 - \vec{\alpha}(t)\|.$$

L'inverse de  $J$ , soit  $J^{-1} = D(x_1, y_1, z_1, t_1) / D(x, y, z, t)$  se calcule facilement à partir de (27). On vérifiera que, tous calculs faits, et en désignant par  $\vec{v}$  la vitesse  $\vec{\alpha}'(t)$  de la particule :

$$J^{-1} = 1 - \frac{1}{rc} \vec{v}(t) \cdot \vec{r} = 1 - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \frac{(\vec{r}_1 - \vec{\alpha}(t))}{\|\vec{r}_1 - \vec{\alpha}(t)\|}$$

On notera que  $J$  est positif, donc égal à  $|J|$ , pourvu que  $\|\vec{v}\|$  soit strictement inférieure à une vitesse  $v_0$  elle-même inférieure à  $c$  (comme l'exige la Relativité). Finalement, interprétant (28) après y avoir remplacé respectivement  $\vec{r}_1$ ,  $t_1$  et  $t$  par  $\vec{r}$ ,  $t$  et  $t'$ , on conclut que :

$$(30) \quad T(\vec{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} g(\vec{r}, t) * \delta(\vec{r} - \vec{\alpha}(t)) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{\alpha}(t')\| \left( 1 - \frac{\vec{v}(t') \cdot (\vec{r} - \vec{\alpha}(t'))}{c \|\vec{r} - \vec{\alpha}(t')\|} \right)}$$

expression dans laquelle  $t'$  est lié à  $\vec{r}$  et  $t$  de sorte que :

$$(31) \quad F(\vec{r}, t, t') \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{r} - \vec{\alpha}(t')\| - c(t - t') = 0$$

Ne serait-ce que pour simplifier (30), il est commode de poser :

$$(32) \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{\alpha}(t') = \sum_1 X_i \vec{e}_i \quad \text{et} \quad R = \|\vec{r} - \vec{\alpha}(t')\| = \left( \sum_1 X_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où, d'après (31),  $t'$  est une fonction implicite  $\psi(x, y, z, t)$ .

Des calculs tout à fait similaires conduisent à :

$$(30') \quad \vec{U}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} g(\vec{r}, t) * \delta(\vec{r} - \vec{\alpha}(t)) \vec{v}(t) = \frac{\vec{v}(t')}{R - \frac{\vec{R}}{c} \cdot \vec{v}(t')},$$

où  $t'$  est toujours lié à  $t$  par (31).

Alors, utilisant (30) et (30') pour écrire (22) et (22'), on retrouve l'expression des potentiels proposée au début de ce siècle par A. Lienard (1898) et E. Wiechert (1900) à une époque où la théorie des distributions n'existait pas encore.

$$(33) \quad V(\vec{r}, t) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 (R - \frac{\vec{R}}{c} \cdot \vec{v}(t'))} \quad (33') \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q \vec{v}(t')}{4 \pi (R - \frac{\vec{R}}{c} \cdot \vec{v}(t'))}.$$

La figure (69) rappelle les notations qu'il faut évidemment dominer pour utiliser à bon escient ces résultats.

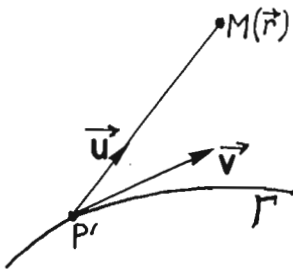


Figure 69 :  $\Gamma$  est la trajectoire de la particule. Les formules (33) et (33') donnent à l'instant  $t$  les potentiels au point  $M$  repéré par  $\vec{r}$ . A l'instant  $t'$  la particule passait en un point  $P'$  de  $\Gamma$  tel que :  $c(t - t') = \|\vec{P'M}\| = R$ . On a représenté le vecteur unitaire  $\vec{u}$  de  $\vec{P'M} = \vec{R}$  et le vecteur  $\vec{v}(t') = \vec{\alpha}'(t')$ .

Il reste à établir que (31) associe une seule valeur de  $t'$  à tout couple  $(\vec{r}, t)$ . Pour cela, supposant  $\vec{r}$  et  $t$  fixés, calculons la dérivée par rapport à  $t'$  de la fonction  $F(\vec{r}, t, t')$  apparaissant dans (31) :

$$\frac{\partial F}{\partial t'} = c - \frac{1}{R} \sum_{n=1}^3 (x_n - \alpha_n(t')) v_n(t') = c - \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Puisque  $\|\vec{v}\| < v_0 < c$  cette dérivée est positive et même supérieure à  $c - v_0$ . Ainsi  $F$  est donc une fonction strictement croissante qui prend une valeur positive pour  $t' = t$ . Ceci prouve que  $F(t')$  s'annule une fois et une seule pour  $t' < t$ . Sinon la fomule  $F(t) - F(t') = \int_{t'}^t F'(u) du$  conduirait à une contradiction ;  $F(t) - F(t')$  qui serait alors nécessairement compris entre 0 et  $F(t)$ , ne pourrait être égal au second membre susceptible de prendre n'importe quelle valeur positive pourvu que  $t - t'$  soit suffisamment grand.



2.2. Champ électrique.  $\vec{E}$  se déduit des potentiels par une formule donnée au chapitre III.

$$(34) \quad \vec{E} = - \text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \text{soit} \quad E_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

Désignons par  $D$  l'expression, homogène à une longueur, qui apparaît aux dénominateurs dans (33) et (33') :

$$(35) \quad D = \stackrel{\text{def}}{=} R - \frac{\vec{R}}{c} \cdot \vec{v}(t') = \sqrt{\sum_1 (x_i - \alpha_i(t'))^2} - \frac{1}{c} \sum_1 x_i \alpha_i'(t')$$

Alors, introduisant la constante  $a \stackrel{\text{def}}{=} q/4\pi \epsilon_0$  :

$$(36) \quad V(\vec{r}, t) = \frac{a}{D(\vec{r}, t)}, \quad A(\vec{r}, t) = \frac{a \vec{v}(t')}{c^2 D(\vec{r}, t)}$$

$$(37) \quad \frac{1}{a} E_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2 D} \gamma_1(t') \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{1}{c^2 D^2} v_1(t') \frac{\partial D}{\partial t}$$

Dans cette dernière formule où  $\vec{\gamma}$  est l'accélération de la particule, répétons que les dérivées partielles par rapport à  $x$  doivent être calculées pour  $t$  fixé sans oublier que  $t'$  est fonction implicite des coordonnées de  $M$  ( $t' = \psi(t, x_1, x_2, x_3)$ ). Pour arriver à l'expression traditionnelle de  $\vec{E}$ , le lecteur pourra tout d'abord vérifier patiemment, et dans l'ordre (voir §2.4), les formules qui suivent :

$$(38) \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t} \quad \text{d'après (31)}$$

$$(39) \quad \frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{1}{D} \vec{R} \cdot \vec{v}(t') \quad \text{d'après (32, 35, 38)}$$

$$(40) \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{D} \quad \text{d'après (38, 39, 35)}$$

$$(41) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = - \frac{R}{D} v_i(t') \quad \text{d'après (32, 40)}$$

$$(42) \quad \frac{\partial D}{\partial t} = - \frac{1}{D} \vec{R} \cdot \vec{v}(t') - \frac{R}{cD} \vec{\gamma}(t') \cdot \vec{R} + \frac{R}{cD} \vec{v}^2(t') \quad \text{d'après (35, 38, 39, 41)}$$

$$(43) \quad \frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{x_i}{D} \quad \text{soit } \text{grad } R = \frac{\vec{R}}{D} \quad \text{d'après (32, 31, 35)}$$

$$(44) \quad \frac{\partial t'}{\partial x_1} = -\frac{X_1}{cD} \quad \text{d'après (31,43)}$$

$$(45) \quad \frac{\partial D}{\partial x_1} = \frac{X_1}{D} \left(1 - \frac{v^2(t')}{c^2}\right) + \frac{X_1}{c^2 D} \vec{\gamma}(t') \cdot \vec{R} - \frac{v_1}{c} \quad \text{d'après (35,43,44)}$$

Utilisant (38 à 45) pour expliciter le second membre de (37) en y éliminant partiellement D grâce à (35) on arrive, après un nouveau calcul laborieux nécessitant beaucoup de soin, à :

$$\begin{aligned} \frac{D^3}{a} E_1(\vec{r}, t) &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(X_1 - v_1 \frac{R}{c}\right) - \frac{Rv_1}{c^3} \vec{R} \cdot \vec{\gamma} + \frac{X_1}{c^2} \vec{R} \cdot \vec{\gamma} - \frac{Rv_1}{c^2} \left(R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}\right) \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(X_1 - v_1 \frac{R}{c}\right) + \frac{1}{c^2} \left[ \left(X_1 - \frac{R}{c} v_1\right) \vec{R} \cdot \vec{\gamma} - \left(R^2 - \frac{R}{c} \vec{R} \cdot \vec{v}\right) \gamma_1 \right] \\ (46) \quad \frac{D^3}{a} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\vec{R} - \frac{R}{c} \vec{v}\right) + \frac{1}{c^2} \left[ \left(\vec{R} - \frac{R\vec{v}}{c}\right) \vec{R} \cdot \vec{\gamma} - \left(R^2 - R \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}\right) \vec{\gamma} \right] \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\vec{R} - \frac{R}{c} \vec{v}\right) + \frac{1}{c^2} \vec{R} \wedge \left(\left(\vec{R} - \frac{R\vec{v}}{c}\right) \wedge \vec{\gamma}\right) . \end{aligned}$$

Il importe de bien noter que, dans le second membre de (46), la vitesse  $\vec{v}$  et l'accélération  $\vec{\gamma}$  de la particule (ainsi que leur norme  $v$  et  $\gamma$ ) doivent être calculées à l'instant  $t'$  et non à l'instant  $t$ . Quant à D,  $\vec{R}$  et R, ce sont des grandeurs qui dépendent de  $\vec{r}$  et  $t$ , mais qui s'expriment facilement en fonction de  $\vec{r}$  et  $t'$  (32, 35).

2.3. Champ magnétique.  $\vec{B}$  se déduit du potentiel vecteur  $\vec{A}$  donné par (36) :

$$(47) \quad \frac{c^2}{a} \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot} \left(\frac{\vec{v}}{D}(t')\right) = -\frac{1}{D^2} \text{grad } D \wedge \vec{v}(t') + \frac{1}{D} \text{rot } \vec{v}(t')$$

On a déjà (45) une expression de grad D ; reste à exprimer  $\text{rot } \vec{v}(t')$ .

$$\begin{aligned} (48) \quad \text{rot } \vec{v} &= \text{rot}(\sum_j v_j \vec{e}_j) = \sum_j \text{grad } v_j \wedge \vec{e}_j = \sum_j \sum_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_j \\ &= \sum_j \sum_1 \frac{\partial v_j}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x_1} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_j = -\sum_j \sum_1 \gamma_j \frac{X_1}{cD} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_j = -\frac{1}{cD} \vec{R} \wedge \vec{\gamma} \end{aligned}$$

On arrive finalement à :

$$(49) \quad \frac{D^3 c^2}{a} \vec{B}(\vec{r}, t) = - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{R} \wedge \vec{v} - \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{R}}{c^2} \vec{R} \wedge \vec{v} - \frac{D}{c} \vec{R} \wedge \vec{\gamma} .$$

A nouveau il s'agit d'une expression bien compliquée mais, en dépit des apparences,  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  sont liées par une relation simple que l'on obtient en multipliant vectoriellement les deux membres de (46) par  $\vec{R}/R$  et en comparant l'égalité obtenue avec (49). On vérifiera que :

$$(50) \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\vec{R}}{R} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{R}}{R} .$$

Par contre (46) montre que  $\vec{E}$  n'est pas perpendiculaire à  $\vec{R}$ , sauf aux grandes distances où on peut considérer que le terme contenant  $\vec{\gamma}$  l'emporte. Le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{E}$  est alors voisin de zéro.

2.4. Quelques détails de calcul. Il est clair que l'établissement des formules (38-50) est assez fastidieux. Différenciant (31) pour  $\vec{r}$  fixé, on trouve immédiatement (38) :  $\partial R / \partial t = c(1 - \partial t' / \partial t)$ . L'obtention de (32) est plus délicate. Toujours pour  $\vec{r}$  fixé, on peut d'abord différencier (32) :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{R} \sum_i X_i \frac{\partial X_i}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = - \frac{1}{R} \sum_i X_i \frac{d\alpha_i}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial t} = - \frac{1}{R} \vec{R} \cdot \vec{\gamma} \frac{\partial t'}{\partial t} .$$

Utilisant maintenant (38) pour exprimer  $\partial t' / \partial t$ , on trouve que :

$$\frac{\partial R}{\partial t} \left(1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{Rc}\right) = - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R} , \quad \text{soit} \quad \frac{\partial R}{\partial t} = - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R - \vec{R} \cdot \vec{v}/c}$$

établissant ainsi (39) puisque, d'après (35),  $R - \vec{R} \cdot \vec{v}/c = D$ .

Les formules suivantes résultent de manipulations analogues.

2.5. Récapitulation. Au terme de ces pénibles calculs algébriques, qu'il aurait sans doute été préférable de pouvoir présenter à l'aide du formalisme quadridimensionnel de l'électromagnétisme [5], il semble utile de mettre en valeur les résultats essentiels (tableau 9).

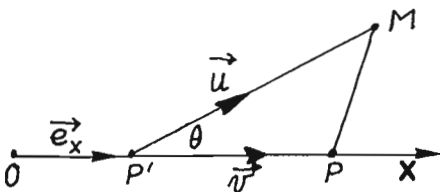
$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}, t) &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 (R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c})} & \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi (R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c})} \\
 \frac{4\pi \epsilon_0}{q} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(\vec{R} - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}) + \frac{1}{c^2} \vec{R} \wedge (\dot{\vec{R}} - \frac{R\dot{\vec{v}}}{c}) \wedge \vec{\gamma}}{(R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c})^3} \\
 \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) & \text{avec} & \vec{u} = \frac{\vec{R}}{R}
 \end{aligned}$$

**Tableau 9 :** Rayonnement d'une charge  $q$  animée d'un mouvement de vitesse  $\vec{v}$  et d'accélération  $\vec{\gamma}$ . Les notations sont celles de la figure 69.  $\vec{v}$  et  $\vec{\gamma}$  doivent être évaluées au temps  $t'$  tel que  $c(t - t') = \|\vec{P}'M\|$ . D'une manière générale, si un vecteur est représenté par une lettre surmontée d'une flèche, sa norme est représentée par la même lettre sans flèche.

2.6. **Commentaires**. Nous laisserons au lecteur intéressé la soin de parfaire son information en consultant des ouvrage plus complets [5, 25], et nous nous bornerons à quelques remarques découlant du tableau précédent.

a) Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme ( $\vec{\gamma} = 0$ ) le champ électrique, au point M et à l'instant t, est porté par la droite joignant M au point P coïncidant avec la particule à ce même instant t (Fig. 67). Il suffit en effet de se reporter à la définition de R (32) pour vérifier que  $\vec{R} - \vec{v} R/c$  représente bien le vecteur  $\vec{PM} = \vec{P}'M - \vec{P}'P$ .

b) Dans le cas d'un mouvement rectiligne accéléré ( $\vec{v}$  colinéaire à  $\vec{\gamma}$ ), il est intéressant de calculer, au point M et à l'instant t, la composante  $P_u = \vec{u} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})$  du vecteur de Poynting sur P'M (Fig. 70).



**Figure 70 :** On a supposé que l'axe  $O_x$  se confond avec la trajectoire rectiligne.  $\vec{e}_x$  et  $\vec{u}$  sont des vecteurs unitaires.

Compte tenu de (50) :  $P_u = \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E}^2 \vec{u} - (\vec{E} \cdot \vec{u}) \vec{E}) \cdot \vec{u}$ . Dans l'approximation des grandes distances et dans la mesure où  $\vec{u} \cdot \vec{E}$  est alors négligeable (fin du §2.3) cette composante se réduit à :  $P_u = \epsilon_0 c \|\vec{E}\|^2$ .

Partant de l'expression de  $\vec{E}$  (tableau 9) et posant  $v = \vec{v}$ ,  $\gamma = \|\vec{\gamma}\|$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $A = \frac{4\pi \epsilon_0 R^2}{q^2} (1 - \beta \cos \theta)^3$ , on arrive à :

$$\begin{aligned} \vec{A}\vec{E} &= (1 - \beta^2)(\vec{u} - \beta \vec{e}_x) + \frac{\gamma R}{c^2} \vec{u} \wedge ((\vec{u} - \beta \vec{e}_x) \wedge \vec{e}_x) \\ (51) \quad \vec{A}\vec{E} &= (1 - \beta^2 + \gamma \frac{R}{c^2} \cos \theta) \vec{u} - (\beta (1 - \beta^2) + \gamma \frac{R}{c^2}) \vec{e}_x \end{aligned}$$

soit, dans l'approximation des grandes distances :

$$(51') \quad \frac{Ac^2}{\gamma R} \vec{E} = \vec{u} \cos \theta - \vec{e}_x = (\cos^2 \theta - 1) \vec{e}_x + \cos \theta \sin \theta \vec{e}_y.$$

Tout ceci conduit finalement à :

$$(52) \quad P_u = \frac{q^2 \gamma^2 \sin^2 \theta}{16 \pi^2 \epsilon^2 R^2 c^3 (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^6}$$

Aux faibles vitesses, on peut négliger  $(v \cos \theta)/c$  devant l'unité et le maximum de  $P_u$  (c'est-à-dire de l'intensité rayonnée) correspond alors à  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Au contraire, aux vitesses relativistes (quand  $v$  est voisin de  $c$ ) l'étude de (52) montre que le rayonnement est pratiquement confiné dans un cône étroit correspondant à de faibles valeurs de  $\theta$  [5, 25].

c) Nous avons jusqu'ici supposé le mouvement de la charge connu. Les problèmes pratiques sont beaucoup plus compliqués. Quand une charge placée dans un champ prend un mouvement accéléré, l'énergie qu'elle rayonne contribue à son freinage. Il est par ailleurs intéressant d'étudier la composition spectrale du rayonnement émis, c'est-à-dire de recenser les fréquences qu'il contient. On voit que les thèmes de recherche ne manquent pas... Nous n'avons fait qu'effleurer un sujet dont on pourra poursuivre l'étude en se reportant à Jackson [5] ou à Jones [25].

## Chapitre XV

# *Introduction aux problèmes de diffraction en régime harmonique*

Supposons qu'un faisceau lumineux éclaire un objet opaque. On dit en Optique géométrique que certains rayons étant arrêtés par l'objet, il apparaît derrière celui-ci une zone d'ombre. C'est effectivement ce que l'on observe si les dimensions caractéristiques de l'objet sont grandes devant la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière. Dans le cas contraire, on sait par contre que les phénomènes observés sont beaucoup moins simples : tout se passe comme si l'objet éclairé se comportait à son tour comme une source lumineuse émettant dans tout l'espace, et sans changement de fréquence, une lumière dite diffractée. Tels sont les faits expérimentaux généralement enseignés dans nos cours d'Optique, mais observables dans tous les domaines de longueur d'onde. Leur interprétation en termes d'ondes électromagnétiques passe par l'élaboration d'un modèle mathématique et conduit en général à des problèmes non triviaux d'Analyse et de Calcul numérique. L'étude détaillée de ces problèmes, qui relèvent de la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles, ne peut être entreprise dans un cours de maîtrise. Nous nous contenterons une fois de plus d'exposer, sur un exemple simple, des méthodes susceptibles d'être généralisées.

N.B. : Dans ce chapitre,  $\sum_n u_n$  signifiera toujours  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ .

### 1. LE PROBLEME DE LA DIFFRACTION PAR UNE TIGE INFINIMENT CONDUCTRICE.

Soit une tige infiniment conductrice (Fig. 71) dont la section droite est le domaine simplement connexe ayant pour frontière la courbe fermée  $\Gamma$ . En nous limitant à l'un ou l'autre des deux cas de polarisation déjà plusieurs fois utilisés, représentons le champ électromagnétique par une fonction complexe  $u(x,y)$ . Plus précisément,  $u$  est la composante sur Oz de  $\vec{E}$  (ou  $\vec{H}$ ) suivant que le champ électrique (ou magnétique) vibre parallèlement à Oz. Ces deux cas de polarisation seront notés, comme d'habitude, E// et H//.

et telle que  $u^d = u - u^i$  vérifie

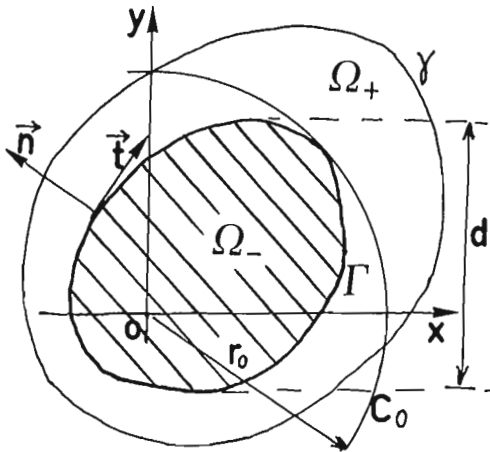


Figure 71. La tige est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz. Le métal infiniment conducteur correspond au domaine hachuré  $\Omega_-$ , c'est-à-dire à l'intérieur de  $\Gamma$ . L'extérieur  $\Omega_+$  de  $\Gamma$  est caractérisé par  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ .

En songeant à une expérience réalisée à l'aide d'un faisceau laser, le Physicien tient pour claire la question suivante : quel est le champ diffracté par la tige quand elle est éclairée par une onde plane ? La mise au point d'un modèle mathématique n'est pourtant pas totalement évidente. Il faut, pour satisfaire le Mathématicien, proposer un énoncé plus précis tel que : étant donné une fonction  $u^i$  (décrivant le champ incident), déterminer une fonction  $u$  (décrivant le champ total) vérifiant dans  $\Omega_+$  l'équation de Helmholtz (Fig.71), satisfaisant les conditions aux limites imposées par le métal, ~~et vérifiant~~ la condition de Sommerfeld (III, §4) dite encore condition d'onde sortante (C.O.S.). Sans perte de généralité, on peut supposer que l'onde incidente se propage suivant Ox, c'est-à-dire que :

$$(1) \quad u^i(x) = \exp(ikx) \quad \text{ou} \quad u^i(r, \theta) = \exp(ikr \cos \theta) .$$

Mathématiquement parlant on cherche donc, dans un espace fonctionnel qui mériterait d'être précisé [26], une fonction  $u(x, y)$  telle que :

$$(2) \quad \Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_+,$$

$$(3) \quad u = 0 \quad (\text{cas E//}) \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dn} = 0 \quad (\text{cas H//}) \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$(4) \quad u^d \stackrel{\text{def}}{=} u - u^i \text{ vérifie la C.O.S.}$$

On remarquera que, compte tenu de sa définition,  $u^d$ , qui s'identifie au champ diffracté dans  $\Omega_+$  (à l'extérieur de  $\Gamma$ ), n'a pas d'interprétation physique intéressante dans  $\Omega_-$ . Quant à la condition de Neumann ( $du/dn = 0$  sur

$\Gamma$ ), elle résulte de l'annulation de  $\vec{n} \wedge \vec{E} = i \vec{n} \wedge \text{rot}(u \vec{e}_z) / \omega \epsilon$  qui, d'après les formules (A1, 16) et (A1, 4), entraîne à son tour celle de  $\vec{n} \cdot \text{grad } u$ . On préfère parfois prendre  $u^d$  comme fonction inconnue : alors, puisque  $u^i$  vérifie partout l'équation de Helmholtz :

$$(2') \quad \Delta u^d + k^2 u^d = \Delta u - \Delta u^i + k^2 u - k^2 u^i = 0 \quad \text{dans } \Omega_+,$$

$$(3') \quad u^d = -u^i \quad (\text{cas E//}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u^d}{\partial n} = -\frac{\partial u^i}{\partial n} \quad (\text{cas H//}) \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$(4') \quad u^d \text{ vérifie la C.O.S.}$$

Nous admettrons l'existence et l'unicité de la solution, bien que, en nous contentant du degré de rigueur habituellement utilisé en Physique, l'unicité pourrait être établie sans trop de difficulté dans la mesure où  $\Gamma$  est suffisamment régulière (voir §6).

2. QUELQUES PROPRIETES GENERALES DU CHAMP.

Même si l'on doit généralement se contenter d'une détermination approchée du champ diffracté, celui-ci possède néanmoins des propriétés générales, vraies quelle que soit  $\Gamma$ , qui méritent d'être connues.

2.1. Lemme fondamental. Soit  $\Phi(r, \theta)$  et  $\Psi(r, \theta)$  deux fonctions vérifiant l'équation de Helmholtz dans  $\Omega_+$  et continues, ainsi que leur gradient, dans  $\Omega_+ \cup \Gamma$ . Alors si  $\gamma$  est une courbe fermée dont l'intérieur contient  $\Gamma$  :

$$(5) \quad \int_{\gamma+\Gamma} \left( \Phi \frac{d\Psi}{dn} - \Psi \frac{d\Phi}{dn} \right) d\ell = 0 .$$

En effet :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Phi + k^2\Phi &= 0 \\ \Delta\Psi + k^2\Psi &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ implique } \Psi \Delta\Phi - \Phi \Delta\Psi = 0 ,$$

et (5) n'est autre que la deuxième identité de Green (A1, 27) appliquée au domaine compris entre  $\Gamma$  et  $\gamma$  (Fig.71).

Si de plus  $\Phi$  et  $\Psi$  vérifient sur  $\Gamma$  soit une condition de Dirichlet (annulation de la fonction), soit une condition de Neumann (annulation de la déri-



vée normale), la contribution de  $\Gamma$  s'annule et (5) se réduit à :

$$(6) \quad \int_{\gamma} \left( \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\ell = 0 .$$

Enfin, dans le cas où  $\gamma$  est un cercle  $C$  de rayon  $r$ ,  $d\ell = r d\theta$  et les dérivées normales deviennent des dérivées partielles par rapport à  $r$  :

$$(6') \quad \int_C \left( \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) d\theta = 0 .$$

2.2. Une relation intégrale vraie pour le champ total. Revenant au problème posé au §1, il est clair que puisque  $k^2$  est réel, les fonctions  $u$  et  $\bar{u}$  ont, quel que soit le cas de polarisation, les propriétés attribuées aux fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  pour établir (6'). On a donc, pourvu que le rayon  $r$  du cercle  $C$  soit suffisamment grand pour que l'intérieur de  $C$  contienne  $\Gamma$  :

$$(7) \quad \frac{1}{2} \int_C \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\theta = \text{Im} \int_C u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} d\theta = 0 .$$

2.3. Forme du champ loin de la tige. Soit  $C_0$  le plus petit cercle de centre  $O$  contenant le domaine  $\Omega_-$ , et  $r_0$  son rayon (Fig.71). Pour  $r > r_0$ ,  $u^d$  qui vérifie l'équation de Helmholtz peut, pour  $r$  fixé, être développé en série de Fourier en  $\theta$  :

$$u^d(r, \theta) = \sum_n u_n^d(r) \exp(in\theta) .$$

Les coefficients  $u_n^d$ , qui s'expriment à l'aide de fonction de Bessel (A4, §2.7), peuvent s'écrire sous la forme :

$$(8) \quad u_n^d(r) = a_n H_n^-(kr) + b_n H_n^+(kr) = b_n H_n^+(kr)$$

car la C.O.S. impose  $a_n = 0$ . Le champ incident peut aussi être développé en série de Fourier et d'après (A4, 27) :

$$u^i(r, \theta) = \exp(ikr \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = \sum_n (i)^n J_n(kr) \exp(in\theta) .$$

Finalement, en posant  $d_n = (i)^n$ , il apparaît que pour  $r$  supérieur à  $r_0$  :

$$(9) \quad u(r, \theta) = u^i(r, \theta) + u^d(r, \theta) = \sum_n (d_n J_n(kr) + b_n H_n^+(kr)) \exp(in\theta) .$$

Il faut bien comprendre que les considérations faites dans ce paragraphe supposent que  $u$  vérifie l'équation de Helmholtz en tout point d'un cercle de rayon  $r$ , centré sur l'origine. Cette équation n'étant pas vérifiée aux points où un tel cercle couperait  $\Gamma$  ( $\Delta u$  n'étant pas défini), la validité du développement (9) n'est pas établie pour  $r < r_0$  et son utilisation pour décrire le champ dans tout le domaine  $\Omega_+$  serait une hypothèse supplémentaire (dite hypothèse de Rayleigh).

2.4. Le théorème optique. Désignant par  $J_n'$  et  $H_n^{-'}$  les dérivées de  $J_n$  et  $H_n^-$ , et notant que  $H_n^+(kr)$  et  $H_n^-(kr)$  sont imaginaires conjugués, (9) implique :

$$(10) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = k \sum_m (\bar{d}_m J_m'(kr) + \bar{b}_m H_m^{-'}(kr)) \exp(-im\theta) .$$

Récrivons (9) et (10) en posant :

$$(11) \quad u(r, \theta) = \sum_n f_n(r) \exp(in\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \sum_m g_m(r) \exp(-im\theta) .$$

Alors, puisque  $\int_0^{2\pi} \exp(i(n-m)\theta) d\theta = 2\pi \delta_{n,m}$ , la relation (7) devient :

$$(12) \quad \text{Im} \left( \sum_n f_n g_n \right) = 0 .$$

Or, sous-entendant l'argument  $kr$  des fonctions de Bessel :

$$(13) \quad f_n g_n = d_n \bar{d}_n J_n J_n' + d_n \bar{b}_n J_n H_n^{-'} + \bar{d}_n b_n H_n^+ J_n' + b_n \bar{b}_n H_n^+ H_n^{-'} .$$

Le premier terme du second membre étant réel ne donne pas de contribution dans (12) et des formules données en annexe (A4, 38, 39) permettent d'évaluer la contribution du quatrième terme :  $\text{Im} (H_n^+(kr) H_n^{-'}(kr)) = -2/\pi kr$ . Reste à calculer l'apport des deux autres termes :

$$\text{Im} (d_n \bar{b}_n J_n H_n^{-'}) = \text{Im} (d_n \bar{b}_n J_n J_n') - \text{Re} (d_n \bar{b}_n J_n N_n') ,$$

$$\text{Im} (\bar{d}_n b_n H_n^+ J_n') = \text{Im} (\bar{d}_n b_n J_n J_n') + \text{Re} (\bar{d}_n b_n N_n J_n') ,$$

$$\operatorname{Im}\left(d_n \bar{b}_n J_n H_n^{-'} + \bar{d}_n b_n H_n^+ J_n^{-'}\right) = -\operatorname{Re}\left(d_n \bar{b}_n\right) \left(J_n N_n' - J_n' N_n\right) .$$

Finalement, grâce encore à (A4, 39), l'égalité (12) s'écrit encore :

$$(14) \quad \sum_n |b_n|^2 + \operatorname{Re}\left(\sum_n d_n \bar{b}_n\right) = 0 \quad \text{avec } d_n = i^n .$$

C'est ce résultat, énoncé sous une autre forme (14'), que les non opticiens appellent généralement le "théorème optique". Revenons à l'expression du champ diffracté  $u^d$  ou plutôt à son comportement quand  $r \rightarrow \infty$ . Compte tenu de (A4, 18) :

$$u^d = \sum_n b_n H_n^+(kr) \exp(in\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r}} \exp(-\frac{i\pi}{4}) F(\theta)$$

$$\text{avec } F(\theta) = \sum_n b_n \exp(-in \frac{\pi}{2}) \exp(in\theta) .$$

Il apparaît ainsi que :

$$\int_0^{2\pi} |F(\theta)|^2 d\theta = 2\pi \sum_n |b_n|^2 , \quad F(0) = \sum_n b_n (-i)^n = \sum_n b_n \bar{d}_n ,$$

de sorte que (14) est équivalent à :

$$(14') \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(\theta)|^2 d\theta + \operatorname{Re}(F(0)) = 0 .$$

Parfois encore on énonce le "théorème optique" sous une troisième forme (14'') qui pourra faire l'objet d'un exercice. Soit  $P^d$  le flux, par unité de longueur, du vecteur de Poynting complexe associé au champ diffracté à travers un cylindre de rayon  $r$  et  $P^i$  le flux, par unité de longueur, du vecteur de Poynting complexe associé au champ incident à travers la section apparente de la tige. Définissant un coefficient de diffraction  $\sigma$  comme le rapport  $P^d/P^i$ , il apparaît que, quel que soit le cas de polarisation, et si  $d$  désigne le diamètre apparent de la tige (Fig.71), on a :

$$(14'') \quad \sigma = -\frac{4}{kd} \operatorname{Re} F(0) .$$

2.5. Les sources du champ diffracté. Plaçons-nous d'abord dans le cas  $E//$  où  $\vec{E} = u \vec{e}_z$ . En se souvenant que  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont nuls dans le métal infiniment

conducteur, et en désignant par  $\vec{j}_s$  le courant superficiel, il est facile de vérifier qu'au sens des distributions :

$$(15) \quad \text{rot } \vec{E} = i\omega \mu \vec{H} , \quad (15') \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_s \delta_\Gamma - i\omega \epsilon \vec{E} .$$

De plus, puisque compte tenu de la polarisation,  $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$ , le saut de la composante normale de  $\vec{E}$  est nul et, toujours au sens des distributions :

$$(16) \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad (\text{car } \text{div } \vec{E} = (\text{div } \vec{E}) + 0 \delta_\Gamma = 0 + 0) .$$

Alors, prenant le rotationnel des deux membres de (15), et tenant compte de (15') et (16) :

$$(17) \quad \Delta \vec{E} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E} = - i\omega \mu \vec{j}_s \delta_\Gamma .$$

Ceci prouve que  $\vec{j}_s$  est parallèle à Oz ( $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_z$ ) et que, par suite :

$$(17') \quad \Delta u + k^2 u = - i\omega \mu j_s \delta_\Gamma .$$

Puisque  $\Delta u^1 + k^2 u^1 = 0$ , la linéarité de l'opérateur Laplacien permet d'affirmer que  $u^d \stackrel{\text{def}}{=} u - u^1$  vérifie la même équation que  $u$  :

$$(17'') \quad \Delta u^d + k^2 u^d = - i\omega \mu j_s \delta_\Gamma .$$

L'étude du cas  $H//$  ( $\vec{H} = u \vec{e}_z$ ) est à peine plus difficile. On prend maintenant le rotationnel des deux membres de (15') et, remarquant que  $\text{div } \vec{H} = 0$ , on arrive à :

$$(18) \quad \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = - \text{rot}(\vec{j}_s \delta_\Gamma) .$$

Mais  $\vec{j}_s$ , qui doit être à la fois orthogonal à  $\vec{e}_z$  et à  $\vec{n}$ , est colinéaire au vecteur unitaire  $\vec{t}$  de la tangente à  $\Gamma$ . Posant  $\vec{j}_s = j_s \vec{t}$ , et notant que  $t_x = n_y$  tandis que  $t_y = -n_x$ , il apparaît que :

$$(19) \quad \begin{aligned} \vec{e}_z \cdot \text{rot}(\vec{j}_s \delta_\Gamma) &= \frac{\partial}{\partial x}(j_s t_y \delta_\Gamma) - \frac{\partial}{\partial y}(j_s t_x \delta_\Gamma) = - \frac{\partial}{\partial x}(j_s n_x \delta_\Gamma) - \frac{\partial}{\partial y}(j_s n_y \delta_\Gamma) \\ &= - \text{div}(\vec{n} j_s \delta_\Gamma) . \end{aligned}$$

Finalement, en projetant (18) sur Oz :

$$(18') \Delta u + k^2 u = \operatorname{div}(\vec{n} j_s \delta_\Gamma) , \quad (18'') \Delta u^d + k^2 u^d = \operatorname{div}(\vec{n} j_s \delta_\Gamma) .$$

On peut interpréter les résultats obtenus en disant que les distributions qui apparaissent aux seconds membres de (17'') et (18'') sont les sources du champ diffracté  $u^d$ . On sait en effet (III, §4) que, puisque  $u^d$  vérifie une condition de rayonnement (C.O.S.), les équations (17'') et (18'') permettent la détermination de  $u^d$  à partir de ces sources. Il ne serait par contre pas raisonnable de tenir le même langage avec le champ incident qui ne vérifie pas la C.O.S. : la seule connaissance de  $j_s$  ne suffit pas pour déterminer  $u$  à partir de (17'') ; il faut de plus connaître  $u^i$ .

Dans les ouvrages américains, on interprète souvent le champ diffracté comme le champ rayonné par un courant  $\vec{j}_s$  qui apparaîtrait à la surface de la tige sous l'action du champ incident. Cette façon de voir les choses à au moins le mérite de rappeler que le problème de diffraction est ramené à un problème de rayonnement (XIV) dès que le courant superficiel  $\vec{j}_s$  a été déterminé. Mais il ne faut pas oublier que la détermination de  $\vec{j}_s$  est la partie difficile...

### 3. DETERMINATION DU CHAMP DIFFRACTÉ EN E//.

On opère en trois temps : expression de  $u^d$  à partir de  $j_s$  supposé connu, obtention d'une équation intégrale pour  $j_s$ , résolution de cette équation et calcul de  $u^d$ .

3.1. Expression de  $u^d$  à partir de  $j_s$ . Elle découle immédiatement de (17'') et de considérations déjà développées au chap. III, §4 :

$$(20) \quad u^d = - i\omega \mu j_s \delta_\Gamma * g \quad \text{avec} \quad g(\vec{r}) = \frac{1}{4i} H_0^+(kr)$$

soit, de façon explicite, et en posant  $R = MM' = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$  :

$$(20') \quad u^d(\vec{r}) = - \frac{\omega \mu}{4} \int_\Gamma H_0^+(kR) j_s(\vec{r}') d\ell' ,$$

$$(20'') \quad u^d(P) = - \frac{\omega \mu}{4} \int_\Gamma H_0^+(kR) j_s(M') d\ell' .$$

Dans cette formule, P est un point non situé sur  $\Gamma$ , tandis que M' parcourt  $\Gamma$  pendant l'intégration (Fig.72) ; on n'oubliera pas que, si  $P \in \Omega_-$ ,  $u^d(P) = -u^i(P)$ .

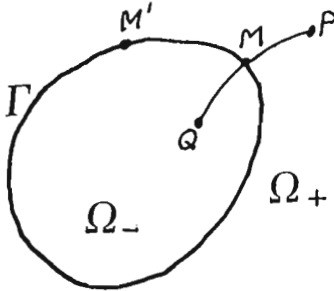


Figure 72. P et Q sont deux points appartenant respectivement à  $\Omega_+$  et à  $\Omega_-$ . M et M' sont deux points de  $\Gamma$ .

3.2. Equation intégrale. Supposons maintenant que P tende vers un point M de  $\Gamma$ . Puisque dans le cas de polarisation que nous étudions  $u = u^i + u^d$  est continu, la condition aux limites imposée par le métal s'écrit :

$$(21) \lim_{P \rightarrow M} (u^i(P) + u^d(P)) = 0$$

ce que nous sommes tentés de remplacer par :

$$(21') u^d(M) = -u^i(M) \text{ , } (21'') \frac{\omega \mu}{4} \int_{\Gamma} H_0^+(kR) j_s(M') d\ell' = u^i(M) \text{ avec } R = MM'.$$

Pourtant le passage de (21) à (21') n'a rien d'évident. Le champ incident étant continu, il est bien vrai que  $u^i(P)$  tend vers  $u^i(M)$  quand P tend vers M. Par contre, pour écrire que  $u^d(P)$  tend vers  $u^d(M)$ , on doit supposer non seulement que l'expression intégrale (20'') garde un sens lorsque P vient se confondre avec un point M de  $\Gamma$ , mais aussi que la fonction  $u^d$  définie par (20'') est continue sur  $\Omega_+ \cup \Gamma$ . Le premier point résulte du comportement de  $H_0^+$  au voisinage de zéro : quand M tend vers M' (donc quand  $R \rightarrow 0$ ),  $H_0^+(k MM')$  tend vers l'infini mais son comportement logarithmique assure l'existence du premier membre de (21'') pourvu que la fonction inconnue  $j_s$  soit suffisamment régulière. Quant à la continuité de  $u^d$ , elle résulte d'une analyse délicate étendant à l'équation de Helmholtz des considérations évoquées au chap.0 pour l'équation de Laplace (Théorie du Potentiel). On pourra se reporter au livre de D. Colton et R. Kress [26] pour plus d'information sur cette question d'Analyse difficile à suivre dans le détail pour un physicien.

Si nous supposons  $\Gamma$  donné par une équation en coordonnées polaires  $r = f(\theta)$ , (21") prend la forme :

$$(22) \int_0^{2\pi} N(\theta, \theta') j_s(\theta') d\theta' = s(\theta) .$$

Ceci est une équation intégrale pour la fonction inconnue  $j_s$  ; le second membre est connu, ainsi que la fonction de deux variables  $N(\theta, \theta')$  qu'on appelle le noyau (en anglais : kernel) :

$$(22') s(\theta) = \exp(ik f(\theta) \cos\theta) ,$$

$$(22'') N(\theta, \theta') = \frac{\omega \mu}{4} H_0^+ \left( k \sqrt{f^2(\theta) + f^2(\theta') - 2f(\theta) f(\theta') \cos(\theta - \theta')} \right) \times \\ \times \sqrt{(f'(\theta'))^2 + f^2(\theta')} .$$

3.3. Solution approchée. Il ne faut évidemment pas s'attendre à obtenir une forme explicite de  $j_s$  pour une courbe  $\Gamma$  arbitrairement donnée. On doit se contenter d'une résolution approchée de (22) sur ordinateur. Celle-ci est en général conduite par des techniques relevant de l'Expérience numérique et souvent incomplètement justifiées sur le plan théorique : on met au point un algorithme fournissant une suite de fonctions  $\tilde{j}_{s,n}$  qui, comme on le démontre ou tout simplement on l'espère, tendent, à un certain sens, vers la solution cherchée. C'est finalement une de ces fonctions qui est retenue comme solution approchée. Il est difficile d'en dire plus... Tout au plus peut-on donner quelques idées directrices pouvant servir de guide aux débutants. Si le noyau  $N(\theta, \theta')$  était borné, une démarche très simple (voir simpliste) pourrait être la suivante :

- Ecrire (22) pour P valeurs  $\theta_n$  de  $\theta$  ( $n = 1, \dots, P$ ) de l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , puis, pour n fixé, évaluer l'intégrale en la remplaçant par une combinaison linéaire des nombres  $x_m$  ( $x_m = j_s(\theta'_m)$  avec  $m = 1, 2, \dots, P$ ). On y parvient, par exemple, par la "méthode des trapèzes".
- Résoudre le système linéaire ainsi obtenu pour les inconnues  $x_m$  et prendre la collection de ces  $x_m$  comme représentation de la fonction  $j_s$ .
- S'assurer que les  $x_m$  ainsi obtenus, ou certaines grandeurs physiques qui s'en déduisent, et qui intéressent l'Ingénieur du point de vue pratique, ne sont pas sensiblement modifiés quand on recommence le calcul avec une plus grande valeur de P.

Malheureusement, ou plutôt heureusement, dirait sans doute le mathématicien averti qui n'aime guère les équations de Fredholm de première espèce, le noyau est singulier et quelques difficultés pratiques surgissent.

Le problème posé est celui du calcul, sur un intervalle borné  $\Delta$ , d'une intégrale du type :

$$(23) \quad I(\theta) = \int_{\Delta} N(\theta, \theta') \Phi(\theta') d\theta'$$

où  $N$  est non borné mais sommable et  $\Phi$  "suffisamment régulière". Il est conseillé "d'extraire la singularité du noyau", c'est-à-dire de s'ingénier à le mettre sous la forme :

$$(24) \quad N(\theta, \theta') = N_s(\theta, \theta') + N_r(\theta, \theta')$$

où  $N_s$  est un nouveau noyau singulier "intégrable à la main", tandis que  $N_r = N - N_s$  est un noyau régulier borné. Alors, puisqu'on connaît sous forme explicite la fonction  $C(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Delta} N_s(\theta, \theta') d\theta'$  :

$$(25) \quad I(\theta) = \int_{\Delta} (N_s(\theta, \theta') \Phi(\theta) + N(\theta, \theta') \Phi(\theta') - N_s(\theta, \theta') \Phi(\theta)) d\theta' \\ = \Phi(\theta) C(\theta) + \int_{\Delta} F(\theta, \theta') d\theta', \quad \text{avec } F(\theta, \theta') = N \Phi(\theta') - N_s \Phi(\theta).$$

Si de plus, moyennant certaines conditions de régularité présumées vérifiées par  $\Phi$ , l'intégrande  $F(\theta, \theta')$  a une limite quand  $\theta'$  tend vers  $\theta$ , alors le calcul de l'intégrale ne pose plus de difficulté. Dans le cas du problème qui nous intéresse actuellement (22), on pourra vérifier [27] que le miracle s'accomplit en prenant un noyau singulier  $N_s$  ayant un comportement en  $\ln|\theta - \theta'|$ . Il suffit alors de supposer que  $\Phi$  est lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe un réel positif  $a$  tel que, pour  $\theta'$  et  $\theta$  suffisamment voisins :  $|\Phi(\theta') - \Phi(\theta)| \leq a|\theta - \theta'|$ . Dans ces conditions, écrivant l'équation (22) pour  $P$  valeurs  $\theta_n$  de  $\theta$ , on est conduit à un système linéaire :

$$(26) \quad x_n C(\theta_n) + \sum_{m=1}^P a_{nm} x_m = s(\theta_n), \quad n = 1, \dots, P$$

dont la résolution fournit les inconnues  $x_m$  précédemment définies (§3.3). Reste à évaluer la qualité de cette solution approchée... On peut, par exemple, regarder si les coefficients  $b_n$  du développement de Rayleigh ainsi obtenus vérifient "convenablement" le théorème optique (14). Ce critère de validité n'est évidemment pas suffisant : néanmoins si le théorème optique est mal vérifié, il est sûr que la solution proposée est mauvaise.



N.B. : Le calcul des  $b_n$  à partir de  $j_s$  découle d'une formule donnée en annexe 4 et prévue à cet usage. Il suffit, dans (20'), de remplacer  $H_0^+(kR)$  par son développement (A4,41) et d'identifier avec (8) en remarquant que, dans la région où la validité de (8) est établie, on a nécessairement  $r > r'$ . On trouve :

$$(27) \quad b_n = -\frac{\omega \mu}{4} \int_{\Gamma} J_n(kr') j_s(\vec{r}') \exp(-in\theta') d\ell' .$$

#### 4. DETERMINATION DU CHAMP DIFFRACTE EN H//.

Partant cette fois de (18"), on est conduit à :

$$(28) \quad u^d = g * \operatorname{div} (\vec{n} j_s \delta_{\Gamma}) = g * \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (n_i j_s \delta_{\Gamma}) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial x_i} * n_i j_s \delta_{\Gamma} ,$$

$$(28') \quad u^d(\vec{r}) = \int_{\Gamma} j_s(\vec{r}') \frac{dg}{dn'}(\vec{r} - \vec{r}') d\ell' .$$

où la notation ambiguë  $\frac{dg}{dn'}(\vec{r} - \vec{r}')$  désigne la valeur prise par  $\vec{n}(\vec{r}') \cdot \operatorname{grad} g(\vec{r})$  quand on y remplace  $\vec{r}$  par  $\vec{r} - \vec{r}'$ .

L'équation intégrale est beaucoup plus délicate à établir que dans le cas E//. On peut traduire la condition aux limites en écrivant (Fig.72) que pour  $P \in \Omega_+$  :

$$(29) \quad \vec{n}(M) \wedge \lim_{P \rightarrow M} (u(P) \vec{e}_z) = \vec{j}_s(M) ,$$

soit encore, puisque  $\vec{j}_s$  est alors de la forme  $j_s \vec{n} \wedge \vec{e}_z$  :

$$(29') \quad \lim_{P \rightarrow M} (u^d(P) + u^i(P)) = j_s(M) .$$

On est évidemment tenté d'en déduire :

$$(30) \quad u^d(M) + u^i(M) = j_s(M)$$

faisant ainsi une grave faute qui a d'ailleurs souvent été commise. Il se trouve en effet (voir à nouveau [26]) que la fonction  $u^d$  définie par (28') est continue sur  $\Omega_+$  sans l'être sur  $\Omega_+ \cup \Gamma$ . A première vue, elle n'est même pas définie sur  $\Gamma$ .

En fait, posant pour  $M \in \Gamma$  :

$$(31) \quad u^d(M) = \int_{\Gamma} \frac{dg}{dn}(M, M') j_s(M') d\ell' .$$

On démontre que :

$$(31') \quad \lim_{P \rightarrow M} u^d(P) = u^d(M) + \frac{1}{2} j_s(M) , \quad P \in \Omega_+ ,$$

$$(31'') \quad \lim_{Q \rightarrow M} u^d(Q) = u^d(M) - \frac{1}{2} j_s(M) , \quad Q \in \Omega_- .$$

Par suite, il faut remplacer (30) par :

$$u^d(M) + u^i(M) = \frac{1}{2} j_s(M)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$(32) \quad \frac{1}{2} j_s(\theta) - \int_{\Gamma} K(\theta, \theta') j_s(\theta') d\ell' = u^i(\theta) .$$

Mais, puisque pour  $M \in \Gamma$ , la dérivée normale  $dg/dn$  n'est pas bornée, l'intégrale figurant dans (31) ou dans (32) mérite un commentaire ; le noyau  $K(\theta, \theta')$  est en effet ni borné, ni sommable (au sens de Lebesgue). L'intégrale considérée est une intégrale impropre [26] qui généralise en quelque sorte la notion d'intégrale de Cauchy introduite pour les fonctions d'une variable [7] : on intègre d'abord sur la partie de  $\Gamma$  extérieure à un cercle de rayon  $\epsilon$  centré sur  $M(\theta)$  et le nombre ainsi obtenu tend vers une limite quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . On comprend donc que la résolution de (32) passe par une analyse mathématique qui devient vite une affaire de spécialistes.

### 5. CAS PARTICULIER D'UNE SECTION CIRCULAIRE.

Si  $\Gamma$  est un cercle de centre 0 et de rayon  $a$ , (22) et (32) deviennent des équations de convolution sur ce cercle car  $\|\vec{r} - \vec{r}'\| = R$  s'exprime alors en fonction de  $\theta - \theta'$  ( $R = 2a \sin \frac{(\theta - \theta')}{2}$ ). Mais le recours à ces équations intégrales n'est plus nécessaire. Le cercle  $\Gamma$  joue en effet le rôle du cercle  $C_0$  introduit au §2.3. En d'autres termes, le développement de Rayleigh (8) peut être utilisé pour décrire le champ en tout point  $M \in \Omega_+$  :

$$(33) \quad \forall r > a, \quad u^d(r, \theta) = \sum_n b_n H_n^+(kr) \exp(in\theta)$$

et la détermination des coefficients  $b_n$  résulte immédiatement de la condition aux limites. Par exemple, en  $E//$ , on doit avoir  $\forall \theta \in (0, 2\pi)$  :

$$u^d(a, \theta) + u^i(a, \theta) = 0,$$

$$\sum_n \left( b_n H_n^+(ka) + i^n J_n(ka) \right) \exp(in\theta) = 0.$$

On reconnaît le développement en série de Fourier de la fonction nulle, ce qui impose :

$$(34) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad b_n = - (i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^+(ka)}$$

et finalement :

$$(35) \quad u^d(r, \theta) = \sum_n \frac{- (i)^n J_n(ka)}{H_n^+(ka)} H_n^+(kr) \exp(in\theta).$$

On a, dit-on, une expression explicite du champ diffracté. Encore faut-il, pour être utile, que cette série converge rapidement et ce n'est généralement pas le cas. Sauf pour les valeurs de  $ka$  ne dépassant pas quelques dizaines, l'utilisation d'une technique d'accélération de convergence s'impose pour éviter d'avoir à manipuler des fonctions de Bessel d'ordre trop élevé. On pourra consulter des ouvrages écrits dans les années 50 [28] pour se faire une idée de l'intérêt pratique de (35). Il est clair qu'avant l'apparition de l'Ordinateur, un tel résultat était monté en épingle. Aujourd'hui, il reste utile pour tester la validité des logiciels découlant de la "méthode intégrale". Par ailleurs, en exploitant les propriétés des fonctions de Bessel, il permet d'obtenir rapidement des informations intéressantes pour les très faibles valeurs de  $ka$  (approximation des basses fréquences). Par exemple, utilisant les valeurs approchées de  $J_n$  et  $H_n^+$  pour les faibles valeurs de leur argument et tenant compte du comportement à l'infini de  $H_n^+$ , il apparaît que, pour  $r$  suffisamment grand, le terme correspondant à  $n = 0$  est le terme dominant dans (35). A un coefficient multiplicatif près, on a alors :

$$(36) \quad u^d = \frac{1}{\sqrt{k} \ln(ka)} \times \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r}}.$$

C'est dire qu'en  $E//$  "l'intensité du champ diffracté" est indépendante de la direction. On pourra vérifier en exercice que cette propriété n'est plus vraie dans l'autre cas de polarisation [8]. On est alors conduit à retenir trois termes ( $n = 0, n = \pm 1$ ) dans (35) et  $u^d$ , qui représente alors le champ magnétique, dépend de la direction repérée par  $\theta$ . Omettant à nouveau un coefficient multiplicatif :

$$(37) \quad u^d = k^{3/2} a^2 |1 - 2 \cos\theta| \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r}} .$$

#### 6. COMMENTAIRES SUR L'UNICITE. CONDITION DE MEIXNER.

Dans le cas d'une section  $\Gamma$  arbitraire, il n'est peut-être pas inutile de revenir sur quelques difficiles problèmes théoriques qu'il semble d'ailleurs pratiquement impossible d'élucider complètement dans un cours de physique générale.

En s'appuyant à nouveau sur l'ouvrage de Colton et Kress [26], on peut affirmer l'existence et l'unicité de la solution pour chacun des deux cas de polarisation, dans la mesure où  $\Gamma$  (supposée de classe  $C^2$ ) admet une tangente en chacun de ses points. Le champ  $u$ , ainsi que son gradient, sont alors de carré intégrable sur tout compact  $K$  contenu dans le complémentaire de l'intérieur de  $\Gamma$ , même si la frontière de  $K$  a des points communs avec  $\Gamma$ . On peut donc attacher une énergie électromagnétique à un tel compact  $K$ .

Si, par contre,  $\Gamma$  a des points anguleux, la démonstration donnée dans Colton et Kress n'est plus valable, et des exemples de solutions multiples ont effectivement été exhibés ([25], p.562). Il faut alors imposer à  $u$  une condition supplémentaire pour restituer l'unicité. Si  $\Gamma$  est de classe  $C^2$  par morceaux, ce peut être l'existence de l'intégrale d'énergie électromagnétique [25] pour tout compact du type précédent (contenu dans le complémentaire de l'intérieur de  $\Gamma$ ). Cette condition, dite condition de Meixner, impose une limite à la croissance des champs au voisinage des points anguleux (c'est-à-dire le long des arêtes de la tige). On se reportera, par exemple, à Jones [25] ou à un récent ouvrage de Van Bladel [34] pour des précisions supplémentaires. On peut retenir que les composantes de champ parallèles à l'arête sont bornées, mais que les composantes perpendiculaires peuvent être singulières (sans l'être obligatoirement).

## Chapitre XVI

# *Diffraction par un réseau*

Un réseau optique (diffraction grating) est le plus souvent constitué d'une surface matérielle plane sur laquelle on a tracé des traits équidistants et parallèles. Ces traits que les anglo-saxons comparent habituellement à des sillons (grooves) sont suffisamment nombreux (plusieurs milliers par millimètre) pour ne pas être visibles à l'oeil nu. Ainsi, un réseau métallique pourrait-il, au premier abord, être confondu avec un miroir. Cependant, tandis qu'un miroir éclairé en lumière monochromatique par un faisceau cylindrique donne naissance à un seul faisceau réfléchi, un réseau, éclairé dans les mêmes conditions, sépare généralement le faisceau incident en plusieurs faisceaux diffractés. Les directions de diffraction sont données avec précision par la formule des réseaux enseignée en Optique. Par contre, et surtout si la distance  $d$  entre deux traits consécutifs est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde  $\lambda$ , la répartition de l'énergie incidente non absorbée entre les différents faisceaux diffractés apparaît très sensible à la polarisation. Son étude nécessite donc la prise en compte du caractère vectoriel de la lumière, c'est-à-dire le recours aux équations de Maxwell. Pour cette raison, il existe aujourd'hui une théorie électromagnétique des réseaux [29]. Certains disent même qu'un réseau est "électromagnétique" quand il apparaît que ses propriétés énergétiques ne peuvent pas être expliquées à l'aide des théories scalaires de l'Optique (de nombreux exemples sont donnés dans [29].

### I - LE MODELE MATHEMATIQUE UTILISE.

Les réseaux utilisés ont toujours un très grand nombre de traits (plusieurs dizaines ou centaines de mille). Nous sommes donc enclins à nous limiter à l'étude du "réseau infini" éclairé par un onde plane monochromatique (le faisceau incident le plus général pouvant théoriquement toujours être interprété comme une superposition d'ondes planes grâce à la transfor-

mation de Fourier).

Le réseau est une surface cylindrique  $S$  d'équation  $y = f(x)$ , dont les génératrices sont parallèles à  $Oz$  et dont la directrice est le graphe de la fonction  $f(x)$ . Cette fonction est périodique et sa période  $d = 2\pi/K$  est par définition le pas (pitch) du réseau.  $S$  est la frontière entre deux régions  $R_+$  ( $y > f(x)$ ) et  $R_-$  ( $y < f(x)$ ). La région  $R_-$  est remplie d'un métal ou d'un diélectrique d'indice optique  $\nu$ , tandis que  $R_+$  correspond à un diélectrique d'indice unité (l'air par exemple). Dans le cas d'un métal infiniment conducteur,  $\nu$  n'a évidemment pas de sens.

Supposant que l'onde incidente se propage orthogonalement aux traits (donc à  $Oz$ ), nous repérerons l'incidence par l'angle  $\theta$  mesuré en sens contraire des aiguilles d'une montre (Fig.73) et nous étudierons, comme au Chap.XV, les deux cas de polarisation  $E//$  et  $H//$ . Le champ électromagnétique pourra ainsi être décrit par une seule fonction  $u(x,y)$  représentant, suivant la polarisation, la composante de  $\vec{E}$  ou de  $\vec{H}$  sur  $Oz$ . Désignant par  $u^i(x,y)$  le champ incident, nous définirons le champ diffracté  $u^d(x,y)$  comme suit :

$$(1) \quad u^d = \begin{cases} u - u^i & \text{dans } R^+ \\ u & \text{dans } R^- \end{cases} .$$

Le "problème du réseau" consiste à déterminer  $u^d$  en supposant connu  $u^i$  :

$$(2) \quad u^i(x,y) = \exp (ik (x \sin\theta - y \cos\theta)) , \quad \text{avec } k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} .$$

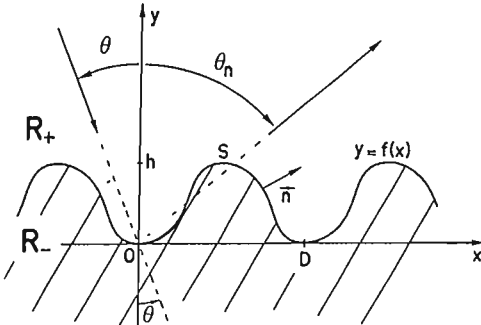


Figure 73.  $\overline{OD} = d$ ,  $h = \max(f(x))$  est la profondeur des sillons.  $\theta_n$ , mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre, repère l'onde diffractée dans l'ordre  $n$ . Compte tenu de nos conventions,  $\theta$  et  $\theta_n$  sont ici positifs.

Sans prétendre satisfaire complètement à la rigueur mathématique, ce problème se pose en ces termes : Trouver  $u(x,y)$  sachant que :

$$(3) \quad \Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{pour } y > f(x), \quad (3') \quad \Delta u + k^2 \nu^2 u = 0 \quad \text{pour } y < f(x)$$

$$(4) \quad u \text{ et } \frac{du}{dn} \text{ (cas E//)} \quad \text{ou} \quad u \text{ et } \frac{1}{\nu^2} \frac{du}{dn} \text{ (cas H//)} \text{ sont continues.}$$

$$(5) \quad u - u^i \text{ et } u \text{ vérifient une condition d'ondes sortantes (C.O.S.) respectivement pour } y \rightarrow +\infty \text{ et } y \rightarrow -\infty.$$

Puisque le réseau s'étend à l'infini, on notera que la C.O.S. ne peut plus s'exprimer à l'aide de la condition de Sommerfeld. Entre physiciens, nous dirons que  $u^d$  vérifie une C.O.S. pour  $y \rightarrow +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) si, pour  $|y|$  suffisamment grand,  $u^d$  se réduit à une somme d'ondes planes dont les vecteurs d'ondes ont une composante positive (resp. négative) sur  $Oy$ . Cette définition, inspirée par l'Expérience, ne satisfait généralement pas totalement les mathématiciens... Nous admettrons cependant qu'elle assure l'existence et l'unicité de la solution.

Dans le cas d'un réseau infiniment conducteur, le problème doit évidemment être énoncé en des termes légèrement différents puisque l'indice  $\nu$  perd son sens. Il s'agit alors de déterminer une fonction  $u(x,y)$  définie dans  $R_+$  ( $u$  est alors nulle dans  $R_-$ ) et telle que :

$$(6) \quad \Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{pour } y > f(x) ,$$

$$(7) \quad u(x, f(x)) = 0 \quad (\text{cas E//}) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dn}(x, f(x)) = 0 \quad (\text{cas H//}) ,$$

$$(8) \quad u - u^i \text{ vérifie une C.O.S. pour } y \rightarrow +\infty.$$

## 2. LA PSEUDO-PERIODICITE DU CHAMP.

L'existence et l'unicité de la solution une fois admises, le réseau peut être considéré comme un opérateur  $\mathfrak{R}$  transformant le champ incident  $u^i$  en le champ total  $u$ . Cet opérateur est linéaire en raison de la linéarité des équations de Maxwell et des relations de passage ou des conditions aux limites. Nous écrirons symboliquement :

$$(9) \quad u(x,y) = \mathfrak{R} u^i(x,y) .$$

Le réseau (supposé infini) étant invariant par translation d'amplitude  $d$  parallèlement à  $Ox$ , il en est de même de l'opérateur  $\mathfrak{R}$ . Ainsi, après trans-

lation  $-\vec{d}_x$  du repère Oxyz,  $\mathfrak{R}$  est inchangé tandis que  $u^1(x,y)$  et  $u(x,y)$  sont respectivement remplacés par  $u^1(x+d, y)$  et  $u(x+d, y)$ . On a donc :

$$(10) \quad u(x+d, y) = \mathfrak{R} u^1(x+d, y) .$$

Or, à partir de (2), on vérifie que :  $u^1(x+d, y) = \exp(ikd \sin\theta) u^1(x,y)$ , ce qui entraîne, d'après (10) et (9) :

$$(11) \quad u(x+d, y) = \mathfrak{R} \exp(ikd \sin\theta) u^1(x,y) = \exp(ikd \sin\theta) \mathfrak{R} u^1(x,y) ,$$

$$(11) \quad u(x+d, y) = \exp(ikd \sin\theta) u(x,y) .$$

La fonction  $v(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,y)/\exp(ikx \sin\theta)$  est donc périodique en  $x$ , avec la période  $d$  puisque, compte tenu de (11) :

$$(12) \quad v(x+d, y) = \frac{u(x+d, y)}{\exp(ikx \sin\theta) \exp(ikd \sin\theta)} = \frac{u(x,y)}{\exp(ikx \sin\theta)} = v(x,y) .$$

Par conséquent,  $v$  peut être représentée par une série de Fourier en  $x$  dont les coefficients dépendent de  $y$ . Posant  $K = 2\pi/d$  :

$$(13) \quad \frac{u(x,y)}{\exp(ikx \sin\theta)} = \sum_n u_n(y) \exp(inKx) ,$$

$$(14) \quad u(x,y) = \sum_n u_n(y) \exp(i\alpha_n x) , \quad \text{avec} \quad (15) \quad \alpha_n = nK + k \sin\theta .$$

Nous dirons que le champ total  $u$ , qui peut être développé en "série de Fourier généralisée" (14) est une fonction pseudo-périodique caractérisée par sa période  $d$  et le complexe  $a = \exp(ikd \sin\theta)$  que nous appellerons coefficient de pseudo-périodicité. Ce coefficient, de module unité, est tel que :

$$(16) \quad u(x+d, y) = a u(x,y) .$$

Il est clair que le champ diffracté  $u^d$  est lui aussi pseudo-périodique pour le même coefficient  $a$  (démonstration identique). Pour une fonction périodique, on a évidemment  $a = 1$ .

### 3. LE DEVELOPPEMENT DE RAYLEIGH ET LA FORMULE DES RESEAUX.

En dehors de la région des sillons (c'est-à-dire pour  $y < 0$  ou  $y > h$ ),  $u$  vérifie une équation de Helmholtz (3,3'). Pour  $y > h$ , en remplaçant  $u$  par



sa série de Fourier généralisée (14) dans (3), on est conduit à :

$$(16) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{d^2 u_n}{dy^2} + (k^2 - \alpha_n^2) u_n \right) \exp(i(nK + k \sin \theta) x) = 0 ,$$

ce qui implique, puisque  $\exp(ikx \sin \theta) \neq 0$  :

$$(16') \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{d^2 u_n}{dy^2} + (k^2 - \alpha_n^2) u_n \right) \exp(inKx) = 0 .$$

Pour  $y$  fixé, le premier membre de (16') peut être interprété comme le développement en série de Fourier de la fonction nulle. On a donc :

$$(17) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{d^2 u_n}{dy^2} + (k^2 - \alpha_n^2) u_n = 0 ,$$

$$(18) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad u_n(y) = A_n \exp(-i\beta_n y) + B_n \exp(i\beta_n y) ,$$

où  $A_n$  et  $B_n$  sont des constantes complexes et avec :

$$(19) \quad \beta_n^2 = k^2 - \alpha_n^2 , \quad \beta_n \text{ ou } \beta_n/i \text{ positif.}$$

Finalement, pour  $y > h$ , on a nécessairement :

$$(20) \quad u(x, y) = \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \exp(i\alpha_n x - i\beta_n y)}_{u_1(x, y)} + \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n \exp(i\alpha_n x + i\beta_n y)}_{u_2(x, y)} ,$$

Il est commode, pour la suite, d'introduire l'ensemble  $U$  des entiers  $n$  pour lesquels  $\beta_n$  est réel et positif ( $\beta_n^2 > 0$ ). Le champ total  $u$  devant être borné, la sommation à effectuer dans  $u_1(x, y)$  doit être limitée aux valeurs de  $n$  appartenant à  $U$  (puisque si  $n \notin U$ ,  $\exp(-i\beta_n y)$  tend vers l'infini avec  $y$ ). Ainsi, dans (20),  $u_1(x, y)$  apparaît-il comme une somme d'ondes planes entrantes (incoming waves), tandis qu'un terme de  $u_2(x, y)$  représente soit une onde plane sortante (outgoing wave) si  $n \in U$ , soit une onde évanescente (evanescent wave) si  $n \notin U$ . Dans ce dernier cas,  $\beta_n = i\gamma_n$  (avec  $\gamma_n = \sqrt{\alpha_n^2 - k^2} > 0$ ) de sorte qu'une onde évanescente est une onde se propageant le long de  $Ox$  et exponentiellement amortie en  $y$ .

Il est maintenant clair que, dans le problème qui nous préoccupe (§1),  $u_1(x, y)$  doit se réduire à l'onde plane incidente. C'est dire que tous les  $A_n$  sont nuls sauf  $A_0$  car il faut remarquer que  $\exp(i\alpha_0 x - i\beta_0 y)$  s'identifie

au champ incident  $u^i$ . En conclusion :

$$(21) \quad \forall y > h, \quad u^d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n \psi_n(x, y), \quad \text{avec } \psi_n(x, y) = \exp(i\alpha_n x + i\beta_n y),$$

$$(21') \quad \forall y > h, \quad u(x, y) = u^i(x, y) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n \psi_n(x, y).$$

Ces développements (21, 21') sont appelés développements de Rayleigh. Nous dirons même que  $\psi_n$  et  $B_n$  sont respectivement les fonctions et les coefficients de Rayleigh. Il faut bien noter que  $\psi_n$  représente une "vraie onde plane" si et seulement si  $n \in U$ . Dans ces conditions, on peut poser :

$$\alpha_n = k \sin\theta + nK = k \sin\theta_n, \quad \left( -\frac{\pi}{2} < \theta_n < \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2\theta_n} = k \cos\theta_n,$$

et on reconnaît dans  $\psi_n$  la représentation d'une onde plane se propageant dans la direction repérée par l'angle  $\theta_n$  (Fig.73). La relation :

$$(22) \quad k \sin\theta_n = k \sin\theta + nK$$

n'est autre que la "formule des réseaux" du cours d'Optique. Remarquons que  $k \sin\theta_n$  et  $k \sin\theta$  représentent respectivement la projection, sur  $Ox$ , du vecteur d'onde incident et du vecteur d'onde diffracté dans l'ordre  $n$ , on peut dire, qu'en projection sur le plan  $xOy$ , le réseau ajoute au vecteur d'onde incident un certain multiple de  $K$ . Cette interprétation est souvent utilisée en Optique intégrée où  $K$  est parfois appelé le "ka du réseau". En Spectroscopie, on préfère généralement écrire :

$$(22') \quad \sin\theta_n = \sin\theta + n \frac{K}{k} = \sin\theta + n \frac{\lambda}{d},$$

ce qui suggère une construction géométrique simple (Fig.74).

Pour chaque onde diffractée, il est d'usage de définir une efficacité  $e_n$  qui, moyennant quelques considérations intuitives sur le vecteur de Poynting complexe, peut être interprétée comme la fraction de l'énergie incidente diffractée dans l'ordre  $n$  :

$$(23) \quad e_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{B_n \overline{B_n} \cos\theta_n}{\cos\theta} = \frac{B_n \overline{B_n} \beta_n}{\beta_0}.$$

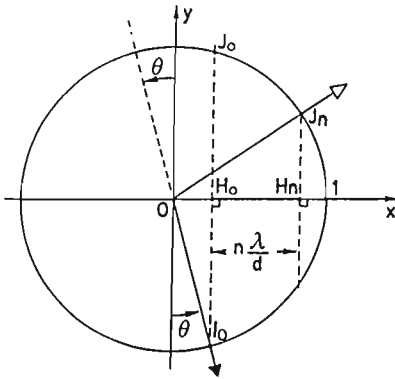


Figure 74 :  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le milieu remplissant  $R_+$ . Le vecteur d'onde incidente coupe le cercle de rayon unité en  $I_0$ . Si  $\overline{H_0H_n} = n \lambda/d$ ,  $OJ_n$  est la direction de propagation de l'onde diffractée dans l'ordre  $n$ .

Dans le cas d'un réseau non infiniment conducteur, il nous faut aussi déterminer le champ diffracté dans le demi-espace  $y < 0$ . Nous laissons au lecteur le soin de montrer que la formule (18) est encore valable pourvu que l'on y remplace  $\beta_n$  par  $\beta_n^- = \sqrt{k^2 v^2 - \alpha_n^2}$  et que l'on annule tous les  $B_n$  (puisque'il n'y a pas d'onde entrante dans  $R_-$ ). On notera cependant que la racine doit être définie avec soin si  $v$  est complexe [29]. Dans le cas d'un réseau diélectrique ( $v$  réel), le champ est donc encore décrit, pour  $y < 0$ , par un développement de Rayleigh dont nous appellerons les coefficients  $T_n$  (pour rappeler qu'ils sont associés à des ondes transmises) :

$$(24) \quad \forall y < 0, \quad u(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n \exp(i\alpha_n x - i\beta_n^- y)$$

avec  $\beta_n^- = \sqrt{k^2 v^2 - \alpha_n^2}$ ,  $\beta_n^-$  ou  $\beta_n^-/i$  positif. .

Pour interpréter (24), il est commode d'introduire l'ensemble  $U^-$  des entiers  $n$  pour lesquels  $\beta_n^-$  est réel et positif. Suivant que  $n$  appartient ou n'appartient pas à  $U^-$ , un terme de la série (24) représente une "vraie onde plane" ou une onde évanescence. Si  $n \in U^-$ , on peut poser :

$$(25) \quad \alpha_n = k v \sin \theta_n^-, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_n^- < \frac{\pi}{2},$$

afin de retrouver la formule des réseaux. On arrive à :

$$(26) \quad k v \sin \theta_n^- = k \sin \theta + nK.$$

Cette formule peut, comme (22), être interprétée en projection sur le plan  $xOy$ , ou conduire à une construction géométrique (Fig.75) après avoir été réécrite sous la forme :

$$(26') \nu \sin \theta_n^- = \sin \theta + n \frac{\lambda}{d} .$$

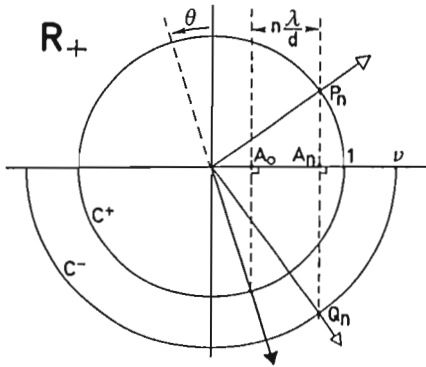


Figure 75 : La région  $R_+$  est supposée vide. Les cercles  $C^+$  et  $C^-$  ont respectivement pour rayon 1 et  $\nu$ . Si  $\overline{A_0A_n} = n \lambda/d$ , la  $n^{\text{ième}}$  onde diffractée en réflexion (resp. transmission) se propage suivant  $OP_n$  (resp.  $OQ_n$ ). Bien noter que  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide (dans  $R_+$ ).

On peut se demander si le champ est représentable par un développement de Rayleigh dans la région des sillons. De façon plus précise, les développements (21') et (24) sont-ils encore respectivement valables dans les régions  $f(x) < y < h$  et  $0 < y < f(x)$  ? Il est clair que le raisonnement utilisé jusqu'ici ne nous permet pas de conclure puisque, dans la bande  $0 < y < h$ , nous ne pouvons même pas affirmer l'existence du Laplacien en tout point (sur la frontière, aucune loi n'assure l'existence des dérivées secondes de  $u$ ). Répondre affirmativement à la question posée, comme le fit Rayleigh (au moins pour des sillons peu profonds), c'est donc faire une hypothèse supplémentaire. Depuis 1960, la validité de l'hypothèse de Rayleigh, trop souvent utilisée sans discernement, a été mise en doute. La question provoqua des discussions passionnées dans la plupart des colloques consacrés à la propagation des ondes électromagnétiques. On sait aujourd'hui que, d'un point de vue mathématique, l'hypothèse de Rayleigh est en général insoutenable pour tout réseau dont le profil n'est plus analytique (donc en particulier pour un réseau échelonné à profil triangulaire). Nous disons "en général" car il existe en fait quelques exceptions (voir §6.1).

#### 4. LES SUITES DE YASUURA.

On doit à une équipe de recherche japonaise [30] la subtile remarque suivante : Même si l'hypothèse de Rayleigh ne tient pas, il est possible de représenter le champ diffracté  $u^d$  par une suite de combinaisons linéaires d'ondes planes. Par exemple, pour  $y > f(x)$ , il existe des coefficients  $Y_n(N)$  tels que la suite :

$$(27) \quad S_N(x, y) = \sum_{n=-N}^{+N} Y_n(N) \exp(i\alpha_n x + i\beta_n y) = \sum_{n=-N}^{+N} Y_n(N) \psi_n(x, y)$$

converge uniformément vers  $u^d(x, y)$  dans tout compact contenu dans  $R_+$  ( $y > f(x)$ ) même si une partie de ce compact appartient à la région des sillons ( $f(x) < y < h$ ). Qui plus est, la détermination des coefficients  $Y_n(N)$  se prête remarquablement bien au calcul numérique. Ainsi, pour un réseau infiniment conducteur et dans le cas E//, posant  $s(x) = u^i(x, f(x))$  et  $\varphi_n(x) = \exp(i\alpha_n x + i\beta_n f(x))$ , les  $Y_n(N)$  ne sont autres que les coefficients  $c_n$  qui minimisent l'intégrale :

$$(28) \quad I_N = \int_0^d \left| s(x) + \sum_{n=-N}^{+N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 \frac{d\ell}{dx} dx$$

où  $d\ell$  est l'élément d'arc sur le graphe de  $y = f(x)$ . L'interprétation physique est simple : pour  $N$  fixé, on minimise l'intégrale du carré du module du champ total approché  $u_1 + S_N$ , sur la surface du réseau. La preuve fait appel à des résultats d'analyse fonctionnelle qui ne peuvent être reproduits ici. Il est certes difficile de bien comprendre la différence entre l'hypothèse de Rayleigh et l'existence des suites de Yasuura. Il faut pour cela ne pas confondre les deux mots "suite" et "série". Si un point  $P(x, y)$  appartient à la région des sillons, et bien que l'on n'ait pas :

$$u^d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n \exp(i\alpha_n x + i\beta_n y) ,$$

on peut néanmoins écrire :

$$(29) \quad u^d(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=-N}^{+N} Y_n(N) \exp(i\alpha_n x + i\beta_n y) \right] ,$$

expression dans laquelle, remarque essentielle, les coefficients  $Y_n$  dépendent de  $N$ . Ceci rappelle des résultats sans doute bien connus des lecteurs quelque peu attirés par les subtilités mathématiques : par exemple, toute fonction continue sur l'intervalle  $[-2, +2]$  est limite uniforme d'une suite de polynômes (théorème de Weierstrass) et pourtant la fonction  $f(x) = 1/(1+x^2)$  ne peut pas être représentée par une série entière sur cet intervalle (puisque le rayon de convergence de sa série de Taylor à l'origine est égal à l'unité [7]).

**5. QUELQUES IMPORTANTES PROPRIETES GENERALES.**

Avant de passer à une brève description des méthodes numériques, il est bon d'établir sans l'aide de l'Ordinateur, quelques lois valables pour tous les réseaux, quel que soit leur profil. On se reportera à la fig.76 pour les notations.

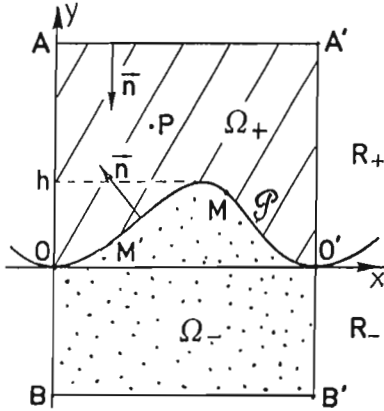


Figure 76 : Le segment AA' est parallèle à Ox et ne coupe pas le graphe P de y = f(x) ; Omega+ est le domaine hachuré. Dans la suite, nous utiliserons aussi le domaine Omega- représenté en pointillé ; il est limité par P, OB, OB' et le segment BB' qui est parallèle à AA'.

5.1. Lemme 1. Soit deux fonctions pseudo-périodiques u et u' ayant le même coefficient de pseudo-périodicité a, et vérifiant l'équation de Helmholtz (avec k<sup>2</sup> réel) dans R+. Alors, si P désigne le profil du réseau :

$$(30) \int_P \left( u \frac{d\bar{u}'}{dn} - \bar{u}' \frac{du}{dn} \right) d\ell = \int_{AA'} \left( u \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} - \bar{u}' \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx .$$

La démonstration est immédiate : u et u' vérifiant la même équation de Helmholtz dans R+, on a, par analogie avec (XVI, §2.1) et en désignant par partialOmega+ la frontière de Omega+ :

$$\iint_{\Omega_+} (u \Delta \bar{u}' - \bar{u}' \Delta u) dS = \int_{\partial \Omega_+} \left( u \frac{d\bar{u}'}{dn} - \bar{u}' \frac{du}{dn} \right) d\ell = 0$$

Mais la pseudo-périodicité de u et u' entraîne la périodicité de l'intégrande de sorte que, dans l'intégrale curviligne, les contributions de OA' et OA sont opposées. Pour obtenir (30), il suffit donc de remarquer que, sur AA', d/dn = - partial/partial y.

5.2. Lemme 1'. Si u et u' sont deux fonctions pseudo-périodiques (ayant même coefficient de pseudo-périodicité) données sur AA' par des développements de Rayleigh du type :

$$(31) \quad u(x, y) = \sum_{n \in U} A_n \exp(i\alpha_n x - i\beta_n y) + \sum_{n \in Z} B_n \exp(i\alpha_n x + i\beta_n y) ,$$

$$(31') \quad u'(x, y) = \sum_{n \in U} A'_n \exp(i\alpha_n x - i\beta_n y) + \sum_{n \in Z} B'_n \exp(i\alpha_n x + i\beta_n y) ,$$

alors,

$$(32) \quad \frac{1}{2id} \int_{AA'} \left( u \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} - \bar{u}' \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx = \sum_{n \in U} \beta_n (A_n \bar{A}'_n - B_n \bar{B}'_n) .$$

La démonstration est une simple affaire de patience, pourvu que l'on n'oublie pas que  $\int_0^d \exp(inKx) dx = d \delta_{n,0}$ . Il est important de noter que, dans les développements de  $u$  et  $u'$ , la première somme est limitée à  $U$ ; on dit parfois qu'il n'y a pas d'onde "anti-évanescence".

Si de plus,  $u$  et  $u'$  sont des solutions de l'équation de Helmholtz (avec  $k^2$  réel) dans  $\Omega_+$ , l'utilisation du lemme 1 conduit à :

$$(32') \quad \frac{1}{2id} \int_{\mathcal{P}} \left( u \frac{d\bar{u}'}{dn} - \bar{u}' \frac{du}{dn} \right) d\ell = \sum_{n \in U} \beta_n (A_n \bar{A}'_n - B_n \bar{B}'_n) .$$

5.3. Lemme 2. Soit deux fonctions pseudo-périodiques  $u$  et  $u'$  dont les coefficients de pseudo-périodicité  $a$  et  $a'$  sont tels que  $a' = \bar{a} = 1/a$ ; alors si  $u$  et  $u'$  vérifient l'équation de Helmholtz ( $k^2$  réel ou complexe) dans  $R_+$  :

$$(33) \quad \int_{\mathcal{P}} \left( u \frac{du'}{dn} - u' \frac{du}{dn} \right) d\ell = \int_{AA'} \left( u \frac{\partial u'}{\partial y} - u' \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx .$$

La démonstration est semblable à celle du lemme 1.

5.4. Lemme 2'. Soit deux fonctions pseudo-périodiques ayant des coefficients de pseudo-périodicité imaginaires conjugués ( $a' = \bar{a} = 1/a$ ) et décrites sur  $AA'$  par les développements de Rayleigh (31) et (31'') :

$$(31'') \quad u'(x, y) = \sum_{n \in U} A'_n \exp(-i\alpha_n x - i\beta_n y) + \sum_{n \in Z} B'_n \exp(-i\alpha_n x + i\beta_n y) .$$

Alors :

$$(34) \quad \frac{1}{2id} \int_{AA'} \left( u \frac{\partial u'}{\partial y} - u' \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx = \sum_{n \in U} \beta_n (A_n B'_n - B_n A'_n) ,$$

et ceci implique la nullité du premier membre si les  $A_n$  et les  $A'_n$  sont tous nuls (champs sortants). La preuve résulte à nouveau d'un banal calcul que la présence de produits de série rend un peu fastidieux. Il est important de noter que les fonctions  $\exp(i\alpha_n x + i\beta_n y)$  et  $\exp(-i\alpha_n x - i\beta_n y)$  représentent des ondes planes se propageant suivant la même direction mais en sens contraire. Il en est de même pour  $\exp(i\alpha_n x - i\beta_n y)$  et  $\exp(-i\alpha_n x + i\beta_n y)$ . Si de plus  $u$  et  $u'$  vérifient l'équation de Helmholtz (avec  $k^2$  réel ou complexe) dans  $\Omega_+$ , le lemme 2 entraîne :

$$(34') \quad \frac{1}{2id} \int_{\mathcal{P}} \left( u \frac{du'}{dn} - u' \frac{du}{dn} \right) d\ell = \sum_{n \in U} \beta_n (A_n B'_n - B_n A'_n) .$$

5.5. Conservation de l'énergie. Soit  $u(x,y)$  le champ total associé à un réseau infiniment conducteur éclairé par une onde plane sous l'incidence  $\theta$ . On sait que, sur  $AA'$ ,  $u$  peut être décrit par le développement (31) avec  $A_n = \delta_{n,0}$ . Toutes les hypothèses sont requises pour appliquer l'égalité (32') au couple de fonctions  $u$  et  $u' = u$ . Remarquant que, suivant la polarisation,  $u$  ou  $du/dn$  s'annule sur  $\mathcal{P}$ , on obtient :

$$0 = \beta_0 - \sum_{n \in U} \beta_n B_n \bar{B}_n , \quad 1 = \sum_{n \in U} \frac{\beta_n \cos \theta_n}{\beta_0 \cos \theta} ,$$

soit, compte tenu de la définition (23) des efficacités  $e_n$  :

$$(35) \quad \sum_{n \in U} e_n = 1 .$$

Ainsi, la somme des efficacités est égale à 1 et ce résultat se généralise aisément à un réseau diélectrique [29], bien que l'expression de  $e_n$  à partir de  $B_n$  et  $\beta_n$  nécessite alors quelque soin ; puisque le module du vecteur de Poynting associé à une onde plane se propageant dans un milieu d'impédance  $\eta$  est proportionnel au carré du module de l'amplitude complexe du champ électrique divisé par l'impédance du milieu, on est conduit à dire que l'efficacité dans l'ordre  $n$  (en transmission) est  $T_n \bar{T}_n \nu \cos \theta_n^- / \cos \theta$  en  $E//$  et  $T_n \bar{T}_n \cos \theta_n^- / (\nu \cos \theta)$  en  $H//$  (s'en persuader à titre d'exercice).

5.6. Expression de  $B_p$  à partir de  $u$  et de  $du/dn$  sur le profil  $\mathcal{P}$ . Revenant au problème du réseau infiniment conducteur, on peut appliquer (32') en prenant  $u$  égal au champ total et  $u'(x,y) = \exp(i\alpha_p x + i\beta_p y) = \psi_p(x,y)$  où  $p$



est un entier appartenant à  $U$ . On a maintenant  $A_n = \delta_{n,0}$ ,  $A'_n = 0$ ,  $B'_n = \delta_{n,p}$  et on trouve ainsi :

$$(36) \quad -2id \beta_p B_p = \begin{cases} \int_{\mathcal{P}} -\psi_p \frac{du}{dn} d\ell & \text{en E//} \\ \int_{\mathcal{P}} u \frac{d\psi_p}{dn} d\ell & \text{en H//} \end{cases} .$$

Ceci montre que les coefficients de Rayleigh, et par suite les efficacités, sont connus dès que la dérivée normale du champ total (cas E//) ou le champ total lui-même (cas H//) ont été déterminés sur  $\mathcal{P}$ .

5.7. Le théorème de réciprocité. Considérons deux problèmes (Fig.77) associés au même réseau infiniment conducteur  $G$ . Dans le problème  $P$ ,  $G$  est éclairé sous l'incidence  $\theta$  et nous portons notre attention sur l'onde diffractée dans l'ordre  $p$  (angle  $\theta_p$ ). Dans le problème  $P'$ ,  $G$  est illuminé sous l'angle  $\theta' = -\theta_p$ .

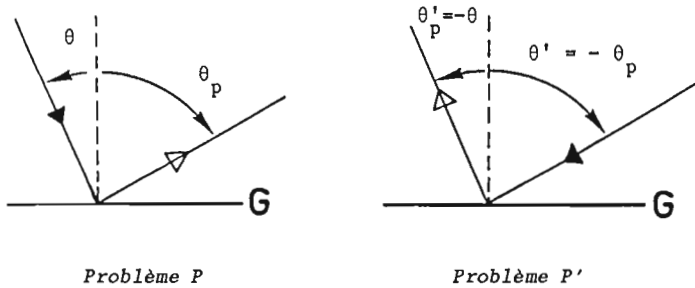


Figure 77 : Ne pas oublier que l'angle d'incidence, qui est compté en sens inverse des aiguilles d'une montre, est négatif dans le problème  $P'$ .

Il faut d'abord se convaincre que l'onde incidente du problème  $P$  et la  $p$ ème onde diffractée du problème  $P'$  se propagent suivant une même direction mais en sens contraire :

$$\begin{aligned} \sin\theta'_p &= \sin\theta' + p \frac{\lambda}{d} = -\sin\theta_p + p \frac{\lambda}{d} = -\left(\sin\theta + p \frac{\lambda}{d}\right) + p \frac{\lambda}{d}, \\ &= -\sin\theta \quad \quad \quad \text{(C.Q.F.D.).} \end{aligned}$$

Appelons respectivement  $u$  et  $u'$  le champ total dans chacun des problèmes  $P$  et  $P'$ . Ces deux champs satisfont les conditions qui permettent d'utiliser (34') car leurs coefficients de pseudo-périodicité ( $\exp(ikd \sin\theta)$ ) et

$\exp(-ikd \sin\theta)$ ) sont imaginaires conjugués. De plus,  $u$  et  $u'$  (cas E//) ou  $du/dn$  et  $du'/dn$  (cas H//) s'annulent sur le profil. Nous avons donc, au prix d'une numérotation convenable :

$$A_n = \delta_{n,0}, \quad A'_n = \delta_{n,p}, \quad B_n \neq 0, \quad B'_n \neq 0,$$

et quelle que soit la polarisation, (34') conduit à :

$$(37) \quad \beta_0 B'_0 = \beta_p B_p,$$

soit, après multiplication de chaque membre par son complexe conjugué et division par  $\beta_0\beta_p$  :

$$(37') \quad \frac{\beta_0}{\beta_p} B'_0 \bar{B}_0 = \frac{\beta_p}{\beta_0} B_p \bar{B}_p.$$

En s'aidant de la fig.78, on s'aperçoit, après un peu de réflexion, que dans (37') le membre de droite (resp. gauche) représente l'efficacité  $e_p$  dans le problème P (resp. P'). Ce théorème de réciprocité peut être généralisé pour des réseaux métalliques ou diélectriques [29]. Pour des réseaux diélectriques, il est également vrai en transmission (Fig.79).

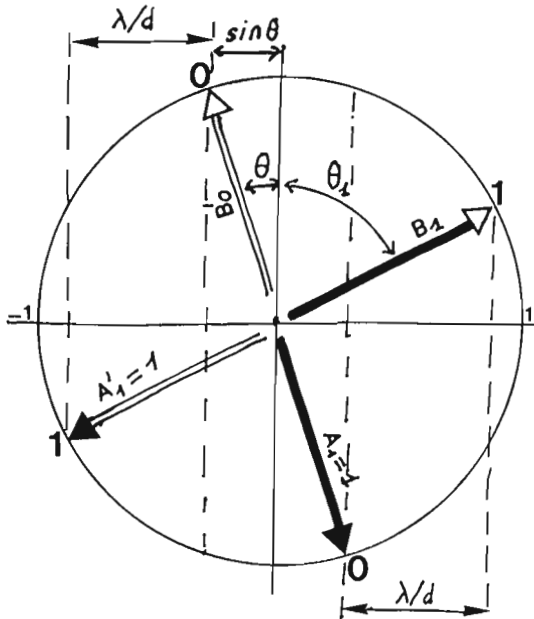


Figure 78 : Ici  $p = 1$ . Les vecteurs d'onde sont représentés en trait épais pour le problème P et en trait double pour le problème P'. Ils sont numérotés d'une façon qui permet l'application des lemmes 2 et 2'. On vérifie que, dans le problème P', l'efficacité associée à l'onde diffractée se propageant selon la direction repérée par zéro est :

$$B'_0 \bar{B}_0 \cos\theta_0 / \cos\theta_1.$$

$$(\theta_0 = \theta, \sin\theta_1 = \sin\theta_0 + \lambda/d,$$

$$\beta_0 = k \cos\theta, \beta_1 = k \cos\theta_1).$$

Les flèches à pointe noire (resp. blanche) sont associées à des ondes incidentes (resp. diffractées).

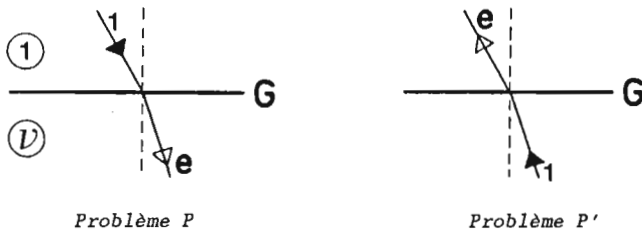


Figure 79 :  $e$  est la fraction de l'énergie incidente diffractée dans l'ordre étudié. On peut dire que  $e$  n'est pas modifié en changeant le sens de propagation de la lumière.

## 6. LES PRINCIPALES METHODES UTILISABLES POUR LA DETERMINATION NUMERIQUE DE $u^d$ .

6.1. Solutions explicites. Il est très rare qu'on puisse exprimer  $u^d(x,y)$  à l'aide de fonctions simples. Voici cependant une exception très importante par ses applications spectroscopiques. Considérons (Fig.80) un réseau infiniment conducteur, à profil triangulaire (réseau échelle) éclairé en H// de sorte que l'angle d'incidence  $\theta$  soit égal à l'angle  $\alpha$  des grandes facettes avec Ox. Supposons de plus que  $2 \sin\alpha = \lambda/d$ . Utilisant les axes OX et OY indiqués sur la figure, le champ incident peut être décrit par  $\vec{H}^i = \exp(-iky) \vec{e}_z$ . Il est facile de vérifier que le champ diffracté n'est autre que  $\vec{H}^d = \exp(iky) \vec{e}_z$ . Il vérifie l'équation de Helmholtz, la C.O.S. et le champ électrique associé à  $\vec{H}^i + \vec{H}^d$  par la seconde équation de Maxwell a une composante tangentielle nulle sur le profil (exercice simple).

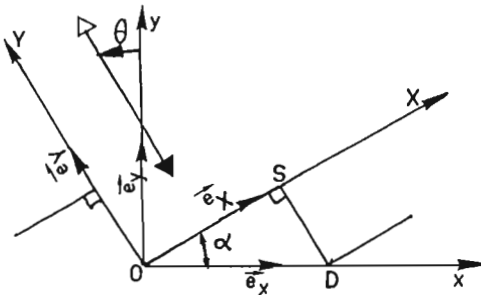


Figure 80 : On est en "montage de Littrow" dans l'ordre -1.  $\theta = \alpha$ ,  $2 \sin\theta = \lambda/d$  d'où  $SD = OD \sin\theta = d \sin\theta = \lambda/2$ . Ne pas confondre  $\vec{e}_x$  (vecteur unitaire de Ox) et  $\vec{e}_X$  (vecteur unitaire de OX).

En conclusion, dans cette situation très particulière, le champ diffracté est décrit partout (voir fin du §3) par un développement de Rayleigh,

d'ailleurs réduit au terme  $n = -1$ . La seule onde diffractée correspond à l'angle de diffraction  $-\theta$  c'est-à-dire à l'ordre  $-1$  car, puisque  $2 \sin \theta = \lambda/d$ ,  $\sin \theta_{-1} = \sin \theta - \frac{\lambda}{d} = -\sin \theta$ , (C.Q.F.D.).

6.2. Méthodes utilisant des développements en ondes planes. Par raison de simplicité, limitons-nous à un réseau infiniment conducteur en E//.

a) Séries de Rayleigh. Admettons, ce qui en toute rigueur est généralement faux, que le champ diffracté soit donné pour  $y > f(x)$  par :

$$(38) \quad u^d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n \exp(i\alpha_n x + i\beta_n y) = \sum_n B_n \psi_n(x, y),$$

la condition aux limites s'écrit :

$$(39) \quad u^d(x, f(x)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n \psi_n(x, f(x)) = -u^i(x, f(x))$$

et nous sommes ramenés à un problème classique : développer la fonction connue  $s(x) \stackrel{\text{def}}{=} -u^i(x, f(x))$  en une série de fonctions connues  $\varphi_n(x) = \psi_n(x, f(x))$ . La détermination des  $B_n$  semble une affaire simple. On peut songer à remplacer la série par une série tronquée ( $n$  variant non plus de  $-\infty$  à  $+\infty$ , mais de  $-N$  à  $+N$ ). Après quoi, exprimant l'égalité des  $2N+1$  premiers coefficients de Fourier des deux membres de (39), on obtiendra un système de  $2N+1$  équations linéaires pour les inconnues  $B_n$ .

b) Suites de Yasuura. L'algorithme numérique décrit au §4 est très facile à mettre en oeuvre.

c) Commentaires. Le lecteur intéressé pourra se reporter à un article assez didactique publié au Journal de la Société Américaine d'Optique [31]. Disons, pour résumer, que notre expérience personnelle nous amène à déconseiller l'emploi des développements en ondes planes pour écrire un logiciel qui aurait la prétention d'être général. La méthode décrite en (a) repose sur une hypothèse en toute rigueur erronée et la méthode de Yasuura converge souvent trop lentement vers la solution exacte pour pouvoir prétendre concurrencer les méthodes intégrales (M.I.) et les méthodes différentielles (M.D.) que nous allons maintenant très brièvement décrire.

6.3. Les méthodes intégrales. Ce sont des méthodes qui conduisent finalement à la résolution d'une équation intégrale. A titre d'exemple, considérons à nouveau le réseau infiniment conducteur en E//. Comme dans le cas de la tige (Chap. XV) on opère en trois temps.

a) On exprime tout d'abord  $u$  en tout point  $P(x_0, y_0)$  de  $\Omega_+$ , en supposant connu  $du/dn$  en tout point  $M'(x', f(x'))$  du profil  $\mathcal{P}$ . Ceci est rendu possi-

ble par l'existence d'une fonction  $g(x,y)$  satisfaisant une condition d'ondes sortantes et telle que :

$$(40) \quad \Delta g + k^2 g = \delta(y) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nd) \exp(i\alpha_0 nd) .$$

On verra au §7 que  $g$  est la somme d'une série :

$$(41) \quad g(x,y) = \frac{1}{2id} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\beta_n} \exp(i\alpha_n x + i\beta_n |y|) = \frac{1}{2id} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(x,y)$$

et il importe de bien noter la présence d'une valeur absolue dans cette formule (41) qui doit être considérée comme fondamentale en théorie des réseaux. A partir de  $g$ , on définit la fonction  $G(x,y,x_0,y_0)$  :

$$(42) \quad G(x,y,x_0,y_0) \stackrel{\text{def}}{=} g(x_0 - x, y_0 - y)$$

qui, pour  $x_0$  et  $y_0$  fixés, est une fonction pseudo-périodique des variables  $x$  et  $y$ .<sup>†</sup> Son coefficient de pseudo-périodicité  $a' = \exp(-i\alpha_0 d)$  est imaginaire conjugué de  $a = \exp(i\alpha_0 d)$ . Elle satisfait une C.O.S. et est décrite sur  $AA'$  par un développement de Rayleigh analogue à celui qui représente  $u'$  dans l'énoncé du lemme 2' (avec  $A'_n = 0$  quel que soit  $n$ ). Le champ diffracté étant décrit par un développement de Rayleigh analogue à celui qui représente  $u$  dans le lemme 2' (avec  $A_n = 0$  quel que soit  $n$ ), on a donc :

$$(43) \quad \frac{1}{2id} \int_{AA'} \left( u^d \frac{\partial G}{\partial y} - G \frac{\partial u^d}{\partial y} \right) dx = 0 .$$

D'après (42,40), la fonction  $G$ , considérée comme fonction de  $x$  et de  $y$ , vérifie l'équation :

$$(44) \quad \Delta G + k^2 G = \delta(y - y_0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x_0 - x - nd) \exp(i\alpha_0 nd) .$$

Par ailleurs :

$$(45) \quad \Delta u^d + k^2 u^d = 0 \quad \text{dans } \Omega_+ .$$

Ainsi, après avoir multiplié (44) par  $u^d$  et (45) par  $G$ , on obtient par soustraction :

$$(46) \quad u^d \Delta G - G \Delta u^d = u^d(x,y) \delta(y - y_0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x_0 - x - nd) \exp(i\alpha_0 nd) .$$

Intégrons maintenant sur  $\Omega_+$  et transformons les intégrales de surface en intégrales curvilignes grâce aux "recettes de physicien" usuelles : utilisation (abusive) de la seconde identité de Green (puisque  $G$  n'est pas bornée dans  $\Omega_+$ ) et application de la formule servant souvent de définition pour la distribution de Dirac dans  $\mathbb{R}^2$  :

<sup>†</sup>  $G(x,y,x',y')$  joue le rôle de fonction de Green en théorie des réseaux.

$$\iint_{\Omega_+} u^d(x,y) \delta(x-a) \delta(x-b) dx dy = \begin{cases} u^d(a,b) & \text{si } (a,b) \in \Omega_+ \\ 0 & \text{si } (a,b) \notin \Omega_+ \end{cases}$$

Notant que, parmi tous les points de coordonnées  $x_0 + nd$  et  $y_0$ , seul celui correspondant à  $n = 0$  appartient à  $\Omega_+$ , on est conduit à :

$$(47) \quad \int_{\partial\Omega_+} \left( u^d \frac{dG}{dn} - G \frac{du^d}{dn} \right) d\ell = u^d(x_0, y_0) = \int_{\mathcal{P}} \left( u^d \frac{dG}{dn} - G \frac{du^d}{dn} \right) d\ell,$$

car dans l'intégrale sur  $\partial\Omega_+$  les contributions de OA et O'A' se détruisent (pseudo-périodicité) et celle de AA' est nulle (43).

Tenant compte de la continuité de  $u^i$ , on montre en s'intéressant cette fois aux fonctions  $u^i$  et G, et au domaine  $\Omega_-$  que :

$$(48) \quad \int_{\mathcal{P}} \left( u^i \frac{dG}{dn} - G \frac{du^i}{dn} \right) d\ell = 0,$$

car  $P(x_0, y_0) \notin \Omega_-$ . Il suffit d'additionner membre à membre (47) et (48) pour atteindre le but fixé :

$$(49) \quad \int_{\mathcal{P}} \left( u \frac{dG}{dn} - G \frac{du}{dn} \right) d\ell = \int_{\mathcal{P}} -G \frac{du}{dn} d\ell = u^d(x_0, y_0).$$

b) On traduit la condition aux limites, savoir l'annulation de  $u$  sur le réseau :  $M(x, y)$  étant un point de  $\mathcal{P}$ , on a :

$$\lim_{P \rightarrow M} \int_{\mathcal{P}} -G(P, M') \frac{du'}{dn}(M') d\ell' + \lim_{P \rightarrow M} u^i(P) = 0,$$

où  $d\ell'$  est l'élément d'arc associé à un point  $M'$  de  $\mathcal{P}$ .

Faute de place, nous ne détaillerons pas la suite des considérations aboutissant à l'équation intégrale :

$$(50) \quad \int_{\mathcal{P}} -G(M, M') \frac{du'}{dn}(M') d\ell' + u^i(M) = 0.$$

Les difficultés théoriques rencontrées sont les mêmes qu'au chapitre XV et le cas H// mérite une attention particulière. Pour plus de détails, on pourra se reporter à un ouvrage de niveau supérieur [29]. On verra, ce faisant, comment obtenir plus rigoureusement la formule (49) à l'aide de la théorie des distributions sur un cylindre (théorie non enseignée dans notre cours de mathématiques [7]).

c) Le traitement numérique, qui est relativement délicat [29], ne peut pas être décrit ici.

6.4. Les méthodes différentielles. Elles réduisent le problème du réseau à la résolution numérique d'un système d'équations différentielles. L'étude du réseau diélectrique (indice  $\nu$  réel) en E// va nous permettre d'en expliquer

le principe. L'idée fondamentale est de représenter le champ total par une série de Fourier généralisée :

$$(51) \quad u(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(y) \exp(i\alpha_n x),$$

et de prendre pour inconnues les fonctions  $u_n(y)$ . On remarque ensuite que  $u$  vérifie au sens des distributions l'équation :

$$(52) \quad \Delta u + k^2(x, y)u = 0$$

où  $k^2(x, y)$  est égal à  $k$  ou à  $k^v$  suivant que  $y$  est supérieur ou inférieur à  $f(x)$ . On se reportera éventuellement au cours de Mathématiques [7] pour bien comprendre la portée de cette affirmation (qui serait d'ailleurs fautive en H//). Il est clair que (52) est vérifiée, au sens des fonctions, dans le complémentaire du profil  $\mathcal{P}$  et, c'est parce que les sauts de  $u$  et  $du/dn$  sont nuls que le Laplacien  $\Delta u$  (au sens des distributions) est égal au Laplacien sans précaution ( $\Delta u$ ). On n'oubliera pas qu'au sens des distributions (52) implique les relations de passage à la traversée de  $\mathcal{P}$ .

Ceci dit, récrivons (52) en tenant compte de (51) et en remplaçant  $k^2(x, y)$  par sa série de Fourier  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(y) \exp(inKx)$ . Après division par  $\exp(i\alpha_0 x)$ , on obtient, en égalant les coefficients de Fourier de même rang :

$$(53) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad u_n'' - \alpha_n^2 u_n + \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{n-m} u_m = 0.$$

On reconnaît un système infini d'équations différentielles couplées. Définissant une matrice colonne (ou vecteur)  $U(y)$  dont les composantes sont les fonctions  $u_n(y)$ , (53) peut être écrit sous forme matricielle :

$$(54) \quad U'' = \hat{A}(y) U$$

où  $\hat{A}$  est une matrice carrée dont les éléments  $[\hat{A}]_{n,m}$  sont connus :

$$(55) \quad [\hat{A}]_{n,m} = \alpha_n^2 \delta_{m,n} - c_{n-m}.$$

De plus, (53) implique la continuité de  $u_n$  et  $u_n'$  car, si ces fonctions étaient discontinues pour une certaine valeur de  $y$  (soit  $y_0$ ), la distribution  $\delta(y - y_0)$  et sa dérivée devraient figurer au second membre. Enfin,  $u$  étant décrit par un développement de Rayleigh pour  $y > h$  ou pour  $y < 0$ , il existe, dans chacune de ces deux régions, une relation simple entre  $U_n'$  et  $U_n$ . Par exemple, pour  $y < 0$ , on voit d'après (24) que  $u_n = T_n \exp(-i\beta_n^- y)$  et que par suite on passe de la colonne  $U$  à sa dérivée  $U'$  en multipliant chacune de ses composantes par  $-i\beta_n^-$ . On peut ainsi établir des conditions nécessairement vérifiées par  $U$  aux extrémités de l'intervalle  $(0, h)$  :

$$(56) \quad U'(0) + \mathbb{L}_0 U(0) = 0 ,$$

$$(57) \quad U'(h) + \mathbb{L}_h U(h) = S .$$

$\mathbb{L}_0$  et  $\mathbb{L}_h$  sont des matrices diagonales dont les éléments sont :

$$\{\mathbb{L}_0\}_{n,m} = i\beta_n^- \delta_{n,m} ,$$

$$\{\mathbb{L}_h\}_{n,m} = -i\beta_n \delta_{n,m} .$$

Quant à  $S$ , il s'agit d'une colonne, en fait réduite à un nombre ( $S_n = -2i\beta_0 \delta_{n,0} \exp(-i\beta_0 h)$ ), qui traduit la présence d'une onde entrante (l'onde incidente) dans le développement de Rayleigh valable pour  $y > h$ . Puisque la connaissance de  $U(0)$  et de  $U(h)$  entraîne celle des coefficients de Rayleigh  $T_n$  et  $R_n$  (par exemple  $T_n = u_n(0)$ ), le problème du réseau est ainsi réduit à la résolution du système différentiel (54) sur l'intervalle fini  $(0, h)$  compte tenu des conditions aux limites (56, 57).

Pour le calcul numérique, la série (51) doit être remplacée par une somme de  $P = 2N + 1$  termes qui, espère-t-on, représente "suffisamment bien" le champ. Alors les matrices infinies  $\hat{A}$ ,  $\mathbb{L}_0$  et  $\mathbb{L}_h$  deviennent des matrices finies à  $P$  lignes et, après une rénumérotation convenable, on peut supposer que les indices  $n$  et  $m$  varient de 1 à  $P$ . On remarquera que la linéarité du problème impose l'existence d'une matrice carrée  $M$  telle que :

$$U'(h) + \mathbb{L}_h U(h) = M U(0) .$$

Il est clair que si  $M$  était connu, le problème serait résolu au prix d'une inversion de matrice : d'après (57) et (56), on aurait en effet successivement  $U(0) = M^{-1} S$ ,  $U'(0) = -\mathbb{L}_0 U(0)$  et l'intégration de (54) pourrait être effectuée par une des méthodes classiques (Rungue-Kutta par exemple) dont on trouve le principe dans les ouvrages de calcul numérique [32]. Le point crucial est donc la détermination de  $M$  et il y a pour cela une recette qui mérite d'être rappelée. La matrice  $\hat{A}$  étant connue, on commence par écrire un logiciel qui calcule  $U(h)$ ,  $U'(h)$ , ainsi que la colonne  $V = U'(h) + \mathbb{L}_h U(h)$ , à partir d'une valeur arbitraire de  $U(0)$ . La valeur de  $V$ , obtenue en prenant pour  $U(0)$  une colonne dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de la  $j^{\text{ième}}$ , n'est autre que la  $j^{\text{ième}}$  colonne de  $M$  (vérification immédiate). On peut donc obtenir  $M$  en répétant  $P$  fois ce calcul (pour  $j = 1, \dots, P$ ) et une dernière utilisation du logiciel délivre  $U(h)$ , dont on déduit facilement les efficacités associées aux ondes diffractées dans  $R_+$ .

On se reportera à nouveau à [29] pour plus de détail. Signalons que la méthode différentielle est en fait applicable à des structures périodiques plus compliquées (réseau recouvert de couches diélectriques, guide diélectrique dont une paroi est périodiquement modulée...etc). Elle est donc plus



souple que la méthode intégrale mais il apparaît qu'elle conduit parfois à des instabilités numériques dans le cas où certaines parties des structures étudiées sont très conductrices. Elle permet enfin d'introduire simplement une idée dont l'importance théorique échappe parfois aux expérimentateurs. Si pour certaines valeurs de  $\alpha_0$ , éventuellement complexes, le déterminant de  $M$  s'annule, on pourra alors trouver une valeur de  $U(0)$  non nulle telle que  $M U(0) = 0$ . C'est dire que pour ces valeurs particulières de  $\alpha_0$  il existe une solution non nulle au problème du réseau en l'absence d'onde incidente (lorsque  $S = 0$  au second membre de (57)). Cette solution, qui joue un rôle analogue aux oscillations propres des systèmes mécaniques, mériterait d'être étudiée avec soin dans un cours plus ambitieux [29]. Son existence permet d'expliquer de nombreux phénomènes découverts et étudiés relativement récemment : couplage par réseau, absorption totale d'une onde plane par un réseau métallique, plasmons et polaritons de surface [18]. Le lecteur intéressé doit évidemment s'approprier à affronter la théorie des fonctions analytiques ; les développements de la fin du chapitre VIII donnent un avant-goût des difficultés à attendre.

7. EXERCICE : Etablir la relation (40).

Partant de (41) et dérivant au sens des distributions [7] :

$$2id \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\alpha_n^2 g_n(x, y) ; \quad 2id \frac{\partial g}{\partial y} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i \beta_n \operatorname{sgn}(y) g_n(x, y) ,$$

$$2id \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2i \beta_n \delta(y) g_n(x, y) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n^2 \operatorname{sgn}^2(y) g_n(x, y) ,$$

$$\begin{aligned} 2id (\Delta g + k^2 g) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-\alpha_n^2 - \beta_n^2 + 2i \beta_n \delta(y) + k^2) g_n(x, y) \\ &= 2i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n \delta(y) g_n(x, 0) , \end{aligned}$$

$$\Delta g + k^2 g = \frac{\delta(y)}{d} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(i\alpha_n x) = \exp(i\alpha_0 x) \delta(y) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{d} \exp(inKx) .$$

Ainsi, (40) résulte finalement d'une propriété très classique [7] du "peigne de Dirac" :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nd) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{d} \exp(inKx) .$$

## Annexe I

# Notions élémentaires d'algèbre et d'analyse vectorielle

La plupart des résultats seront donnés sans démonstration : ils résultent immédiatement des définitions ou ont déjà été établis dans les cours de Premier Cycle.

### 1. PRODUIT SCALAIRE ET PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS $\vec{A}$ ET $\vec{A}'$ .

Ce sont des notions supposées connues. Nous désignons respectivement le produit scalaire et le produit vectoriel par  $\vec{A} \cdot \vec{A}'$  et  $\vec{A} \wedge \vec{A}'$ .

On rappelle que  $\vec{A} \cdot \vec{A}' = \vec{A}' \cdot \vec{A}$  tandis que  $\vec{A} \wedge \vec{A}' = -\vec{A}' \wedge \vec{A}$ .

Si  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sont les vecteurs unitaires du trièdre orthonormé direct utilisé comme repère, on a les égalités suivantes ainsi que celles qui s'en déduisent par permutation circulaire :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y, \quad \vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = 0$$

Il en résulte que si  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  et  $\vec{r}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$  :

$$(1) \quad \vec{r} \cdot \vec{r}' = xx' + yy' + zz',$$

$$(2) \quad \vec{r} \wedge \vec{r}' = (yz' - zy')\vec{e}_x + (zx' - xz')\vec{e}_y + (xy' - yx')\vec{e}_z.$$

On peut retrouver rapidement ce dernier résultat en considérant le tableau

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{vmatrix} \quad \text{que l'on "développe" suivant sa dernière ligne comme}$$

s'il s'agissait d'un déterminant.

Le produit mixte  $(\vec{A}, \vec{A}', \vec{A}'')$  des trois vecteurs  $\vec{A}, \vec{A}', \vec{A}''$  est défini par :

$$(3) \quad (\vec{A}, \vec{A}', \vec{A}'') = \vec{A} \cdot (\vec{A}' \wedge \vec{A}'').$$

Ce produit est invariable par permutation circulaire, mais change de signe par permutation de deux vecteurs :

$$(\vec{A}, \vec{A}', \vec{A}'') = (\vec{A}', \vec{A}'', \vec{A}), \quad (\vec{A}, \vec{A}', \vec{A}'') = -(\vec{A}', \vec{A}, \vec{A}'').$$

Il semble indispensable de connaître la "formule du double produit vectoriel" :

$$(4) \quad \vec{A} \wedge (\vec{A}' \wedge \vec{A}'') = (\vec{A} \cdot \vec{A}'')\vec{A}' - (\vec{A} \cdot \vec{A}')\vec{A}''$$

en notant, qu'en raison de la non commutativité du produit vectoriel, la place des parenthèses figurant dans le membre de gauche est très importante.

On rappelle aussi que si  $\vec{m}$  est un vecteur de composantes  $p, q, r$  le produit vectoriel  $\vec{m} \wedge \vec{A}$  peut être déduit de  $\vec{A}$  par l'action d'une matrice antisymétrique  $M$  :

$$(5) \quad \vec{m} \wedge \vec{A} = M\vec{A} \quad \text{avec} \quad M = \begin{vmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{vmatrix}$$

## 2. OPERATEURS DIFFERENTIELS USUELS.

A une fonction scalaire  $\phi$  on associe souvent la fonction vectorielle  $\text{grad } \phi$ . En coordonnées cartésiennes :

$$(6) \quad \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z.$$

$\text{grad } \phi$  étant un champ vectoriel, nous devrions écrire  $\overrightarrow{\text{grad } \phi}$  ; nous ne ferons pas pour éviter d'alourdir les notations. Pour la même raison, nous écrirons  $\text{rot } \vec{A}$  au lieu de  $\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}}$ , et  $\Delta \vec{A}$  au lieu de  $\overrightarrow{\Delta \vec{A}}$ .

Si  $M$  est un point repéré par  $\vec{r} = \vec{OM}$ , on a fréquemment à calculer le gradient de  $r = \|\vec{r}\|$ . On vérifie que si  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire de  $\vec{OM}$  :

$$(7) \quad \text{grad}(r) = \vec{u}, \quad \text{avec } \vec{u} = \vec{r}/r.$$

Soit  $R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$  la distance de deux points  $M(x, y, z)$  et  $M'(x', y', z')$  repérés par  $\vec{r}$  et  $\vec{r}'$ . C'est une fonction des six coordonnées  $x, y, z, x', y', z'$ . Si l'on fixe  $x', y', z'$ , elle devient une fonction des trois variables  $x, y, z$  à laquelle on peut associer la fonction vectorielle  $\text{grad}_M(R)$  définie par :

$$(8) \quad \text{grad}_M(R) = \frac{\partial R}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial R}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial R}{\partial z} \vec{e}_z.$$

La fonction  $\text{grad}_{M'}(R)$  est définie de façon analogue :

$$(8') \quad \text{grad}_{M'}(R) = \frac{\partial R}{\partial x'} \vec{e}_x + \frac{\partial R}{\partial y'} \vec{e}_y + \frac{\partial R}{\partial z'} \vec{e}_z.$$

Si  $\vec{u}_M$  et  $\vec{u}_{M'}$  sont deux vecteurs unitaires portés par  $MM'$  et respectivement dirigés vers  $M$  et  $M'$ , on vérifie que :

$$(9) \quad \vec{u}_M = \text{grad}_M(R), \quad (9') \quad \vec{u}_{M'} = \text{grad}_{M'}(R).$$

Ainsi,  $\text{grad}_M(R)$  et  $\text{grad}_{M'}(R)$  sont opposés et plus généralement, si  $\phi(M, M') = f(R)$  :

$$(10) \quad \text{grad}_M(\phi) = \frac{df}{dR} \vec{u}_M = - \frac{df}{dR} \vec{u}_{M'} = - \text{grad}_{M'}(\phi).$$

A une fonction vectorielle  $\vec{A}$ , on associe souvent une fonction scalaire (la divergence) et une fonction vectorielle (le rotationnel) respectivement notées  $\text{div } \vec{A}$  et  $\text{rot } \vec{A}$ . En coordonnées cartésiennes :

$$(11) \quad \text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$(12) \quad \text{rot } \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z .$$

On peut récrire ces expressions en introduisant le vecteur symbolique  $\vec{\nabla}$  appelé "nabla" dont les composantes sont les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Alors:

$$(13) \quad \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad (14) \quad \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}.$$

Cette façon de façon de faire, très à la mode dans les ouvrages anglo-saxons, n'est pas utilisée ici. Nous la considérons tout au plus comme un procédé mnemotechnique utilisable en coordonnées cartésiennes. Ce procédé n'est pas sans danger et par exemple la formule :

$$\text{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\text{div } \vec{B})\vec{A} - (\text{div } \vec{A})\vec{B}$$

est fautive ; il n'existe d'ailleurs pas de formule simple donnant  $\text{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B})$ . Les identités suivantes sont très fréquemment utilisées :

$$(15) \quad \text{div}(\Phi \vec{A}) = \Phi \text{div } \vec{A} + \text{grad } \Phi \cdot \vec{A},$$

$$(16) \quad \text{rot}(\Phi \vec{A}) = \Phi \text{rot } \vec{A} + \text{grad } \Phi \wedge \vec{A},$$

$$(17) \quad \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A},$$

$$(18) \quad \text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0, \quad (19) \quad \text{rot}(\text{grad } \Phi) = 0.$$

Le Laplacien  $\Delta \Phi$  d'une fonction scalaire  $\Phi(\vec{r})$  est défini par :

$$(20) \quad \Delta \Phi = \text{div}(\text{grad } \Phi).$$

soit, en coordonnées cartésiennes :

$$(21) \quad \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Si  $\Phi$  ne dépend que de  $r = \|\vec{r}\|$ , on montre que :

$$(22) \quad \Delta \Phi = \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad (\Phi \text{ fonction de trois variables})$$

$$(22') \quad = \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad (\Phi \text{ fonction de deux variables})$$

On peut essayer de retenir la formule plus générale donnant le Laplacien en coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$  :

$$(23) \quad \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Le laplacien  $\Delta \vec{A}$  d'une fonction vectorielle  $\vec{A}$  est une autre fonction vectorielle. Si  $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ , alors, par définition :

$$(24) \quad \Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z.$$

Il existe en fait une définition indépendante du repère utilisé. Cette remarque, valable aussi pour les autres opérateurs différentiels, pourrait être approfondie en se reportant à un cours de calcul tensoriel.

L'Electromagnétisme théorique fait grand usage de l'identité suivante

qu'il est donc conseillé d'apprendre après l'avoir vérifiée :

$$(25) \quad \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = -\Delta \vec{A} + \text{grad}(\text{div } \vec{A}).$$

### 3. TRANSFORMATION D'INTEGRALES DE VOLUME EN INTEGRALES DE SURFACE

Tout physicien connaît le théorème de Green-Ostrogradsky que nous appelons ici "Premier théorème de Green" : soit  $\Omega$  le domaine intérieur à une surface fermée  $S$  dont le vecteur unitaire  $\vec{n}$  de la normale est orienté vers l'extérieur ; alors, si  $\vec{A}(\vec{r})$  est une fonction vectorielle,  $dv$  l'élément de volume et  $dS$  l'élément de surface :

$$(26) \quad \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{A} \, dv = \iint_S \vec{n} \cdot \vec{A} \, dS.$$

Il n'est pas question ici de dissenter sur les conditions de validité de ce théorème. Notons cependant que la fonction  $\vec{A}(\vec{r})$  doit être "suffisamment régulière" pour que les intégrales mises en cause existent.

Nous appelons "deuxième théorème de Green" l'énoncé suivant : si  $\phi$  et  $\Psi$  sont deux fonctions définies dans  $\Omega$  et suffisamment régulières :

$$(27) \quad \iiint_{\Omega} (\phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \phi) \, dv = \iint_S \left( \phi \frac{d\Psi}{dn} - \Psi \frac{d\phi}{dn} \right) dS.$$

où  $\frac{d\Psi}{dn}$  et  $\frac{d\phi}{dn}$  sont les dérivées normales, définies sur  $S$  par :

$$\frac{d\phi}{dn} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \phi} ; \quad \frac{d\Psi}{dn} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \Psi}.$$

On établit ce résultat en notant que :

$$\begin{aligned} \phi \Delta \Psi &= \phi \text{div}(\text{grad } \Psi) = \text{div}(\phi \text{grad } \Psi) - \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \Psi \\ \Psi \Delta \phi &= \Psi \text{div}(\text{grad } \phi) = \text{div}(\Psi \text{grad } \phi) - \text{grad } \Psi \cdot \text{grad } \phi. \end{aligned}$$

Par soustraction, il vient :

$$\phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \phi = \text{div}(\phi \text{grad } \Psi - \Psi \text{grad } \phi)$$

ce qui conduit à (27) par application du "premier théorème" à la fonction vectorielle  $\phi \text{grad } \Psi - \Psi \text{grad } \phi$ .

Le premier théorème de Green permet de transformer en intégrale de surface, l'intégrale triple d'une divergence. Il est souvent utile de transformer de la même façon l'intégrale triple d'un gradient ou d'un rotationnel ; aussi

est-il souhaitable de connaître les égalités suivantes dans lesquelles  $\vec{n}$  est toujours orienté vers l'extérieur de  $S$ .

$$(28) \quad \iiint_{\Omega} \text{grad } \phi \, dv = \iint_S \vec{n} \phi \, dS, \quad (29) \quad \iiint_{\Omega} \text{rot } A \, dv = \iint_S \vec{n} \wedge \vec{A} \, dS.$$

Pour établir élémentairement de telles formules, il suffit de montrer, par utilisation du théorème de Green-Ostrogradsky, qu'elles sont vraies en projection sur chacun des axes de coordonnées. faisons le, à titre d'exemple, pour la première et pour l'axe  $Ox$  :

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \cdot \iiint_{\Omega} \text{grad } \phi \, dv &= \iiint_{\Omega} \vec{e}_x \cdot \text{grad } \phi \, dv = \iiint_{\Omega} \text{div}(\phi \vec{e}_x) \, dv, \\ &= \iint_S \vec{n} \cdot \vec{e}_x \phi \, dS = \vec{e}_x \cdot \iint_S \vec{n} \phi \, dS. \end{aligned}$$

On pourra se reporter au cours de mathématiques [7] pour une présentation

plus élégante de toutes ces formules d'usage courant.

#### 4. TRANSFORMATION D'INTEGRALES DE SURFACE EN INTEGRALES CURVILIGNES

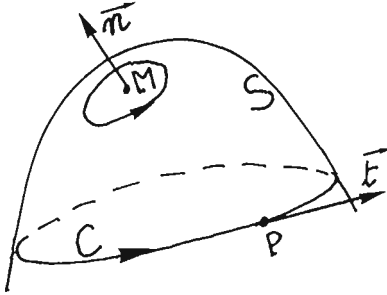


Figure 81.

En magnétostatique, on a souvent à considérer une surface  $S$  s'appuyant sur une courbe fermée orientée  $C$ . On peut se servir du sens de parcours choisi sur  $C$  (sens induit par le vecteur unitaire  $\vec{t}$  de la tangente) pour orienter le vecteur unitaire de la normale en un point  $M$  de  $S$  : on imagine pour cela que la frontière de l'élément  $dS$  (associé à  $M$ ) est obtenue par déformation continue de  $C$  (figure 81). L'"Observateur d'Ampère" couché le long de cette frontière "selon ses habi-

tudes", et regardant vers  $M$ , indique le sens de  $\vec{n}$  à l'aide de son bras gauche. Rappelons qu'en se déplaçant selon le sens de parcours choisi sur  $C$  on doit rencontrer d'abord les pieds, puis la tête, de l'"Observateur d'Ampère". Ces conventions d'orientation étant respectées, le théorème de Stokes, que nous nous contentons de rappeler, lie la circulation d'une fonction vectorielle  $\vec{A}(\vec{r})$  au flux de son rotationnel :

$$(30) \quad \int_C \vec{A} \cdot \vec{t} \, d\ell = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS.$$

D'autres formules utiles, mais moins connues, se déduisent de ce théorème classique. On retiendra notamment que :

$$(31) \quad \int_C \phi(\vec{r}) \vec{t} \, d\ell = \iint_S \vec{n} \wedge \text{grad } \phi \, dS.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \cdot \int_C \phi \vec{t} \, d\ell &= \int_C (\phi \vec{e}_x) \cdot \vec{t} \, d\ell = \iint_S \text{rot}(\phi \vec{e}_x) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_S (\text{grad } \phi \wedge \vec{e}_x + \vec{0}) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S (\vec{n} \wedge \text{grad } \phi) \cdot \vec{e}_x \, dS \\ &= \vec{e}_x \cdot \iint_S \vec{n} \wedge \text{grad } \phi \, dS, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'égalité vectorielle est vraie en projection sur  $Ox$  (et par suite sur  $Oy$  et  $Oz$ ).

## Annexe 2

# *La représentation complexe des fonctions sinusoïdales*

### 1. AMPLITUDE COMPLEXE ASSOCIEE A UNE FONCTION SINUSOÏDALE

On manipule souvent des fonctions sinusoïdales  $s(t)$  de pulsation  $\omega$  (période  $T = 2\pi/\omega$ , fréquence  $N = \omega/2\pi$ ) qui, après quelques transformations élémentaires, peuvent toujours être écrites sous la forme :

$$(1) \quad s(t) = a \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{avec } a > 0.$$

Les réels  $a$  et  $\varphi$  sont respectivement l'amplitude et la phase. L'amplitude est un réel positif et la phase est a priori définie modulo  $2\pi$ . Signalons que dans certains ouvrages on considère que la phase est l'argument du cosinus c'est-à-dire  $\omega t + \varphi$  ;  $\varphi$  est alors appelé l'angle de phase.

A la fonction  $s(t)$  on peut convenir d'associer le nombre complexe  $\mathcal{S}$  :

$$(2) \quad \mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} a \exp(i\varphi).$$

Ce complexe, généralement appelé "amplitude complexe", permet de retrouver rapidement les caractéristiques de la fonction  $s(t)$  à laquelle il est associé. Il suffit d'égaliser successivement les modules et les arguments des deux membres de (2) :

$$(3) \quad |\mathcal{S}| = |a| = a$$

$$(4) \quad \arg \mathcal{S} = \arg(a) + \varphi = \varphi.$$

On vérifie aussi que :

$$(5) \quad s(t) = \operatorname{Re}(\mathcal{S} \exp(i\omega t)), \quad (6) \quad s(t) = \frac{1}{2} (\mathcal{S} \exp(i\omega t) + \bar{\mathcal{S}} \exp(-i\omega t))$$

Tous les auteurs ne sont malheureusement pas d'accord sur la définition de  $\mathcal{S}$ . Certains remplacent la relation de définition (2) par :

$$(2') \quad \mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} a \exp(-i\varphi)$$

et dans ces conditions, les relations (3-5) doivent être partiellement modifiées :

$$(3') \quad |\mathcal{S}| = |a| = a \quad (\text{pas de changement})$$

$$(4') \quad \arg \mathcal{S} = \arg(a) - \varphi = -\varphi$$

$$(5') \quad s(t) = \operatorname{Re}(\mathcal{S} e^{-i\omega t}) \quad (6') \quad s(t) = \frac{1}{2} (\mathcal{S} \exp(-i\omega t) + \bar{\mathcal{S}} \exp(i\omega t)).$$

Pour distinguer les deux façons de faire, on se réfère généralement aux relations (5) et (5'). On dit que l'on adopte une dépendance temporelle en

$\exp(i\omega t)$  ou en  $\exp(-i\omega t)$  selon que l'on utilise (2), qui implique (5), ou (2') qui implique (5'). Il n'y a évidemment aucun argument logique permettant de conseiller l'une ou l'autre des deux représentations ; le choix est une affaire d'habitude et varie d'un domaine de la physique à l'autre. Il faut y prendre garde car, certaines propriétés des amplitudes complexes dépendent de la dépendance temporelle utilisée.

2. PROPRIETES DES AMPLITUDES COMPLEXES

Utilisons tout d'abord la dépendance en  $\exp(i\omega t)$  c'est-à-dire la convention généralement utilisée en théorie des circuits électriques.

2.1. Théorème de linéarité. Par utilisation de la relation (5), on voit que si  $\lambda_n$  sont des réels et si  $\mathcal{J}_n$  sont les amplitudes complexes associées à des

fonctions périodiques  $s_n(t)$  de même pulsation  $\omega$ , alors  $\sum_{n=1}^N \lambda_n \mathcal{J}_n$  est l'am-

plitude complexe associée à  $\sum_{n=1}^N \lambda_n s_n(t)$  :

$$(7) \quad s_n(t) \leftrightarrow \mathcal{J}_n \quad \text{implique} \quad \sum_n \lambda_n s_n(t) \leftrightarrow \sum_n \lambda_n \mathcal{J}_n.$$

En particulier, l'amplitude complexe associée à une somme (ou une différence) est la somme (ou la différence) des amplitudes complexes associées à chacun de ses termes.

Dans ce paragraphe, le symbole  $\leftrightarrow$  indique évidemment la correspondance entre une fonction et son amplitude complexe.

2.2. Théorème de dérivation. Puisque  $s'(t) = a\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ , l'amplitude complexe associée à la dérivée est  $a\omega \exp(i(\varphi + \pi/2)) = a\omega \exp(i\varphi) \exp(i\pi/2) = i\omega a \exp(i\varphi) = i\omega \mathcal{J}$ .

$$(8) \quad s(t) \leftrightarrow \mathcal{J} \quad \text{implique} \quad s'(t) \leftrightarrow i\omega \mathcal{J}.$$

2.3. Théorème d'intégration. Soit  $S(t) = (a/\omega) \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$ , la primitive "alternative" de  $s(t)$ , c'est-à-dire la primitive de valeur moyenne nulle. L'amplitude complexe qui lui est associée est :

$$\frac{a}{\omega} \exp(i\varphi) \exp(-i\pi/2) = -\frac{ia}{\omega} \exp(i\varphi) = \frac{\mathcal{J}}{i\omega}.$$

$$(9) \quad s(t) \leftrightarrow \mathcal{J} \quad \text{implique} \quad S(t) \leftrightarrow \frac{\mathcal{J}}{i\omega}.$$

Ainsi les opérations de dérivation et d'intégration se ramènent à des multiplications sur les amplitudes complexes.

Voyons maintenant ce que deviennent ces trois théorèmes si l'on utilise une dépendance temporelle en  $\exp(-i\omega t)$ , comme on le fait souvent en étu-



diant la propagation des ondes. On vérifiera que le théorème de linéarité reste inchangé tandis que les deux autres doivent être modifiés comme suit :

$$(10) \quad s(t) \leftrightarrow \mathcal{S} \quad \text{implique} \quad s'(t) \leftrightarrow -i\omega \mathcal{S}$$

$$(10') \quad s(t) \leftrightarrow \mathcal{S} \quad \text{implique} \quad S(t) \leftrightarrow \frac{1}{-i\omega} \mathcal{S}.$$

On notera que l'amplitude complexe associée à  $s''(t)$  est  $-\omega^2 \mathcal{S}$  quelle que soit la dépendance temporelle adoptée.

2.4. Remarque importante. Lorsque l'amplitude  $a$  et la phase  $\Phi$  de  $s$  sont fonctions d'une variable d'espace  $x$ , l'amplitude complexe  $\mathcal{S}$  associée à  $s(x,t)$  dépend alors de  $x$ . On vérifie que l'amplitude complexe associée à  $\frac{\partial s}{\partial x}$  est  $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}$ . La dérivation par rapport à  $x$  et la dérivation par rapport à  $t$  se traduisent différemment sur les amplitudes complexes.

### 3. UTILISATION DES AMPLITUDES COMPLEXES POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS;

On rencontre souvent l'équation différentielle :

$$(11) \quad a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = s(t)$$

et où  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont des constantes réelles. Si le second membre est une fonction sinusoidale donnée  $s(t) = A \cos(\omega t + \psi)$ , on sait que cette équation admet comme solution particulière une fonction sinusoidale de même pulsation  $\omega$ . Pour trouver cette fonction  $u(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$ , il est commode de déterminer son amplitude complexe  $\mathcal{U} = a \exp(i\varphi)$  à partir de l'amplitude complexe  $\mathcal{S}$  de  $s(t)$ . En adoptant, par exemple, une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$  :  $\mathcal{S} = A \exp(i\psi)$ , et l'utilisation du théorème de dérivation et du théorème de linéarité conduit à :

$$(11') \quad -\omega^2 a_2 \mathcal{U} + i\omega a_1 \mathcal{U} + a_0 \mathcal{U} = (\alpha' + i\alpha'') \mathcal{U} = \mathcal{S}$$

$$\text{avec} \quad \alpha' = a_0 - \omega^2 a_2 \quad \text{et} \quad \alpha'' = \omega a_1.$$

Ainsi le passage aux amplitudes complexes transforme l'équation différentielle (11) en une équation algébrique du premier degré (11') qui permet d'obtenir rapidement l'amplitude  $a$  et la phase  $\varphi$  de  $u(t)$ . En égalant les modules, on trouve :

$$(12) \quad a = |\mathcal{U}| = \frac{|\mathcal{S}|}{|\alpha|} = \frac{A}{(\alpha'^2 + \alpha''^2)^{\frac{1}{2}}},$$

tandis que l'égalité entre parties réelles, d'une part, et parties imaginaires, d'autre part, conduit au système :

$$(13) \quad \alpha' \cos(\varphi - \psi) - \alpha'' \sin(\varphi - \psi) = \frac{A}{a} = (\alpha'^2 + \alpha''^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(13') \quad \alpha'' \cos(\varphi - \psi) + \alpha' \sin(\varphi - \psi) = 0.$$

La résolution de ce système linéaire fournit  $\cos(\varphi - \psi)$  et  $\sin(\varphi - \psi)$ , ce qui détermine  $\varphi - \psi$  et donc  $\varphi$  modulo  $2\pi$ . On notera que la formule plus simple:

$$(14) \quad \operatorname{tg}(\varphi - \psi) = - \frac{\alpha''}{\alpha'}$$

ne permet pas de déterminer complètement  $\varphi$  : un angle dont on connaît uniquement la tangente est seulement défini modulo  $\pi$ .

4. VECTEUR COMPLEXE ASSOCIE A UNE FONCTION VECTORIELLE SINUSOIALE

Soit maintenant une fonction vectorielle  $\vec{S}(t)$  dont les composantes sont des fonctions sinusoidales  $s_n(t)$  :

$$(15) \quad \vec{S}(t) = \sum_{n=1}^3 s_n(t) \vec{e}_n = \sum_{n=1}^3 a_n \cos(\omega t + \varphi_n) \vec{e}_n.$$

Si  $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}'_n + i\mathcal{S}''_n$  est l'amplitude complexe associée à  $s_n(t)$ , le vecteur  $\vec{\mathcal{S}}$  de composantes complexes  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  est dit vecteur complexe associé à  $\vec{S}(t)$  :

$$(16) \quad \vec{\mathcal{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^3 \mathcal{S}_n \vec{e}_n = \vec{\mathcal{S}}' + i\vec{\mathcal{S}}'', \text{ où } \vec{\mathcal{S}}' \text{ et } \vec{\mathcal{S}}'' \text{ sont réels et définis par}$$

$$(17) \quad \vec{\mathcal{S}}' = \sum_{n=1}^3 \mathcal{S}'_n \vec{e}_n \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{S}}'' = \sum_{n=1}^3 \mathcal{S}''_n \vec{e}_n.$$

Compte tenu des propriétés des amplitudes complexes et utilisant, pour changer, une dépendance temporelle en  $\exp(-i\omega t)$ , on généralise immédiatement les relations (5') et (6') qui deviennent :

$$(18) \quad \vec{S}(t) = \operatorname{Re}(\vec{\mathcal{S}} \exp(-i\omega t)), \quad (19) \quad \vec{S}(t) = \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{S}} \exp(-i\omega t) + \vec{\mathcal{S}} \exp(i\omega t)).$$

X

Le produit scalaire hermitien associé à deux vecteurs complexes  $\vec{\mathcal{A}}$  et  $\vec{\mathcal{B}}$  (de composantes complexes  $\mathcal{A}_n$  et  $\mathcal{B}_n$ ) le complexe  $(\vec{\mathcal{A}}|\vec{\mathcal{B}})$  défini par :

$$(20) \quad (\vec{\mathcal{A}}|\vec{\mathcal{B}}) = \sum_{n=1}^3 \mathcal{A}_n \bar{\mathcal{B}}_n.$$

On rappelle que :

$$(21) \quad (\vec{\mathcal{A}}|\vec{\mathcal{B}}) = (\vec{\mathcal{B}}|\vec{\mathcal{A}}),$$

et que la norme hermitienne  $\|\vec{\mathcal{A}}\|$  est définie par :

$$(22) \quad \|\vec{\mathcal{A}}\| = (\vec{\mathcal{A}}|\vec{\mathcal{A}})^{1/2}.$$

On est parfois amené à introduire le produit scalaire ordinaire qui, au couple  $(\vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}})$  associe le complexe  $\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{\mathcal{B}}$  défini par :

$$(23) \quad \vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{\mathcal{B}} = \sum_{n=1}^3 \mathcal{A}_n \mathcal{B}_n.$$

Evidemment :

$$(24) \quad (\vec{\mathcal{A}}|\vec{\mathcal{B}}) = \vec{\mathcal{A}} \cdot \bar{\vec{\mathcal{B}}}.$$

On peut aussi parler du produit vectoriel qui, au couple  $\vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}}$ , associe le

vecteur complexe noté  $\vec{\mathcal{A}} \wedge \vec{\mathcal{B}}$  dont les composantes sont données par la règle habituelle (par exemple  $(\vec{\mathcal{A}} \wedge \vec{\mathcal{B}})_1 = \mathcal{A}_2 \mathcal{B}_3 - \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_3$ )

On dit que les deux vecteurs complexes  $\vec{\mathcal{A}}$  et  $\vec{\mathcal{B}}$  sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire hermitien est nul :

$$(26) \quad (\vec{\mathcal{A}} | \vec{\mathcal{B}}) = 0.$$

Il importe de bien noter que la nullité du produit hermitien n'entraîne pas celle du produit scalaire ordinaire. Si  $\vec{\mathcal{A}}$  et  $\vec{\mathcal{B}}$  sont les vecteurs complexes respectivement associés à  $\vec{A}(t)$  et  $\vec{B}(t)$  on peut avoir  $(\vec{\mathcal{A}} | \vec{\mathcal{B}}) = 0$  sans que pour autant  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  soient à tout instant perpendiculaires. Par exemple, considérons dans le plan xOy les points A et B tels que :

$$\begin{array}{l} \vec{OA} \\ \left| \begin{array}{l} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{OB} \\ \left| \begin{array}{l} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) = -\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \end{array} \right. \end{array}$$

On vérifie sans peine que les vecteurs complexes  $\vec{\mathcal{A}}$  et  $\vec{\mathcal{B}}$  associés à  $\vec{OA}(t)$  et  $\vec{OB}(t)$  sont orthogonaux. Il est non moins clair que les deux vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$ , qui sont à tout instant symétriques par rapport à Ox, ne restent pas perpendiculaires entre eux.

Le carré de la norme hermitienne d'un vecteur complexe  $\vec{\mathcal{F}}$  est, à un coefficient multiplicatif près, la valeur moyenne du carré de la norme du vecteur  $\vec{S}(t)$  qu'il représente. En effet :

$$\|\vec{\mathcal{F}}\|^2 = (\vec{\mathcal{F}} | \vec{\mathcal{F}}) = \sum_{n=1}^3 \mathcal{F}_n \bar{\mathcal{F}}_n = \sum_{n=1}^3 a_n^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) \cdot \vec{S}(t) dt = \sum_n \frac{1}{T} \int_0^T a_n^2 \cos^2(\omega t + \varphi_n) dt = \frac{1}{2} \sum_n a_n^2$$

On a donc :

$$\|\vec{\mathcal{F}}\|^2 = (\vec{\mathcal{F}} | \vec{\mathcal{F}}) = \frac{2}{T} \int_0^T \vec{S}(t) \cdot \vec{S}(t) dt.$$

Les théorèmes de linéarité (7) et de dérivation (8) établis pour les amplitudes complexes se généralisent aux vecteurs complexes ; il suffit de raisonner sur leurs composantes :

a) Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  sont des réels, et  $\vec{A}_n(t)$  des fonctions vectorielles

sinusoïdales de même pulsation, le vecteur complexe associé à  $\sum_n \lambda_n \vec{A}_n(t)$

est  $\sum_n \lambda_n \vec{\mathcal{A}}_n$  ;

b) Dériver  $\vec{S}(t)$  revient à multiplier  $\vec{\mathcal{F}}$  par  $i\omega$  ou  $-i\omega$ , suivant que l'on utilise une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$  ou en  $\exp(-i\omega t)$ .

On manipule souvent en électromagnétisme des fonctions vectorielles  $\vec{S}$  des quatre variables  $x, y, z$  et  $t$ . Si ces fonctions sont sinusoïdales par rapport à  $t$ , c'est-à-dire de la forme  $\sum_n a_n(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi_n(x, y, z)) \vec{e}_n$ ,

le vecteur complexe  $\vec{\mathcal{F}}$  qui les représente est alors fonction des variables d'espace  $x, y, z$ .

Si  $\mathcal{L}$  est l'un des opérateurs divergence, rotationnel ou Laplacien vectoriel,

$$\mathcal{L} \vec{S}(x, y, z, t) = \mathcal{L} \operatorname{Re}(\vec{\mathcal{L}}(x, y, z) \exp(\pm i\omega t)) = \operatorname{Re}((\mathcal{L} \vec{\mathcal{F}}) \exp(\pm i\omega t)).$$

Ainsi le vecteur complexe associé à  $\mathcal{L} \vec{S}$  n'est autre que  $\mathcal{L} \vec{\mathcal{F}}$ . Cette remarque est utilisée pour obtenir rapidement les équations de Maxwell harmoniques à partir des équations de Maxwell.

On pourra enfin établir, à titre d'exemple, les résultats donnés sur le tableau ci-dessous.

Commentaires	Fonction	complexe associé
	$\vec{S}(t)$	$\vec{\mathcal{F}}$
Dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$	$\vec{S}(t - \tau)$	$\vec{\mathcal{F}} \exp(i\omega\tau)$
Dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$	$\vec{S}(t + \tau)$	$\vec{\mathcal{F}} \exp(-i\omega\tau)$
Quelle que soit la dépendance temporelle, $\vec{u}$ étant un vecteur réel constant (indépendant de $x, y, z, t$ )	$\vec{S}(x, y, z, t) \cdot \vec{u}$ $\vec{S}(x, y, z, t) \wedge \vec{u}$	$\vec{\mathcal{F}}(x, y, z) \cdot \vec{u}$ $\vec{\mathcal{F}}(x, y, z) \wedge \vec{u}$

Tableau 10

Remarque : Tous les résultats donnés dans cette annexe se retrouvent rapidement à partir de la notion de signal analytique (voir annexe 3, §3). On notera que le choix de la dépendance temporelle utilisée pour définir l'amplitude complexe est étroitement lié à celui de la transformation de Fourier utilisée pour définir le signal analytique.

## Annexe 3

# *La notion de signal analytique*

N.B. : Il est nécessaire d'avoir bien assimilé un cours de Mathématiques sur la transformation de Fourier pour tirer profit de ce qui suit.

### 1. DEFINITION.

Soit  $f(t)$  une fonction réelle de la variable réelle  $t$  ( $t$  est souvent le temps) et  $\hat{f}(\nu)$  sa transformée de Fourier, au sens des distributions. En dépit de la notation utilisée,  $\hat{f}(\nu)$  peut donc être une distribution. Nous employerons, dans cette annexe, la transformation notée  $\mathcal{F}^+$  dans notre cours de Mathématiques [7]. C'est dire que lorsque  $f(t)$  est sommable :

$$(1) \quad f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^+} \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(2i\pi\nu t) dt.$$

Puisque  $f(t)$  est réelle,  $\hat{f}(\nu)$  possède la symétrie hermitienne :

$$(2) \quad \hat{f}(\nu) = \overline{\hat{f}(-\nu)}.$$

Ainsi,  $H(\nu)$  désignant la fonction de Heaviside, il suffit théoriquement de connaître  $H(\nu) \hat{f}(\nu)$  (ou son original de Fourier) pour reconstituer  $\hat{f}(\nu)$  et par suite  $f(t)$ . On peut donc envisager de décrire une fonction réelle  $f(t)$  par l'original  $\tilde{f}(t)$  de  $2H(\nu) \hat{f}(\nu)$  :

$$(3) \quad \tilde{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^+} 2H(\nu) \hat{f}(\nu).$$

Le facteur 2, qui apparaît dans cette définition de  $\tilde{f}(t)$ , n'a évidemment pas un rôle fondamental. Tout au plus simplifie-t-il l'expression de  $\tilde{f}(t)$  pour certaines fonctions usuelles.

En physique, une fonction  $f(t)$  représente souvent un "signal". Dans ces conditions,  $\tilde{f}(t)$  est dit "signal analytique" (s.a.) associé à  $f(t)$ . On notera que sous réserve d'existence, le s.a. est une fonction complexe de la variable réelle  $t$  dont la transformée de Fourier est à support positif. Autrement dit, le spectre du s.a. ne contient que des fréquences positives ; les fréquences négatives qui, importunent l'Ingénieur, ont été éliminées.

Remarque : l'existence de  $\tilde{f}(t)$  suppose non seulement que  $\hat{f}(\nu)$  existe

mais aussi que  $H(\nu) \hat{f}(\nu)$  ait un sens. Se convaincre que le s.a. d'une fonction constante n'est pas défini. Même conclusion pour  $f(t) = \exp(-at) \cos(\omega t)$  avec  $a$  et  $\omega$  réels positifs.

## 2. PROPRIÉTÉS

2.1. La fonction  $\tilde{f}(t)$  qui est la transformée de Fourier ( $\mathcal{F}^-$ ) d'une distribution à support positif, possède des propriétés d'analyticité ([7]) qui méritent d'être rappelées et qui justifient l'appellation de signal analytique. Si nous autorisons  $t$  à prendre des valeurs complexes, alors :

- a)  $\tilde{f}(t)$  est holomorphe (analytique) dans le demi-plan complexe  $\text{Im}(t) < 0$  ;
- b)  $\tilde{f}(t) \rightarrow 0$  quand  $\text{Im}(t) \rightarrow -\infty$ .

En d'autres termes,  $\tilde{f}(t)$  est prolongeable par une fonction holomorphe dans le demi-plan complexe inférieur et tend vers zéro quand  $\text{Im}(t) \rightarrow -\infty$ . (§4.2)

2.2. La relation de définition (3) montre que le s.a.  $\tilde{f}(t)$  associé à  $f(t)$  est le produit de convolution de  $f(t)$  par l'original  $S(t)$  de  $2H(\nu)$ . Compte tenu de la transformée de Fourier utilisée ( $\mathcal{F}^+$ ), on trouve que :

$$(4) \quad S(t) = \delta(t) + \frac{1}{i\pi} V_p \left( \frac{1}{t} \right)$$

et ainsi :

$$(5) \quad \tilde{f}(t) = S(t) * f(t) = \left( \delta(t) + \frac{1}{i\pi} V_p \left( \frac{1}{t} \right) \right) * f(t)$$

ou encore, puisque  $\delta(t) * f(t) = f(t)$  :

$$(6) \quad \tilde{f}(t) = f(t) + \frac{1}{i\pi} V_p \left( \frac{1}{t} \right) * f(t).$$

On obtient donc le signal analytique  $\tilde{f}(t)$  en ajoutant au signal  $f(t)$  une fonction imaginaire pure qui se déduit de  $f(t)$  par transformation de Hilbert, c'est-à-dire, à un coefficient multiplicatif près, par convolution avec  $V_p \left( \frac{1}{t} \right)$ . Ceci entraîne :

$$(7) \quad f(t) = \text{Re}(\tilde{f}(t)),$$

relation permettant de trouver le signal à partir de son signal analytique.

On peut vérifier que la partie imaginaire de  $\tilde{f}$ , c'est-à-dire  $-\frac{1}{\pi} V_p \left( \frac{1}{t} \right) * f$  a une transformée de Fourier dont la valeur s'obtient en multipliant  $\hat{f}(\nu)$  par  $\pm i$ , suivant le signe de  $\nu$ . C'est pourquoi on dit parfois que la partie imaginaire du s.a. représente un signal en quadrature avec  $f(t)$ .

2.3. Compte tenu des propriétés du produit de convolution, la relation (5) montre que le passage de  $f(t)$  à  $\tilde{f}(t)$  est une opération linéaire :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant deux constantes réelles, le signal analytique associé à  $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$  n'est autre que  $\lambda_1 \tilde{f}_1(t) + \lambda_2 \tilde{f}_2(t)$ .

2.4. Si  $T(t)$  est une distribution fixée et si  $T(t) * f(t)$  est une fonction que nous notons  $g(t)$ , alors le s.a. associé à  $g(t)$  est  $T(t) * \tilde{f}(t)$ .  
En effet :

$$\tilde{g}(t) = S(t) * (T(t) * f(t)) = T(t) * (S(t) * f(t)) = T(t) * \tilde{f}(t) \text{ (C.Q.F.D.)}$$

Il faut absolument retenir que :

$$(8) \quad g(t) = T(t) * f(t) \quad \text{implique} \quad \tilde{g}(t) = T(t) * \tilde{f}(t).$$

On en déduit des règles d'utilisation courante : En faisant  $T = \delta(t - a)$  on montre que le s.a. de la translatée du signal est égal à la translatée du signal analytique. De même, en faisant  $T = \delta^{(n)}(t)$ , on montre que, sous réserve d'existence, le s.a. associé à la dérivée d'ordre  $n$  est la dérivée d'ordre  $n$  du s.a. Plus généralement, si  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel à coefficients constants, le s.a. associé à  $\mathcal{L} f$  n'est autre que  $\mathcal{L} \tilde{f}$ .

### 3. CAS PARTICULIERS DES SIGNAUX SINUSOÏDAUX.

Déterminons le s.a.  $\tilde{u}(t)$  associé à la fonction  $u(t) = a \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi)$  de fréquence  $\nu_0$  ( $\nu_0 > 0$ ) et d'amplitude  $a$  ( $a > 0$ ). On a successivement :

$$(9) \quad u(t) = \frac{a}{2} \exp(i\varphi) \exp(i2\pi\nu_0 t) + \frac{a}{2} \exp(-i\varphi) \exp(-i2\pi\nu_0 t),$$

$$\hat{u}(\nu) = \frac{a}{2} \exp(i\varphi) \delta(\nu + \nu_0) + \frac{a}{2} \exp(-i\varphi) \delta(\nu - \nu_0),$$

$$\mathcal{F}^+(\tilde{u}) = 2H(\nu) \hat{u}(\nu) = a \exp(-i\varphi) \delta(\nu - \nu_0),$$

$$\tilde{u}(t) = a \exp(-i\varphi) \exp(-i2\pi\nu_0 t) = \mathcal{U} \exp(-i2\pi\nu_0 t) = \mathcal{U} \exp(-i\omega_0 t),$$

où  $\mathcal{U}$  est l'amplitude complexe associée à  $u(t)$  moyennant une dépendance temporelle en  $\exp(-i\omega_0 t)$ . Ainsi, le s.a. est le produit de l'amplitude complexe par  $\exp(-i2\pi\nu_0 t)$ . Ce résultat permet de retrouver immédiatement les propriétés de l'amplitude complexe (établies élémentairement à l'annexe 2) à partir de celles du signal analytique.

Par exemple, en écrivant que le s.a. associé à  $v(t) = du/dt$  n'est autre que  $d\tilde{u}/dt$ , on obtient immédiatement l'amplitude complexe  $\mathcal{V}$  associée à  $v(t)$  :

$$\mathcal{V} \exp(-i\omega_0 t) = \frac{d}{dt} (\mathcal{U} \exp(-i\omega_0 t)) = -i\omega_0 \mathcal{U} \exp(-i\omega_0 t),$$

ce qui montre que  $\mathcal{V} = -i\omega_0 \mathcal{U}$ . On retrouve que dériver la fonction revient à multiplier son amplitude complexe par  $-i\omega_0$ .

### 4. QUELQUES AUTRES EXEMPLES.

4.1.  $s(t) = m(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$  où  $m(t)$  est une fonction positive réelle décrivant une modulation d'amplitude pour un signal sinusoïdal de fréquence  $\nu_0$ .

Supposons que le support de  $\hat{m}(\nu)$  soit borné et contenu dans l'intervalle  $[-F, +F]$ . Si de plus  $\nu_0$  est supérieur à  $F$  :

$$\hat{s}(\nu) = \frac{1}{2} \hat{m}(\nu) * (\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)) = \frac{1}{2} \hat{m}(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2} \hat{m}(\nu + \nu_0)$$

$$2H(\nu) \hat{s}(\nu) = \hat{m}(\nu - \nu_0) = \hat{m}(\nu) * \delta(\nu - \nu_0)$$

et d'après (3) :

$$(10) \quad \tilde{s}(t) = m(t) \exp(-i2\pi \nu_0 t).$$

Comme en langage d'ingénieur, on dit que  $m(t)$  est "l'enveloppe" du signal étudié, on désigne parfois sous le nom d'enveloppe d'un signal quelconque, le graphe du module de son signal analytique.

4.2.  $s(t) = (1 + 4\pi^2 t^2)^{-1}$ . Cet exemple, qui a moins d'intérêt physique, peut être considéré comme un petit exercice de mathématiques très instructif :

On sait que :

$$\exp(-|t|) \begin{matrix} \xrightarrow{\mathcal{F}^-} \\ \xleftarrow{\mathcal{F}^+} \end{matrix} \frac{2}{1 + 4\pi^2 \nu^2}.$$

La transformée de Fourier ( $\mathcal{F}^+$ ) de  $s(t)$  est donc  $\frac{\exp(-|\nu|)}{2}$  et :

$$\tilde{s}(t) = \int_0^\infty \exp(-\nu) \exp(-2i\pi \nu t) d\nu = \frac{1}{1 + 2i\pi t}.$$

On constatera que  $\tilde{s}(t)$  possède un pôle (pour  $t = i/2\pi$ ) mais ce pôle est, comme prévu, situé dans le demi plan complexe  $\text{Im}(t) > 0$ .

4.3. Signal analytique et modulation à bande latérale unique (BLU). Les signaux  $s(t)$  et  $\tilde{s}(t)$  du § 4.1. ont des transformées de Fourier dont les supports sont respectivement contenus dans :

$$(\nu_0 - F, \nu_0 + F) \cup (-\nu_0 - F, -\nu_0 + F) \quad \text{et} \quad (\nu_0 - F, \nu_0 + F),$$

où le symbole  $\cup$  est celui qui est utilisé pour noter la réunion  $E \cup E'$  de deux ensembles  $E$  et  $E'$ .

En radioélectricité, la technique de "modulation en BLU" ([33], p.146), utilise le signal  $u(t)$  dont la transformée  $\hat{u}(\nu) = \hat{s}(\nu) h(\nu)$ ,  $h(\nu)$  étant la fonction égale à 0 sur chacun des intervalles  $(-\nu_0, -\nu_0 + F)$  et  $(\nu_0 - F, \nu_0)$  et à 1 ailleurs. On voit sans trop de peine, et en s'aidant éventuellement d'un dessin (fig.82), que la transformée de Fourier  $\tilde{u}(\nu)$  du signal analytique  $\tilde{u}(t)$  associé à  $u(t)$  n'est autre que  $H(\nu - \nu_0) \hat{m}(\nu - \nu_0)$ .

$$\text{Ainsi : } \tilde{u}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^+} \tilde{u} = \delta(\nu - \nu_0) * (H(\nu) \hat{m}(\nu)) = \delta(\nu - \nu_0) * \frac{1}{2} \hat{m}(\nu),$$

ce qui montre que :

$$(11) \quad \tilde{u}(t) = \frac{1}{2} \tilde{m}(t) \exp(-2i\pi \nu_0 t).$$

En conclusion, la comparaison de (10) et (11) montre qu'en raisonnant sur les signaux analytiques, le passage de la modulation d'amplitude à la "modulation en BLU" revient (à un coefficient multiplicatif près) à remplacer le "modulant"  $m(t)$  par son signal analytique  $\tilde{m}(t)$ . Ceci montre l'intérêt du s.a. dans un cours sur la modulation des signaux sinusoïdaux.



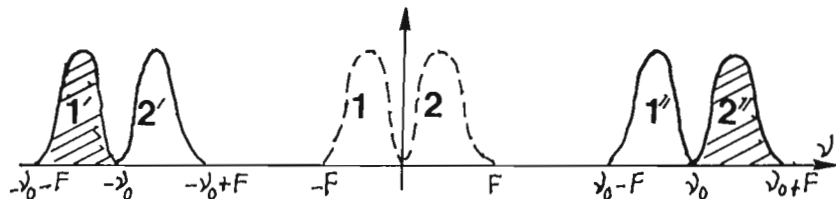


Figure 82. On a supposé  $m(t)$  paire pour que  $\hat{m}(\nu)$  soit réelle et paire. Le graphe de  $\frac{1}{2} \hat{m}(\nu)$  est en pointillé ; celui de  $\hat{s}(\nu)$ , qui est en trait plein, se compose des quatre "bosses" 1', 2', 1'', 2''. Le graphe de  $\hat{u}(\nu) = h(\nu)\hat{s}(\nu)$  est formé des deux bosses 1' et 2'' qui ont été hachurées. Le graphe de  $\frac{1}{2} \hat{u}(\nu) = H(\nu)\hat{u}(\nu)$  est formé de la seule bosse 2'' qui est aussi le graphe de  $H(\nu - \nu_0)\hat{m}(\nu - \nu_0)/2$ . On a donc bien  $\hat{u}(\nu) = H(\nu - \nu_0) \hat{m}(\nu - \nu_0)$ .

### 5. EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Certains résultats établis dans ce paragraphe permettent de raccourcir quelques démonstrations délicates du cours (voir par exemple le chap. VI).

5.1. Soit  $f(t)$  une fonction réelle,  $\hat{f}(\nu)$  sa transformée de Fourier et  $\tilde{f}(t)$  son signal analytique. On suppose que  $f$  et  $tf$  sont sommables et de carré sommable, et que  $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$ .

On pose :

$$a = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t f \bar{f} dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f \bar{f} dt}, \quad b = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t \tilde{f} \bar{\tilde{f}} dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f} \bar{\tilde{f}} dt}.$$

Le réel  $a$  (resp.  $b$ ) peut être interprété comme le centre de gravité du support de  $f$  (resp.  $\tilde{f}$ ) en adoptant  $f \bar{f}$  (resp.  $\tilde{f} \bar{\tilde{f}}$ ) pour densité linéique. Si  $f(t)$  ne prend des valeurs notables que sur un court intervalle,  $a$  représente "l'époque" à laquelle le signal se manifeste. Puisque  $f$  est réelle, la barre figurant au-dessus de  $f$  dans la définition de  $a$ , est inutile ; elle a été conservée pour que  $a$  et  $b$  soient définis de façon analogue.

On se propose de montrer que  $a = b$  ou, autrement dit, que le centre de gravité du support de  $f$  peut être déterminé en utilisant indifféremment comme densité  $|f|^2$  ou  $|\tilde{f}|^2$ .

Solution : Posons  $\tilde{f}(t) = F(t)$  et appliquons la formule de Parseval-Plancherel traduisant la conservation de la norme dans une transformation de Fourier :

$$\frac{a}{b} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{f}}{d\nu} \bar{\hat{f}} \, d\nu}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|^2 \, d\nu} \times \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(\nu)|^2 \, d\nu}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{F}}{d\nu} \bar{\hat{F}} \, d\nu}.$$

Or :  $\hat{F}(\nu) = 2H(\nu) \hat{f}(\nu)$ ,

$$\frac{d\hat{F}}{d\nu}(\nu) = 2\delta(\nu)\hat{f}(0) + 2H(\nu) \frac{d\hat{f}}{d\nu}(\nu) = 2H(\nu) \frac{d\hat{f}}{d\nu}(\nu) \quad (\text{puisque } \hat{f}(0) = 0).$$

Ainsi :

$$\frac{a}{b} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{f}}{d\nu} \bar{\hat{f}} \, d\nu}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|^2 \, d\nu} \times \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|^2 \, d\nu}{4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{f}}{d\nu} \bar{\hat{f}} \, d\nu}.$$

Le calcul se termine en utilisant la symétrie hermitienne de  $\hat{f}$ . D'après (2), la partie réelle  $\hat{f}_1$  de  $\hat{f}$  est paire, sa partie imaginaire  $\hat{f}_2$  est impaire, et  $\hat{f}(\nu) \bar{\hat{f}}(\nu)$  est paire. De plus, que la partie réelle de  $\frac{d\hat{f}}{d\nu} \bar{\hat{f}}$  est impaire, tandis que sa partie imaginaire est paire. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{d\nu} \bar{\hat{f}} &= \left( \frac{df_1}{d\nu} + i \frac{df_2}{d\nu} \right) (f_1 - if_2) = \left( f_1 \frac{df_1}{d\nu} + f_2 \frac{df_2}{d\nu} \right) + i \left( f_1 \frac{df_2}{d\nu} - f_2 \frac{df_1}{d\nu} \right) \\ &= I(\nu) + iP(\nu), \quad \text{avec } I(\nu) = -I(-\nu) \quad \text{et} \quad P(\nu) = P(-\nu). \end{aligned}$$

Compte tenu de ces résultats :

$$\frac{a}{b} = \frac{2i \int_0^{\infty} P(\nu) \, d\nu}{2 \int_0^{\infty} \hat{f} \bar{\hat{f}} \, d\nu} \times \frac{\int_0^{\infty} \hat{f} \bar{\hat{f}} \, d\nu}{\int_0^{\infty} I(\nu) \, d\nu + i \int_0^{\infty} P(\nu) \, d\nu}.$$

Mais puisque la fonction  $f$  est sommable, elle s'annule à l'infini et, par suite,  $\int_0^{\infty} I(\nu) \, d\nu = \int_0^{\infty} \frac{d}{d\nu} \left( \frac{1}{2} |\hat{f}|^2 \right) \, d\nu = 0$ . Finalement,  $a/b = 1$  (C.Q.F.D.).

N.B. : On établit par un raisonnement analogue l'égalité :

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f \bar{f} \, dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f \bar{f} \, dt} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \tilde{f} \bar{\tilde{f}} \, dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f} \bar{\tilde{f}} \, dt}.$$

Ici chacun des membres s'interpréterait en mécanique comme le quotient d'un moment d'inertie par une masse (rayon de giration).

5.2. Montrer que la fonction d'autocorrélation [7] du signal analytique s'obtient en multipliant par 2 le signal analytique associé à la fonction d'autocorrélation du signal réel.

On raisonne sur les transformées de Fourier en notant que  $H(\nu)H(\nu) = H(\nu)$ . Avec les notations de notre cours de mathématiques ([7], IX), on arrivera à :  $\tilde{C}_f = \frac{1}{2} C_{\tilde{f}}$ .

## Annexe 4

# *Notions sur les fonctions de Bessel*

### 1. L'EQUATION DE BESSEL.

On appelle ainsi l'équation différentielle (1) où  $u$  est une fonction de la variable réelle  $x$  et  $\nu$  un paramètre que nous supposons réel :

$$(1) \quad u'' + \frac{1}{x} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0 .$$

En posant :

$$(2) \quad u = x^\nu v ,$$

on est conduit à :

$$(1') \quad xv'' + (2\nu + 1)v' + xv = 0 .$$

Cette nouvelle équation est élémentaire pour  $\nu = -1/2$  et, dans ces conditions, l'équation de Bessel a pour solution générale :

$$(3) \quad u(x) = \frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}} .$$

On retiendra que, plus généralement, l'équation (1') admet toujours une solution  $v(x)$  de la forme :

$$(4) \quad v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots$$

On vérifie en effet qu'une telle série entière permet de satisfaire (1') pourvu que les  $a_k$  vérifient la relation de récurrence :

$$(5) \quad a_{k-2} + k(k + 2\nu)a_k = 0 , \quad a_0 \text{ arbitraire, } a_1 = 0 .$$

On achève de déterminer  $v(x)$  en fixant  $a_0$ . Lorsque  $\nu$  n'est pas un entier négatif, on prend  $a_0 = 1/(2^\nu \Gamma(\nu + 1))$  et la solution de (1) associée à  $v$  par (2) s'appelle fonction de Bessel d'ordre  $\nu$ . On la note  $J_\nu(x)$  et, compte tenu de (5), on arrive facilement à :

$$(6) \quad J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} .$$

Dans cette formule,  $\Gamma$  désigne la fonction eulérienne dite fonction gamma [7]. On peut s'étonner du choix de  $a_0$  mais il apparaîtra judicieux à l'usage (27). Si  $\nu$  est un entier négatif, on définit encore  $J_\nu$  par (6), en con-

venant de considérer  $1/\Gamma(m)$  comme nul pour  $m$  entier négatif ou nul.

Il se trouve que la fonction  $J_{-\nu}(x)$  obtenue en changeant  $\nu$  en  $-\nu$  dans le second membre de (6) vérifie aussi l'équation de Bessel (1). Si  $\nu$  n'est pas entier,  $J_{\nu}(x)$  et  $J_{-\nu}(x)$  sont deux solutions linéairement indépendantes et la solution générale est alors de la forme :

$$(7) \quad AJ_{\nu}(x) + BJ_{-\nu}(x)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires.

Reste à étudier le cas fréquemment rencontré où  $\nu$  est un entier  $n$ . Il résulte alors des propriétés de la fonction  $\Gamma$  que :

$$(8) \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) .$$

C'est dire que  $J_n$  et  $J_{-n}$  ne sont plus des solutions linéairement indépendantes de (1). Il faut disposer d'une autre solution particulière. Elle est fournie par la fonction de Neumann dont la définition est une affaire délicate. Si  $\nu$  n'est pas entier, la combinaison linéaire :

$$(9) \quad N_{\nu}(x) = \frac{\cos(\pi \nu) J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi \nu)}$$

est, d'après ce qui précède, solution de (1). Lorsque  $\nu$  tend vers un entier  $n$ , on démontre que  $N_{\nu}(x)$  tend vers une limite  $N_n(x)$  qui est une solution de (1) linéairement indépendante de  $J_n(x)$ . C'est cette limite que l'on appelle fonction de Neumann d'ordre  $n$ . On établit que  $N_n(x)$  et  $N_{-n}(x)$  sont liées par la même relation que  $J_n(x)$  et  $J_{-n}(x)$  :

$$(10) \quad N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x) .$$

En résumé, si  $\nu$  est un entier  $n$ , il faut retenir que la solution générale de l'équation de Bessel peut s'écrire sous la forme :

$$(11) \quad A J_n(x) + B N_n(x) .$$

Quel que soit  $\nu$ , et notamment pour  $\nu$  entier, on peut aussi écrire la solution générale de l'équation de Bessel (1) sous forme d'une combinaison linéaire des fonctions de Hankel  $H_{\nu}^{+}$  et  $H_{\nu}^{-}$  qui sont elles-mêmes des combinaisons linéaires de  ~~$J_{\nu}$  et  $J_{-\nu}$~~ . Par définition :

$$(12) \quad H_{\nu}^{+} = J_{\nu} + i N_{\nu} ,$$

$$(13) \quad H_{\nu}^{-} = J_{\nu} - i N_{\nu}$$

et évidemment, si  $n$  est entier :

$$(14) \quad H_n^{+}(x) = (-1)^n H_{-n}^{+}(x) ,$$

$$(14') \quad H_n^{-}(x) = (-1)^n H_{-n}^{-}(x) .$$

On retiendra aisément (12) et (13) en notant que si on remplace respectivement  $H_{\nu}^{+}(x)$ ,  $H_{\nu}^{-}(x)$ ,  $J_{\nu}(x)$  et  $N_{\nu}(x)$  par  $\exp(ix)$ ,  $\exp(-ix)$ ,  $\cos x$  et  $\sin x$ , on retrouve des formules bien connues.

## 2. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE BESSEL, DE NEUMANN ET DE HANKEL.

On a beaucoup écrit sur cette question et le lecteur intéressé n'aura aucun mal à découvrir quelque volumineux traité. Nous donnerons seulement

quelques résultats dont la connaissance paraît indispensable.

2.1. Parité. Il résulte de (6) que, pour  $n$  entier, tous les termes de la série associée à  $J_n$  ont même parité que  $n$ .  $J_0, J_2 \dots J_{2p}$  sont des fonctions paires,  $J_1, J_3, \dots J_{2p+1}$  sont des fonctions impaires.

2.2. Comportement à l'origine. Pour  $\nu$  réel positif, les fonctions de Bessel  $J_\nu(x)$  restent bornées :  $J_0(0) = 1$  et, si  $\nu > 0$ ,  $J_\nu$  se comporte comme  $x^\nu$  au voisinage de zéro.

Au contraire, les fonctions de Neumann (et par suite de Hankel) ne sont pas bornées : pour  $\nu > 0$ ,  $N_\nu(x)$  se comporte comme  $1/x^\nu$  et  $N_0(x)$  a un comportement logarithmique :  $N_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln(x)$  quand  $x \rightarrow 0$ .

2.3. Comportement à l'infini ( $x \rightarrow +\infty$ ). Il est facile de vérifier que  $u_\nu(x) = \sqrt{x} J_\nu(x)$  est solution de l'équation différentielle :

$$(15) \quad u'' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) u = 0.$$

On conçoit donc que  $u_\nu(x)$  ait l'allure d'une fonction trigonométrique quand  $x \gg |\nu|$ . Plus précisément, on démontre que :

$$(16) \quad J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu + 1) \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

On en déduit le comportement des fonctions de Neumann et de Hankel :

$$(17) \quad N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - (2\nu + 1) \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

$$(18) \quad H_\nu^+(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(i\left(x - (2\nu + 1) \frac{\pi}{4}\right)\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

$$(18') \quad H_\nu^-(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(-i\left(x - (2\nu + 1) \frac{\pi}{4}\right)\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Rappelons que la notation  $g(x) = O(f(x))$  signifie que  $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|$  reste borné quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Pratiquement, les fonctions élémentaires qui figurent au membre de droite des formules (16-18') peuvent être utilisées pour obtenir des valeurs approchées. Comme nous l'avons déjà signalé,  $J_\nu$  est une fonction élémentaire pour  $\nu = 1/2$ . On a alors exactement :

$$(19) \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Il est bon de savoir que, comme on peut l'établir à partir des formules données plus loin (§ 2.8), toute fonction de Bessel d'indice demi-entier peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. Par exemple :

$$(20) \quad J_{3/2}(x) = -\sqrt{x} \frac{d}{dx} J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (\sin x - x \cos x).$$

2.4. Allure des graphes. On dit parfois que les fonctions de Bessel peuvent être utilisées pour décrire un phénomène "approximativement périodique" et amorti, comme le laisse prévoir l'équation (15). A titre documentaire, on trouvera quelques courbes sur la figure 83.

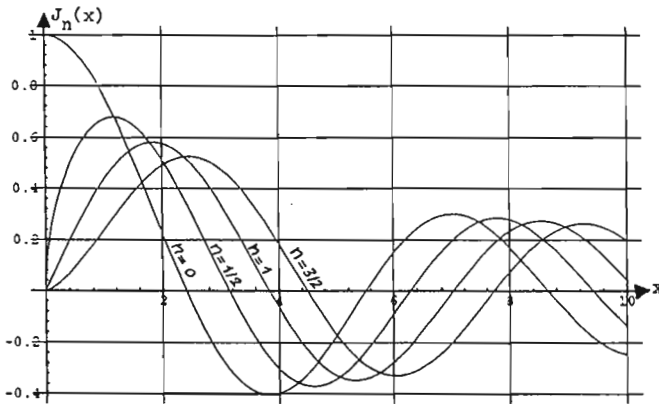


Figure 83. Courbes représentatives de  $J_0(x)$ ,  $J_{1/2}(x)$ ,  $J_1(x)$  et  $J_{3/2}(x)$  tracées avec le logiciel Mathematica.

Pour les fonctions de Neumann (fig.84), l'axe des ordonnées est une asymptote "verticale".

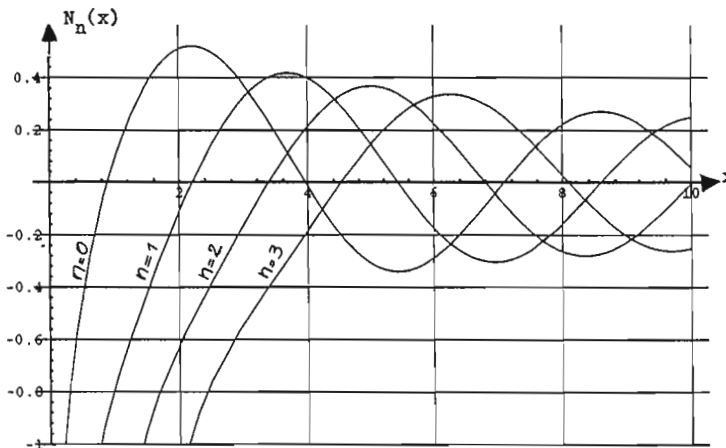


Figure 84. Courbes représentatives de  $N_0(x)$ ,  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  et  $N_3(x)$  tracées avec le logiciel Mathematica.

2.5. **"Zéros" des fonctions de Bessel.** On démontre que pour  $x$  suffisamment grand, les zéros de  $J_\nu$  (c'est-à-dire les valeurs de  $x$  qui annulent  $J_\nu(x)$ ) sont approximativement les zéros de  $\cos(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4})$ . On démontre que si  $\nu > -1$ , tous les zéros de  $J_\nu(x)$  sont réels. Les tableaux qui suivent donnent les zéros de  $J_n$  et  $J'_n$  pour cinq valeurs entières de  $n$  ( $n=0, 1, \dots, 4$ ).

n					
0	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931
1	3.832	7.016	10.173	13.324	16.471
2	5.136	8.417	11.620	14.796	17.960
3	6.380	9.791	13.015	16.223	19.409
4	7.588	11.065	14.372	17.616	20.827

Tableau 11. Zéros des fonctions de Bessel  $J_n$ . Sur la ligne repérée par  $n$ , on trouve les valeurs approchées des cinq premiers zéros de  $J_n$ .

n					
0	0	3.832	7.016	10.173	13.324
1	1.841	5.331	8.536	11.706	14.864
2	3.054	6.706	9.969	13.170	16.348
3	4.201	8.015	11.346	14.586	17.789
4	5.317	9.282	12.682	15.964	19.196

Tableau 12. Zéros des dérivées des fonctions de Bessel  $J'_n$ . Sur la ligne repérée par  $n$ , on trouve les valeurs approximatives des cinq premiers zéros de  $J'_n$ .

2.6. **La fonction  $H_0^+(x)$  et l'équation de Helmholtz.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , si  $r$  désigne la distance d'un point du plan à l'origine, il apparaît que la fonction  $H_0^+(kr)$  est localement sommable (par suite de son comportement logarithmique à l'origine). Elle possède donc, au sens des distributions un Laplacien dont le calcul se fait par les mêmes méthodes [7] que celles qui permettent de calculer  $\Delta\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)$ . Il suffit de connaître l'équivalent de  $H_0(kr)$  au voisinage de l'origine. On arrive à :

$$(21) \quad \Delta H_0^+(kr) = -k^2 H_0^+(kr) + 4i\delta(\vec{r})$$

où  $\delta(\vec{r})$  est la distribution de Dirac dans  $\mathbb{R}^2$ . Autrement dit, la fonction  $g(r) = \frac{1}{4i} H_0^+(kr)$  est une solution élémentaire de l'équation de Helmholtz :

$$(22) \quad \Delta g + k^2 g = \delta, \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

On remarquera, en utilisant (18), que cette fonction vérifie les conditions suivantes, dites conditions de rayonnement de Sommerfeld :

(23) quand  $r \rightarrow \infty$   $\sqrt{r} g$  reste borné et  $\lim \sqrt{r} \left( \frac{dg}{dr} - ikg \right) = 0$ .

2.7. L'équation de Bessel en Physique. Une grandeur physique associée à chacun des points d'un plan, peut être représentée par une fonction des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ . Cette fonction  $f(r, \theta)$  périodique en  $\theta$  (période  $2\pi$ ) et supposée assez régulière, est développable en série de Fourier :

$$(24) \quad f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(r) \exp(in\theta).$$

Si  $f$  vérifie l'équation de Helmholtz, on obtient immédiatement, mais formellement :

$$(25) \quad \sum_n \left( u_n'' + \frac{1}{r} u_n' + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) u_n \right) \exp(in\theta) = 0,$$

ce qui impose :

$$(26) \quad \forall n \in \mathbb{Z} : u_n'' + \frac{1}{r} u_n' + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) u_n = 0.$$

Alors, posant  $u_n(r) = v_n(kr)$ , il apparait que  $v_n$  est solution de l'équation de Bessel. Appliquant ces considérations à la fonction  $\exp(ir \sin \theta)$ , c'est-à-dire à l'expression de  $\exp(iy)$  en coordonnées polaires, on peut donc affirmer que son  $n$  ième coefficient de Fourier  $u_n(r)$  est solution de (26) où l'on a fait  $k=1$ . Il se trouve que, compte tenu du choix de  $a_0$  (§1), c'est exactement  $J_n(r)$  :

$$(27) \quad \exp(ir \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(r) \exp(in\theta).$$

Bien qu'elle n'ait pas été complètement justifiée, cette formule doit absolument être connue, compte tenu de son importance. On la donne parfois sous une forme équivalente en posant  $z = \exp(i\theta)$  et en remplaçant  $\sin\theta$  par  $\frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)$ . Il vient :

$$(28) \quad \exp\left(\frac{r}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(r) z^n.$$

Le second membre de (27) n'est autre que le développement en série de Laurent [7], au voisinage de l'origine, de la fonction  $\exp\left(\frac{r}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)\right)$ . Cette dernière est dite fonction génératrice des fonctions de Bessel d'ordre entier.

2.8. Représentations intégrales. En ce reportant à l'expression des coefficients de la série de Laurent [7], on peut déduire de (28) une représentation intégrale de  $J_n(r)$  :



$$(29) \quad J_n(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \exp\left(\frac{r}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

où  $C$  est un cercle, centré en 0 et orienté positivement.

De même, la formule donnant les coefficients de Fourier conduit à :

$$(30) \quad J_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp(i(r \sin \theta - n\theta)) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(r \sin \theta - n\theta) d\theta.$$

D'autres représentations intégrales des fonctions de Bessel, de Neumann et de Hankel sont fréquemment utilisées et certains auteurs définissent même ces fonctions à partir de telles représentations. On pourra par exemple se reporter au livre de L. Schwartz pour établir la formule suivante, valable pour  $\nu + \frac{1}{2} > 0$ , et qui présente  $J_\nu(x)$  comme le produit d'un monôme par la transformée de Fourier d'une fonction à support borné.

$$(31) \quad J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \exp(-itx) dt,$$

2.9. Formules diverses. A l'aide de la série (6), ou des autres propriétés et définitions, on peut établir une impressionnante collection de formules. Van Bladel en cite une cinquantaine dans son traité sur les champs électromagnétiques [8]. Nous serons beaucoup plus brefs. L'important semble de retenir que, si  $R_n = aJ_n + bN_n$  ( $a$  et  $b$  constantes indépendantes de  $n$ ), il existe entre  $R_{n-1}$ ,  $R_n$  et  $R_{n+1}$  les relations (32,33) qui montrent en particulier que les dérivées des fonctions de Bessel sont encore des fonctions de Bessel.

$$(32) \quad R_{n-1}(x) - R_{n+1}(x) = 2 R_n'(x),$$

$$(33) \quad R_{n-1}(x) + R_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} R_n(x).$$

En prenant  $a = 1$ ,  $b = 0$  et  $n = 0$ , on trouve, par exemple à partir de (32) :

$$(34) \quad J_1(x) = -J_0'(x).$$

Signalons pour terminer, un lien avec la transformation de Laplace :

$$(35) \quad H(t) \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} \frac{\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{p^2+1}\right)^\nu.$$

En particulier :

$$(36) \quad H(t) J_0(t) \xrightarrow{\text{Laplace}} \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

### 3. EXERCICES CONSEILLÉS

Il s'agit d'établir quelques formules souvent utilisées lors de l'étude de la diffraction par une tige (XV).

**Exercice 1.** Partant de la définition de  $H_n^+$  et  $H_n^-$  (12,13) vérifier que :

$$(38) \quad \text{Im}(H_n^- \frac{d}{dx} H_n^+) = J_n \frac{dN_n}{dx} - N_n \frac{dJ_n}{dx} = -i (J_n \frac{dH_n^+}{dx} - H_n^+ \frac{dJ_n}{dx})$$

**Exercice 2.** Montrer que :

$$(39) \quad J_n \frac{dN_n}{dx} - N_n \frac{dJ_n}{dx} = \frac{2}{\pi x} .$$

Omettant l'indice  $n$ , écrivons que  $J$  et  $N$  vérifient l'équation de Bessel :

$$J'' + \frac{1}{x} J' + (1 - \frac{n^2}{x^2}) J = 0, \quad N'' + \frac{1}{x} N' + (1 - \frac{n^2}{x^2}) N = 0.$$

Par l'élimination de  $(1 - (n^2/x^2))JN$ , on en déduit que :

$$\begin{aligned} NJ'' - JN'' + \frac{1}{x} (NJ' - JN') &= 0 \\ x(NJ' - JN')' + (NJ' - JN') &= 0 \\ x(NJ' - JN') &= C_n. \end{aligned}$$

Reste à trouver la valeur de la constante  $C_n$ . Pour cela, on peut faire disparaître les dérivées grâce à (32), puis faire tendre  $x$  vers l'infini, en utilisant le comportement asymptotique de  $J_n$  et  $N_n$  (16,17). Il faut d'abord établir, par des manipulations trigonométriques, que, si  $x \rightarrow +\infty$  :

$$N_{n-1}(x) - N_{n+1}(x) = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - (2n+1)\frac{\pi}{4}) + o(\frac{1}{x^{3/2}})$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = -2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - (2n+1)\frac{\pi}{4}) + o(\frac{1}{x^{3/2}})$$

Le reste est une simple affaire de calcul si l'on a bien compris la signification de  $o(x^{-3/2})$ . On trouve finalement  $C_n = 2/\pi$  (indépendamment de  $n$ ).

**Exercice 3.** Soient  $M(r, \theta)$  et  $M_0(r_0, \theta_0)$  deux points repérés par leurs coordonnées polaires. Si  $R$  représente leur distance ( $R = M_0M$ ) et si  $r > r_0 > 0$ , On a :

$$(40) \quad H_0^+(kR) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(im(\theta - \theta_0)) J_m(kr_0) H_m^+(kr).$$

La démonstration de cette formule pourra être conduite comme suit :

a) Si  $\Gamma_0$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r_0$ , vérifier que dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi r_0} \exp(in\theta_0) \exp(-in\theta) \delta_{\Gamma_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi r_0} \exp(-in\theta_0) \exp(in\theta) \delta_{\Gamma_0}.$$

On rappelle [7] que les distributions  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  et  $\exp(-in\theta) \delta_{\Gamma_0}$  sont définies par :

$$\forall \varphi(r, \theta) \in \mathcal{D}, \quad \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \varphi \rangle = \varphi(r_0, \theta_0)$$

$$\forall \varphi(r, \theta) \in \mathcal{D}, \quad \langle \exp(-in\theta) \delta_{\Gamma_0}, \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} \exp(-in\theta) \varphi(r_0, \theta) r_0 d\theta$$

Il faut donc vérifier que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \varphi(r_0, \theta_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi r_0} \exp(in\theta_0) \int_0^{2\pi} \exp(-in\theta) \varphi(r_0, \theta) r_0 d\theta$$

Ceci résulte immédiatement de la possibilité de représenter  $\varphi(r_0, \theta)$  par une série de Fourier en  $\theta$  :

$$\varphi(r_0, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r_0, \theta) \exp(-im\theta) d\theta \right) \exp(im\theta)$$

b) Se rappeler que  $H_0^+(kR)$  est la seule fonction vérifiant la condition d'onde sortante et l'équation :

$$\Delta u + k^2 u = 4i\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \sum_n \frac{2i}{\pi r_0} \exp(-in\theta_0) \exp(in\theta) \delta_{\Gamma_0}$$

Ainsi, si  $W_n(r, \theta)$  est l'unique fonction qui vérifie la condition d'onde sortante et l'équation :

$$\Delta W_n + k^2 W_n = \frac{2i}{\pi r_0} (\exp(+in\theta) \delta_{\Gamma_0})$$

on a :

$$H_0^+(kR) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_n \exp(-in\theta_0).$$

Cherchons  $W_n(r, \theta)$  sous la forme  $R_n(r) \exp(in\theta)$ . D'après le paragraphe 2.7,  $R_n$  est solution de l'équation de Bessel dans le complémentaire du cercle  $\Gamma_0$ . On a donc :

$$R_n(r) = a_n J_n(kr) \text{ si } r < r_0, \quad \text{et } R_n(r) = b_n H_n^+(kr) \text{ si } r > r_0$$

car  $R_n$  doit être bornée à l'intérieur de  $\Gamma_0$  et vérifier une condition d'onde sortante. La valeur des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  résulte de considérations classiques en théorie des distributions. Compte tenu de la forme du second membre de l'équation aux dérivées partielles qu'elle vérifie :

.  $W_n$  est continue,

. le saut de sa dérivée normale  $\partial W_n / \partial r$  sur le cercle  $\Gamma_0$  est  $(2i/\pi r_0) \exp(+in\theta)$ .

Utilisant des résultats déjà établis, on est conduit à :

$$a_n = H_n^+(kr_0) \quad b_n = J_n(kr_0)$$

et finalement, si  $R$  est la distance entre les deux points  $M_0(r_0, \theta_0)$  et  $M(r, \theta)$  :

$$(41) \quad H_0^+(kR) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(in(\theta - \theta_0)) J_n(kr_0) H_n^+(kr) & \text{pour } r \geq r_0 \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(in(\theta - \theta_0)) J_n(kr) H_n^+(kr_0) & \text{pour } r \leq r_0 \end{cases}$$

Cette formule compliquée est parfois très utile dans les problèmes de diffraction (XVI, §3) et son existence doit être connue.

4. COMMENTAIRE.

On désigne parfois sous le nom de fonctions de Bessel toute solution de l'équation de Bessel (1). Dans ces conditions, les fonctions de Neumann et de Hankel sont qualifiées de fonctions de Bessel, au même titre que les  $J_n$  qui sont alors appelées fonctions de Bessel régulières. Les fonctions de Bessel (au sens large), qui sont depuis longtemps tabulées, peuvent être aujourd'hui calculées sur ordinateur à l'aide de programmes ayant fait leurs preuves. Faut-il pour autant ne plus les faire figurer aux programmes de nos maîtrises ? Cette attitude extrême serait, sans aucun doute, peu raisonnable. Supprime-t-on l'enseignement des fonctions trigonométriques sous prétexte que nos calculettes fournissent instantanément la valeur d'un cosinus ou d'un sinus ? L'enseignement des "fonctions spéciales" doit certes être réduit, mais il semble nécessaire de lui consacrer un minimum de temps, ne serait-ce que pour dégager quelques résultats théoriques sans l'aide desquels il serait souvent impossible de mener à bien un calcul numérique. C'est dans cet esprit que nous avons essayé de rédiger cette annexe qui est peut être un peu trop succincte. Le lecteur doit au moins savoir, en plus, que de nombreux résultats établis ici pour  $x$  et  $\nu$  réels restent vrais pour  $x$  et  $\nu$  complexes. En électromagnétisme,  $\nu$  est généralement réel, mais il n'est pas rare de manipuler des fonctions de Bessel d'une variable complexe (XII). On a même donné un nom à certaines d'entre elles. Par exemple les fonctions de Bessel modifiées  $I_\nu$  et  $K_\nu$ , ne sont autres que des fonctions de Bessel d'argument imaginaire pur :

$$(37) \quad I_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad (37') \quad K_\nu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^+(ix)$$

Grâce au choix des coefficients figurant dans les relations de définitions, ces fonctions sont réelles pour  $\nu$  et  $x$  réels. On a parfois besoin de connaître leur comportement pour  $x$  tendant vers 0 ou  $+\infty$  ; il se déduit de celui des fonctions de Bessel (§ 2) en changeant  $x$  en  $ix$ . Il faut retenir que  $I_\nu$  est régulier à l'origine et que  $K_\nu$  tend vers zéro à l'infini.

# Bibliographie

De nombreuses références sont évidemment rédigées en anglais. C'est pour en faciliter la compréhension que, tout au long de l'ouvrage, nous avons donné la traduction des principaux termes techniques rencontrés.

1. J. BASS, *Cours de Mathématiques*, tome I, Masson, 1961.
2. J. BASS, *Cours de Mathématiques*, tome II, Masson, 1961.
3. J. BASS, *Cours de Mathématiques*, tome III, Masson, 1971.
4. O.D. KELLOG, *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag, 1967.
5. J.D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, 2<sup>e</sup> édition, J. Wiley, 1975.
6. Ch. VASSALO, *Électromagnétisme classique dans la matière*, Dunod, 1980.
7. R. PETTT, *L'Outil mathématique*, 3<sup>e</sup> édition, Masson, 1991.
8. J. VAN BLADEL, *Electromagnetic Fields*, 2<sup>e</sup> édition, Mc-Graw-Hill, 1975.
9. M. KLINE and I.W. KAY, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*, Interscience Publishers, 1965.
10. G. ROOSEN, *Canadian Journal of Physics*, 1979, vol. 57, n<sup>o</sup> 9, pp. 1260-1279.
11. E. ROUBINE et J.Ch. BOLOMEY, *Antennes*, Masson, 1978.
12. G. BONNET, *Annales des Télécommunications*, 1983, t. 38, n<sup>o</sup> 9-10, pp. 345-366.
13. G. BONNET, *Annales des Télécommunications*, 1983, t. 38, n<sup>o</sup> 11-12, pp. 471-487.
14. G. BRUHAT, *Cours de Physique générale-Optique*, Édition révisée par A. KASTLER, Masson, 1954.
15. M. BORN and E. WOLF, *Principles of Optics*, 3<sup>e</sup> édition, Pergamon Press, 1965.
16. L. CHAMBADAL, *Dictionnaire de Mathématiques*, Hachette, 1978.
17. M. NEVIERE, « The Homogeneous Problem » dans *Electromagnetic Theory of Gratings*, edited by R. PETTT, Springer-Verlag, 1980.
18. D. MAYSTRE, « General Study of Grating Anomalies From Electromagnetic Surface Modes » dans *Electromagnetic Surface Modes*, edited by A. BOARDMAN, John Wiley & Sons, 1982.
19. G. BOUCHITTE and R. PETTT, « On the concepts of a perfectly conducting material and of a perfectly conducting and infinitely thin screen », *Radio Science*, vol. 24, n<sup>o</sup> 1, 1989, pp. 13-26.
20. G. GOUDET et P. CHAVANCE, *Ondes Centimétriques, lignes, circuits, antennes*, Éditions Chiron, 1955.
21. F. GARDIOL, *Hyperfréquences*, Dunod, 1987.
22. Ch. VASSALO, *Théorie des guides d'ondes électromagnétiques*, tome I, Eyrolles, 1985.
23. S. BONNET, « Analyse mathématique de la propagation de modes guidés dans les fibres optiques », Thèse de Doctorat, Paris VI, 20 avril 1988.
24. D. MARCUSE, *Light Transmission Optics*, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
25. D.S. JONES, *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press, 1964.
26. D. COLTON and R. KRESS, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, John Wiley & Sons, 1983.

27. D. MAYSTRE et P. VINCENT, *Optics Communications*, vol. 5, n° 5, 1972, pp. 327-330.
28. R. KING and TAI TSUN WU, *The Scattering and diffraction of waves*, Harward University Press, 1959.
29. R. PETIT, *Electromagnetic Theory of Gratings, Topics in Current Physics*, n° 22, Springer-Verlag, 1980.
30. H. IKUNO, K. YASUURA, *I.E.E.E. Trans.*, AP-24, 1973, p. 657.
31. J.P. HUGONIN, R. PETIT, M. CADILHAC, *Journal of the Optical Society of America*, 1981, vol. 71, n° 5, pp. 593-598.
32. J.P. NOUGIER, *Méthodes de calcul numérique*, 2<sup>e</sup> édition, Masson, 1983.
33. E. ROUBINE, *Introduction à la théorie de la communication*, tome I, Masson, 1970.
34. J. VAN BLADEL, *Singular Electromagnetic Fields and Sources*, Clarenton Press, Oxford, 1991.

# Index alphabétique

- Abaque de Smith, 224, 227  
Aimantation, 19  
Amplitude complexe, 322-325  
Angle de Brewster, 143  
Angle de perte, 99, 116  
Angle de réfraction limite, 141  
Antenne doublet accordé, 270  
Antenne filiforme rectiligne, 269  
Antennes (formule des), 268
- Biot et Savart (formule de), 18  
Boucle de courant, 18, 46  
Brewster (incidence de), 142
- Causalité (principe de), 42  
Centre d'onde, 124  
Circuits (théorie des), 212-215  
Coaxial, 199  
Cœur (d'une fibre), 256  
Coefficients de Fresnel, 137  
Coefficient de réflexion (pôles et zéros), 150-155  
Composante axiale, 172  
Composante transversale, 172  
Conditions aux limites, 166  
Condition d'onde sortante, 83, 282, 298  
Condition de rayonnement de Sommerfeld, 84, 85  
Conductivité, 26, 44, 61  
Conservation de la charge, 30, 74, 92  
Conservation de l'énergie, 144, 307  
Conservation de la masse, 92  
Constante de propagation, 169  
Constante de propagation normalisée, 234, 239  
Couche anti-reflet, 160  
Couplage, 244-248, 316  
Couplage (longueur de), 248  
Courant superficiel, 166  
Courbure des rayons lumineux, 90  
Champ diffracté, 282, 297
- Dalembertien (opérateur), 77  
Dégénérescence, 185, 192, 260  
Déplacement électrique  $\mathbf{D}$ , 10
- Dépendance temporelle, 53, 211  
Développement de Rayleigh, 299  
Diagramme de rayonnement, 270  
Diamagnétisme, 19  
Dirichlet (condition de), 175  
Dispersion (courbe de), 237, 257  
Dispersion (équation de), 252  
Distribution dépendant d'un paramètre, 34-35  
Double produit vectoriel, 317  
Doublet, 46
- Échauffement des diélectriques, 97-99  
Échelette (réseau), 310  
Énergie électromagnétique volumique, 94, 96  
Épaisseur de coupure, 236  
Époque d'un signal, 128  
Équation de Bessel, 334, 339  
Équation eikonale, 90  
Équation de Helmholtz, 63-67, 338  
Équation des ondes, 77  
Équation intégrale, 289  
Équation de Laplace, 47, 196  
Équations de Maxwell, 33  
Équations de Maxwell harmoniques, 52, 54  
Équations de Maxwell principales, 57  
Équations de Poisson, 17, 47  
Équi-amplitude, 66  
Équi-phase, 65  
Équivalence métal-diélectrique, 62-63  
Excitation magnétique (vecteur  $\mathbf{H}$ ), 21-23
- Facteur de qualité (d'une cavité), 263  
Fibre à saut d'indice, 249  
Fonction de Bessel, 334  
Fonction de Green de l'espace libre, 83  
Fonction de Green des réseaux, 312  
Fonction de Hankel, 335  
Fonction de Neumann, 335  
Front d'onde, 85-89  
Fonction propre, 175, 236  
Formule des réseaux, 301  
Fréquence de coupure, 170, 178, 180, 236  
Fresnel (formules de), 137

- 47, 338 , Green (fonction de), 83, 312  
Green (théorèmes de), 320
- Hölder (condition de), 4  
Hyperfréquences, 62  
Hypothèse de Rayleigh, 285, 303
- Impédance caractéristique, 198, 216, 222  
Impédance itérative, 223  
Impédance ramenée, 223  
Impédance d'un milieu (définition), 111  
Impulsion de champ, 100-102  
Indice complexe, 145  
Indice d'extinction, 145  
Indice de réfraction, 145  
Indice effectif, 239  
Indice (optique), 60, 81  
Infrarouge, 62
- Jauge de Coulomb, 78  
Jauge de Lorentz, 78  
Joule (effet), 98
- « Ka d'un milieu », 64
- Largeur d'un paquet d'onde, 126-128  
Lévitiation optique, 103  
Ligne bifilaire, 201  
Lignes diverses, 208  
Littrow (montage de), 310  
Loi de Descartes, 139-140  
Loi de Faraday, 26  
Loi de force de Lorentz, 32  
Loi d'Ohm, 26-45  
Longueur d'atténuation, 117  
Longueur d'onde, 113  
Longueur d'onde de coupure, 178, 236  
Lorentzienne (courbe), 264
- Matrice de couche, 158  
Matrice de transition, 158  
Meixner (condition de), 295  
Métal infiniment conducteur, 165  
Micro-ondes, 62
- 58 Milieu l.h.i., 14  
Milieu parfait, 40-41, 58  
Milieux non locaux, 41  
Milieux stratifiés, 155-161  
Mode, 170, 177  
Mode fondamental, 182  
Mode hybride, 257  
Mode TE ou H, 177  
Mode TM ou E, 177  
Moment magnétique, 19  
Monomode (guide), 236  
Multimode (guide), 236
- Neumann (condition de), 175
- Onde plane amortie, 117  
Onde cylindrique, 67  
Onde plane dissociée, 66  
Onde évanescente, 140  
Onde plane, 66  
Onde sphérique, 67  
Ondes stationnaires, 167  
Ondes T.E.M., 192  
Optique planaire, 140  
Orthogonalité (relations d'), 261
- Paquet d'ondes, 122, 128-129, 236  
Paramagnétisme, 19, 24  
Perméabilité et perméabilité relative, 24, 61  
Permittivité et permittivité relative, 14, 58, 59  
Permittivité percussionnelle, 44  
Plasmon de surface, 316  
Poincaré (sphère de), 70, 73  
Polarisation électrique  $\vec{P}_e$ , 6, 13  
Polarisation magnétique  $\vec{P}_m$ , 19, 24  
Polarisation elliptique, rectiligne, circulaire, 68-73  
Potentiel (théorie du), 1-5  
Potentiel électrostatique, 48-49  
Potentiels de Lienard-Wiechert, 272-275  
Potentiel vecteur, 16, 75  
Potentiels retardés, 81  
Poynting (identité de), 92  
Poynting (vecteur de), 94, 95, 188  
Poynting (théorème de), 94, 96, 97  
Pression de radiation, 103, 114  
Principe de l'action et de la réaction, 103  
Pseudo-périodicité, 298
- Quasi-stationnaire, 31
- Rayons  $\gamma$  et rayons X, 62  
Réflexion, 133-136  
Réflexion totale, 141  
Réfraction, 133-136  
Relation de Lorentz, 77  
Relations constitutives, 38-39  
Relations de dispersion, 43  
Relations de Kramers-Krönig, 59  
Relations de passage, 32, 54-56, 131, 133  
Relations de réciprocité, 104, 308  
Relaxation (temps de), 45  
Résonance (d'une cavité), 260
- Semi-stationnaire (régime), 209  
Signal analytique, 51, 328-333  
Slab, 230  
Slab symétrique, 238, 240  
Solutions élémentaires de l'équation de Helmholtz, 66-67  
Solutions élémentaires de l'équation des ondes, 79



- Sources (axiomes de représentation), 35-37  
Stokes (théorème de), 321  
Susceptibilité électrique  $\chi$ , 13, 57-58  
S.W.R., 210
- Temps de vol, 129  
Tenseur des contraintes électromagnétiques,  
102  
Théorème optique, 285  
Théorème de réciprocité de Lorentz, 104  
T.O.S., 210  
Transformation conforme, 205  
Transformation de Fourier, 50-51  
Transformation de Hilbert, 43  
Transformation de jauge, 78  
Transparence (bande de), 60
- Ultraviolet, 62
- Valeur propre, 175, 236  
Vecteurs complexes, 325-327  
Vecteur d'onde, 110  
Visible, 62  
Vitesse de groupe, 126, 171, 237  
Vitesse de paquet, 125  
Vitesse de phase, 113, 171, 237  
Vitesse de signal, 129
- Yasuura (suites de), 303
- Zigzag, 238.

ENSEIGNEMENT DE LA PHYSIQUE

# Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique

R. PETIT

Ce cours constitue une introduction à l'étude théorique des ondes électromagnétiques. L'auteur insiste particulièrement sur l'aspect physique mathématique qui se révèle essentiel dans le développement actuel de cette discipline.

Après une mise au point et quelques compléments sur les cours de premier cycle universitaire, les lois fondamentales de l'électromagnétisme sont présentées à l'aide de la théorie des distributions. Cette théorie, aujourd'hui enseignée en cours de maîtrise, facilite l'exposé et la compréhension de nombreux points. Tous les thèmes habituellement étudiés en propagation libre et guidée sont ensuite passés en revue et les plus délicats (paquet d'ondes, métal infiniment conducteur...) font l'objet d'une attention particulière ou d'une présentation originale. On donne enfin quelques notions sur des sujets plus spécialisés (rayonnement des antennes ou des charges en mouvement...) ou ayant été particulièrement étudiés au cours des dernières années (guides diélectriques, fibres optiques, théorie électromagnétique des réseaux optiques).

Quatre annexes effectuant des rappels mathématiques indispensables complètent l'ouvrage : analyse vectorielle, représentation des signaux, fonctions de Bessel. Le lecteur doit évidemment déjà avoir assimilé un cours de premier cycle, mais il doit également être familiarisé avec la théorie élémentaire des distributions et ses prolongements à la convolution et à la transformation de Fourier.

Principalement destiné aux étudiants de deuxième cycle scientifique et aux élèves ingénieurs, ce cours leur permettra d'acquérir non seulement les connaissances requises aux examens, mais aussi des bases solides pour d'éventuelles études plus approfondies du champ électromagnétique.

*Roger PETIT est professeur à l'université d'Aix-Marseille III où il a créé le laboratoire d'optique électromagnétique, unité associée au CNRS.*



9 782225 815713

ISBN: 2-225-81571-2