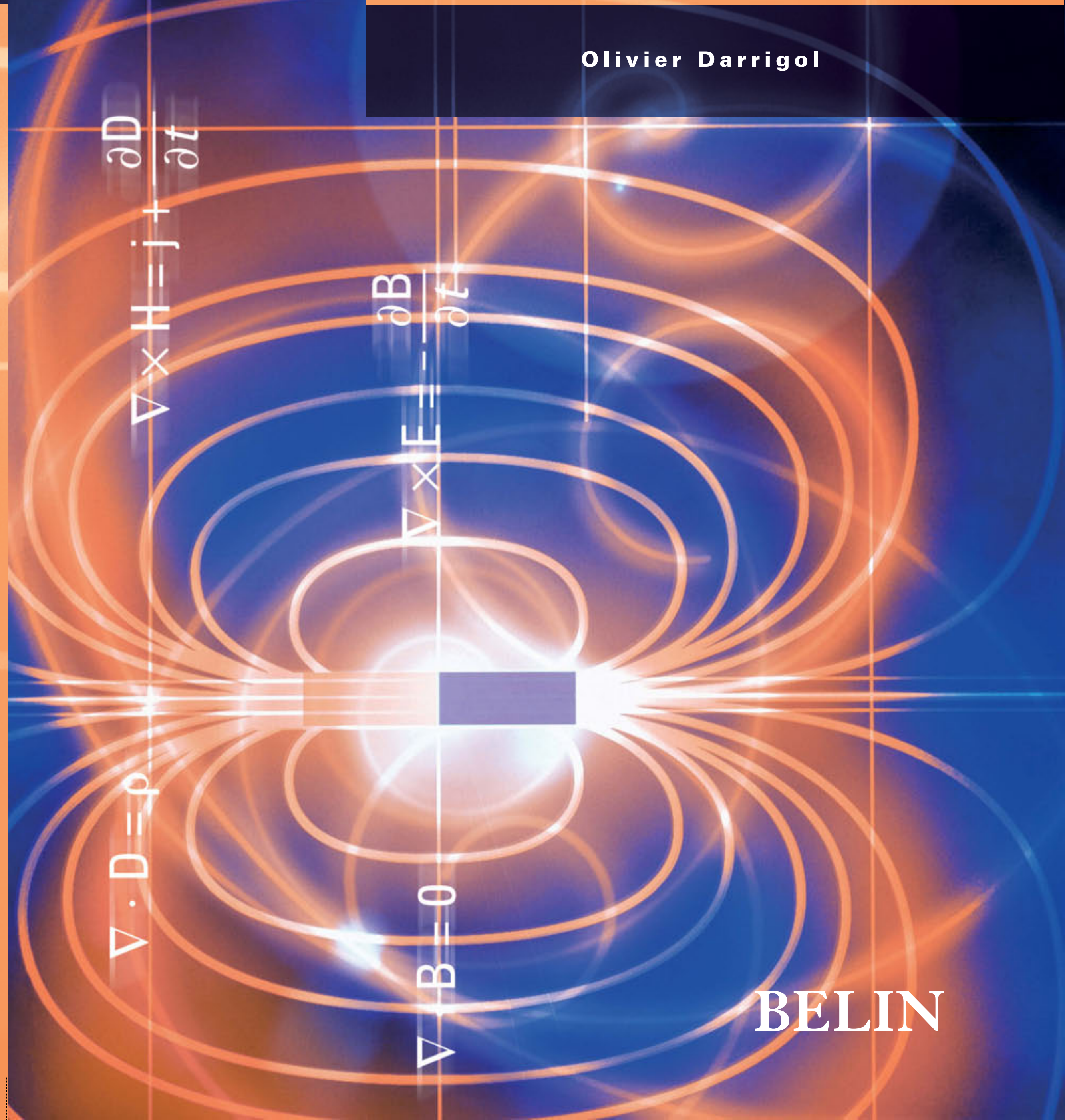
Les équations de Maxwell

de MacCullagh à Lorentz

Olivier Darrigol



BELIN

sciences

Les équations de Maxwell

de MacCullagh à Lorentz

Olivier Darrigol

BELIN

8, rue Férou 75278 Paris cedex 06
www.editions-belin.com

DANS LA MÊME COLLECTION

La science du mouvement. De Galilée à Lagrange, Michel Blay, 2002.
La mécanique statistique. De Clausius à Gibbs, Anouk Barberousse, 2002.
Les constantes fondamentales, Jean-Philippe Uzan et Roland Lehoucq, 2005.

En couverture : CHAMP MAGNETIQUE
© Alfred Pasieka / SCIENCE PHOTO LIBRARY / COSMOS

ISSN 1158-3762 ISBN 2-7011-3075-1

Table des matières

Notations et conventions utilisées dans les commentaires :

- Le produit scalaire de deux vecteurs **A** et **B** est noté $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; leur produit vectoriel est noté $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
- Le symbole ∇ désigne l'opérateur gradient. Le rotationnel d'un champ de vecteurs **A** s'exprime alors comme $\nabla \times \mathbf{A}$, et sa divergence comme $\nabla \cdot \mathbf{A}$.
- Le symbole Δ désigne l'opérateur laplacien.
- Le symbole $\mathrm{d}\mathbf{l}$ désigne un élément de longueur, le symbole $\mathrm{d}\mathbf{S}$ un élément de surface et le symbole $\mathrm{d}\tau$ un élément de volume.
- Les unités utilisées par les auteurs des textes reproduits sont respectées dans les notes éditoriales. Mais les unités électromagnétiques rationalisées (de Heaviside) ont été préférées dans les transcriptions modernes des équations de Maxwell.
- Les diverses grandeurs électriques et magnétiques sont notées comme suit :

  A : potentiel vecteur.
  B : induction magnétique.
  D : déplacement électrique.
  E : force électrique (champ électrique).
  H : force magnétique (champ magnétique).
  j : courant de conduction.
  J : courant total.
  c : rapport de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique de charge (égal à la vitesse de la lumière selon la théorie de Maxwell).
  ε : permittivité diélectrique.
  ϕ : potentiel électrostatique.
  ψ : potentiel scalaire de la théorie de Maxwell.
  μ : perméabilité magnétique.
  ρ : densité de charge.
  σ : conductivité.
- Dans ces notations modernes, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho.$$

- Les références des sources citées dans les notes sont données dans le format auteur-date et renvoient à la première des bibliographies en fin d'ouvrage.
- Les références des sources citées dans les textes anciens sont explicitées dans la seconde des bibliographies en fin d'ouvrage.
- Les notes numérotées font partie de l'appareil critique, celles indiquées par les symboles * † ‡ appartiennent aux extraits.

Introduction

Les équations de Maxwell fascinent par leur symbolisme abstrait, élégant et concis, par la multiplicité des phénomènes qu'elles expliquent et par leur stabilité à travers l'histoire souvent mouvementée de la physique post-maxwellienne. Les ennemis du relativisme épistémologique, selon lequel les théories physiques ne seraient que constructions contingentes et provisoires, citent volontiers ces équations comme l'archétype d'un acquis définitif des sciences ; si bien que l'on pourrait se demander, comme Ludwig Boltzmann citant le Faust de Goethe, « si ce ne fut pas un dieu qui écrivit ces signes ».[1]

Sans aller jusqu'à déifier James Clerk Maxwell, les manuels de physique répercutent souvent le mythe selon lequel les équations fondamentales de l'électromagnétisme seraient soudainement sorties de l'imagination fertile du savant britannique, toutes armées de leur interprétation définitive. Le but du présent choix de textes est d'offrir au lecteur une triple réfutation de ce mythe et d'y substituer une histoire plus authentique de l'émergence de l'électrodynamique maxwellienne.

Un premier chapitre introductif rappellera les débuts de l'électrodynamique. Le deuxième chapitre, consacré aux textes de Maxwell de la période 1861-1873, mettra en évidence la richesse et la multiplicité des sources utilisées par ce physicien, le caractère graduel et provisoire de ses constructions théoriques et l'incompatibilité radicale de sa conception de l'électricité avec celle admise aujourd'hui. Dans les deux chapitres suivants seront présentés les travaux de Oliver Heaviside (1885), Heinrich Hertz (1890) et Hendrik Lorentz (1892) à travers lesquels les équations de Maxwell acquirent une forme et une interprétation plus proches de celles que nous connaissons aujourd'hui. Enfin, un cinquième chapitre montrera comment l'optique de James MacCullagh engendra les équations de Maxwell dès 1839 et comment le physicien danois Ludvig Lorenz obtint une théorie électromagnétique de la lumière en 1867, indépendamment de Maxwell et sans sortir du cadre des théories ampériennes et allemandes.

Il apparaîtra ainsi que la « théorie de Maxwell » moderne s'est constituée graduellement, dans une multiplicité de lieux et grâce aux efforts conjugués de physiciens

1. Cité en exergue des leçons de Boltzmann sur la théorie de Maxwell (vol. 1, Leipzig, 1891, p. 96).

dont les opinions et les méthodes divergeaient considérablement. La contribution de Maxwell fut décisive, tant par l'ampleur des sujets traités que par la nouveauté des méthodes, mais elle ne fut ni définitive ni isolée. Les équations de Maxwell se sont accommodées de formulations et d'interprétations bien différentes de celles avancées par Maxwell. Inévitables mais protéiformes, elles méritent bien la fascination qu'elles exercent.

Les textes qui suivent ne peuvent être raisonnablement lus sans connaître quelques-unes des circonstances dans lesquelles ils furent écrits. Il convient surtout de rappeler quels étaient l'origine et le contenu des principales approches de l'électromagnétisme avant que Maxwell entreprît ses recherches.

Chapitre 1

L'électromagnétisme avant Maxwell

1. L'électricité et le magnétisme avant Ørsted

Avant la découverte que fit Hans Christian Ørsted en 1820 de l'action d'un courant électrique sur une aiguille aimantée, le champ des recherches sur l'électricité et le magnétisme se divisait en deux domaines. D'une part, il y avait les phénomènes de l'électricité statique et des aimants, dont Charles Augustin Coulomb et Siméon Denis Poisson avaient donné des théories mathématiques typiques de la physique mathématique française, alors la meilleure du monde. Ces théories se fondaient sur l'idée de fluides impondérables électriques et magnétiques dont les particules (éléments de volume) agissaient directement à distance, suivant une loi similaire à celle de la gravitation newtonienne. D'autre part, les expériences de Luigi Galvani sur l'électricité animale puis la découverte de la pile électrique par Alessandro Volta en 1800 avaient ouvert le domaine du galvanisme, consacré aux courants persistants dans les milieux conducteurs, à leurs causes physiques ou chimiques et à leurs effets divers. En raison de l'obscurité de la notion de courant électrique et de l'absence de méthode de mesure, ce domaine était essentiellement empirique et qualitatif. Il appartenait autant à la chimie et à la physiologie qu'à la physique.

La conception la plus répandue de l'électricité était celle de deux fluides positif et négatif, dont l'excès de l'un par rapport à l'autre constituait la charge électrique. De même, Coulomb et ses successeurs français admettaient deux fluides magnétiques, austral et boréal, dont la séparation (limitée par confinement moléculaire) constituait l'aimantation. Cependant, d'autres conceptions existaient en dehors de la France : certains n'admettaient qu'un seul fluide électrique (un peu comme dans la théorie électronique moderne) ; d'autres se méfiaient des fluides impondérables et préféraient ne pas se prononcer sur la nature profonde de l'électricité et du magnétisme ; d'autres encore imaginaient des « atmosphères » entourant les corps électrisés et les aimants et responsables de leurs interactions.

Certains savants allemands fondaient leur approche de l'électricité et du magnétisme sur la *Naturphilosophie* de Friedrich von Schelling. On qualifie généralement cette doctrine de dynamiste, car elle était fondée sur un concept métaphysique de force ; d'organiciste, car elle favorisait les analogies avec les organismes vivants ; et d'anti-newtonienne, car elle rejetait la dichotomie force/matière et les réductions mécaniques. Selon ses adeptes, les phénomènes naturels devaient pouvoir se comprendre à partir du conflit de deux forces primitives distribuées dans l'espace. La matière n'était qu'un équilibre particulier de ces forces, et toute action à distance devait pouvoir se réduire à une propagation de leur déséquilibre dans l'espace intermédiaire. Au nom de cette philosophie, le savant danois Hans Christian Ørsted croyait en une unité profonde de l'électricité et du magnétisme : il concevait l'électricité comme un conflit des forces constitutives de la matière, et le magnétisme comme résultant d'un conflit – du second ordre – des forces électriques. Cette vision l'amena à démontrer, en 1820, l'action d'un courant sur une aiguille aimantée (fig. 1.1).

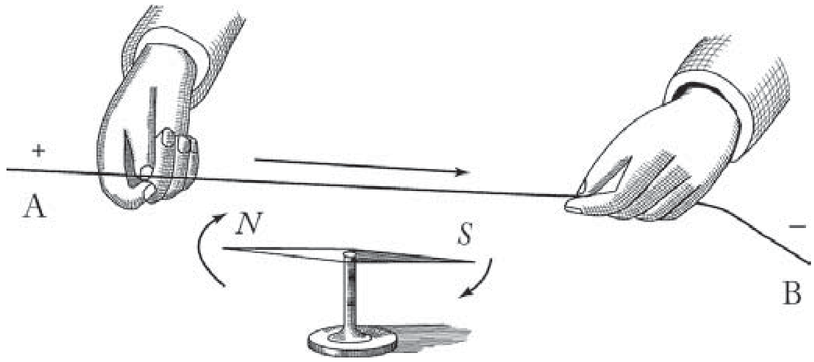


Figure 1.1 **La première des expériences électromagnétiques d'Ørsted (1820).** Sous l'effet du courant électrique rectiligne AB, l'aiguille aimantée horizontale NS, placée sous le fil et originellement orientée dans la direction du nord magnétique, est déviée dans la direction indiquée par les flèches courbes. Comme le comprit Ørsted et comme le vérifièrent un peu plus tard Ampère et Faraday, en l'absence d'effet du magnétisme terrestre, l'aiguille s'orienterait perpendiculairement au fil.

Cette découverte spectaculaire mit fin à l'indépendance généralement admise des phénomènes électriques et magnétiques, et elle brouilla la frontière méthodologique qui séparait le domaine du galvanisme de ceux du magnétisme et de l'électricité statique. La plupart des investigateurs de ce nouveau champ d'étude, bientôt nommé « électromagnétisme », cherchèrent à ramener l'effet observé par Ørsted à une aimantation temporaire du fil conducteur. En France, Jean-Baptiste Biot espérait ainsi intégrer l'électromagnétisme dans le domaine déjà mathématisé du magnétisme. Toutefois, les principales théories mathématiques de l'électromagnétisme pré-maxwellien prirent leur source ailleurs, dans les approches plus singulières de deux géants de la physique du XIX^e^, Ampère et Faraday.

2. Les théories mathématiques sur le continent

Stimulé par la découverte d'Ørsted, le mathématicien, chimiste et philosophe André Marie Ampère s'engagea frénétiquement dans la série de recherches qui ont fait de lui le « Newton de l'électricité » (suivant le mot de Maxwell). Dans ses premières expériences sur se sujet, Ampère observa qu'une boucle de courant agissait sur une aiguille aimantée comme le ferait un aimant. Guidé par cette analogie et par son souci de simplification des fondements de la physique, il conçut les aimants comme des assemblages de courants et décida de ramener toutes les interactions entre aimants et courants à une interaction courant-courant plus primitive. Il donna la première preuve expérimentale de cette interaction (voir fig. 1.2) et imagina une série d'appareils qui permettaient d'en préciser la forme.[1]

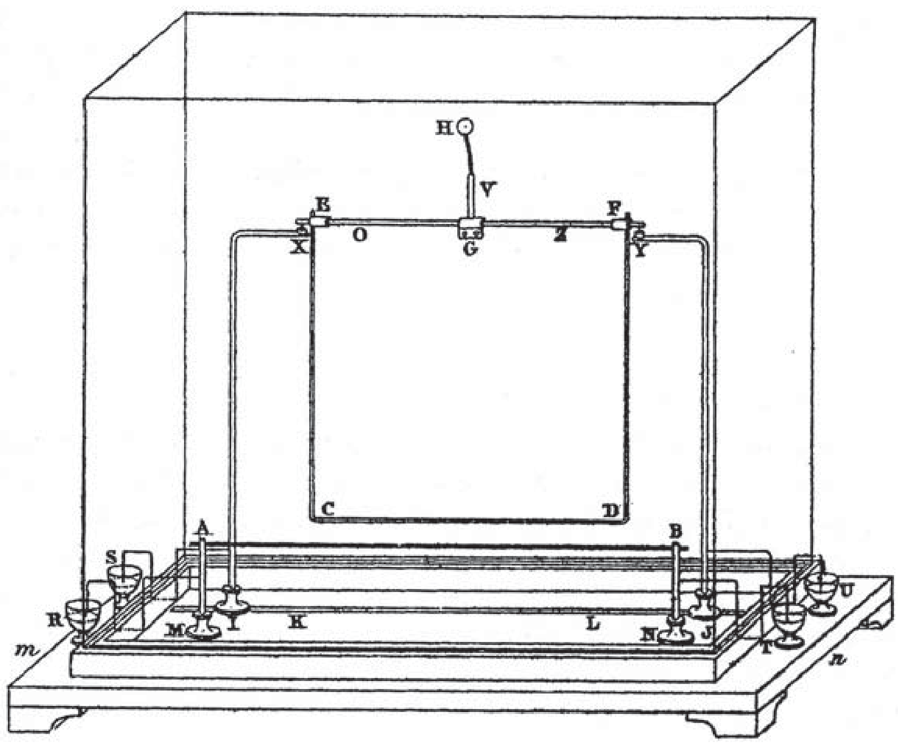


Figure 1.2 Un appareil d'Ampère (1820) pour démontrer l'attraction ou la répulsion de deux courants parallèles (CD et AB). Le conducteur AB est fixe. Le conducteur CD, suspendu par deux pointes immergées dans les coupelles de mercure X et Y, peut tourner autour de l'axe EF.

1. Cf. Blondel 1982.

Sa théorie mathématique de « l'électro-dynamique », élaborée de 1820 à 1826, se fondait sur une formule mathématique donnant directement l'action mutuelle de deux éléments de courant linéaire :

$$d^2\mathbf{f} = -ii' \frac{\mathbf{r}}{r}\left[\frac{d\mathbf{l}\cdot d\mathbf{l}'}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r}\cdot d\mathbf{l})(\mathbf{r}\cdot i'd\mathbf{l}')}{r^4}\right], \tag{1}$$

dans une notation vectorielle anachronique où $d^2\mathbf{f}$ désigne la force agissant sur l'élément de courant $id\mathbf{l}$ sous l'effet de l'élément $i'd\mathbf{l}'$, et $\mathbf{r}$ le vecteur allant du second élément au premier. Cette démarche s'apparentait à celle de Coulomb et Poisson, qui avaient réduit l'électrostatique à l'intégration des forces élémentaires données par la loi de Coulomb. Ampère approuvait d'ailleurs l'interprétation française du courant électrique comme circulation de fluides électriques, bien que ses calculs n'en dépendissent pas.

Comme Ampère et d'autres le virent rapidement, l'action d'un courant sur une aiguille aimantée donnait un moyen de mesurer le courant électrique. L'Allemand Georg Simon Ohm s'en servit en 1826 pour étudier les variations du courant dans un circuit en fonction de la source électromotrice et de la constitution et de la forme des conducteurs. Il introduisit ainsi le concept de force électromotrice et la loi qui porte son nom : en termes modernes, le vecteur densité de courant électrique $\mathbf{j}$ en un point du conducteur est relié à la force électromotrice $\mathbf{E}$ en ce même point par la relation $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, où la conductivité σ est une caractéristique du milieu. La circulation du vecteur $\mathbf{E}$ sur tout le circuit, encore appelée force électromotrice (scalaire), est une caractéristique de la source électromotrice. C'est ainsi que la découverte de l'électromagnétisme permit une première approche quantitative et théorique du galvanisme.[2]

Par ailleurs, l'analogie qu'avait établie Ampère entre aimant et système de courants suggérait la possibilité d'induire un courant dans un conducteur par l'approche d'un aimant ou d'un autre courant. Michael Faraday établit l'existence et les caractéristiques essentielles de ce phénomène en 1831 (nous y reviendrons plus loin). Il restait à en donner une expression mathématique précise. Deux physiciens allemands y parvinrent indépendamment.

En 1846, à Königsberg, Franz Neumann introduisit le potentiel électrodynamique de deux courants linéaires i et i',

$$P = ii' \oint\oint \frac{d\mathbf{l}\cdot d\mathbf{l}'}{|\mathbf{l}-\mathbf{l}'|}, \tag{2}$$

dont les dérivées spatiales (par rapport à une déformation de l'un des circuits) donnent les forces exercées par un courant sur l'autre en conformité avec la formule d'Ampère, et dont la dérivée temporelle pour $i = 1$ lors d'un changement de

2. Ohm admettait de sucroît qu'en dehors des sources électromotrices $\mathbf{E}$ était proportionnel au gradient de densité de charge. Comme le montra plus tard Kirchhoff, c'est le gradient du potentiel électrostatique (changé de signe) qu'il faut prendre ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$).

configuration des deux circuits ou lors d'une variation du courant i' donne la force électromotrice (scalaire) dans le premier circuit. Dans cette théorie, Neumann s'abstenait de toute image du courant électrique et raisonnait sur des grandeurs directement observables ou presque. Cette sobriété méthodologique explique sans doute que la « formule de Neumann » (2) ait survécu jusqu'à ce jour.[3]

De son côté, en 1847 et à Göttingen, Wilhelm Weber parvint à ramener toutes les interactions électrostatiques et électrodynamiques à une force f s'exerçant entre deux particules (éléments de volume) de fluide électrique. Contrairement à Neumann, il n'hésitait pas à se prononcer sur la nature du courant électrique, qu'il décrivait comme une double circulation symétrique de deux fluides, positif et négatif, contenus dans les conducteurs. Pour deux particules e et e' de ces fluides distantes de r, la force f obéit à la « loi fondamentale »

$$f = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} + \frac{r\ddot{r}}{c^2}\right). \tag{3}$$

Le premier terme correspond à la loi de Coulomb ; les autres termes, contenant des dérivées temporelles de la distance r, permettent de rendre compte des forces courant-courant et des phénomènes d'induction électromagnétique. Pour le voir, il suffit de faire la somme des forces f agissant sur une particule donnée d'électricité en un instant donné.

Notons l'intrusion de la constante c, qui a la dimension d'une vitesse. Cette constante est le rapport de l'unité électromagnétique de charge (pour laquelle deux fils parallèles infinis distants d'une unité de longueur et parcourus par une unité de charge pendant l'unité de temps exercent l'un sur l'autre deux unités de force) à l'unité électrostatique de charge (deux charges ponctuelles unités distantes d'une unité de longueur exercent l'une sur l'autre une unité de force). Weber mesura la constante $c\sqrt{2}$ en 1856 avec l'aide de Rudolph Kohlrausch, en comparant la mesure électrostatique de la charge d'un condensateur à la mesure électromagnétique de son courant de décharge. Le résultat, $4{,}4 \times 10^8$ m/s, était du même ordre que la vitesse de la lumière. Face à cette étrange coïncidence, Weber ne fit que rappeler la disparité des phénomènes optiques et électriques.

L'année suivante (1857), un éminent disciple de Neumann, Gustav Kirchhoff, se servit de la formule de Weber pour montrer qu'une perturbation électrique se propageait à la vitesse c le long d'un fil conducteur. Kirchhoff s'étonna que la valeur de cette vitesse tirée des mesures de Weber et Kohlrausch, $3{,}1 \times$ m/s, fût si proche de la vitesse de la lumière, mais se refusa à toute spéculation. Dans la même année, il appliqua la loi de Weber à des conducteurs tridimensionnels pour établir l'expression

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}_K/\partial t \tag{4}$$

3. Cf. Jungnickel et McCormmach 1986, vol. 1 : 51-55 (Ohm), 148-152 (Neumann); Olesko 1991 (Neumann).

de la force électromotrice $\mathbf{E}$ en fonction du potentiel électrostatique des charges en présence, qui s'écrit

$$\phi = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathrm{d}\,\tau', \tag{5}$$

et d'un vecteur $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}$ qui ne diffère de

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathrm{d}\,\tau' \tag{6}$$

que par un gradient. On voit là apparaître, dans un contexte d'action à distance, ce que Maxwell appellera plus tard le potentiel vecteur. Pour un circuit linéaire fermé, la partie électrodynamique de cette expression conduit à une force électromotrice d'induction identique à celle prédite par Neumann. Mais les formules de Kirchhoff sont plus générales que celle de Neumann, tout en étant plus directement liées à l'expérience que la loi de Weber. C'est cette double qualité qui fit leur succès sur le continent.[4]

En résumé, l'électrodynamique d'Ampère, Neumann, Weber et Kirchhoff partait des formules d'action à distance d'Ampère ou de Weber. Elle admettait l'existence de fluides électriques dont la circulation et l'accumulation représentaient respectivement le courant et la charge, même si cette image pouvait sembler superflue dans l'approche phénoménologique de Neumann. Elle ne faisait intervenir des champs (au sens moderne) comme le potentiel électrostatique $\phi(\mathbf{r})$ ou le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ que par commodité mathématique, pour servir d'intermédiaire entre diverses formules d'action à distance. Elle privilégiait des expressions intégrales de ces champs et ne cherchait pas d'interprétation physique des équations aux dérivées partielles (comme l'équation de Poisson) associées à ces champs. Toutefois, elle n'admettait pas forcément la primauté *physique* de l'action à distance. Certains auteurs comme Ampère, Gauss et Weber croyaient en un processus sous-jacent de communication de proche en proche des interactions électromagnétiques à travers un éther, même s'ils firent peu d'efforts pour expliciter ce mécanisme. D'autres, comme les proches disciples de Laplace ou comme Hermann von Helmholtz, pensaient au contraire que tout concept d'interaction se réduisait nécessairement à la notion élémentaire de deux objets ponctuels agissant à distance.

Quoi qu'il en soit, les physiciens continentaux ne doutaient pas de la solidité de leur électrodynamique. En tant que champions d'une nouvelle physique de précision, Weber et Neumann accompagnaient leurs formules de preuves expérimentales très exactes. Certes, ces vérifications se limitaient à des courants quasi fermés (dans des circuits fermés ou des circuits contenant un condensateur), c'est-à-dire à ce que nous appelons aujourd'hui le régime quasi-stationnaire, car les courants trop éphémères ou trop rapidement variables échappaient aux méthodes de mesure de l'époque.

4. Cf. Jungnickel et McCormmach 1986, vol. 1 : 45-50; Whittaker 1951 : 201-205.

Cependant, Weber et ses disciples pouvaient se targuer d'une unification complète des phénomènes de l'électricité et du magnétisme. Leurs formules s'appliquaient en principe à tout système électrodynamique concevable et à tout régime de ce système.

3. Les champs de force de Faraday

Alors même qu'Ampère tirait les conséquences mathématiques de la découverte d'Ørsted, le jeune Michael Faraday s'appliquait, en 1820, à une cartographie méticuleuse de l'action d'un fil parcouru par un courant électrique sur un pôle d'aiguille aimantée. Sous l'égide du célèbre Humphry Davy, il était déjà l'auteur de quelques découvertes chimiques importantes. De physique, il ne savait guère que ce qu'il en avait lu dans les ouvrages populaires qu'il livrait à l'époque où il n'était que le coursier d'un libraire. Il était encore plus ignorant en mathématiques, et s'efforça plus tard de le rester car il attribuait l'abondance de ses découvertes à son absence de préjugés physico-mathématiques.

On comprend alors que Faraday soit entré dans le domaine de l'électromagnétisme par une voie expérimentale et exploratoire. De ses patientes observations de l'action d'un courant filiforme sur un pôle magnétique, il conclut que cette action était circulaire autour du pôle et susceptible d'entretenir une rotation continue du pôle par rapport au fil ou de provoquer l'effet réciproque. Ainsi inventa-t-il le premier moteur électrique (fig. 1.3). La nature du courant électrique ou la composition des aimants

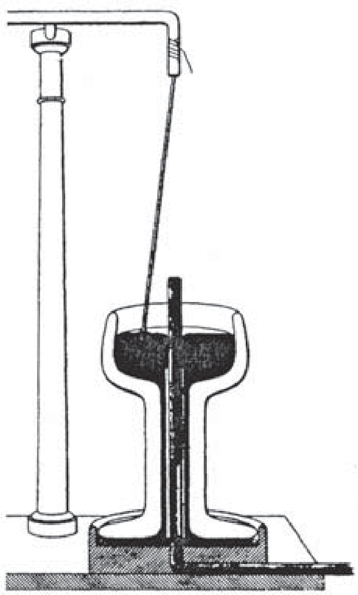


Figure 1.3 **Premier moteur électrique, construit par Faraday en 1820**. Un des pôles d'un barreau aimanté émerge de la coupe de mercure. Le fil oblique, parcouru par un courant électrique, tourne continûment autour de ce pôle.

lui était alors indifférente. Ce qui comptait pour lui, c'était de caractériser empiriquement la distribution de « force » qui en émanait. L'essentiel se jouait dans l'espace intermédiaire, pas dans les corps conducteurs ou les aimants. On peut voir dans cette opinion une simple conséquence de sa conception exploratoire de l'expérience, ou encore la trace de préconceptions dynamistes réduisant tout objet physique aux « forces » ou actions potentielles qui en émanent.[5]

Une dizaine d'années plus tard, en 1831, Faraday découvrit l'existence de courants induits par une aimantation variable ou par un courant variable. Par analogie avec l'induction magnétique, selon laquelle un aimant est susceptible d'induire une aimantation dans des corps magnétiques voisins, il s'attendait à ce qu'un courant permanent puisse induire un courant dans des conducteurs voisins. Pourtant, dans sa première expérience réussie sur ce sujet (fig. 1.4), le courant induit n'apparaissait que lors du branchement ou du débranchement du courant primaire. Cette surprenante constatation l'amena à supposer qu'un conducteur soumis à une action magnétique se trouvait dans un état particulier, l'état « électro-tonique » dont les *variations* temporelles se manifestaient par un courant.

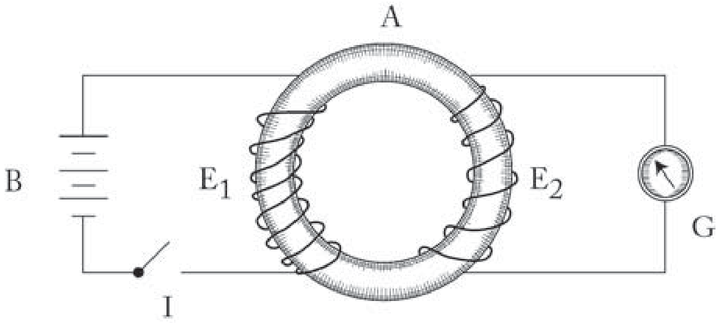


Figure 1.4 **Premier dispositif d'induction électromagnétique de Faraday (1831)**. Lorsque l'interrupteur I est fermé un courant s'installe dans l'enroulement E_1 et magnétise ainsi l'anneau de fer A. Sous l'effet de cette magnétisation variable, un courant se manifeste dans le circuit secondaire, comprenant l'enroulement E_2 et le galvanomètre G.

Néanmoins, au bout d'une longue série d'expériences, Faraday décida qu'il était plus commode d'exprimer les lois de l'induction en fonction des lignes de force magnétiques. De telles lignes, définies comme lignes partout tangentes à la force agissant sur un pôle magnétique, étaient alors utilisées par quelques électriciens britanniques pour représenter l'action des aimants et des électro-aimants (voir fig. 1.5). Suivant la règle de l'induction de Faraday, la force électromotrice d'induction exercée dans un segment de fil conducteur est proportionnelle au nombre de lignes de force coupées par le segment dans l'unité de temps (la densité des lignes de force étant définie proportionnelle à l'intensité de la force magnétique).[6]

5. Cf. Gooding 1985.
6. Cf. Steinle 1996.

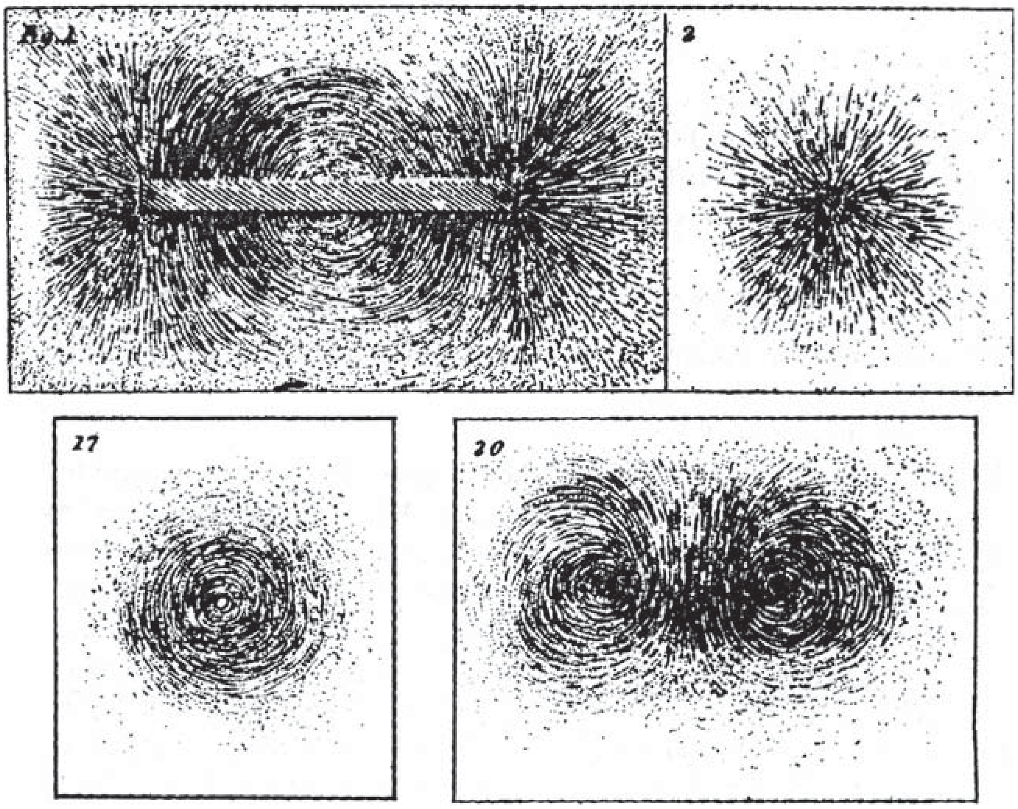


Figure 1.5 Lignes de force magnétiques visualisées par de la limaille de fer (Faraday, *Experimental researches*, vol. 3, Londres, 1855, planche 3).

Au cours de ces recherches, Faraday fut confronté au problème de l'unité de l'électricité dans ses diverses manifestations : se méfiant des préjugés théoriques, il n'admettait pas d'emblée que des courants électriques produits par des causes différentes eussent toujours les mêmes effets. Il se demandait par exemple si un courant induit pouvait produire l'électrolyse au même titre qu'un courant galvanique. Ce type de question l'amena, dans les années 1830, à s'intéresser de plus près aux processus électrochimiques et à explorer le lien entre décomposition et courant. De ce travail nous est restée la loi de Faraday donnant la masse des produits de décomposition comme proportionnelle aux équivalents chimiques et à la quantité d'électricité ayant traversé la cuve électrolytique.

Cependant, Faraday en tira bien plus : il crut pouvoir affirmer qu'une alternance de décompositions et de recompositions à l'intérieur de l'électrolyte représentait l'essence du courant électrolytique. Cette image expliquait pourquoi les produits de décomposition n'apparaissaient qu'aux électrodes et pourquoi leur quantité était déterminée par le courant total. Elle permettait aussi de comprendre l'établissement du courant comme la propagation de proche en proche d'une chaîne de décomposition, alors que les prédécesseurs de Faraday tendaient à imaginer une action à distance.

Faraday concevait la décomposition d'une portion d'électrolyte et le courant électrique associé comme le relâchement d'un état de contrainte antérieur. Plus généralement, il en vint à penser qu'un courant électrique dans un milieu quelconque résultait des variations d'un état de contrainte de ce milieu, état qu'il appelait « induction électrique » ou « polarisation » et qu'il représentait par des lignes de force électrique dont la tangente et l'écartement en un point donnaient respectivement la direction et l'intensité de la polarisation. La différence entre un isolant et un conducteur s'expliquait alors comme l'incapacité de ce dernier à supporter longuement l'état de contrainte. Sous l'effet d'une force électromotrice extérieure constante, un isolant se polarisait de manière constante, alors qu'un conducteur passait par une alternance rapide d'états polarisés et dépolarisés.

Cette conception du courant comme variation (propagée) de contraintes dans un milieu conduisit Faraday à interpréter une charge statique comme une distribution statique de telles contraintes. Plus précisément, il définissait la charge comme une discontinuité spatiale de la polarisation à la frontière d'un conducteur et d'un isolant, ou encore comme la terminaison des lignes de force représentant la polarisation quand elles atteignent un conducteur ne pouvant soutenir la contrainte. La charge n'appartenait plus en propre au conducteur mais à l'isolant, rebaptisé « diélectrique » pour cette raison. Dans le même esprit, Faraday interprétait les attractions et les répulsions entre corps électrisés comme l'effet d'une tension et d'une répulsion mutuelle des lignes de force électriques.[7]

Ces étranges conceptions ont joué un rôle si important dans l'élaboration ultérieure de la théorie de Maxwell qu'il convient de mettre en garde le lecteur contre certaines confusions possibles. Faraday n'admettait pas la conception fluidiste de l'électricité, qu'il jugeait naïve ou excessivement spéculative. De son point de vue, la définition de la charge et du courant à partir d'une polarisation du milieu relevait d'une démarche plus phénoménologique, et même agnostique quant à la nature profonde de l'électricité. Car l'état de contrainte lié à la polarisation était défini dans les termes les plus vagues, comme une asymétrie des propriétés des éléments du milieu le long de l'axe de polarisation – et surtout pas comme un déplacement de fluides électriques intramoléculaires (Coulomb avait proposé un tel concept de polarisation dans le cas du magnétisme).

Faraday pensait pouvoir démontrer expérimentalement l'existence de cette polarisation responsable des charges électriques. Par exemple, sa conception impliquait que la charge d'un condensateur soumis à une tension donnée dépendît de la nature du diélectrique interposé entre ses armatures. En 1836, il découvrit ainsi la « capacité inductive spécifique » que nous appelons aujourd'hui permittivité diélectrique. Il chercha aussi à détecter des effets optiques de la polarisation du diélectrique (notre « effet Kerr » d'anisotropie induite), mais en vain. Par analogie, il s'attendait à ce que

7. Cf. Williams 1965; Gooding 1978.

le magnétisme se réduisît aussi à des effets de polarisation du milieu intermédiaire. Cette fois, la méthode optique porta ses fruits : en 1845, il découvrit que la polarisation (au sens optique) d'un faisceau lumineux tournait légèrement lors de son passage à travers un verre spécial lourd soumis à un champ magnétique intense (« effet Faraday ») (fig. 1.6).

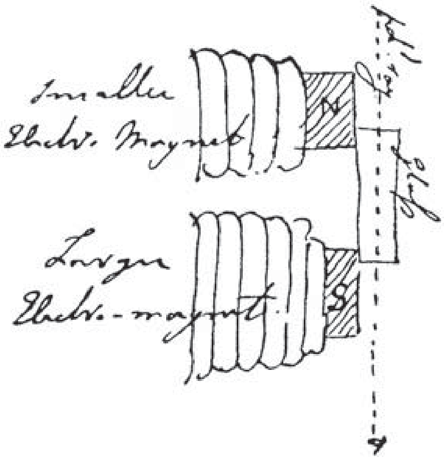


Figure 1.6 Dispositif de Faraday (1845) pour mettre en évidence la rotation du plan de polarisation d'un faisceau lumineux lorsque celui-ci (*pol^d ray*) traverse un barreau de verre (*glass*) lourd situé entre les pôles nord et sud de deux électroaimants (*smaller electro-magnet* et *larger electromagnet*).[8]

Faraday se demanda alors si un effet plus direct de cette polarisation du verre pouvait être obtenu. Quelques jours plus tard, il observa la répulsion de ce verre par un pôle d'électro-aimant (au lieu de l'attraction observée pour un morceau de fer doux). Il découvrit ainsi le « diamagnétisme ». Wilhelm Weber et la plupart des physiciens interprétèrent cet effet comme une polarisation[9] induite du corps diamagnétique dans la direction opposée à celle du champ polarisant et constituant une source supplémentaire de champ magnétique. Faraday opposa à cette notion (aujourd'hui acceptée) celle d'une « conduction » des lignes de force par les milieux matériels, avec une conductivité supérieure à celle du vide dans le cas des corps ferromagnétiques ou paramagnétiques, et inférieure dans le cas des corps diamagnétiques (voir fig. 1.7). Les déplacements de ces corps dans un champ magnétique hétérogène s'interprétaient alors comme une tendance à optimiser la conduction des lignes de force. Notons que c'est dans ce contexte que Faraday utilisa pour la première fois le mot

8. Faraday, *Diary*, 8 vols (Londres, 1932-36), vol. 4, p. 264.

9. Cette notion de polarization, proche de celle de Coulomb-Poisson et de notre vecteur aimantation **M**, diffère bien sûr de celle de Faraday, qui s'apparente plutôt à notre vecteur $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$.

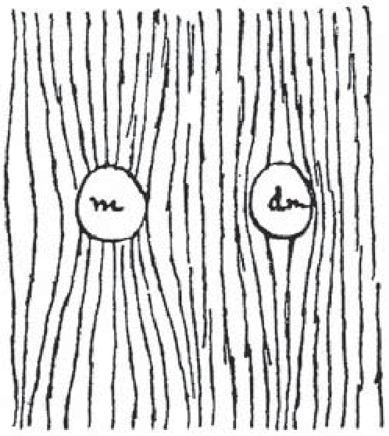


Figure 1.7 Dessin de Faraday (1850) représentant la « conduction » des lignes de force magnétique dans un corps paramagnétique (*m*) et dans un corps diamagnétique (*dm*).

« champ » pour désigner une portion de l'espace dans laquelle s'exerce l'action magnétique.[10]

Soucieux de préserver le caractère expérimental de ses recherches, Faraday hésita longtemps à affirmer publiquement l'existence physique des lignes de force. Il ne les introduisait que comme un mode efficace de représentation. Toutefois, il ne dissimulait pas sa préférence pour une « action contiguë », une sorte de tension le long des lignes de forces accompagnée d'une répulsion mutuelle, plutôt qu'une action directe à distance entre les sources électriques et magnétiques. En 1846, il proposa d'interpréter la lumière comme une sorte de vibration transverse des lignes de force. Au cours de ses recherches sur le magnétisme, il prétendit « illuminer », « toucher » et « conduire » les lignes de force. Ces convictions s'inscrivaient dans une tradition dynamiste – peut-être apparentée à la *Naturphilosophie* allemande – qui faisait du concept de force un concept antérieur à celui de matière, contrairement à la tradition newtonienne qui admettait une séparation nette entre force et matière. Si la force et ses lignes de propagation n'existaient pas, alors plus rien n'existerait pour un Faraday. En 1850, il se décida à affirmer la réalité physique des lignes de force dans un long mémoire intitulé « Du caractère physique des lignes de force magnétique ».[11]

En résumé, Faraday fondait la science de l'électricité et du magnétisme sur la notion de distribution de force représentée par des lignes de force électrique ou magnétique. Il évitait d'interpréter cette distribution de force en termes d'un éther mécanique, car selon ses convictions dynamistes les concepts mécaniques de matière et de masse devaient dériver de celui de force. De même, il considérait la charge électrique de la matière ou le courant y circulant comme des concepts dérivés du

10. Cf. Gooding 1981. L'acception moderne du mot champ (désignant les vecteurs **E** et **H**) date de la fin du XIX[e] et semble due à Emil Cohn.

11. Cf. Williams 1965; Gooding 1981.

concept de force électrique. Plus précisément, aux lignes de force électrique correspondait une sorte de polarisation dont l'interruption spatiale constituait la charge et dont la variation-propagation constituait le courant. Il admettait l'existence d'une telle polarisation même dans le vide et de manière générale traitait le vide sur le même pied que les milieux matériels. Cette conception impliquait que tout courant fût fermé : par exemple, le courant de décharge à travers le métal d'un condensateur se prolongeait entre ses armatures par un courant égal, dû à la variation de polarisation (l'ancêtre du courant de déplacement de Maxwell). Enfin, Faraday tirait de l'expérience la continuité des lignes de force magnétique (flux conservatif) et les liens réciproques entre les forces électrique et magnétique.

4. Thomson le médiateur

Comme Faraday savait très peu de mathématiques, il se méfiait des théories ampériennes de l'électricité et ne cherchait pas à donner une expression mathématique aux lois qu'il énonçait. En retour, ses lecteurs mathématiciens se plaignaient de l'obscurité de ses conceptions de la charge et du courant et préféraient s'appuyer sur les notions fluidistes continentales. Parmi eux, le jeune William Thomson, brillant élève des Universités de Glasgow et de Cambridge et futur Lord Kelvin, méprisait les idées théoriques de Faraday autant qu'il admirait ses prouesses expérimentales. Il changea d'avis en 1845, quand il découvrit que la théorie de Coulomb-Poisson de l'électrostatique pouvait se mettre sous une forme qui correspondait très précisément aux idées de Faraday.[12]

L'équation de Poisson ($\Delta\phi + 4\pi\rho = 0$) a la même forme que l'équation de Fourier pour une distribution stationnaire de température dans un corps uniformément conducteur de la chaleur et exposé à des sources de chaleur d'intensité proportionnelle à la densité de charge ρ. Cette analogie permit au lecteur passionné de Fourier qu'était le jeune Thomson de s'appuyer, dès 1842 (il avait alors 16 ans !), sur l'image de la propagation de la chaleur de proche en proche et sur la conservation de son flux (en dehors des sources) pour obtenir quelques théorèmes fondamentaux de l'électrostatique. En relisant Faraday trois ans plus tard, Thomson découvrit que les lignes de force électrique se comportaient exactement comme les lignes de flux de chaleur, normales aux surfaces isothermes ou aux surfaces équipotentielles analogues, et qu'elles avaient donc la même puissance démonstrative que l'analogie formelle entre les théories de Poisson et de Fourier. Par exemple, la conception de Faraday permettait

12. Cf. Smith et Wise 1989.

de comprendre immédiatement le théorème selon lequel la charge totale d'un conducteur placé dans une cavité d'un autre conducteur est exactement l'opposé de la charge totale des parois de la cavité, puisque la charge y est définie comme le commencement ou la fin de lignes de force.

En somme, Thomson établissait une analogie mathématique précise entre la théorie électrostatique continentale et un problème d'écoulement, puis faisait correspondre les lignes de courant de l'écoulement aux lignes de force de Faraday. Dans les années suivantes, il appliqua le même type de raisonnement au champ magnétique, avec un égal succès. Les lois de l'électrostatique et du magnétisme, concluait-il, pouvaient s'expliquer sur la base de deux hypothèses physiques très différentes : l'action à distance de fluides impondérables, ou bien les actions de proche en proche imaginées par Faraday. Face à cette situation, il chercha à doter l'électrostatique et le magnétisme de concepts et de structures mathématiques indépendants de toute hypothèse physique. Citons par exemple le concept moderne de potentiel électrique, défini comme le travail qu'il faut fournir pour amener depuis l'infini une charge unité dans le champ (sans le perturber), et mesurable par les électromètres conçus par Thomson lui-même, alors que le potentiel de la théorie de Poisson n'était qu'un artifice mathématique. Dans ce cas et dans bien d'autres, Thomson se fondait sur des considérations énergétiques. Il était en effet le principal promoteur britannique de la nouvelle doctrine de conservation de l'énergie.

Par ailleurs, Thomson manifesta de plus en plus clairement sa préférence pour une réalité physique des lignes de force et pour des actions propagées de proche en proche. Cependant, il ne suivait pas Faraday en tout point. En particulier, il doutait que le vide fût un diélectrique comme un autre. À son avis, conforme à l'électrodynamique classique aujourd'hui enseignée, il ne pouvait y avoir de polarisation que dans les diélectriques matériels, au sens d'un déplacement local élastiquement limité de l'électricité. Sa théorie des diélectriques et la théorie similaire de l'italien Ottaviano Mossotti, fondées sur la loi de Coulomb conjointement appliquée à l'électricité libre des conducteurs et à l'électricité liée à la matière polarisée, rendaient parfaitement compte des expériences de Faraday, bien que celui-ci les regardât comme une preuve de sa conception originale de l'électricité.

Thomson dissociait donc l'idée d'action propagée de celle de polarisation. Selon lui, le mode de propagation relevait du fonctionnement d'un éther mécanique, pas des mystérieux transferts de polarisation supposés par Faraday. Comme la plupart des physiciens de son temps, Thomson jugeait que les lois de la physique devaient pouvoir se réduire aux lois de la mécanique newtonienne. Plus radicalement, il pensait qu'un phénomène physique n'était vraiment compris que si l'on pouvait en donner un modèle mécanique. Dans la seconde moitié du siècle, il proposa maints modèles de l'éther optique ou électromagnétique et bien des physiciens britanniques le suivirent dans cette voie, mais, contrairement à une idée répandue, Faraday ne fut point l'initiateur de ce mécanisme envahissant.

En 1856, Thomson trouva dans l'effet Faraday un moyen de préciser la constitution de l'éther mécanique et son état dans un champ magnétique. La symétrie particulière de la rotation magnétique du plan de polarisation de la lumière, jugea-t-il, ne pouvait s'expliquer que si la cause de cette rotation était elle-même une rotation à l'intérieur du milieu transparent. Par extension, il imaginait que tout champ magnétique impliquait la rotation de particules suspendues ou la formation de tourbillons dans un liquide idéal. Dans un tel modèle, la force centrifuge des tourbillons, combinée avec la pression du fluide, rendrait compte des phénomènes d'attraction et de répulsion magnétique (comme la tension et la répulsion des lignes de force chez Faraday). Le courant électrique s'interpréterait comme le courant de fluide circulant entre les tourbillons et se trouverait ainsi connecté au champ magnétique comme une ficelle que l'on tire entre deux roues contiguës. L'induction électromagnétique proviendrait de l'inertie du mouvement rotatoire des tourbillons. Enfin, la lumière serait une vibration transverse de ce milieu, rendu rigide par l'effet gyrostatique des tourbillons.[13]

Ces considérations, assez vagues et publiées seulement en partie, convainquirent Thomson de la proximité d'une « illustration dynamique complète » de l'électromagnétisme. Mais il ne les poursuivit pas, sans doute parce que ses activités de professeur à l'Université de Glasgow et de *consultant* pour de nombreux projets techniques et industriels l'en empêchaient et aussi parce que l'hydrodynamique de l'époque ne le permettait pas. Quoi qu'il en soit, les spéculations de Thomson sur l'éther dynamique ne visaient qu'à illustrer les lois déjà établies de l'électromagnétisme. Thomson ne cherchait pas à prédire de nouveaux phénomènes, ni même à imposer le mode d'expression de Faraday. Il se donnait volontiers le rôle d'un médiateur, capable de faire communiquer des cultures très différentes de l'électricité grâce à des concepts génériques comme le potentiel électrique, la polarisation magnétique ou la force électromotrice. Il qualifiait lui-même ses spéculations sur la constitution de l'éther de « dipsomanie », et les réservait à un rare public de philosophes de la nature.[14]

---

13. Cf. Knudsen 1971, 1976.

14. W. Thomson, notes du 6 janvier 1858, *in* Knudsen 1971; Lettre de Thomson à FitzGerald, 9 avril 1896, citée dans S. Thompson, *The life of William Thomson, Baron Kelvin of Largs*, 2 vols. (Londres, 1910), vol. 2 : 1065.

Chapitre 2

La théorie de Maxwell

1. « On Faraday's lines of force »

James Clerk Maxwell, comme son aîné William Thomson, partagea ses études supérieures entre une université écossaise et l'université de Cambridge. À Edinbourgh, il apprit une physique proche des techniques et de l'industrie, et à Cambridge une physique imprégnée de virtuosité mathématique. Comme Thomson, il favorisait les représentations géométriques et les illustrations mécaniques des phénomènes physiques. Mais il accompagnait cet usage d'une réflexion philosophique sur la nécessité de l'intuition spatiale et sur les fonctions diverses de l'analogie. En témoigne, par exemple, la manière dont il introduit les « analogies physiques » de son mémoire de 1856 :[1]

> « Il nous faut […] trouver une méthode d'étude qui, à chaque étape permet à l'esprit de prendre appui sur une conception physique claire, sans se trouver prisonnier d'une théorie issue de la partie de la physique dont provient cette conception : la recherche de subtilités mathématiques ne doit pas nous faire oublier l'objet de l'étude, et nous ne devons pas laisser une hypothèse séduisante nous entraîner au-delà de la vérité […]. Pour avoir des idées physiques sans pour autant adhérer à une théorie, nous devons nous familiariser avec l'existence d'analogies physiques. Par analogie physique, j'entends une certaine similitude entre les lois gouvernant deux disciplines et qui permet d'illustrer l'une par l'autre ».

Maxwell justifiait ainsi une démarche que Thomson ne faisait qu'appliquer. Les deux savants différaient aussi par la forme de leurs travaux. Alors que Thomson dispersait maintes idées nouvelles dans une multitude de brèves communications, Maxwell s'employait à la construction patiente d'un édifice théorique cohérent. L'essentiel de ses travaux sur l'électromagnétisme a paru sous forme de trois longs mémoires espacés de plusieurs années et d'un traité monumental publié en 1873.

Quand, en 1854, Maxwell entreprit des recherches sur l'électricité et le magnétisme, il n'avait été exposé qu'à une présentation empirique de ces sujets et n'avait guère étudié les théories mathématiques du continent. Il décida de lire d'abord Faraday

1. Maxwell, « On Faraday's lines of force », traduit plus bas, p. 30. Cf. Harman 1998.

et Thomson, puis les auteurs français et allemands. Impressionné par la cohérence des conceptions de Faraday, il décida d'en donner une expression mathématique suivant le mode inauguré par Thomson de mise en correspondance avec les théories continentales : il s'agissait de décrire un écoulement fluide tel que les lignes de courant correspondent aux lignes de force de Faraday et d'identifier les surfaces normales à ces lignes de force aux surfaces équipotentielles de la théorie continentale (voir fig. 2.1).[2]

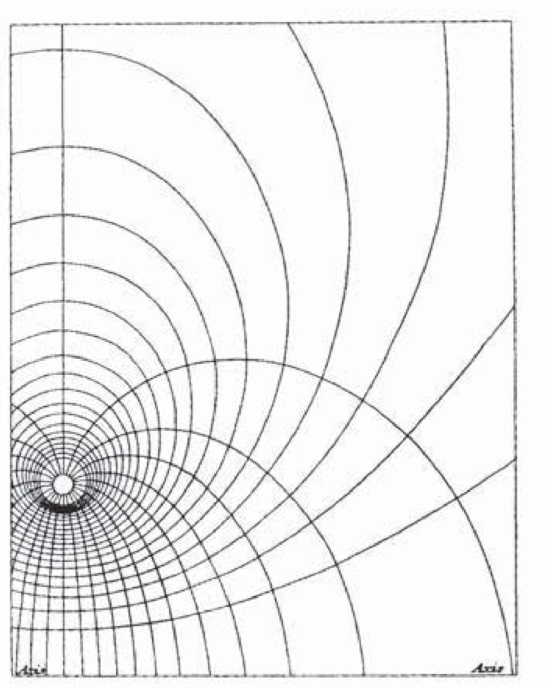


Figure 2.1 **Lignes de force magnétique et surfaces équipotentielles** dues à un courant électrique circulaire d'axe (*Axis*) situé dans le plan de la figure (Maxwell 1873, planche XVIII). Dans l'analogie hydraulique que Maxwell propose en 1855, les lignes de force correspondent aux lignes de courant d'un fluide incompressible circulant dans un milieu poreux, et les surfaces équipotentielles correspondent aux surfaces isobares de cet écoulement.

Dans le mémoire reproduit plus bas, Maxwell opte pour l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux offrant une résistance proportionnelle à la vitesse du fluide. Il décrit l'écoulement par un système de surfaces isobares et de tubes de courant. La stationnarité implique que la vitesse soit proportionnelle au gradient de pression, avec un coefficient négatif dépendant de la porosité locale. Dans l'analogie électrostatique, la vitesse correspond à la polarisation $\mathbf{D}$ (au sens de Faraday, dans la notation ultérieure de Maxwell) et la pression au potentiel ϕ. On a donc $\mathbf{D} = -\varepsilon\nabla\phi = \varepsilon\mathbf{E}$. L'incompressibilité du fluide donne $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ en dehors des sources. Par conséquent, le potentiel satisfait l'équation $\nabla \cdot (\varepsilon\nabla\phi) = 0$ en dehors des charges, comme l'exigeait la théorie classique (de Thomson et de Mossotti) des diélectriques à partir de la notion de déplacement de charges microscopiques.[3]

Aux yeux de Maxwell, l'illustration hydraulique de cette équation avait trois avantages : elle faisait le lien avec les lignes de force de Faraday ; elle déterminait la forme

2. Cf. Siegel 1991 : 30-39.

3. En effet dans cette théorie, $-\Delta\phi$ donne la densité de charge totale, composée des charges extérieures au diélectrique (ici supposées nulles) et des charges liées à la polarisation, tandis que $\nabla \cdot (\varepsilon - 1)\nabla\phi$ représente la densité de charge liée à la polarisation $\mathbf{P} = -(\varepsilon - 1)\nabla\phi$.

de ces lignes par simple régulation des cellules découpées par les surfaces isobares et les tubes de courant ; et enfin elle permettait de distinguer entre une force **E** (l'opposé du gradient de pression du liquide) et un flux **D** (la vitesse du liquide incompressible), en accord avec la distinction que faisait Faraday entre « l'intensité » correspondant à une sorte de tension le long des lignes de force (rien à voir avec l'intensité d'un courant) et la « quantité » correspondant à la densité des lignes de force. De même, Maxwell donnait une illustration hydraulique du paramagnétisme et du diamagnétisme, conduisant à la force **H** et au flux $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$; et une illustration hydraulique de la conduction électrique, conduisant à la force **E** et au flux $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (le courant électrique de conduction).

Cependant, ces trois analogies parallèles ne donnent aucune relation entre les trois classes de phénomènes électriques, magnétiques et galvaniques. Dans la partie de son mémoire consacrée à de telles relations, Maxwell se tourne vers les lois établies par Ampère et Faraday. La loi de force d'Ampère, réexprimée en fonction du champ de force magnétique, implique que la circulation du vecteur **H** sur une courbe fermée soit égale au courant embrassé par cette courbe. Cette relation, dite « théorème d'Ampère », appartient à Maxwell. Appliquée à une courbe infinitésimale, elle donne

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \tag{1}$$

Par ailleurs, la loi des lignes de force coupées de Faraday implique que pour tout circuit fermé

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{2}$$

De cette équation appliquée à un circuit infinitésimal, Maxwell aurait facilement pu tirer

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t. \tag{3}$$

Mais il ne le fit pas. Fidèle à la notion d'état électrotonique de Faraday, qui associait l'induction électromagnétique à une variation temporelle de l'état du milieu, il voulut exprimer la force électromotrice **E** comme la dérivée temporelle d'un vecteur représentant cet état. À cette fin, il introduisit un vecteur **A** tel que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{4}$$

L'expression

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t \tag{5}$$

satisfait alors l'équation intégrale (2) en raison du théorème de Stokes.[4]

Dans l'écriture de ces équations, Maxwell était en partie guidé par la distinction entre flux et force. Dans la notation de son mémoire, les lettres *a, b, c* désignent les

4. Selon ce théorème, énoncé pour la première fois par Thomson dans une lettre à Stokes du 2 Juillet 1850, le flux du rotationnel d'un vecteur à travers une surface finie est égal à la circulation de ce vecteur sur le bord de la surface. Formellement, le vecteur **A** de Maxwell ne diffère du vecteur similaire introduit deux ans plus tard par Kirchhoff que par un gradient. Il conduit donc aux mêmes lois d'induction dans les circuits fermés.

composantes cartésiennes d'un flux ; les lettres α, β, γ désignent les composantes d'une force ; les indices 0, 1, 2, réfèrent respectivement à des grandeurs électrotoniques, magnétiques et électriques. De manière générale, l'interprétation physique d'un vecteur flux passe par son intégrale de surface ; celle d'un vecteur force passe par sa circulation le long d'une courbe. Cette remarque conditionne la forme que Maxwell donne à ses équations du champ car elle implique, via le théorème de Stokes, que le rotationnel d'une force soit un flux. De manière générale, Maxwell accordait une grande importance à la classification des grandeurs physico-mathématiques, car il y voyait un moyen efficace de guider la construction des théories physiques.[5]

Notons aussi l'importance des considérations énergétiques dans ce mémoire. Tout comme les « magiciens du Nord » William Thomson, Peter Guthrie Tait et William Rankine, Maxwell cherchait à reformuler toute la physique sur la base du nouveau concept d'énergie. Dans le présent mémoire, il obtient la loi d'induction $\mathbf{E} = -\,\partial\mathbf{A} / \partial t$ en égalant la variation d'énergie magnétique d'un circuit fixe et purement résistif placé dans un champ magnétique variable à la chaleur produite dans le circuit par effet Joule (il s'inspirait là d'un mode de raisonnement inauguré par Helmholtz en 1847) ; alors qu'en privé il avait d'abord obtenu cette loi à partir de la règle du flux coupé de Faraday.

En somme, ce mémoire constitue une première étape du chemin de Maxwell vers une formulation mathématique de l'électromagnétisme à partir d'équations locales pour les champs électriques et magnétiques. Les raisonnements qu'on y trouve combinent des illustrations mécaniques partielles, des intuitions de Faraday, des résultats de théories mathématiques continentales, des théorèmes issus de la mécanique des fluides de George Gabriel Stokes et des considérations énergétiques inspirées de Thomson et de Helmholtz. Cette hétérogénéité de moyens ne satisfaisait pas l'auteur lui-même, qui indiquait qu'il espérait, dans une étape ultérieure, fournir un modèle mécanique cohérent pour la totalité des phénomènes électriques et magnétiques. Pour le moment, seuls les domaines artificiellement séparés de l'électrostatique, de la magnétostatique et de la conduction électrique recevaient une illustration mécanique ; et encore sans que celle-ci rendît compte des forces mécaniques agissant sur les corps porteurs de charges ou de courants. De plus, les équations fondamentales ne s'appliquaient qu'aux courants fermés (car $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ implique $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ et donc que toute ligne de courant soit fermée) et aucun lien n'apparaissait entre électrostatique et électrodynamique. Dans ce contexte limité, les équations du champ étaient mathématiquement équivalentes aux équations des théories continentales. Cette équivalence avec des théories qu'il reconnaissait comme pertinentes confirmait Maxwell dans la confiance qu'il avait dans le point de vue de Faraday.[6]

---

5. Cf. Wise 1979.

6. Cf. Franck Achard, « Argumentation et thèmes méthodologiques dans les publications théoriques de James Clerk Maxwell », Thèse de doctorat, EHESS (Paris, 2003).

Extrait n° 1

À PROPOS DES LIGNES DE FORCE DE FARADAY

« On Faraday's lines of force », J.C. Maxwell, Cambridge Philosophical Society, *Transactions* (1856), reproduit dans *The Scientific papers of James Clerk Maxwell*, 2 vols. (Cambridge, 1890), vol. 1, 155-229.
Extraits traduits par Danièle Lederer.

L'ÉTAT ACTUEL DE LA SCIENCE DE L'ÉLECTRICITÉ semble particulièrement peu propice aux spéculations. Les lois de la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs ont été déduites analytiquement des résultats expérimentaux ; certaines parties de la théorie mathématique du magnétisme sont confirmées, tandis que, pour d'autres, les résultats expérimentaux font défaut. La théorie de la conduction du galvanisme et celle de l'attraction mutuelle de deux courants ont conduit à quelques formules, mais elles restent sans lien avec les autres domaines de la science. Il n'est plus possible à l'heure actuelle de présenter une théorie de l'électricité si elle n'établit pas de relation, non seulement entre l'électricité statique et les courants électriques, mais aussi entre les attractions et les phénomènes d'induction électrique dans l'un et l'autre cas. Cette théorie doit donner de façon exacte les lois dont on connaît la forme mathématique, et fournir le moyen de rendre compte des effets observés dans les cas limites où les formules connues ne sont pas valables. En conséquence, pour savoir ce qu'il convient de faire dans cette discipline, ceux qui l'étudient doivent se familiariser avec une quantité considérable de mathématiques compliquées et le simple fait d'avoir à les garder en mémoire empêche de progresser. Pour une étude efficace de cette discipline, il faut commencer par la simplifier et mettre les résultats connus sous une forme que l'esprit puisse saisir. Cette simplification peut donner soit une pure formule mathématique, soit une hypothèse physique. Dans le premier cas, on perd de vue les phénomènes à expliquer et, bien qu'on puisse dégager les conséquences de lois données, on ne peut jamais en tirer une vision élargie de leur interconnexion. Par ailleurs, si nous adoptons une hypothèse physique, nous ne voyons plus les phénomènes que par le truchement d'un medium, et risquons l'aveuglement devant les faits et les suppositions irréfléchies qu'une explication parcellaire encourage. Il nous faut donc trouver une méthode d'étude qui, à chaque étape, permet à l'esprit de prendre appui sur une conception physique claire, sans se trouver prisonnier d'une théorie issue de la partie de la physique dont provient cette conception : la recherche de subtilités mathématiques ne doit pas nous faire oublier l'objet de l'étude, et nous ne devons pas laisser une hypothèse séduisante nous entraîner au-delà de la vérité.

Pour avoir des idées physiques sans pour autant adhérer à une théorie, nous devons nous familiariser avec l'existence d'analogies physiques. Par analogie physique, j'entends une certaine similitude entre les lois gouvernant deux disciplines, et qui permet d'illustrer l'une par l'autre. Ainsi, toutes les disciplines mathématisées sont fondées sur les relations entre les lois de la physique et les lois des nombres, de sorte que le but de toute science exacte est de ramener les problèmes de la nature à la détermination de certaines grandeurs, en faisant des opérations sur des nombres. Passant de la plus universelle des analogies à une autre, très partielle, nous trouvons que cette même ressemblance dans l'expression mathématique de deux phénomènes différents est à la base d'une théorie physique de la lumière.

Lors de son passage d'un milieu à un autre, les changements de direction que subit la lumière sont identiques aux déviations de la trajectoire d'une particule qui se déplace dans un espace confiné, où agissent des forces intenses. Cette analogie, qui porte uniquement sur la direction, et non sur la vitesse du mouvement, a longtemps été considérée comme la véritable explication de la réfraction de la lumière ; elle est encore utile pour résoudre certains problèmes, dans lesquelles elle peut être utilisée sans danger comme une méthode artificielle. L'autre analogie, entre la lumière et les vibrations d'un milieu élastique, va beaucoup plus loin, mais, bien que son importance et sa fécondité ne puissent pas être surestimées, nous devons nous rappeler qu'elle ne repose que sur une ressemblance de *forme* entre les lois de la lumière et celles des vibrations. En la dépouillant de son habillage physique et en la réduisant à une théorie d'« alternances transversales », nous pourrions obtenir une description strictement basée sur l'observation, mais à laquelle manqueraient à la fois la clarté de la conception et la fertilité de la méthode. Si j'en ai dit autant sur la question contestée de l'optique, c'est pour introduire une réflexion sur la théorie des attractions à distance qui est admise de façon quasi universelle.

Nous avons tous assimilé la conception mathématique de ces attractions ; nous savons raisonner à leur propos et déterminer leurs formes. Ces formules ont un sens mathématique clair, en accord avec les phénomènes de la nature. Il n'existe pas, dans l'utilisation des mathématiques, de formule en meilleur accord avec la nature que celle des attractions, ni de théorie aussi bien ancrée dans l'esprit de l'homme que celle de l'action à distance des objets les uns sur les autres. Les lois de la conduction de la chaleur dans un milieu uniforme semblent à première vue aussi différentes que possible de celles relatives aux attractions. Les quantités qu'elles introduisent sont la *température*, le *flux de chaleur*, la *conductivité*. Le mot *force* est étranger au sujet. Pourtant, nous trouvons que les lois mathématiques qui décrivent le mouvement uniforme de la chaleur dans un milieu homogène sont identiques, dans leur forme, à celles des forces inversement proportionnelles au carré de la distance. Il suffit de substituer *source de chaleur* à *centre d'attraction*, *flux de chaleur* à *accélération causée en un point par l'attraction*, et *température* à *potentiel*, et la solution d'un problème d'attractions devient celle d'un problème de conduction de la chaleur.

Cette analogie entre les formules de la chaleur et celles de l'attraction a été relevée pour la première fois, je crois, par le professeur William Thomson dans le *Camb. Math. Journal*, volume III.[1]

Voyons plus avant. On considère que la conduction de la chaleur provient d'une action qui se produit au contact entre deux parties voisines d'un milieu continu, tandis que la force d'attraction s'exerce entre des objets éloignés ; et pourtant, si l'on ne connaissait rien d'autre que ce qu'expriment les formules mathématiques, rien ne distinguerait les deux types de phénomènes.

À vrai dire, si l'on introduit d'autres considérations et si on pousse plus loin l'observation, on voit apparaître des différences importantes entre les deux domaines, mais la ressemblance mathématique entre certaines de leurs

1. Dans cet article fondamental, le jeune Thomson (il avait 16 ans !) se servait de la dite analogie pour établir quelques théorèmes de l'électrostatique.

lois n'en demeure pas moins, et peut servir à faire émerger des idées mathématiques appropriées.

C'est au moyen d'analogies de ce type que j'ai tenté de présenter à l'esprit, sous une forme commode et maniable, les idées mathématiques nécessaires à l'étude des phénomènes liés à l'électricité. Les méthodes sont en général inspirées par les modes de raisonnement que l'on trouve dans les recherches de Faraday[*] et qui, bien qu'une interprétation mathématique en ait été donnée par le Prof. Thomson et d'autres, sont le plus souvent considérées comme non précises et non mathématiques, lorsqu'on les compare à celles utilisées par les mathématiciens déclarés. J'espère que la méthode que j'adopte montrera clairement que je ne suis pas en train de construire une théorie physique dans un domaine dans lequel je n'ai pratiquement fait aucune expérience, et que mon propos se limite à montrer comment, en s'en tenant strictement aux idées et aux méthodes de Faraday, il est possible de présenter de façon claire pour le mathématicien les relations qui existent entre les phénomènes de nature très diverse que Faraday a découverts. J'éviterai autant que possible d'introduire tout ce qui ne sert pas directement à illustrer les méthodes de Faraday ou les conclusions mathématiques que l'on peut en tirer. Dans l'exposé des parties les plus simples, j'utiliserai les méthodes mathématiques de Faraday tout comme ses idées. Lorsque la complexité du sujet le rendra nécessaire, j'utiliserai la notation analytique, en me limitant toujours au développement des idées émanant du même philosophe.[2]

Dans un premier temps, il me faut expliquer et illustrer la notion de « lignes de force ».

Quand un corps est électrisé d'une façon quelconque, un petit objet portant une charge électrique positive et placé en un point quelconque est soumis à une force qui le pousse dans une certaine direction. Si au contraire le petit objet porte une charge négative, il sera poussé par une force égale, mais dans le sens exactement opposé.

Les effets d'un corps magnétique sur les pôles nord ou sud d'un petit aimant présentent la même dualité : si le pôle nord est poussé dans une direction, le pôle sud est poussé dans le sens opposé.

Ainsi, en chaque point de l'espace on peut trouver une ligne qui indique la direction et le sens de la force s'exerçant sur une particule chargée positivement, ou sur un pôle nord élémentaire — et par là-même le sens opposé

* Voir plus spécialement la série xxxviii de *Experimental Researches*, et *Phil. Mag.* 1852.

2. Il faut ici entendre « philosophe » au sens britannique de « natural philosopher ».

à la force agissant sur une particule chargée négativement, ou sur un pôle sud élémentaire. La direction et le sens de la force sont définis en tout point de l'espace ; commençons en un point quelconque et traçons une courbe telle que, lorsqu'on la parcourt, en chaque point sa direction coïncide avec celle de la force résultante en ce même point. La courbe ainsi obtenue indique la direction de la force en chacun des points où elle passe, c'est la raison pour laquelle on l'appelle une *ligne de force*. En procédant de la même manière, on peut tracer d'autres lignes de force et remplir ainsi tout l'espace de courbes qui indiquent la direction de la force en chaque point.

On obtient ainsi un modèle géométrique des phénomènes physiques qui donne la *direction* de la force. Mais il nous faut aussi trouver une façon de représenter l'*intensité* de la force en un point donné. Si nous considérons les courbes non comme de simples lignes, mais comme constituant de minces tubes, de section variable, et qui transportent un fluide incompressible, alors, puisque la vitesse du fluide est inversement proportionnelle à la section du tube, nous pouvons faire varier la vitesse suivant une loi déterminée, en modifiant en conséquence la taille de la section du tube. Le mouvement du fluide dans ces tubes permet alors de représenter l'intensité de la force tout comme sa direction. Cette façon de représenter l'intensité d'une force par la vitesse d'un fluide imaginaire circulant dans un tube peut s'appliquer à tout système de forces, mais elle prend une forme particulièrement simple lorsque les forces résultent d'attractions inversement porportionnelles au carré de la distance, ce qui est le cas de celles observées dans les phénomènes électriques et magnétiques. Lorsque les forces sont quelconques, il reste en général des interstices entre les divers tubes mais, pour les forces électriques et magnétiques, il est possible de disposer les tubes de façon à ne laisser aucun interstice. Les tubes sont alors de simples surfaces qui guident le mouvement d'un fluide qui remplit tout l'espace. On avait pris l'habitude d'étudier les lois de ces forces en supposant d'emblée les phénomènes dus à des force d'attraction ou de répulsion s'exerçant entre certains points. Il est possible d'adopter un point de vue différent, mieux adapté à nos études plus difficiles, en admettant que les forces que nous examinons peuvent être définies et représentées, en intensité et en direction, par le mouvement stationnaire d'un fluide incompressible.

En ramenant tout à l'idée purement géométrique du mouvement d'un fluide imaginaire, j'espère être général et précis, et éviter les dangers que présenterait l'adoption prématurée d'une théorie prétendant décrire la cause des phénomènes. Si les résultat de mes réflexions sont d'une utilité quelconque aux expérimentateurs, pour ordonner et interpréter leurs résultats, elles auront rempli leur but ; une théorie aboutie, dans laquelle les faits physiques seront expliqués de manière physique, sera élaborée par ceux qui, scrutant la Nature elle-même, peuvent trouver la seule véritable réponse aux questions que suggère la théorie mathématique.

> [...] Dans une première partie, intitulée « Théorie du mouvement d'un fluide incompressible », Maxwell développe l'analogie entre l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux et les lois de l'électrostatique, de la magnétostatique et de la conduction électrique (voir notre introduction). Il rappelle aussi quelques résultats d'Ampère et de Faraday, repris dans les sections suivantes.

Deuxième Partie

A propos de « l'état électro-tonique » de Faraday

Lorsqu'un conducteur se déplace au voisinage d'un courant électrique ou d'un aimant, ou encore lorsque un aimant ou un courant proches du conducteur voient leur position ou leur intensité modifiées, alors s'exerce sur le conducteur une force qui produit une tension électrique, ou bien un courant continu, suivant que le circuit est ouvert ou fermé. Le courant ne se produit que lorsqu'apparaissent des *modifications* dans l'environnement électrique ou magnétique du conducteur ; tant que cet environnement reste constant, on n'observe aucun effet à l'intérieur du conducteur. Pourtant, le conducteur n'est pas dans le même état lorsqu'il est situé à proximité d'un courant ou d'un aimant que lorsqu'il est loin de leur influence : en effet lorsqu'on supprime le courant ou l'aimant, cela produit un courant qui n'existerait pas si le courant ou l'aimant n'avait eu aucune influence auparavant.

Des considérations de ce genre ont amené le professeur Faraday à relier la découverte des courants induits à la notion d'un état dans lequel tous les corps sont amenés par la présence de courants ou d'aimants. Tant qu'il n'est pas perturbé, cet état ne se manifeste par aucun phénomène connu mais toute modification apportée à cet état se traduit par un courant, ou par une tendance à faire passer un courant. Il a appelé cet état « l'état électro-tonique » et, bien qu'il ait réussi par la suite à expliquer de façon moins hypothétique les phénomènes qui avaient justifié son introduction, il a, à plusieurs reprises, laissé entendre que l'on découvrirait un jour des phénomènes qui feraient de l'état l'électro-tonique un objet légitime d'inférence inductive. Ces conjectures, auxquelles Faraday avait été amené par l'étude des lois qu'il avait bien établies et qu'il n'a abandonnées que faute de preuves expérimentales directes de la présence de cet état inconnu, n'ont pas, à ma connaissance, été l'objet d'une étude mathématique. Peut-être pense-t-on que les déterminations quantitatives des divers phénomènes ne sont pas suffisamment rigoureuses pour servir de base à une théorie mathématique. Pourtant, Faraday ne s'est pas contenté d'énumérer les résultats de ses expériences en laissant à découvrir les lois pas le calcul. Dès qu'une loi se laissait deviner, il l'a énoncée en des termes aussi dénués d'ambiguïé que ceux des mathématiques pures. Si un mathématicien, les acceptant comme une vérité physique, en déduit d'autres lois que l'on pourra vérifier expérimentalement, il aura simplement aidé le physicen à organiser ses idées, ce qui est, il faut le reconnaître, une étape nécessaire de l'induction scientifique.

Dans ce qui suit, donc, les lois élaborées par Faraday seront considérées comme vraies, et l'on montrera qu'en suivant sa pensée il est possible d'en déduire d'autres plus générales. S'il apparaît alors que ces lois, à l'origine établies pour rendre compte d'une série de phénomènes, peuvent être généralisées à des phénomènes d'une autre nature, ces relations mathématiques peuvent donner au physicien des idées pour trouver des relations physiques ; ainsi, la réflexion pure peut être mise à profit dans la physique expérimentale.

La quantité et l'intensité considérées comme des propriétés des courants électriques

On trouve que certains des effets d'un courant électrique sont les mêmes, quelle que soit la partie du circuit où on les mesure. Les quantités d'eau, ou de tout autre électrolyte, décomposées dans deux parties différentes d'un même circuit sont toujours égales ou équivalentes, aussi différentes que soient les formes de ces diverses parties ou la matière qui les compose. À l'intérieur du même circuit, l'effet magnétique d'un fil conducteur est lui aussi indépendant de la forme et de la nature du conducteur. Il existe donc une propriété électrique qui prend la même valeur en toute section du circuit. Si nous nous imaginons le conducteur comme un tuyau dans lequel un liquide est forcé de circuler, alors la quantité de liquide qui passe doit être la même en chaque point et nous pouvons définir la *quantité* d'un courant électrique comme la quantité d'électricité qui traverse, par unité de temps, une section complète de ce courant. Pour l'instant, nous mesurerons la quantité d'électricité par la quantité d'eau qu'elle décomposerait en une unité de temps.

Pour décrire de façon mathématique les courants dans un conducteur quelconque, nous devons définir, non seulement le flux total à travers une section complète, mais aussi le flux en un point donné et dans une direction déterminée.

DÉFINITION. La quantité d'un courant en un point donné et dans une direction déterminée est égale, lorsqu'elle est uniforme, à la quantité d'électricité qui traverse une unité de surface placée en ce point, perpendiculairement à la direction considérée. Quand elle est variable, la quantité est définie en supposant le flux uniforme et égal à sa valeur au point choisi.

Dans la suite, la quantité du courant électrique au point (xyz), calculée dans les directions des axes x, y, z sera notée a_2, b_2, c_2, respectivement.[3]

La quantité d'électricité qui passe, pendant une unité de temps, à travers la surface élémentaire dS est

$$dS\,(la_2 + mb_2 + nc_2)$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à dS.

Ce flux d'électricité en un point quelconque d'un conducteur est dû aux forces électro-motrices qui agissent en ce point. Celles-ci peuvent être externes ou internes.

Les forces électromotrices externes proviennent soit du mouvement relatif de courants et d'aimants, ou d'une modification de leur intensité, ou d'autres causes agissant à distance.

Les forces électromotrices internes viennent principalement des différences de tension électrique en des points du conducteur situés au voisinage immédiat du point considéré. Les autres causes sont des différences de composition chimique ou de température dans des parties contiguës du conducteur.

Soit p_2 la tension électrique en un point quelconque, et X_2, Y_2, Z_2 les composantes parallèles aux axes de la somme de toutes les forces électromotrices

3. Il s'agit des composantes du vecteur densité de courant **j**. Maxwell appelle « intensité de l'action électrique » le champ électrique **E** (le plus souvent appellé force électrique au XIX[e], ou force électromotrice quand on est à l'intérieur d'un conducteur) et non pas l'intensité du courant dans un conducteur. La distinction entre intensité et quantité provient de l'analogie développée dans la section précédente (omise), qui fait correspondre un flux à une quantité et une force à une intensité. Par la suite, Maxwell l'utilise pour justifier la forme des équations du champ : le rotationnel d'une « intensité » comme « l'intensité électrique » **E** doit être une quantité, et une quantité comme la « quantité magnétique » **B** doit être le rotationnel d'une intensité (l'état électrotonique **A**). Les lettres romaines réfèrent à une quantité ; les lettres grecques à une intensité ; l'indice 2 à une grandeur électrique ; et l'indice 1 à une grandeur magnétique.

dues aux autres causes ; alors, si α_2, β_2, γ_2 est la force électromotrice totale

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= X_2 - \frac{dp_2}{dx} \\ \beta_2 &= Y_2 - \frac{dp_2}{dy} \\ \gamma_2 &= Z_2 - \frac{dp_2}{dz} \end{aligned}\right\} . \qquad \text{(A)}$$

Or la quantité du courant dépend de la force électromotrice et de la résistance du matériau. Si cette résistance prend la même valeur k_2 dans toutes les directions :[4]

$$\alpha_2 = k_2 a_2, \quad \beta_2 = k_2 b_2, \quad \gamma_2 = k_2 c_2, \qquad \text{(B)}$$

mais, si la résistance prend des valeurs différentes dans les différentes directions, la loi sera plus compliquée.

On peut considérer que ces quantités α_2, β_2, γ_2 représentent l'intensité de l'action électrique dans les directions des axes x, y, z.

Mesurée le long d'un élément de longueur $d\sigma$, l'intensité est donnée par

$$\varepsilon = l\alpha + m\beta + n\gamma,$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la tangente.

L'intégrale $\int \varepsilon d\sigma$, calculée le long d'une portion déterminée d'une courbe, représente l'intensité totale le long de cette portion de courbe. Si la courbe est fermée, l'intégrale représente l'intensité totale de la force électromotrice dans la courbe fermée.

En remplaçant α, β, γ selon les équations (A),

$$\int \varepsilon d\sigma = \int (Xdx + Ydy + Zdz) - p + C.$$

Ainsi, si $(Xdx + Ydy + Zdz)$ est une différentielle totale, l'intégrale de $\int \varepsilon d\sigma$ le long d'une courbe fermée s'annule, et pour toute courbe fermée on a

$$\int \varepsilon d\sigma = \int (Xdx + Ydy + Zdz),$$

l'intégration étant effectuée le long de la courbe. Ainsi, le long d'une courbe fermée, l'intensité totale de la force éléctromotrice effective est égale à l'intensité totale de la force électromotrice imposée.

4. Si $\mathbf{E}$ désigne « l'intensité de l'action électrique » et $\mathbf{j}$ la « quantité de courant, » on a $\mathbf{E} = k_2\mathbf{j}$ (et donc $k_2 = \sigma^{-1}$, si σ désigne la conductivité).

La *quantité* totale de conduction à travers une surface quelconque est donnée par

$$\int edS,$$

où

$$e = la + mb + nc,$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale

$$\int e\, dS = \iint a\, dydz + \iint b\, dzdx + \iint c\, dxdy,$$

les intégrations se faisant sur la surface considérée. Quand la surface est fermée, on trouve en intégrant par parties

$$\int e\, dS = \iiint \left(\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} \right) dxdydz.$$

En posant,

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 4\pi\rho, \tag{C}$$

$$\int e\, dS = 4\pi \iiint \rho\, dxdydz,$$

où l'intégration qui figure au deuxième membre est étendue à tout le volume contenu à l'intérieur de la surface.[5] Dans de nombreux phénomènes, y compris tous les cas de courants uniformes, la quantité ρ disparaît.

Quantité et Intensité magnétiques

Ses études des lignes de force magnétique ont mené Faraday à la conclusion que, dans les surfaces tubulaires* que constituent un ensemble de ces lignes, la quantité d'induction à travers une section du tube est constante et que les changements qui se produisent dans l'aspect des lignes au passage d'un corps à un autre doivent s'expliquer par une différence de la *capacité inductive* des deux corps, qui est analogue à la conductivité dans la théorie des courants électriques.

Dans ce qui suit, nous aurons l'occasion de traiter parallèlement des quantités et intensités magnétique et électriques. Lorsque ce sera le cas, les quantités liées au magnétisme seront notées avec un indice 1, tandis que les

5. Dans cette section, Maxwell a laissé tomber l'indice 2, ce qui signifie que les relations sont valables pour toute quantité (a, b, c) et toute intensité associée (α, β, γ). Dans le cas particulier du comportement électrostatique des diélectriques, l'intensité est le vecteur **E**, et la quantité est le vecteur $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ tel que $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ (ρ désignant la densité de charge). La relation (C) de Maxwell n'est autre que le théorème de Gauss $\oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi \int \rho\ \mathrm{d}\tau$.

* *Exp. Res.* 3271, définition de « sphondyloide ».

quantités électriques auront l'indice 2. Les équations qui lient a, b, c, k, α, β, γ, p et ρ ont la forme que nous venons de donner. Les lettres a, b, c représentent la quantité de l'induction magnétique ; k est la résistance à l'induction magnétique qui peut prendre des valeurs différentes dans les différentes directions ; α, β, γ sont les forces effectives d'aimantation, reliées à a, b, c par les équations (B) ; p est le potentiel (ou tension) magnétique qui sera expliqué par la suite ; ρ représente la densité de matière magnétique réelle,[6] liée à a, b, c par les équations (C). Les détails des calculs concernant le magnétisme seront plus faciles à comprendre une fois que nous aurons exposé les relations entre le magnétisme et l'électricité ; il nous suffit de dire ici que les définitions de la quantité totale, liée à une surface, et de l'intensité totale, liée à une courbe, sont les mêmes en magnétisme et en électricité.

Électromagnétisme

Ampère a démontré les lois suivantes, concernant les attractions et répulsions des courants électriques :

I. Des courants égaux et opposés exercent des forces égales et opposées.

II. Un courant sinueux est équivalent à un courant droit, pourvu que les deux restent voisins sur toute leur longueur.

III. Des courants égaux parcourant des courbes fermées semblables et situées de façon semblables exercent des forces égales, quelles que soient les dimensions linéaires des circuits.

IV. Un courant fermé n'exerce pas de force qui tende à faire tourner un conducteur circulaire autour de son centre.

Il convient de remarquer que les courants sur lesquels travaillait Ampère étaient constants, et donc ré-entrants. Tous ses résultats proviennent donc d'expériences relatives à des courants fermés, et son expression pour les actions mutuelles exercées par des éléments de courant repose sur l'hypothèse que cette action est dirigée suivant la ligne qui joint les deux éléments.

6. Maxwelll parle de « matière magnétique » réelle quand il s'agit des fluides hypothétiques associés aux aimants suivant la théorie de Coulomb du magnétisme. Le cas fictif correspond au double feuillet magnétique équivalent à une boucle de courant selon Ampère. Dans le présent mémoire, Maxwell donne à la « quantité de l'induction magnétique » **B** une divergence non-nulle conforme à la distribution des masses magnétiques dans les aimants, alors que dans son *Traité* il adopte le point de vue de Faraday selon lequel la divergence de **B** est toujours nulle et la force magnétique **H** est reliée à **B** et à l'aimantation rigide **I** par la relation $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mathbf{I}$. Autrement dit, la « quantité d'induction magnétique » du premier Maxwell correspond à notre vecteur $\mu\mathbf{H}$, pas à notre **B**.

Cette hypothèse est sans aucun doute conforme à la conviction de tous les hommes de science lorsqu'ils traitent des forces en considérant qu'elles sont dues à l'action mutuelle de particules ; mais, en ce qui nous concerne ici, nous nous référons à des principes différents et nous cherchons l'explication des phénomènes, non dans les seuls courants, mais ausi dans le milieu environnant.

La première et la deuxième loi montrent que les courants doivent être combinés comme des vitesses ou des forces.

La troisième loi exprime une propriété générale de toutes les forces qui peuvent être considérées comme proportionnelles à l'inverse du carré de la distance à un ensemble donné de points, et la quatrième montre que les forces électro-magnétiques peuvent toujours être ramenées aux attractions et répulsions créées par une matière imaginaire convenablement disposée.

En fait, l'action exercée par un très petit circuit en un point proche est identique à celle qu'exerce un petit aimant sur un point extérieur. Si nous divisons toute surface en petits éléments, et si nous imposons à des courants égaux de circuler dans le même sens autour de toutes ces petites surfaces, l'effet sur un point qui se trouve en dehors de la surface sera identique à celui créé par une coquille de même force que la surface, dans laquelle se trouve une aimantation uniforme, perpendiculaire à la surface. Mais, d'après la première loi, tous les courants qui circulent dans les petits circuits vont s'annuler les uns les autres, ne laissant qu'un seul courant qui circule le long de la courbe limitant la surface. Si la direction du courant coïncide avec celle du mouvement apparent du Soleil, alors le sens de l'aimantation de la coquille imaginaire sera le même que celui de l'aimantation de la Terre.[*]

L'intensité totale de la force magnétisante le long d'une courbe fermée enlaçant le courant fermé est constante, et peut donc servir à mesurer la quantité du courant.[7] Comme cette intensité ne dépend pas de la forme de la courbe fermée mais seulement de la quantité du courant qui la traverse, nous pouvons considérer le cas simple d'un courant qui traverse une surface élémentaire d'aire dy dz.

* Voir *Experimental Researches* (3265) pour les relations entre les circuits électriques et magnétiques considérés comme des courbes qui s'enlacent mutuellement.

7. Il s'agit là du « théorème d'Ampère » $\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ que Maxwell fut le premier à énoncer explicitement. Comme il le montre dans un manuscrit contemporain, ce théorème résulte de l'équivalence entre un courant linéaire fermé et un double feuillet magnétique. Car la circulation du vecteur $\mathbf{H}$ est identique à la discontinuité du potentiel des masses magnétiques à travers le feuillet, laquelle est donnée par l'intensité du courant.

Orientons l'axe des x vers l'Ouest, z vers le Sud et y vers le haut. Soit x, y, z les coordonnées d'un point situé au milieu de $dy\,dz$, alors, l'intensité totale mesurée le long des quatre côtés de la l'élément est

$$+\left(\beta_1 + \frac{d\beta_1}{dz}\frac{dz}{2}\right) dy,$$

$$-\left(\gamma_1 + \frac{d\gamma_1}{dy}\frac{dy}{2}\right) dz,$$

$$-\left(\beta_1 - \frac{d\beta_1}{dz}\frac{dz}{2}\right) dy,$$

$$+\left(\gamma_1 - \frac{d\gamma_1}{dy}\frac{dy}{2}\right) dz,$$

$$\text{intensité totale} = \left(\frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy}\right) dy\,dz.$$

La quantité d'électricité conduite à travers la surface élémentaire $dy\,dz$ est $a_2 dydz$; ainsi, si nous définissons la mesure d'un courant électrique comme l'intensité totale de la force magnétisante dans une courbe fermée qui l'enlace, nous aurons[8]

$$a_2 = \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy},$$

$$b_2 = \frac{d\gamma_1}{dx} - \frac{d\alpha_1}{dz},$$

$$c_2 = \frac{d\alpha_1}{dy} - \frac{d\beta_1}{dx},$$

Ces équations nous permettent de déterminer la distribution des courants d'éléctricité dès que nous connaissons les valeurs de α, β, γ, les intensités magnétiques.

Si α, β, γ sont les dérivées partielles d'une fonction de x, y, z par rapport à x, y, z respectivement, alors a_2, b_2, c_2 s'annulent, et nous savons ainsi que le magnétisme ne résulte pas de courants électriques situés dans la partie considérée du champ.[9] Il est dû soit à la présence d'un magnétisme permanent dans le champ, soit à des forces magnétisantes créées par des causes extérieures.

8. ou encore, $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$.

9. Maxwell emploie ici et ailleurs le mot « champ » (*field*) en son sens originaire (dû à Faraday) de domaine de l'espace dans lequel s'exercent les actions magnétiques ou électriques. L'usage moderne, selon lequel **E** et **H** sont des champs, ne s'est établi qu'au début du XX[e] siècle.

Nous constatons que les équations ci-dessus donnent, en dérivant[10]

$$\frac{da_2}{dx} + \frac{db_2}{dy} + \frac{dc_2}{dz} = 0\,,$$

qui est l'équation de continuité pour des courants fermés. Nous nous limitons donc pour l'instant à l'étude des courants fermés ; nous en savons très peu sur les effets magnétiques créés par des courants qui ne sont pas fermés.

Avant d'aborder le calul de ces états électriques et magnétiques, il peut peut être utile d'énoncer un certain nombre de théorèmes généraux, que l'on peut démontrer de façon analytique.

> [...] Il s'agit de théorèmes aujourd'hui classiques d'analyse vectorielle, dus à George Green et à George Gabriel Stokes. Nous les rappellons en note au fur et à mesure de leur utilisation par Maxwell.

Regardons maintenant les implications de ces théorèmes analytiques en ce qui concerne la théorie du magnétisme. Les quantités concernant le magnétisme seront notées avec un indice 1. Ainsi a_1, b_1, c_1 sont les composantes dans les directions x, y, z de la quantité de l'induction magnétique agissant en un point donné et α_1, β_1, γ_1 les intensités de l'aimantation en ce même point ou, ce qui revient au même, les composantes de la force qui s'exercerait sur le pôle sud unité d'un aimant s'il était placé en ce point, sans perturber la distribution de magnétisme.

Les courants électriques se déduisent des intensités magnétiques par les équations

$$a_2 = \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy} \quad \&\text{c.}$$

Quand il n'y a pas de courant électrique, alors

$$\alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz = dp_1,$$

différentielle totale d'une fonction de x, y, z. En suivant le principe d'analogie, nous pouvons appeler p_1 la tension magnétique.

Les forces qui agissent sur une masse m de magnétisme Sud en un point quelconque sont

$$-m\frac{dp_1}{dx}, \quad -m\frac{dp_1}{dy}, \quad \text{et} \quad -m\frac{dp_1}{dz},$$

10. ou encore, $\nabla \cdot \mathrm{j} = 0$.

dans la direction des axes, et donc le travail total exercé au cours d'un déplacement d'un système magnétique est égal au décrément de l'intégrale

$$Q = \iiint \rho_1 \, p_1 \, dxdydz$$

calculée dans tout le système.[11]

Appelons Q *le potentiel total du système sur lui-même*. L'augmentation ou la diminution de Q vont mesurer le travail fourni ou reçu lors de tout déplacement d'une partie du système, et nous permettront donc de déterminer les forces qui agissent sur cette partie du système.

D'après le théorème III, on peut mettre Q sous la forme[12]

$$Q = +\frac{1}{4\pi} \iiint (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1) \, dxdydz,$$

dans laquelle α_1 β_1 γ_1 sont les dérivées partielles de p_1 par rapport à x, y et z, respectivement.

Si nous supposons que cette expression de Q est valable quelles que soient les valeurs de α_1 β_1 γ_1, nous passons de considérations sur le magnétisme des aimants permanents aux effets magnétiques produits par des courants électriques et, d'après le théorème VII,[13]

$$Q = \iiint \left\{ p_1\rho_1 - \frac{1}{4\pi}(\alpha_0 a_2 + \beta_0 b_2 + \gamma_0 c_2) \right\} dxdydz.$$

Dans le cas des courants électriques, les composantes des courants doivent être multipliées par les fonctions α_0, β_0, γ_0, respectivement, et la sommation dans tout le système de chacun de ces produits donne la contribution de ces courants à Q.

Les fonctions α_0, β_0, γ_0 permettent d'éviter les considérations sur la quantité d'induction magnétique *à travers* le circuit. Au lieu de cette méthode artificielle, nous en avons une, naturelle, qui consiste à référer les courants à des quantités qui existent aux mêmes points qu'eux. Je donne à

11. Maxwell oublie ici un facteur ½. L'expression correcte de l'énergie potentielle du système est $\frac{1}{2}\int \rho_1 p_1 \mathrm{d}\tau$.

12. Suivant le théorème III, pour tout champ vectoriel $\mathbf{X}$ et pour tout champ scalaire f, on a $\int (\nabla \cdot \mathbf{X}) f \mathrm{d}\tau = -\int \mathbf{X} \cdot \nabla f \, \mathrm{d}\tau$. Comme $4\pi\rho_1 = \nabla \cdot \mathbf{B}$ et $\mathbf{H} = -\nabla p_1$ (après correction du signe de Maxwell), on a donc $Q = \int \rho_1 p_1 \mathrm{d}\tau = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \mathrm{d}\tau$.

13. D'après le théorème VII (dû à Stokes), tout champ vectoriel peut s'exprimer comme la somme d'un rotationnel et d'un gradient. Il existe donc $\mathbf{A}$ et p_1 tels que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla p_1$ (le potentiel magnétique p_1 est déterminé par les masses magnétiques ρ_1 suivant $4\pi\rho_1 = \nabla \cdot \mathbf{B} = -\Delta p_1$). On a donc $\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, \mathrm{d}\tau = \int \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \, \mathrm{d}\tau - \int \mathbf{H} \cdot \nabla p_1 \mathrm{d}\tau = \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \, \mathrm{d}\tau + \int p_1 \nabla \cdot \mathbf{H} \, \mathrm{d}\tau = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \, \mathrm{d}\tau + 4\pi \int p_1 \rho_1 \mathrm{d}\tau$ (l'avant-dernière égalité résulte d'intégrations par parties). Au signe près, le triplet $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ de Maxwell correspond aux coordonnées du vecteur $\mathbf{A}$.

ces quantités le nom de *fonctions électro-toniques*, ou de *composantes de l'intensité électro-tonique.*

Étudions maintenant la conduction du courant électrique lors d'un changement de l'état électro-tonique. La méthode que nous allons utiliser est une application de celle présentée par Helmholtz dans son ouvrage sur la conservation de la force.[*,14]

Supposons qu'il existe des sources extérieures de courant électrique qui créeraient dans le conducteur des courants dont la quantité est mesurée par a_2, b_2, c_2 et l'intensité par α_2, β_2, γ_2. Pendant un intervalle de temps dt, le travail provenant de ces sources est

$$dt \iiint (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2)\, dxdydz$$

pour vaincre la résistance et

$$\frac{dt}{4\pi}\frac{d}{dt}\iiint (a_2\alpha_0 + b_2\beta_0 + c_2\gamma_0)\; dxdydz$$

sous forme de travail mécanique effectué par l'action électro-magnétique de ces courants.

Si aucune cause extérieure ne produit de courants, alors l'expresssion du travail total fourni par ces causes doit s'annuler, et nous avons

$$dt \iiint (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2)\, dxdydz + \frac{dt}{4\pi}\frac{d}{dt}\iiint (a_2\alpha_0 + b_2\beta_0 + c_2\gamma_0)\; dxdydz,$$

où les intégrales sont calculées sur un volume quelconque. Nous devons donc avoir

$$a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\;(a_2\alpha_0 + b_2\beta_0 + c_2\gamma_0)$$

en tout point de l'espace. Mais nous devons nous rappeler que nous considérons que la variation de Q est due aux variations de α_0, β_0, γ_0 et non à celles de a_2, b_2, c_2. Nous devons donc traiter a_2, b_2, c_2 comme des constantes, et l'équation devient

$$a_2\left(\alpha_2 + \frac{1}{4\pi}\frac{d\alpha_0}{dt}\right) + b_2\left(\beta_2 + \frac{1}{4\pi}\frac{d\beta_0}{dt}\right) + c_2\left(\gamma_2 + \frac{1}{4\pi}\frac{d\gamma_0}{dt}\right) = 0.$$

Pour que cette équation puisse être vérifiée quelles que soient les valeurs de a_2, b_2, c_2, chaque terme doit être nul. Les forces électro-motrices causées par

* Traduit dans Taylor : *New Scientific Memoirs*, Part /sc ii

14. Il s'agit du fameux mémoire de Hermann von Helmholtz (*Über die Erhaltung der Kraft* ; Berlin, 1847), où celui-ci développe les conséquences de ce que nous appelons aujourd'hui le principe de conservation de l'énergie et donne une dérivation de l'induction électromagnétique à partir de ce principe joint à l'existence des forces électrodynamiques.

des aimants ou des courants éloignés s'expriment donc, en termes des fonctions électro-toniques :[15]

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\alpha_0}{dt}, \; \beta_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\beta_0}{dt}, \; \gamma_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\gamma_0}{dt}.$$

Les résultats expérimentaux montrent que l'expression $\frac{da_0}{dt}$ correspond au changement de l'état électro-tonique d'*une particule donnée du conducteur*, qu'il provienne d'une variation des fonctions électro-toniques elles-mêmes, ou du mouvement de la particule.

Si l'on exprime a_0 comme une fonction de x, y, z et t, où x, y, z représentent les coordonnées d'une particule en mouvement, alors la force électromotrice dans la direction de x est :[16]

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha_0}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\alpha_0}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha_0}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{d\alpha_0}{dt}\right).$$

Les forces suivant y et z ont des expressions analogues. La distribution des courants dus à ces forces dépend de la forme et de la disposition du milieu conducteur et de la tension électrique en chaque point.

L'étude de ces fonctions nous mènerait à des formules mathématiques, et cet article en contient déjà trop. Ce n'est qu'en raison de leur importance physique en tant qu'expression mathématique des conjectures de Faraday que j'ai été amené à les présenter sous cette forme. En étudiant avec patience leurs relations, et avec l'aide de personnes qui travaillent sur ce sujet et dans d'autres domaines dont la pertinence n'est pas évidente, j'espère parvenir à présenter la théorie de l'état électro-tonique sous une forme où toutes les relations apparaîtront clairement, sans faire appel à des calculs analytiques.

Récapitulation de la théorie de l'état électro-tonique

Nous pouvons concevoir l'état électro-tonique en un point de l'espace comme une quantité possédant une amplitude et une direction, et nous pouvons

15. Autrement dit, $\mathbf{E} = -(1/4\pi)\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t$ ($\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ désignant une dérivée convective, tenant compte de l'entraînement du champ par la matière). Maxwell aboutit à ce résultat en égalant le décrément $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\,\mathrm{d}\tau$ de l'énergie du champ magnétique à la chaleur $\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau$ produite par effet Joule dans les conducteurs. Il suppose, d'une manière quelque peu accrobatique, que l'égalité de deux intégrales implique l'égalité des intégrants et qu'un facteur variable (dans le produit $\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}$) peut être traité comme constant. Cette dernière supposition compense l'absence du facteur ½ dans l'expression de Q.

16. Autrement dit, $4\pi\mathbf{E} = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}$. Cette expression naïve de la dérivée convective n'est suffisante que pour la force électromotrice induite dans un circuit fermé. Dans le cas général, l'expression correcte de la force électromotrice dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique constant est $\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{v}\times\mathbf{B}$, conformément à la règle du flux fauché de Faraday.

représenter la condition électro-tonique d'une région de l'espace par tout système mécanique pour lequel serait en tout point définie une grandeur — qui peut être une vitesse, un déplacement ou une force —, dont l'amplitude et la direction seraient les mêmes que celles de l'hypothétique état électro-tonique. Cette représentation ne fait appel à aucune théorie physique, ce n'est qu'une sorte de notation artificielle. Dans les calculs analytiques, nous utilisons les trois composantes de l'état électro-tonique, que nous appelons les fonctions électro-toniques. Par intégration le long d'une courbe fermée de l'intensité électro-tonique, calculée en tout point dans la direction de la courbe, on obtient ce que l'on peut appeler l'*intensité électrotonique totale le long de la courbe*.

PROPOSITION I. *Si l'on trace une courbe fermée sur une surface quelconque, et si l'on divise cette surface en petits éléments, alors l'intensité totale le long de la courbe est égale à la somme des intensités le long des pourtours de chacune des surfaces élementaires, tous parcourus dans le même sens.*

En effet, lorsqu'on fait le tour des petites surfaces, chaque courbe qui sépare deux de ces surfaces est parcourue deux fois dans des sens contraires, et l'intensité gagnée pour un sens est perdue pour l'autre. Les contributions des frontières entre les surfaces élémentaires se compensent donc, et il ne reste que la contribution de la courbe fermée extérieure.

LOI I *L'intensité électro-tonique totale le long de la frontière d'un élément de surface mesure la quatité d'induction magnétique qui traverse cette surface ou, en d'autres termes, le nombre de lignes de force magnétiques qui traversent cette surface.*[17]

D'après la proposition I, on voit que ce qui est vrai pour des surfaces élémentaires l'est aussi pour des surfaces de dimension finie, et donc, deux surfaces s'appuyant sur la même courbe sont traversées par la même quantité d'induction magnétique.

LOI II. *L'intensité magnétique en un point quelconque est reliée à la quantité d'induction magnétique par un ensemble d'équations linéaires, que nous appelons les équations de conduction.*

LOI III. *L'intensité magnétique totale le long de la limite d'une surface quelconque mesure la quantité du courant électrique qui traverse cette surface.*

17. Les diverses lois énoncées par Maxwell ont les expressions mathématiques suivantes : (I) $\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$; (II) $\mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H}$; (III) $\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$; (IV) $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$; (V) $4\pi Q = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}\, \mathrm{d}\tau$; (VI) $\mathbf{E} = -\mathrm{d}\mathbf{A} / \mathrm{d}t$.

Loi IV. *La quantité et l'intensité des courants électriques sont reliées par des équations de conduction.*

Ces quatre lois permettent de déterminer les quantités et les intensités magnétiques et électriques à partir des valeurs des fonctions électro-toniques. Je n'ai pas évoqué la question des unités, car cela sera plus facile de le faire en se référant à des expériences réelles. Nous en arrivons maintenant aux attractions entre les conducteurs des courants et à l'induction de courants à l'intérieur des conducteurs.

Loi V. *Le potentiel électro-magnétique total d'un courant fermé a pour mesure le produit de la quantité du courant par l'intensité électro-tonique totale, calculée en parcourant le circuit dans le même sens.*

Tout déplacement des conducteurs donnant naissance à une augmentation du potentiel sera accompagné d'une force, égale au taux de variation du potentiel, de sorte que le travail mécanique effectué par cette force au cours du déplacement sera égal à l'augmentation du potentiel.

Bien que, dans certains cas, une modification du parcours ou de l'intensité du courant puisse faire augmenter le potentiel, une telle modification ne produit pas de travail par elle-même, et rien ne tend vers cette modification, car les altérations des courants sont dues à des forces électro-motrices, et non à des attractions électro-magnétiques, qui ne peuvent agir que sur les conducteurs.

Loi VI. *La force électro-motrice agissant sur tout élément d'un conducteur a pour mesure le taux instantané de variation de l'intensité électro-tonique à l'emplacement de l'élément, en amplitude et en direction.*

La force électro-motrice totale dans un conducteur fermé a pour mesure le taux de variation de l'intensité électro-tonique totale le long du circuit, ramenée à une unité de temps. Elle est indépendante de la nature du conducteur, bien que le courant varie de façon inversement proportionnelle à la résistance, et elle prend la même valeur quelle que soit la cause de la modification de l'intensité électro-tonique, déplacement du conducteur ou modification de son environnement.

Ces six lois expriment ce que je pense être le support mathématique des raisonnements exposés dans « *Experimental Researches* ». Je ne pense pas qu'elles contiennent une once de théorie physique réelle. En fait, leur principal mérite comme outil provisoire est qu'*elles n'expliquent rien*, même en apparence.

[…] Dans le reste de son mémoire, Maxwell rappelle les principes de la théorie de Weber, qu'il qualifie de « si élégante, si mathématique et si différente des conceptions de cet article. » Puis il donne quelques applications de son point de vue au calcul de systèmes et de processus particuliers.

2. « On physical lines of force »

Dans le mémoire dont le lecteur vient de lire quelques extraits, Maxwell n'offrait d'analogie mécanique que pour les phénomènes électriques et magnétiques pris séparément. Cinq années s'écoulèrent avant qu'il parvînt à une représentation mécanique de l'ensemble des phénomènes de l'électricité et du magnétisme et de leurs interconnexions. Le titre du mémoire issu de ces nouvelles réflexions réfère à l'affirmation tardive de Faraday, en 1850, d'une existence physique des lignes de force. Cependant, alors que Faraday refusait les réductions mécanistes, Maxwell partageait la conviction de Thomson que les phénomènes électromagnétiques avaient une nature mécanique. Il admettait l'existence d'un milieu intermédiaire, l'éther éventuellement accompagné de matière, dont les mouvements internes obéissaient aux lois de la mécanique. Dans la dernière partie de son mémoire, Maxwell précise que l'origine du modèle mécanique qu'il y développe est l'analyse de l'effet Faraday par Thomson. Rappelons que Thomson considérait la rotation magnétique de la polarisation de la lumière comme une preuve de l'existence d'un mouvement rotatoire invisible dans tout champ magnétique, et qu'il suggérait que la force centrifuge de ce mouvement était à l'origine des attractions et des répulsions magnétiques.[1]

Dans ce mémoire en quatre parties, Maxwell construit graduellement son modèle, en ne spécifiant sa structure qu'au fur et à mesure des besoins. Il commence par admettre l'existence dans tout champ magnétique de contraintes mécaniques ayant la tangente aux lignes de force comme axe de symétrie. Le système de pressions associé a la forme

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu H_i H_j, \tag{1}$$

où p est une pression isotrope et $\mathbf{H}$ un vecteur tangent aux lignes de force (p_{ij} est la composante j de la pression exercée sur une surface perpendiculaire à la direction i). Il est conforme à l'intuition de Faraday d'une tension le long des lignes de force et d'une répulsion mutuelle de ces lignes. Il s'accorde aussi à l'idée de Thomson d'une pression centrifuge liée à des rotations locales de vitesse angulaire proportionnelle à $\mathbf{H}$. La force $\mathbf{f}\,\mathrm{d}\tau$ s'exerçant sur l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$ du milieu est la résultante des forces de pression appliquées à sa surface. Il en résulte la formule $f_i = \sum_j \partial p_{ij}/\partial x_j$, ou encore

$$\mathbf{f} = (\nabla\cdot\mu\mathbf{H})\,\mathbf{H} + (\nabla\times\mathbf{H})\times\mu\mathbf{H} + \mu\nabla\left(\frac{1}{2}H^2\right) - \nabla p. \tag{2}$$

Armé des équations de son mémoire précédent, Maxwell reconnaît dans le premier terme l'action de la force magnétique $\mathbf{H}$ (notre champ magnétique) sur les masses

1. Pour une analyse pénétrante de ce mémoire de Maxwell, voir Siegel 1991.

magnétiques $\nabla \cdot (\mu \mathbf{H})$; dans le second l'action de l'induction magnétique $\mu \mathbf{H}$ sur le courant $\nabla \times \mathbf{H}$; et dans le terme $\mu\nabla(\frac{1}{2} H^2)$ la tendance des corps paramagnétiques à se mouvoir dans la direction d'intensité croissante de la force magnétique.

Ainsi assuré de la pertinence de son système de contraintes magnétiques, Maxwell suppose comme Thomson qu'il est causé par des tourbillons microscopiques ayant les lignes de force pour axe. Il s'interroge ensuite sur le mécanisme qui permet aux rotations de deux tourbillons contigus d'être orientées dans le même sens. Comme le ferait un ingénieur, il introduit une couche de billes (*idle wheels*) dans l'interstice des tourbillons dont la périphérie tourne à la vitesse $\mathbf{H}$:[2]

> « Dans un mécanisme présentant un équipage de roues dentées, lorsque deux des roues doivent tourner dans le même sens, on place entre elles un pignon intermédiaire, entraîné par l'une comme par l'autre. L'hypothèse que je présente pour les tourbillons est qu'une couche de particules, agissant à la manière du pignon intermédiaire, est placée entre deux tourbillons successifs, de sorte que chaque tourbillon à tendance à faire tourner ses voisins dans le même sens que lui. »[3]

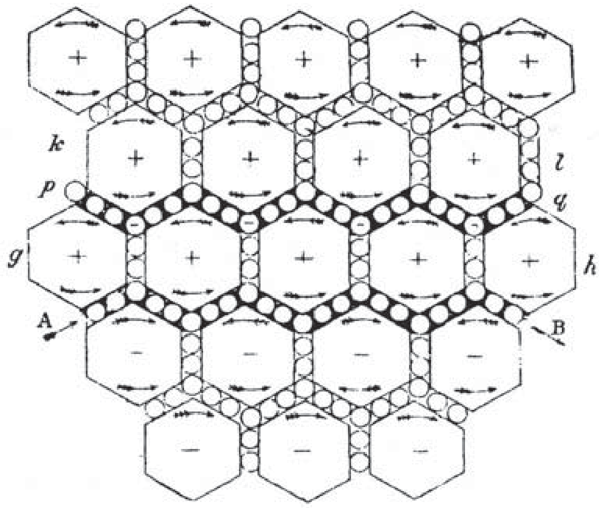


Figure 2.2 **Modèle de Maxwell pour le champ électromagnétique** (figure extraite du mémoire de 1861-62). La rotation des cellules hexagonales représente le champ magnétique. Les billes interstitielles permettent à deux cellules contiguës de tourner dans le même sens.

Pour assurer la cohérence de ce mécanisme, Maxwell enferme les tourbillons dans des cellules hexagonales suivant le schéma de la figure 2.2. La cinématique de ce roulement implique alors la relation

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} \tag{3}$$

2. La « force magnétique » $\mathbf{H}$ n'a pas la dimension d'une force, puisqu'elle représente la force exercée sur un pôle magnétique unité. Elle peut donc avoir la dimension d'une vitesse.

3. Maxwell, « On physical lines of force », traduit plus bas, p. 66.

entre le courant de billes **j** et la rotation **H** (à un coefficient conventionnel près). En effet, si deux cellules adjacentes ne tournent pas à la même vitesse, les billes interstitielles doivent « chasser » (voir fig. 2.3). Si par exemple H_z varie avec y, les billes sont chassées dans la direction de l'axe des x avec la vitesse $\partial H_z/\partial y$. Identifiant le courant de billes au courant électrique, Maxwell retrouve ainsi l'une des équations fondamentales de son précédent mémoire (p. 29).

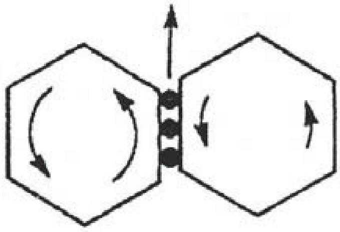


Figure 2.3 **Chassement des billes** entre deux cellules qui tournent à des vitesses différentes.

Par ailleurs, si $-\mathbf{E}$ désigne la force exercée par les billes sur une partie de la surface d'une cellule, la somme des moments de ces actions doit être égale à la dérivée temporelle du moment cinétique de cette cellule, lequel est proportionnel à la vitesse périphérique **H** et à la densité μ de la matière des cellules. Cela donne (voir la figure 2.4)

$$\nabla \times \mathbf{E} \propto -\partial\mu\mathbf{H}/\partial t, \tag{4}$$

conformément à l'expression mathématique que Maxwell avait déjà donnée à la loi d'induction de Faraday (voir l'introduction au mémoire précédent). Le vecteur **E** est bien une force électromotrice, puisque d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction ce vecteur représente la force que les cellules exercent sur les billes dont la circulation constitue le courant électrique.

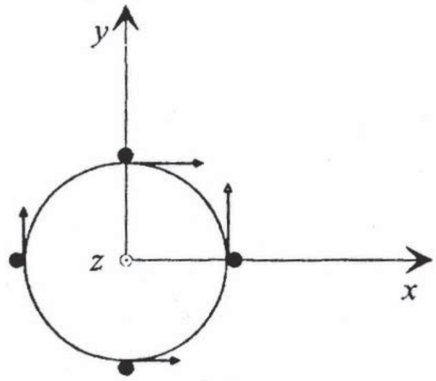


Figure 2.4 **Actions tangentielles de quatre billes sur une cellule supposée sphérique**. Le moment de ces forces autour de l'axe z est proportionnel à $\partial E_x/\partial y - \partial E_y/\partial x$, qui n'est autre que la troisième composante de $-\nabla \times \mathbf{E}$.

À noter que dans sa propre dérivation de cette relation, Maxwell utilise la conservation de l'énergie plutôt que le théorème du moment cinétique. Son raisonnement, en partie incorrect, a l'avantage de déterminer le coefficient de proportionnalité (*un*) dans la relation (4), de telle sorte que

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mu \mathbf{H} / \partial t \,. \tag{5}$$

Enfin, Maxwell introduit l'état électrotonique $\mathbf{A}$ tel que $\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, afin de pouvoir réécrire la loi d'induction sous la forme $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}/\partial t$ obtenue dans son mémoire précédent. L'induction électromagnétique se comprend alors comme un effet d'inertie du mouvement rotatoire associé au champ magnétique, et le vecteur $\mathbf{A}$ n'est autre que la quantité de mouvement qu'il faut communiquer aux billes pour qu'elles puissent vaincre l'inertie rotatoire des cellules.

Quand Maxwell envoya ces deux premières parties de son mémoire au *Philosophical Magazine*, il pensait avoir atteint son but essentiel : donner une représentation mécanique cohérente de l'ensemble des équations qu'il avait pu établir dans son précédent mémoire. Mais il donna bientôt à son modèle cellulaire une extension qui présentait trois avantages : une plus grande cohérence mécanique, l'inclusion des phénomènes électrostatiques, et enfin une déduction des phénomènes lumineux.

Pour que le mouvement de rotation imprimé à la surface d'une cellule se communique dans son intérieur, raisonne Maxwell, il faut que les cellules aient une certaine rigidité ; et pour que les billes puissent les faire tourner, il faut qu'elles soient également élastiques. Mais alors, l'action $-\mathbf{E}$ des billes sur les cellules implique une déformation proportionnelle de ces cellules et donc un déplacement (moyen)

$$\boldsymbol{\delta} = -\varepsilon \mathbf{E} \tag{6}$$

des billes adhérentes dans la même direction. En raison de cette déformation, l'expression (3) du courant devient

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} + \partial \boldsymbol{\delta} / \partial t \,. \tag{7}$$

On voit ici apparaître une première version du fameux courant de déplacement. Il en résulte que la divergence du courant de conduction n'est plus nécessairement nulle. Cette divergence donne l'équation de conservation de l'électricité

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0, \tag{8}$$

à condition de prendre

$$\rho = -\nabla \cdot \boldsymbol{\delta} \tag{9}$$

pour la densité de charge.

Les cellules étant déformables, le milieu possède une énergie potentielle élastique égale à l'intégrale de $\frac{1}{2}\,\varepsilon E^2$ sur tout l'espace. Maxwell obtient la force coulombienne $qq'/4\pi\varepsilon d^2$ agissant entre deux charges ponctuelles q et q' en dérivant cette énergie par rapport à la distance d. Par conséquent, l'unité électrostatique de charge (telle que deux charges unité ponctuelles séparées par l'unité de distance exercent l'une sur l'autre l'unité de force) est $\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$, où ε_0 est la constante diélectrique du vide. Par ailleurs, les équations (2) et (3) impliquent la valeur $\sqrt{4\pi/\mu_0}$ de l'unité électromagnétique de charge (pour laquelle la circulation d'une unité de charge par unité de temps sur deux fils parallèles distants d'une longueur unité implique une attraction de deux unités de force par unité de longueur). Il en résulte la valeur $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ du rapport de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique. Ce rapport, noté c par Wilhelm Weber (voir l'introduction générale), a la dimension d'une vitesse, et sa valeur mesurée par Weber et Kohlrausch diffère peu de la vitesse de la lumière.

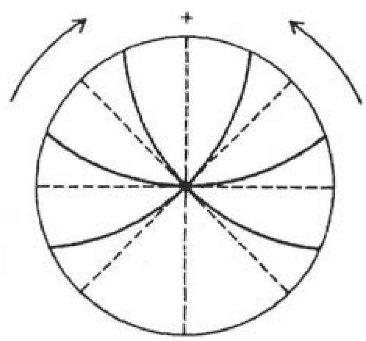


Figure 2.5 **Distorsion tangentielle d'une cellule sphérique**, d'après une lettre de Maxwell à Faraday du 19 octobre 1861, *in* Harman 1990 : 684.

Par ailleurs, Maxwell applique la théorie de l'élasticité à la déformation de ses cellules sous l'effet de la pression des billes. En donnant à ses cellules une forme sphérique et en supposant une déformation orthoradiale (voir fig. 2.5), il obtient ainsi l'expression $1/4\pi^2\varepsilon$ du coefficient d'élasticité transverse K de la substance des cellules. Enfin, la masse volumique des cellules doit être $\mu' = \mu/4\pi^2$ pour que leur moment d'inertie soit conforme à l'équation (5). Maxwell peut alors calculer la vitesse V de propagation d'ondes transverses dans un tel milieu élastique. Pour cela, il se sert de la formule $V = \sqrt{K/\mu'}$, au lieu du $\sqrt{K/2\mu'}$ qu'implique sa définition de K. Grâce à cette erreur, il trouve $V = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, valeur qui, dans le vide, se trouve être exactement égale à la constante c de Weber et donc proche de la vitesse de la lumière. Maxwell conclut :[4]

> « Nous ne pouvons pas échapper à l'idée que la lumière est une ondulation transverse du même milieu que celui qui est à l'origine des phénomènes électriques et magnétiques. »

4. Maxwell, « On physical lines of force », traduit plus bas, p. 97.

Maxwell n'était sans doute pas dupe de la précision (1 %) de l'accord entre la vitesse prédite et la vitesse mesurée de la lumière. Il savait que ses cellules ne pouvaient être en toute rigueur sphériques (il se les représentait plutôt comme des hexagones déformables). Plus fondamentalement, il doutait que les détails baroques de son modèle correspondent à une quelconque réalité physique :

> « L'idée de particules dont le mouvement est lié à celui de tourbillons par un contact de roulement sans glissement peut paraître bizarre. Je ne présente pas cette interaction comme existant dans la nature, ni même comme ce que j'aimerais envisager comme hypothèse électrique. C'est cependant un mode d'entraînement concevable en mécanique, facile à étudier, et qui permet de faire ressortir les caractéristiques que doivent avoir les véritables relations mécaniques entre les phénomènes électromagnétiques connus ; aussi, je prétends que quiconque comprend ce modèle provisoire et temporaire en sera plutôt aidé que gêné pour chercher la véritable explication des phénomènes. »[5]

L'examen de la genèse et de l'évolution ultérieure de ce modèle permet de séparer l'essentiel de l'accessoire. Au nom de l'effet Faraday, Maxwell ne doutait pas de l'existence d'une sorte de rotation dans le champ magnétique, mais il n'était pas certain du mécanisme par lequel cette rotation se communiquait d'un point de l'espace à un autre ; les billes de roulement n'étaient qu'une première tentative. Ainsi pensait-il avoir démontré la possibilité d'une explication mécanique de l'électromagnétisme et de son rapport à l'optique, sans croire pour autant au modèle particulier qu'il proposait.

5. Maxwell, « On physical lines of force », traduit plus bas, p. 80.

Extrait n° 2 :

À PROPOS DES LIGNES DE FORCE PHYSIQUES

« On physical lines of force », J. C. Maxwell, *Philosophical magazine* (1861-62), reproduit dans *The scientific papers of James Clerk Maxwell*, 2 vols. (Cambridge, 1890), vol. 1, 451-513.
Extraits traduits par Danièle Lederer.

PREMIÈRE PARTIE

LA THÉORIE DES TOURBILLONS MOLÉCULAIRES APPLIQUÉE AUX PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES

Dans tous les phénomènes qui impliquent des attractions, des répulsions, et plus généralement toute force dépendant des positions relatives de divers objets, nous sommes amenés à déterminer l'*amplitude* et la *direction* de la force qui agirait sur un objet donné, s'il se trouvait en un endroit déterminé.

Pour un objet ponctuel soumis à la gravitation exercée par une sphère, cette force est inversement proportionnelle au carré de la distance, et dirigée suivant la droite passant par le centre de la sphère. L'amplitude et la direction suivent des lois plus compliquées lorsqu'il s'agit de l'attraction exercée par deux sphères ou encore par un objet qui n'est pas sphérique. Pour les phénomènes électriques et magnétiques, déterminer l'amplitude et la direction de la force qui s'exerce en un point quelconque est le sujet principal des recherches. Supposons connue partout la direction de la force, et traçons une courbe sur laquelle, en chaque point, le déplacement a même direction que la force au point considéré ; nous pouvons appeler cette courbe une *ligne de force* puisque, tout le long de son trajet, elle indique la direction de la force.

En traçant un nombre suffisant de lignes de force, on peut représenter la direction de la force dans toute région de l'espace où elle s'exerce.

Ainsi, si l'on éparpille de la limaille de fer sur un papier au voisinage d'un aimant, chaque morceau de fer est aimanté par induction ; les morceaux voisins se rejoignent par leur pôles opposés, ce qui forme des fibres qui *montrent* la direction des lignes de force. La belle illustration de l'existence d'une force magnétique que constitue cette expérience nous fait naturellement concevoir les lignes de force comme quelque chose de réel, qui montre autre chose que la simple résultante de deux forces[1] dont les causes sont éloignées et qui n'existent pas du tout tant qu'on ne place pas un aimant au point considéré. Même si nous constatons que le phénomène est en accord parfait avec l'hypothèse de forces d'attraction et de répulsion dirigées vers les pôles magnétiques, nous ne sommes pas comblés par cette explication et nous ne pouvons nous empêcher de penser que, partout où nous trouvons des lignes de force, doit exister un état ou une action physique, doté d'une énergie suffisante pour produire le phénomène que l'on observe.

Dans cet article, mon but est de préparer la voie à une réflexion dans ce sens, en examinant les conséquences mécaniques de certains états de tension et de certains mouvements dans un milieu matériel, et en les comparant avec les phénomènes observés du magnétisme et de l'électricité. En faisant apparaître les conséquences mécaniques de telles hypothèses, j'espère aider ceux qui pensent que les phénomènes sont dus à l'action d'un milieu, mais ont des doutes sur le lien entre cette vision et des lois expérimentales déjà établies, lesquelles ont été généralement exprimées dans un autre langage.

Dans un article précédent,[*] j'ai tenté de proposer une vision, claire pour un esprit géomètre, de la relation entre les lignes de forces et l'espace où elles sont tracées. En utilisant la notion de courants dans un fluide, j'ai montré que l'on peut tracer les lignes de force de façon que leur nombre indique la valeur de la force ; il est alors légitime d'appeler chaque ligne une ligne de force unité (voir les *Researches* de Faraday, 3122) ; j'ai aussi étudié la forme des lignes au passage d'un milieu à un autre.

Dans le même article, j'ai trouvé la signification géométrique de « l'état électro-tonique », et j'ai montré comment établir des relations mathématiques entre l'état électro-tonique, le magnétisme, les courants électriques et

1. Maxwell fait ici allusion aux forces coulombiennes émanant des deux pôles d'un aimant.
* Voir « On Faraday's lines of force » *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol X. Part I.

la force électromotrice, en utilisant des illustrations mécaniques comme support à l'imagination, mais pas pour rendre compte des phénomènes.

Je me propose maintenant d'étudier les phénomènes magnétiques d'un point de vue mécanique, et de déterminer quelles sont les tensions à l'intérieur d'un milieu ou quels sont les mouvements de celui-ci qui peuvent produire les forces observées. Si, à partir d'une même hypothèse, on parvient à relier l'attraction magnétique avec les phénomènes électromagnétiques et aussi avec ceux des courants induits, la théorie ainsi trouvée, si elle n'est pas vraie, ne pourra être mise en défaut que par des expériences qui élargiront considérablement nos connaissances dans ce domaine de la physique.

On s'est représenté de façons diverses la situation mécanique d'un milieu placé sous influence magnétique : comme des courants, des ondes, un ensemble de déplacements ou déformations, de pressions ou contraintes.

Des courants, partant du pôle nord d'un aimant et arrivant au pôle sud, ou circulant autour d'un courant électrique, auraient l'avantage de rendre compte correctement de la disposition géométrique des lignes de force, si l'on pouvait, en partant de principes mécaniques, déduire les phénomènes d'attraction ou encore les courants eux-mêmes ou expliquer leur permanence.

D'après les calculs du Professeur Challis, des ondes issues d'un point auraient un effet semblable à celui de l'attraction vers ce point. En admettant que ce soit vrai, nous savons que deux ondes traversant la même région ne se combinent pas pour donner une résultante à la façon de deux forces, mais produisent un effet qui dépend des relations non seulement entre les intensités mais aussi entre les phases ; de plus, si elles peuvent continuer leur chemin, elles se séparent sans s'être influencées l'une l'autre. À vrai dire, les lois mathématiques qui décrivent les attractions ne sont en aucune manière semblables à celles qui décrivent les ondes, alors qu'elles ont des similitudes remarquables avec celles des courants, de la conduction de la chaleur et de l'électricité, et avec celles des corps élastiques.

Dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* de Janvier 1847, le professeur William Thomson a donné une « représentation mécanique des forces électriques, magnétiques et galvaniques » sous la forme de déplacements des particules dans un solide élastique déformé. Pour cela, il faut donner au déplacement angulaire en un point du solide une valeur proportionnelle à la force magnétique au point correspondant du champ magnétique,[2] la direction de l'axe de rotation coïncidant avec celle de la force magnétique. Le déplacement absolu de toute particule correspond alors en amplitude et en direction à ce que j'ai identifié comme l'état électrotonique ; le déplacement relatif d'une particule par rapport à la particule immédiatement voisine correspond en amplitude et en direction à la quantité du courant électrique qui passe au point correspondant dans le problème électromagnétique.[3] L'auteur de cette représentation ne tente pas d'expliquer l'origine des forces observées par les effets des déplacements dans le solide élastique, mais il utilise les ressemblances mathématiques des deux problèmes pour stimuler l'imagination dans l'étude de l'un et de l'autre.

Considérons maintenant l'influence magnétique sous la forme d'une sorte de pression ou de tension ou, plus généralement de *contraintes* dans le milieu.

Les contraintes sont les actions et réactions exercées par deux parties contigües d'un corps, et sont constituées de pressions ou de tensions qui, en un point donné, sont en général différentes dans les diverses directions.

Les relations qui doivent exister entre ces forces ont été étudiées par les mathématiciens et l'on a montré que la contrainte la plus générale prend la forme d'une somme de trois pressions ou tensions principales, dans des directions perpendiculaires entre elles.[4]

Lorsque deux des pressions principales sont égales, la direction de la troisième devient un axe de symétrie, suivant laquelle la pression est mimimum ou maximum, les pressions dans les directions perpendiculaires à cet axe étant toutes égales.

Quand les trois pressions principales sont égales, la pression prend même valeur dans toutes les directions et il en résulte une contrainte qui ne présente aucun axe de symétrie particulier ; la pression hydrostatique nous en fournit un exemple simple.

La contrainte la plus générale ne convient pas pour représenter une force magnétique ; en effet, une ligne de force magnétique a une direction et une

2. Par « champ magnétique, » il faut entendre une portion de l'espace ou s'exerce une action magnétique. Si $\mathbf{H}$ désigne la force magnétique, et $\mathbf{u}$ le déplacement des points du solide, on a $\mathbf{H} \propto \nabla \times \mathbf{u}$.

3. Le courant est donné par $\mathbf{j} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$ ou encore $\mathbf{j} = -\Delta\mathbf{u}$ si la compression $\nabla \cdot \mathbf{u}$ est nulle. Suivant un théorème dû à Maxwell, le laplacien en un point d'une quantité est proportionnel à l'écart entre sa valeur en ce point et sa valeur moyenne sur une petite sphère centrée en ce point.

4. Ce résultat classique de la théorie de l'élasticité est dû à Augustin Cauchy (1822).

intensité, mais ne possède pas une troisième qualité pouvant différencier les *côtés* de la ligne, ce qui serait analogue à ce que l'on observe pour la lumière polarisée.* La force magnétique en un point doit donc être représentée par une contrainte possédant un seul axe de pression minimum ou maximum, les pressions dans toutes les directions perpendiculaires à cet axe étant les mêmes. On peut trouver à redire au manque de cohérence de la représentation d'une ligne de force, qui est dipolaire par essence, par l'axe d'une contrainte, qui est nécessairement *isotrope ;* mais nous savons que tous les phénomènes d'action et réaction sont isotropes dans leurs *effets*, car, même quand leur origne est dipolaire, les forces qui s'exercent entre deux objets sont égales et opposées : c'est le cas de l'attraction entre un pôle nord et un pôle sud.

Examinons maintenant l'effet mécanique d'une contrainte possédant un axe de symétrie. On peut toujours la ramener à une simple pression hydrostatique à laquelle se superpose une pression ou une tension dans la direction de l'axe. Quand il s'agit d'un axe de pression maximum, la force le long de l'axe est une pression. Quand c'est un axe de pression minimum, la force le long de l'axe est une tension.

Observons les lignes de forces entre deux aimants, matérialisées par la limaille de fer : nous voyons que lorsque les lignes de force vont d'un pôle à un autre, il y a *attraction* entre ces deux pôles tandis que lorsque les lignes de forces issues d'un pôle évitent l'autre, et se dispersent dans l'espace, les deux pôles *se repoussent* ; dans les deux cas, ils sont poussés dans la direction de la résultante des lignes de force. Il semble donc que, pour une ligne de force magnétique, la contrainte dans la direction de l'axe est une *tension*, comme dans une corde.

Pour la gravitation, les lignes de force au voisinage de deux corps ont les mêmes directions que près de deux pôles magnétiques de même nom ; mais nous savons que l'effet mécanique est alors une attraction, et pas une répulsion. Dans ce cas, les lignes de force ne vont pas d'un corps à l'autre, mais se déploient dans tout l'espace. Pour produire une attraction, la contrainte dans la direction des lignes de gravitation doit être une *pression*.

Admettons maintenant que les phénomènes magnétiques sont liés à l'existence d'une tension dans la direction des lignes de force, superposée à

* voir Faraday's *Researches*, 3252.

une pression hydrostatique ; en d'autres termes à une pression plus grande dans les directions radiales que suivant l'axe : la question qui se pose alors est de savoir quelle explication mécanique donner à cette inégalité des pressions dans un fluide ou dans un milieu en mouvement. Celle qui vient presque immédiatement à l'esprit est que la pression supplémentaire dans la direction radiale vient de la force centrifuge de tourbillons, présents dans le milieu, et dont l'axe est parallèle aux lignes de force.[5]

Cette explication de l'origine de l'inégalité des pressions suggère immédiatement une façon de représenter le caractère dipolaire de la ligne de force. Un tourbillon est essentiellement un dipôle, les deux extrémités de son axe se distinguant par le sens de la rotation, tel qu'il est observé depuis chacune d'elles.

Nous savons aussi que lorsqu'un courant électrique circule dans un conducteur, il produit des lignes de force magnétique qui traversent le circuit, le sens de ces lignes dépendant du sens du courant. Admettons que le sens de rotation de nos tourbillons est celui que devrait avoir l'électricité vitreuse pour créer des lignes de force dont le sens, à l'intérieur du circuit, serait le même que celui des lignes de forces considérées.

Supposons aussi que tous les tourbillons situés dans une région de l'espace tournent dans le même sens autour d'axes pratiquement parallèles entre eux mais que, en passant d'une région à l'autre, la direction des axes, la vitesse de rotation et la densité du milieu soient susceptibles de changer. Nous allons étudier l'effet mécanique total agissant sur un élément du milieu et, de son expression mathématique, nous déduirons la caractéristique physique des différentes parties qui le constituent.

PROPOSITION I. Soit deux systèmes fluides géométriquement semblables, dans lesquels les vitesses et les densités aux points qui se correspondent sont proportionnelles, alors les différences de pression dues au mouvement varient comme le carré du rapport des vitesses et proportionnellement à celui des densités.

Soit l le rapport des longueurs, m celui des vitesses, n celui des densités et p celui des pressions produites par le mouvement. Alors le rapport des *masses* des éléments de volume qui se correspondent est $l^3 n$, et le rapport des

5. Comme Maxwell le signale plus loin dans son mémoire, cette explication mécanique avait été proposée par William Thomson, en relation avec l'effet Faraday (rotation du plan de polarisation de la lumière à la traversée d'un verre magnétisé).

vitesses est m, de sorte que le rapport des quantités de mouvement acquises par ces éléments correspondants après avoir parcouru les portions semblables de leurs trajectoires est égal à l^3mn.

Le rapport des surfaces est égal à l^2, celui des forces auxquelles elles sont soumises est l^2p et celui des temps pendant lesquels ces forces agissent est l/m, de sorte que le rapport des impulsions des forces est l^3p/m, et nous avons donc

$$l^3mn = \frac{l^3p}{m},$$

ou

$$m^2n = p\,;$$

c'est-à-dire que le rapport (p) des pressions dues au mouvement est le produit du rapport des densités (n) et du carré du rapport des vitesses (m^2), et qu'il ne dépend pas des dimensions des systèmes en mouvement.

Pour un tourbillon circulaire, tournant avec une vitesse angulaire constante, si la pression sur l'axe est égale à p_0, celle à sa périphérie sera $p_1 = p_0 + 1/2\,\rho v^2$, où ρ est la densité et v la vitesse à la périphérie. Dans la direction parallèle à l'axe, la *pression moyenne* sera

$$p_0 + \frac{1}{4}\rho v^2 = p_2.$$

Si l'on plaçait un certain nombre de ces tourbillons côte à côte, leurs axes parallèles entre eux, ils constitueraient un milieu dans lequel s'exercerait une pression p_2 dans la direction des axes et une pression p_1 dans une direction perpendiculaire. Pour des tourbillons circulaires, tous de même vitesse angulaire, on a

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{4}\rho v^2.$$

Si les tourbillons ne sont pas circulaires, et si les vitesses angulaires et les densités ne sont pas uniformes, mais varient suivant la même loi pour tous les tourbillons,

$$p_1 - p_2 = C\rho v^2,$$

où ρ est la densité moyenne, et C un nombre dépendant de la distribution de vitesse angulaire et de densité à l'intérieur du tourbillon. Dorénavant, nous remplacerons $C\rho$ par $\mu/4\pi$, si bien que

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{4}\mu v^2, \tag{1}$$

où μ est une quantité proportionnelle à la densité, et v est la vitesse linéaire à la périphérie de chaque tourbillon.

Un tel milieu, rempli de tourbillons moléculaires aux axes parallèles, diffère d'un fluide ordinaire en ce que les pressions dépendent de la direction. S'il n'en était pas empêché par un arrangement judicieux des pressions, il tendrait à se dilater latéralement. Ce faisant, il laisserait le diamètre de chaque tourbillon grandir et sa vitesse diminuer dans les mêmes proportions. Pour qu'un milieu présentant des pressions différentes dans des directions différentes soit à l'équilibre, certaines conditions doivent être remplies ; c'est ce que nous devons étudier.

PROPOSITION II. Soit l, m et n les cosinus directeurs des axes des tourbillons par rapport aux axes x, y, z. Déterminons les contraintes normales et tangentielles dans les plans de coordonnées.

La véritable contrainte peut se décomposer en une simple pression hydrostatique p_1 agissant dans toutes les directions, et une tension $p_1 - p_2$, ou encore $\frac{1}{4\pi}\mu v^2$, suivant l'axe de symétrie de la contrainte.

Ainsi, si p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} sont les contraintes* normales dans les directions parallèles aux axes, par convention positives quand elles tendent à provoquer un allongement, et si p_{yz}, p_{zx} et p_{xy} sont les contraintes tangentielles dans les trois plans de coordonnées, comptées positives quand elles tendent à faire augmenter les coordonnées portées en indice, alors on trouve[6]

$$p_{xx} = \frac{1}{4\pi}\,\mu v^2 l^2 - p_1,$$

$$p_{yy} = \frac{1}{4\pi}\,\mu v^2 m^2 - p_1,$$

$$p_{zz} = \frac{1}{4\pi}\,\mu v^2 n^2 - p_1,$$

$$p_{yz} = \frac{1}{4\pi}\,\mu v^2 mn,$$

$$p_{zx} = \frac{1}{4\pi}\,\mu v^2 nl,$$

$$p_{xy} = \frac{1}{4\pi}\,\mu v^2 lm.$$

* Rankine *Applied Mechanics*, Art 106.

6. En notation tensorielle moderne, on a $p_{ij} = (1/4\pi)\mu H_i H_j - p_1\delta_{ij}$.

Posons $\alpha = vl$, $\beta = vm$, et $\gamma = vn$, alors

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{1}{4\pi}\mu\alpha^2 - p_1, & p_{yz} &= \frac{1}{4\pi}\mu\beta\lambda \\ p_{yy} &= \frac{1}{4\pi}\mu\beta^2 - p_1, & p_{zz} &= \frac{1}{4\pi}\mu\gamma\alpha \\ p_{zz} &= \frac{1}{4\pi}\mu\gamma^2 - p_1, & p_{xy} &= \frac{1}{4\pi}\mu\alpha\beta \end{aligned}\right\} . \tag{2}$$

PROPOSITION III. Cherchons la force totale agissant sur un élément de volume du milieu matériel, et due à la variation de la contrainte interne.

De façon générale, l'expression de la force par unité de volume dans la direction x est donnée par la condition d'équilibre sur les contraintes,*

$$X = \frac{d}{dx}p_{xx} + \frac{d}{dy}p_{xy} + \frac{d}{dz}p_{xz}. \tag{3}$$

Dans le cas qui nous intéressse ici, cette expression devient

$$X = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d(\mu\alpha)}{dx}\alpha + \mu\alpha\frac{d\alpha}{dx} - 4\pi\frac{dp_1}{dx} + \frac{d(\mu\beta)}{dy}\alpha + \mu\beta\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d(\mu\gamma)}{dz}\alpha + \mu\gamma\frac{d\alpha}{dz}\right\}. \tag{4}$$

En se rappelant que $\alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dx} + \gamma\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$, cela s'écrit[7]

$$X = \alpha\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx}(\mu\alpha) + \frac{d}{dy}(\mu\beta) + \frac{d}{dz}(\mu\gamma)\right\} + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dx}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \mu\beta\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) + \mu\gamma\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) - \frac{dp_1}{dx}. \tag{5}$$

Les expressions des forces dans les directions y et z sont analogues.

[...] Maxwell rappelle ici les relations de son mémoire antérieur qui vont lui permettre d'interpréter les divers termes de la formule précédente : $m = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx}(\mu\alpha) + \frac{d}{dy}(\mu\beta) + \frac{d}{dz}(\mu\gamma)\right\}$ pour la densité de masses magnétiques ; et $r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right)$ etc. pour les

* Rankine : *Applied Mechanics*, Art 116.

7. Si f_i désigne la composante i de la force, on a
$4\pi f_i = \partial_j p_{ij} = H_i(\partial_j \mu H_j) + \frac{1}{2}\mu\nabla H^2 + \mu H_j(\partial_j H_i - \partial_i H_j) - 4\pi\partial_i p_1$,
ou encore $4\pi f_i = \mathbf{H}(\nabla \cdot \mu\mathbf{H}) + \frac{1}{2}\mu\nabla H^2 + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mu\mathbf{H} - 4\pi\nabla p_1$.

composante du courant. En notation vectorielle, ces deux équations s'écrivent $m = (1/4\pi)\nabla\cdot\mu\mathbf{H}$ et $\mathbf{j} = (1/4\pi)\nabla\times\mathbf{H}$. Cette dernière formule diffère de la formule correspondante du mémoire précédent par le diviseur $1/4\pi$. La question implicitement soulevée est celle de la « rationalisation » des unités : on doit décider si l'on préfère éliminer les 4π des lois d'action à distance (choix évident des théories de Coulomb et Ampère) ou bien des équations locales du champ (choix qualifié de rationnel par Oliver Heaviside, comme on le verra plus loin).

Nous pouvons maintenant écrire les expressions des composantes de la force totale par unité de volume agissant sur un élément du milieu, soit :[8]

$$X = \alpha m + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dx}(v^2) - \mu\beta r + \mu\gamma q - \frac{dp_1}{dx}, \tag{12}$$

$$Y = \beta m + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dy}(v^2) - \mu\gamma p + \mu\alpha r - \frac{dp_1}{dy}, \tag{13}$$

$$Z = \gamma m + \frac{1}{8\pi}\mu\frac{d}{dz}(v^2) - \mu\alpha q + \mu\beta p - \frac{dp_1}{dz}. \tag{14}$$

Le premier terme de chaque expression correspond à la force agissant sur les pôles magnétiques, le deuxième terme à l'action se manifestant sur des corps susceptibles d'être aimantés par induction, le troisième et le quatrième termes aux forces agissant sur les courants électriques et le cinquième terme est l'effet d'une simple pression.

[...] Maxwell montre ici comment tirer des formules précédentes les lois de Coulomb et d'Ampère pour les forces agissant sur une masse magnétique ponctuelle et sur un conducteur linéaire.

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATION DE LA THÉORIE DES TOURBILLONS MOLÉCULAIRES AUX COURANTS ÉLECTRIQUES

Nous avons déjà montré que toutes les forces qui s'exercent entre les aimants, les substances susceptibles de s'aimanter et les courants électriques peuvent être expliquées par la mécanique si l'on suppose que le milieu avoisinant se trouve dans un état tel que, en chaque point, la pression prend des valeurs différentes dans les différentes directions, la direction dans laquelle la pression est minimale étant celle des lignes de force observées,

8. Soit encore $\mathbf{f} = m\mathbf{H} + \frac{1}{8\pi}\mu\nabla H^2 + \mathbf{j}\times\mu\mathbf{H} - \nabla p_1$.

et l'écart entre les pressions maximum et minimum étant proportionnel au carré de l'intensité de la force magnétique en ce point.

Si l'on suppose qu'une telle contrainte est présente dans le milieu, et que sa disposition correspond aux lois que l'on connaît sur la trajectoire des lignes de force, alors elle exerce sur les aimants, courants, etc. considérés, exactement les mêmes forces que celles que l'on calcule à l'aide de l'hypothèse habituelle des actions à distance. Ceci est vrai, indépendamment de toute théorie sur la *cause* de la contrainte, ou sur la façon dont elle peut se maintenir dans le milieu. Nous avons donc une réponse positive à la question : « existe-t-il une hypothèse mécanique satisfaisante sur l'état du milieu qu'indiquent les lignes de force, qui permette de rendre compte des forces observées » ? La réponse est que les lignes de force indiquent, en chaque point du milieu, la direction dans laquelle la *pression est minimale*.

La deuxième question qui doit se poser est : « Quelle est la cause mécanique de l'existence de pressions inégales dans les différentes directions » ? Dans la première partie de cet article, nous avons supposé que la différence des pressions résulte de la présence de tourbillons moléculaires, dont les axes sont parallèles aux lignes de force.

Nous avons aussi supposé, de façon totalement arbitraire, que le sens des tourbillons est tel que, lorsqu'on regarde une ligne de force depuis le sud vers le nord, le sens de rotation à l'intérieur des tourbillons est celui des aiguilles d'une montre.

Nous avons trouvé que, à la périphérie de chaque tourbillon, la vitesse doit être proportionnelle à l'intensité de la force magnétique, et que la densité de la matière présente dans le tourbillon doit être proportionnelle à la capacité d'induction magnétique.[9]

Nous n'avons pour l'instant donné aucune réponse aux questions « comment les tourbillons se mettent-ils en mouvement » ? et « pourquoi leur disposition est-elle conforme aux lois qui régissent les lignes de force des aimants et des courants » ?

Ces questions se situent incontestablement à un niveau de difficulté très supérieur à celui des deux précédentes, et je tiens à faire une différence entre les suggestions que je vais faire pour leur donner une réponse provisoire et les raisonnements mécaniques par lesquels la première question a été traitée,

9. c'est-à-dire la perméabilité magnétique μ.

ainsi que l'hypothèse des tourbillons qui donne une réponse probable à la deuxième.

Nous sommes amenés à nous interroger sur les liens existant entre les tourbillons et les courants électriques, alors que nous avons encore des incertitudes sur la nature de l'électricité : s'agit-il d'une ou deux substances ou pas d'une substance du tout ; en quoi diffère-t-elle de la matière et comment lui est-elle reliée ?

Nous savons que les lignes de force sont modifiées par les courants électriques, et nous connaisssons la forme de ces lignes au voisinage d'un courant, de sorte que, à partir de la force, nous savons déterminer la quantité de courant. Admettons que notre explication des lignes de force à partir de tourbillons moléculaires est correcte, pourquoi une répartition particulière des tourbillons révèle-t-elle un courant électrique ? Une réponse satisfaisante à cette question nous ferait faire un grand pas vers la réponse à la question très importante : « qu'est-ce qu'un courant électrique » ?

J'ai éprouvé de grandes difficultés à concevoir des tourbillons situés côte à côte dans un milieu matériel, tournant dans le même sens autour d'axes parallèles. En effet, deux volumes de matière contigus et appartenant à deux tourbillons voisins doivent alors se déplacer dans des directions opposées, et il est difficile de comprendre comment le mouvement d'une partie du milieu peut côtoyer, voire même provoquer, un mouvement en sens contraire de la matière qui se trouve en contact avec elle.

La seule idée qui m'ait permis de concevoir un tel mouvement a été d'imaginer que les tourbillons sont séparés les uns des autres par une couche de particules, chacune tournant sur elle même dans le sens opposé à celui des tourbillons, de sorte que, sur leur surface de contact, les particules et les tourbillons ont la même vitesse.

Dans un mécanisme présentant un équipage de roues dentées, lorsque deux des roues doivent tourner dans le même sens, on place entre elles un pignon intermédiaire, entraîné par l'une comme par l'autre. L'hypothèse que je présente pour les tourbillons est qu'une couche de particules, agissant à la manière du pignon intermédiaire, est placée entre deux tourbillons successifs, de sorte que chaque tourbillon a tendance à faire tourner ses voisins dans le même sens que lui.

Le plus souvent en mécanique, le pignon intermédiaire pivote autour d'un axe fixe ; mais, dans certains trains épicycloïdaux ou autres équipages, par exemple le régulateur de Siemens pour machine à vapeur,* les centres des pignons intermédiaires peuvent se déplacer. La vitesse du centre est alors égale à la demi-somme de celles des points situés sur la circonférence des deux roues adjacentes. Regardons les relations qui doivent exister en ce qui concerne nos tourbillons et la couche de particules interposée dans le rôle de pignon intermédiaire.

PROPOSITION IV. Déterminons la vitesse d'une couche de particules séparant deux tourbillons.

Soit α, β et γ les cosinus directeurs de l'axe de rotation d'un tourbillon, multipliés par la vitesse des particules situées à sa périphérie, comme dans la proposition II. Soit l, m, n les cosinus directeurs de la normale à la surface du tourbillon, en un point quelconque (positive si elle est dirigée vers l'extérieur). Alors, en ce point de la surface du tourbillon, les composantes de la vitesse des particules sont

$$n\beta - m\gamma \text{ suivant } x,$$

$$l\gamma - n\alpha \text{ suivant } y,$$

$$m\alpha - l\beta \text{ suivant } z.$$

Si cette partie de la surface se trouve en contact avec un autre tourbillon où les vitesses sont α', β' et γ', alors les toutes petites particules de la couche située entre les tourbillons auront une vitesse égale à la moyenne des vitesses en surface des deux tourbillons, ainsi, si u est la composante suivant x de la vitesse de ces particules, on aura

$$u = \frac{1}{2}m(\gamma' - \gamma) - \frac{1}{2}n(\beta' - \beta), \qquad (27)$$

puisque les normales aux deux tourbillons adjacents sont en sens contraire.

PROPOSITION V. Déterminons le nombre total de particules qui traversent, pendant l'unité de temps, une unité de surface perpendiculaire à l'axe x.

Soit x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre du premier tourbillon, x_2, y_2, z_2 celles du second, et ainsi de suite. Soit V_1, V_2 etc. les volumes du premier, deuxième, ..., tourbillons, et $\bar{V}$ la somme de leurs volumes. Soit dS un

* Voir Goodeve, *Elements of Mechanism*, p.118.

élément de la surface qui sépare les premier et deuxième tourbillons, et x, y, z la position de cet élement de surface. Soit ρ le nombre de particules par unité de surface. Alors, si p est le nombre total de particules qui traversent une surface unité pendant une unité de temps, dans la direction x, la composante suivant x de la quantité de mouvement totale des particules contenues dans le volume $\bar{V}$ est $\bar{V}p$, de sorte que l'on a[10]

$$\bar{V}p = \Sigma u \rho \, dS, \tag{28}$$

la somme s'effectuant sur toute surface de séparation entre deux tourbillons à l'intérieur du volume $\bar{V}$.

Considérons la surface de séparation entre le premier et le deuxième tourbillons. Soit un élément dS de cette surface ; nommons l_1, m_1, n_1 ses cosinus directeurs par rapport au premier tourbillon et l_2, m_2, n_2 ceux par rapport au deuxième, nous savons que

$$l_1 + l_2 = 0, \quad m_1 + m_2 = 0, \quad n_1 + n_2 = 0. \tag{29}$$

Les valeurs de α, β et γ dépendent de la position du centre du tourbillon ; et nous pouvons écrire

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{d\alpha}{dx}(x_2 - x_1) + \frac{d\alpha}{dy}(y_2 - y_1) + \frac{d\alpha}{dz}(z_2 - z_1), \tag{30}$$

et des relations analogues pour β et γ.

On peut écrire la valeur de u sous la forme :

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{dx}\{m_1(x - x_1) + m_2(x - x_2)\} \\ + \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{dy}\{m_1(y - y_1) + m_2(y - y_2)\} + \frac{1}{2}\frac{d\gamma}{dz}\{m_1(z - z_1) + m_2(z - z_2)\} \\ - \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dx}\{n_1(x - x_1) + n_2(x - x_2)\} - \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dy}\{n_1(y - y_1) + n_2(y - y_2)\} \\ - \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dz}\{n_1(z - z_1) + n_1(z - z_2)\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Lorsqu'on effectue la somme de $\Sigma u \, \rho \, dS$, il faut garder en mémoire que, sur toute surface fermée, $\Sigma \, l \, dS$ s'annule, ainsi que tous les termes analogues.

10. Dans ce raisonnement, Maxwell donne implicitement la masse unité à chaque particule, car son vrai but n'est pas de déterminer une quantité de mouvement (il négligera l'inertie des particules dans la dynamique de son mécanisme) mais de calculer le flux moyen de particules qui sera identifié au courant électrique.

Les termes de la forme $\Sigma\, l\, y\, dS$ aussi s'annulent lorsque l et y correspondent à des directions différentes, mais les termes $\Sigma\, l\, x\, dS$, où l et x sont mesurés suivant le même axe de coordonnées, ne s'annulent pas : ils sont égaux au volume enfermé par la surface. Il en résulte

$$\bar{V} p = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right)(V_1 + V_2 + \&c.)\,; \tag{32}$$

ou encore, en divisant par $\bar{V} = V_1 + V_2 + \ldots$

$$p = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right). \tag{33}$$

Si nous posons

$$\rho = \frac{1}{2\pi}, \tag{34}$$

l'équation (33) devient identique à la première des équations (9),[11] ce qui fournit la relation entre la quantité de courant électrique et l'intensité des lignes de forces qui l'entourent.

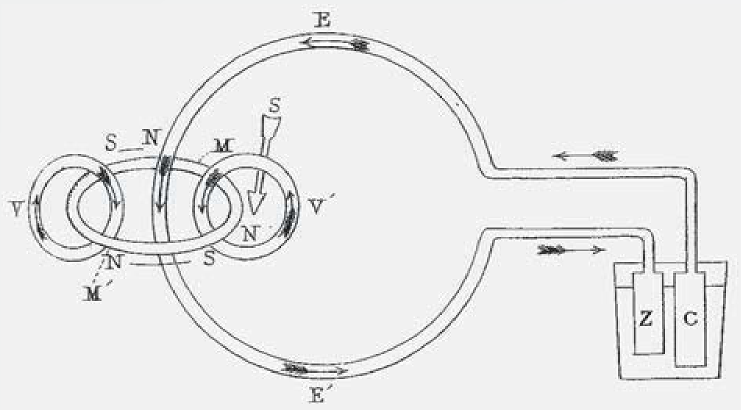
Ainsi, dans notre hypothèse, le courant électrique correspond au transfert des particules mobiles qui se trouvent entre deux tourbillons voisins. Nous pouvons supposer que, par rapport aux tourbillons, ces particules sont très petites et que leur masse totale est négligeable et aussi qu'une seule molécule complète du milieu contient un grand nombre de tourbillons ainsi que leur entourage de particules. Il faut aussi considérer que les particules roulent sans glisser entre les tourbillons, et qu'elles ne se touchent pas l'une l'autre ; ainsi, tant qu'elles restent à l'intérieur de la même molécule complète, il n'y a aucune perte d'énergie par frottement. Toutefois, lorsque se produit un transfert général des particules dans une direction, elles doivent passer d'une molécule à une autre et, ce faisant, elles peuvent être soumises à une résistance, ce qui fait perdre de l'énergie électrique et produit de la chaleur.

Supposons maintenant qu'à l'intérieur d'un milieu les tourbillons soient disposés de façon quelconque. Les quantités $\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$ seront en général non nulles, de sorte que dans un premier temps, il y aura des courants électriques dans le milieu. À moins qu'une force constante les entretienne, ils

11. L'équation (9) (introduite dans une section non reproduite comme conséquence de la loi d'Ampère) est $p = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right)$ etc. ou, en notation vectorielle, $\mathbf{j} = (1/4\pi)\nabla \times \mathbf{H}$.

disparaîtront rapidement à cause de la resistance électrique du milieu, et nous aurons alors $\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 0$, etc, c'est-à-dire que $\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$ sera une différentielle totale (voir équations (15) et (16)) ; nous voyons donc que l'hypothèse que nous avons faite permet d'expliquer la disposition des lignes de force.

Sur la figure 1, le cercle vertical EE' représente un courant électrique passant dans le conducteur EE', dans le sens indiqué par les flèches, depuis le cuivre *C* jusqu'au zinc *Z*. Le cercle horizontal MM' représente une ligne de force enlaçant le circuit électrique, les directions nord et sud étant indiquées par les courbes *SN* et *NS*. Les cercles verticaux *V* et *V′* représentent les tourbillons moléculaires dont l'axe coïncide avec la ligne de force : le tourbillon *V* tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, *V′* dans le sens opposé.



Sur ce schéma on voit que, si *V* et *V′* sont des tourbillons adjacents, les particules qui se trouvent entre les deux ont un mouvement vers le bas. Par ailleurs, si une cause quelconque imposait à ces particules un mouvement vers le bas, elles forceraient les tourbillons à tourner dans le sens indiqué. Dans cette optique, nous pouvons considérer que la relation entre un courant électrique et ses lignes de force est analogue à la relation entre une roue dentée (ou une crémaillère) et les roues qu'elle entraîne.

Dans la première partie de cet article, nous avions examiné les relations entre les forces statiques présentes dans le système. Nous venons de décrire les relations entre les mouvements des différents parties considérées comme s'il s'agissait d'un équipage de roues dentées. Il nous reste à examiner la dynamique du système, et à trouver quelles forces sont capables de produire des modifications données du mouvement de ces différentes parties.

PROPOSITION VI. Déterminons l'expression de l'énergie contenue dans un fragment du système, du fait du mouvement des tourbillons situés à l'intérieur.

Soit α, β et γ les composantes de la vitesse à la périphérie, telles qu'elles sont définies dans la proposition II. L'énergie par unité de volume des tourbillons est proportionnelle à la densité et au carré de la vitesse. Nous ne connaissons pas la variation de la densité ni celle de la vitesse à l'intérieur du tourbillon et nous ne pouvons donc pas déterminer directement la valeur numérique de l'énergie. Mais, puisque μ aussi est proportionnelle à la densité moyenne, même si le coefficient de proportionnalité n'est pas connu, admettons que l'énergie par unité de volume est

$$E = C\mu\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

où C est une constante qui reste à déterminer.

Plaçons-nous dans le cas où

$$\alpha = \frac{d\phi}{dx}, \qquad \beta = \frac{d\phi}{dy}, \qquad \gamma = \frac{d\phi}{dz}. \tag{35}$$

Posons

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \tag{36}$$

et

$$\frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{d^2\phi_1}{dx^2} + \frac{d^2\phi_1}{dy^2} + \frac{d^2\phi_1}{dz^2}\right) = m_1,$$

$$\text{et} \quad \frac{\mu}{4\pi}\left(\frac{d^2\phi_2}{dx^2} + \frac{d^2\phi_2}{dy^2} + \frac{d^2\phi_2}{dz^2}\right) = m_2, \tag{37}$$

alors ϕ_1 est le potentiel créé en chaque point par le système magnétique m_1 et ϕ_2 celui créé par la distribution magnétique représentée par m_2. L'énergie de tous les tourbillons est égale à

$$E = \Sigma C\mu\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,dV, \tag{38}$$

l'intégration se faisant dans tout l'espace.

En intégrant par parties, (voir Green : « Essay on Electricity », p.10) on peut montrer que cette intégrale est égale à

$$E = -4\pi C\,\Sigma\,(\phi_1 m_1 + \phi_2 m_2 + \phi_1 m_2 + \phi_2 m_1)\,dV. \tag{39}$$

Or, puisqu'il est démontré (Green, p.10) que

$$\Sigma\phi_1 m_2 dV = \Sigma\phi_2 m_1 dV,$$

$$E = -4\pi C\,(\phi_1 m_1 + \phi_2 m_2 + 2\phi_1 m_2)\; dV. \tag{40}$$

Supposons maintenant que le système magnétique m_1 reste immobile, tandis que l'on déplace m_2, parallèlement à lui-même, de δx dans la direction de l'axe x. Puisque ϕ_1 ne dépend que de m_1, il garde la même valeur que précédemment, si bien que $m_1\phi_1$ reste constant. D'autre part, puisque ϕ_2 ne dépend que de m_2, la distribution de ϕ_2 par rapport à m_2 reste identique, de sorte que $\phi_2 m_2$ garde la même valeur qu'avant le déplacement. Le seul terme de E qui va être modifié est celui qui dépend de $2\phi_1 m_2$ car, à cause du déplacement, ϕ_1 est remplacé par $\phi_1 + \frac{d\phi_1}{dx}\delta x$. La variation d'énergie causée par le déplacement est donc

$$\delta E = -4\pi C\Sigma\left(2\frac{d\phi_1}{dx}m_2\right)\; dV\delta x. \tag{41}$$

Mais, d'après l'équation (12), le travail effectué au cours du déplacement par les forces mécaniques qui agissent sur m_2 est

$$\delta W = \Sigma\left(\frac{d\phi_1}{dx}m_2 dV\right)\;\delta x\,; \tag{42}$$

et, puisque notre point de vue est purement mécanique, nous devons avoir, par la conservation de la force[12]

$$\delta E + \delta W = 0\,; \tag{43}$$

c'est-à-dire que la perte d'énergie dans le tourbillon est compensée par le travail fourni pour déplacer les aimants. Ainsi,

$$-4\pi C\,\Sigma\;2\left(\frac{d\phi_1}{dx}m_2 dV\right)\;\delta x + \Sigma\left(\frac{d\phi_1}{dx}m_2 dV\right)\;\delta x = 0,$$

ou encore

$$C = \frac{1}{8\pi}\;; \tag{44}$$

de sorte que l'énergie par unité de volume des tourbillons est

$$\frac{1}{8\pi}\mu\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,; \tag{45}$$

et celle d'un tourbillon de volume V

$$\frac{1}{8\pi}\mu\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\;V. \tag{46}$$

12. En termes modernes, il s'agit de la conservation de l'énergie.

Pour créer ou détruire cette énergie, il faut fournir du travail au tourbillon ou en recevoir, soit par l'action tangentielle de la couche des particules qui sont au contact avec lui, soit en changeant sa forme. Nous allons d'abord étudier l'action tangentielle entre les tourbillons et les particules en contact avec eux.

PROPOSITION VII. Déterminons l'énergie fournie, par unité de temps, à un tourbillon par la couche de particules qui l'entoure.

Soit P, Q, R les composantes suivant les trois axes de coordonnées des forces qui agissent sur une de ces particules. Ce sont des fonctions de x, y, z. Puisque chaque particule est en contact avec la périphérie de deux tourbillons, la réaction de la particule sur les tourbillons est partagée en deux, égale à

$$-\frac{1}{2}P, \quad -\frac{1}{2}Q, \quad -\frac{1}{2}R$$

pour chacun des tourbillons de la part de chaque particule ; puisque la densité superficielle de particules est $\frac{1}{2\pi}$ (voir équation (34)), les forces s'exerçant par unité du surface du tourbillon sont

$$-\frac{1}{4\pi}P, \quad -\frac{1}{4\pi}Q, \quad -\frac{1}{4\pi}R.$$

Soit dS un élément de la surface du tourbillon situé en x, y, z, les cosinus directeurs de sa normale étant l, m, n. Les composantes de la vitesse de la surface sont u, v, w. Alors, le travail exercé sur cet élément de surface est

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{4\pi}(Pu + Qv + Rw)\, dS. \tag{47}$$

Considérons tout d'abord le premier terme, $Pu\, dS$. On peut écrire P sous la forme

$$P_0 + \frac{dP}{dx}x + \frac{dP}{dy}y + \frac{dP}{dz}z, \tag{48}$$

et

$$u = n\beta - m\gamma.$$

La surface du tourbillon étant fermée,

$$\Sigma nx\, dS = \Sigma mx\, dS = \Sigma my\, dS = \Sigma mz\, dS = 0,$$

et

$$\Sigma my\, dS = \Sigma mz\, dS = V,$$

On trouve

$$\Sigma Pu\,dS = \left(\frac{dP}{dz}\beta - \frac{dP}{dy}\gamma\right) \; V, \tag{49}$$

de sorte que le travail total fourni au tourbillon par unité de temps est

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{4\pi}\,\Sigma\,(Pu + Qv + Rw)\,dS \\ &= \frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + \beta\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + \gamma\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)\right\} V. \end{aligned} \tag{50}$$

PROPOSITION VIII. Cherchons les relations entre les modifications du mouvement des tourbillons et les forces P, Q, R qu'ils exercent sur la couche de particules qui les sépare.

Soit V le volume d'un tourbillon ; d'après (46), son énergie est

$$E = \frac{1}{8\pi}\mu\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,V, \tag{51}$$

et

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\,\mu V\,\left(\alpha\,\frac{d\alpha}{dt} + \beta\,\frac{d\beta}{dt} + \gamma\,\frac{d\gamma}{dt}\right), \tag{52}$$

En comparant cette valeur avec celle donnée par l'équation (50), on trouve

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} - \mu\frac{d\alpha}{dt}\right) &+ \beta\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} - \mu\frac{d\beta}{dt}\right) \\ &+ \gamma\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} - \mu\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Cette équation est valable quelles que soient les valeurs de α, β et γ. Commençons par annuler β et γ, et divisons par α. Il vient[13]

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} &= \mu\frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} &= \mu\frac{d\beta}{dt} \\ \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} &= \mu\frac{d\gamma}{dt} \end{aligned}\right\} . \tag{54}$$

13. Autrement dit, $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu\partial\mathbf{H} / \partial t$. La dernière étape du raisonnement de Maxwell est illégitime, car la nullité de $\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mu\partial\mathbf{H} / \partial t)$ n'implique point la nullité de la parenthèse (celle-ci pourrait par exemple être le produit vectoriel de $\mathbf{H}$ par un autre vecteur). Toutefois, l'équation $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu\partial\mathbf{H} / \partial t$ peut s'obtenir pas une application directe du théorème du moment cinétique aux tourbillons.

Nous pouvons en déduire la relation entre les modifications du mouvement $\frac{d\alpha}{dt}$, etc. et les forces qui s'exercent sur les couches de particules situées entre les tourbillons, ou, dans les termes de notre modèle, la relation entre les modifications de l'état du champ magnétique et les forces électromotrices mises en jeu.

Dans son traité « On The Dynamical Theory of Diffraction » (*Cambridge Philosophical Transactions*, vol IX, Part I, section 6), le professeur Stokes a donné une méthode pour résoudre les équations (54) et exprimer P, Q et R en fonction des quantités qui apparaissent dans le membre de droite. J'ai signalé* l'utilisation de cette méthode dans les domaines de l'électricité et du magnétisme.

Déterminons donc trois quantités F, G, H à partir des équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{dz} - \frac{dH}{dy} &= \mu\alpha \\ \frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} &= \mu\beta \\ \frac{dF}{dy} - \frac{dG}{dx} &= \mu\gamma \end{aligned}\right\}, \tag{55}$$

avec la condition

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d}{dx}\mu\alpha + \frac{d}{dy}\mu\beta + \frac{d}{dz}\mu\gamma\right) = m = 0, \tag{56}$$

et

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0\,. \tag{57}$$

En dérivant (55) par rapport au temps, et en comparant avec (54), on trouve[14]

$$P = \frac{dF}{dt}, \quad Q = \frac{dG}{dt}, \quad Q = \frac{dH}{dt}. \tag{58}$$

Nous avons donc trouvé trois quantités F, G, H, à partir desquelles nous pouvons déterminer P, Q et R en considérant que ces dernières sont les taux de variation des premières. Dans l'article que j'ai déjà cité, j'ai donné des raisons de considérer que F, G et H décrivent l'état dont Faraday avait eu

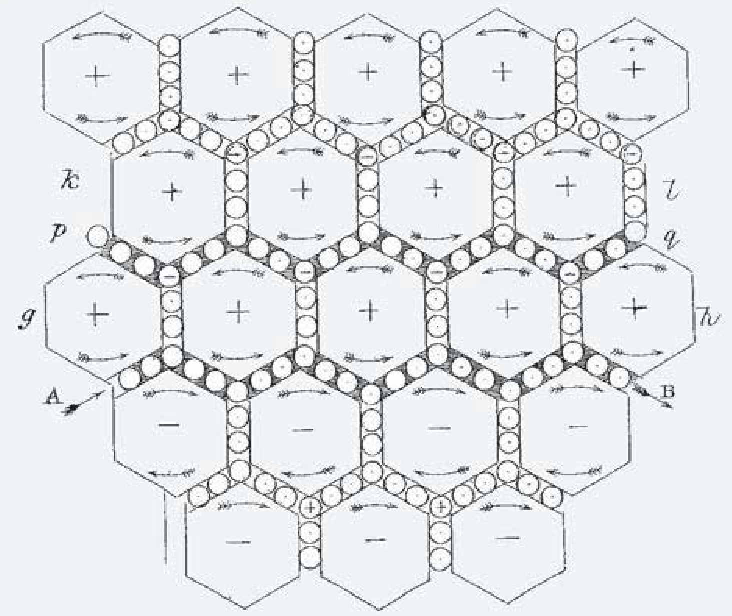
* *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol X. Part I, Art 3 "On Faraday's Lines of Force".

14. En effet, F, G et H sont les coordonnées d'un vecteur $-\mathbf{A}$ tel que $\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$. Dérivant cette équation par rapport au temps, on a $\nabla \times (-\partial\mathbf{A} / \partial t) = -\mu\partial\mathbf{H} / \partial t$, et donc $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A} / \partial t$ (à un gradient près).

l'intuition, et qu'il a appelé l'*état électrotonique*. Dans cet article, j'ai établi les relations mathématiques qui existent entre cet état électrotonique et les lignes de force magnétiques données par les équations (55), et aussi entre l'état électrotonique et les forces électromotrices décrites par les équations (58). Il nous reste à tenter de les interpréter d'un point de vue mécanique, en accord avec notre hypothèse.

Commençons par étudier la façon dont les lignes de forces sont créées par un courant électrique.

Sur la figure 2, *AB* représente un courant électrique allant de *A* vers *B*. Les grandes surfaces situées au-dessus et en dessous de *AB* représentent les tourbillons, et les petits cercles situés entre les tourbillons représentent les couches de particules qui les séparent les uns des autres et qui, dans notre hypothèse, correspondent à l'électricité.

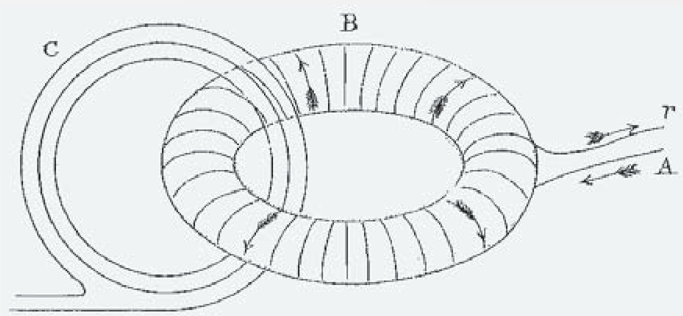


Imaginons maintenant que commence à circuler dans *AB* un courant de gauche à droite. La rangée de tourbillons *gh* située au-dessus de *AB* se met à tourner dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (ce sens sera appelé positif, et le sens des aiguilles, négatif). Supposons que les tourbillons de la rangée *kl* soient encore immobiles, les particules de la couche comprise entre ces deux rangées de tourbillons subissent une action de la part des tourbillons situés en-dessous, et aucune de la part de ceux du dessus. Si elles sont libres de bouger, elles vont se mettre à tourner dans le sens négatif et, en même temps, se déplacer de la droite vers la gauche, c'est-à-dire dans le sens opposé à celui du courant ; elles forment ainsi un courant *induit*.

Lorsque la résistance électrique du milieu s'oppose à ce courant, les particules en rotation entraînent dans le sens positif la rangée de tourbillons située au-dessus, jusqu'à ce que leur vitesse soit telle que le mouvement des particules se réduise à leur rotation sur elles-mêmes, ce qui met fin au courant induit. Supposons maintenant que l'on arrête le courant *AB* : les tourbillons de la rangée *gh* sont arrêtés, tandis que ceux de *kl* continuent à tourner très vite. Les tourbillons situés au-delà de la couche de particules *pq* tendent alors à donner à ces particules un mouvement de la gauche vers la droite, c'est-à-dire dans le sens du courant de départ ; mais, si le milieu s'oppose à ce déplacement, la rotation des tourbillons situés au-delà de *pq* s'arrête peu à peu.

Il s'ensuit donc que les courants induits font partie du processus qui transmet la rotation des tourbillons d'un point de l'espace à un autre.

À titre d'exemple de la façon dont les tourbillons produisent les courants induits, considérons le cas suivant : soit *B* (figure 3) un anneau circulaire, de section uniforme, sur lequel est enroulé du fil électrique. On peut montrer que, si un courant parcourt ce circuit, l'action sur un aimant situé à l'intérieur du bobinage est extrêmement forte, tandis qu'il n'y a aucun effet magnétique à l'extérieur. L'effet est le même que celui produit par un aimant tordu jusqu'à ce que ses deux pôles se touchent.



Si le bobinage est bien réalisé, on ne décèle aucun effet sur un aimant situé à l'extérieur, que le courant soit constant ou d'intensité variable. Mais, si un fil conducteur *C* enlace l'anneau un certain nombre de fois, il est le siège d'une force électromotrice lorsqu'on fait varier le courant. Si ce circuit *C* est fermé, il est parcouru par un courant réel.

Cette expérience montre que, pour produire une force électromotrice, il n'est pas nécessaire que le fil électrique soit soumis à une force magnétique, ni que les lignes de force magnétiques passent à l'intérieur du fil lui-même ou tout près. Tout ce qu'il faut est que les lignes de force traversent une surface qui s'appuie sur le conducteur, et qu'elles varient au cours de l'expérience.

Dans les conditions décrites ici, les tourbillons dont nous supposons que sont consituées les lignes de force magnétiques, se trouvent tous à l'intérieur de l'anneau, tandis que l'extérieur reste immobile. Si aucun circuit n'enlace l'anneau, alors, lorsque le courant primaire est établi ou supprimé, il ne se produit aucune action à l'extérieur de l'anneau, si ce n'est une pression instantanée qui s'exerce entre les particules et les tourbillons entre lesquels elles se trouvent. Si un circuit conducteur fermé enlace l'anneau, alors, quand on établit le courant primaire, un courant en sens contraire se produit dans C ; et, quand on supprime le courant primaire, le courant qui traverse C est dans le même sens que le primaire.

Nous pouvons maintenant comprendre que les courants induits se forment lorsque l'électricité cède à une force électromotrice ; toutefois cette force existe même lorsque la résistance du circuit empêche l'apparition d'un courant détectable.

La force électromotrice, dont les composantes sont P, Q, R, provient de l'action qui s'exerce entre les tourbillons et les particules qui les séparent, lorsque la vitesse de rotation en un point quelconque de l'espace est modifiée. Elle est analogue à la pression qui s'exerce sur l'axe d'une roue dans une machine quand la vitesse de l'arbre qui l'entraîne augmente ou diminue.

L'état électrotonique, dont les composantes sont F, G, H, correspond à ce que serait la force électromotrice si les courants, etc, qui sont à l'origine des lignes de force, avaient pris instantanément leur valeur définitive. Il est analogue à l'impulsion qui s'exercerait sur l'axe d'une roue si, alors qu'elle est immobile, on lui faisait prendre instantanément sa vitesse définitive.

Si l'on arrêtait tout à coup la machine en bloquant l'arbre qui l'entraîne, il s'exercerait sur chacun des pignons une impulsion égale et opposée à celle qu'il a subie lors de la mise en mouvement de l'équipage.

On peut calculer cette impulsion en un point quelconque d'un équipage, nous lui donnons le nom de quantité de mouvement réduite de la machine en ce point. Lorsque la vitesse de la machine varie, la force qui en résulte en un point quelconque peut être déterminée en dérivant les quantités de mouvement réduites par rapport au temps, tout comme nous avons trouvé la force électromotrice à partir de l'état électrotonique.

> [...] Dans la section omise, Maxwell obtient la généralisation $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mu\mathbf{H} - \partial\mathbf{A} / \partial t - \nabla\psi$ ($\mathbf{A}$ étant tel que $\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$) de la loi d'induction (58) dans le cas où le milieu est animé d'une vitesse $\mathbf{v}$. Notons que du point de vue de Maxwell, la force électromotrice $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est une modification du champ électrique $\mathbf{E}$ due à d'entraînement du milieu. Plus précisément, ce terme provient de la substitution d'une dérivée convective $\partial / \partial t - \nabla \times (\mathbf{v} \times \ ) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \ )$ à la dérivée $\partial / \partial t$ dans l'équation $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B} / \partial t$. Au contraire, dans la théorie de Lorentz (aujourd'hui enseignée), l'éther est stationnaire et le mouvement de la matière n'affecte pas directement le champ électrique ; $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ représente alors une force électromotrice *sui generis*, qu'il faut ajouter au champ électrique dans l'expression de la loi d'Ohm (qui devient ainsi $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$).

Récapitulons les suppositions que nous avons faites et les résultats que nous en avons déduits.

(1) Les phénomènes électromagnétiques ne sont pas provoqués par des actions à distance directes entre les courants et les aimants, mais sont dus à l'existence, en chaque point de l'espace considéré, de matière se présentant dans des états déterminés de mouvement ou de pression. La substance produisant ces effets peut être consitituée par une partie de la matière ordinaire, ou par un éther associé à la matière. Sa densité est maximale dans le fer, et minimale dans les corps diamagnétiques. À part dans le fer, cette substance doit être très raréfiée, puisqu'aucun autre corps n'a une grande capacité magnétique, comparée à celle de ce que nous appelons le vide.[15]

(2) Dans toute partie de l'espace traversée par des lignes de force, la pression en un point de la matière en question n'a pas la même valeur dans toutes les directions ; elle est minimale dans la direction des lignes de force, de sorte que ces dernières peuvent être considérées comme des lignes de tension.

(3) Cette inégalité des pressions suivant la direction considérée provient de la présence, dans le milieu, de tourbillons dont les axes ont la même

15. Par capacité magnétique, il faut comprendre ce que nous appelons la susceptibilité magnétique.

direction que les lignes de force et dont le sens de rotation peut se déterminer à partir du sens des lignes de force.

Nous avons supposé que le sens de rotation est celui des aiguilles d'une montre pour un observateur regardant du sud vers le nord. En ce qui concerne les faits connus, nous aurions trouvé les mêmes propriétés en choisissant le sens opposé, à condition de considérer que l'électricité résineuse est positive, plutôt que l'électricité vitreuse. L'effet de ces tourbillons dépend de leur densité et de la vitesse à leur périphérie ; il ne dépend pas de leur diamètre. La densité doit être proportionnelle à la capacité d'induction magnétique du corps étudié, celles des tourbillons dans l'air étant choisie égale à 1. Pour provoquer des effets aussi importants dans un milieu aussi rare, les vitesses doivent être très grandes.

La taille des tourbillons n'est pas déterminée, mais ils sont probablement très petits en comparaison avec une molécule complète de la matière ordinaire.[*,16]

(4) Les tourbillons sont séparés les uns des autres par une couche unique de particules sphériques ; il en résulte un système de cellules, délimitées par ces particules, et dont la matière peut tourner comme un tourbillon.

(5) Les particules des couches de séparation *roulent* au contact avec les deux tourbillons qu'elles séparent, mais ne frottent pas les unes contre les autres. Elles peuvent tourner librement entre les tourbillons et, ce faisant, se déplacer, mais à condition de rester à l'intérieur d'*une molécule complète* de la substance ; lorsqu'elles passent d'un domaine à un autre, elles sont soumises à une résistance, et provoquent les mouvements irréguliers qui constituent la chaleur. Dans notre théorie, ces particules jouent le rôle de l'électricité. Leur mouvement de translation constitue un courant électrique, et leur rotation sert à transmettre le mouvements des tourbillons d'un endroit à un autre ; les pressions tangentielles ainsi introduites constituent la force électromotrice. L'idée de particules dont le mouvement est lié à celui de

* La quantité de mouvement du système de tourbillons dépend de leur diamètre moyen ; ainsi, si le diamètre est non négligeable, on s'attend à ce qu'un aimant se comporte comme s'il contenait un corps en rotation, et l'existence de cette rotation devrait pouvoir être mise en évidence au moyen d'expériences sur la rotation libre d'un aimant. J'ai fait des expériences pour étudier cete question, mais je n'ai pas encore totalement testé l'appareillage.

16. Il s'agit d'un effet gyromagnétique. Un tel effet existe, mais il est très faible (en raison de la faible inertie des électrons) et ne fut détecté qu'au début du XX^e siècle par Albert Einstein et le gendre de Lorentz, Wander Johannes de Haas.

tourbillons par un contact de roulement sans glissement peut paraître bizarre. Je ne présente pas cette interaction comme existant dans la nature, ni même comme ce que j'aimerais envisager comme hypothèse électrique. C'est cependant un mode d'entraînement concevable en mécanique, facile à étudier, et qui permet de faire ressortir les caractéristiques que doivent avoir les véritables relations mécaniques entre les phénomènes électromagnétiques connus ; aussi, je prétends que quiconque comprend ce modèle provisoire et temporaire en sera plutôt aidé que gêné pour chercher la véritable explication des phénomènes.

L'action qu'exercent les uns sur les autres les tourbillons et les couches de particules a une composante tangentielle ; ainsi, s'il se produisait un dérapage ou des mouvements différents dans les parties en contact, cela donnerait lieu à une perte de l'énergie des lignes de force, et à une transformation progressive de cette énergie en chaleur. Or nous savons que les lignes de force qui se trouvent au voisinage d'un aimant se maintiennent indéfiniment sans aucune dépense d'énergie : nous devons en conclure que là où existe une force tangentielle entre deux éléments de volume du milieu, il ne peut pas y avoir de glissement d'une partie par rapport à l'autre. Nous devons donc imaginer les tourbillons et les particules roulant ensemble sans glisser ; de même chaque strate d'un tourbillon est mise en mouvement par la strate extérieure, toujours sans glissement ce qui impose que la vitesse angulaire soit la même dans tout le tourbillon.[17]

L'énergie électromagnétique ne peut être perdue et transformée en chaleur que lors du passage de l'électricité d'une molécule à l'autre. Dans tous les autres cas, l'énergie des tourbillons ne peut diminuer que lorsqu'un travail mécanique de même valeur est effectué par une force magnétique.

(6) Un courant électrique agit sur le milieu qui l'entoure en faisant tourner les tourbillons à son contact. Les parties de ces tourbillons qui sont les plus éloignées du courant se meuvent dans le sens contraire ; si le milieu conduit l'électricité, de sorte que les particules peuvent se déplacer dans n'importe quelle direction, les particules qui touchent l'extérieur d'un tourbillon se déplacent dans le sens opposé au courant, ce qui crée un courant induit de sens opposé au courant primaire.

17. Maxwell abandonne ici la fluidité parfaite du milieu qu'il avait adoptée dans la première partie de son mémoire. On verra que l'élasticité des nouveaux tourbillons (qui, de tourbillons, n'ont guère que le caractère rotatoire) joue un rôle capital dans la partie suivante (introduction du courant de déplacement).

S'il ne se présentait aucune résistance au mouvement des particules, le courant induit serait égal et opposé au courant primaire, et durerait aussi longtemps que lui, ce qui empêcherait toute action à distance du courant primaire.[18] S'il existe une résistance au courant induit, les particules de ce courant agissent sur les tourbillons voisins, et leur transmettent le mouvement de rotation, jusqu'à ce que tous les tourbillons du milieu soient mis en mouvement avec des vitesses de rotation telles que les particules qui les séparent n'ont pas d'autre mouvement que leur rotation sur elles-mêmes, et ne constituent donc pas un courant.

Lors de la transmission du mouvement d'un tourbillon à un autre, se produit une force entre les particules et le tourbillon, telle que les particules sont poussées dans un sens et les tourbillons dans le sens contraire. Nous appelons force électromotrice celle qui agit sur les particules. La réaction qui agit sur les tourbillons est égale et opposée, de sorte que la force électromotrice est incapable de déplacer en bloc une partie du milieu, elle ne peut que produire des courants. Quand le courant primaire est interrompu, les forces électromotrices qui se manifestent sont toutes dans le sens opposé.

(7) Lorsqu'un courant électrique ou un aimant est déplacé en présence d'un conducteur, ce déplacement modifie la vitesse de rotation des tourbillons dans tout l'espace. La force qui permet de communiquer la bonne vitesse de rotation à chaque tourbillon constitue elle aussi une force électromotrice qui, lorsque c'est possible, produit des courants.

(8) Lorsqu'on déplace un conducteur dans un champ de force magnétique, les tourbillons à l'intérieur du conducteur et dans son voisinage changent de position et de forme. La force qui en résulte est la force électromotrice agissant sur un conducteur en mouvement, et la valeur donnée par le calcul est en accord avec les résultats expérimentaux.

Nous avons donc montré comment les phénomènes électromagnétiques peuvent être imités par un système imaginaire de tourbillons moléculaires. Ceux qui ont déjà été tentés par une hypothèse de ce type trouveront ici les conditions à remplir pour lui donner une cohérence mathématique ainsi qu'une comparaison, pour l'instant satisfaisante, entre les résultats auxquels elle conduit et les faits connnus. Ceux qui cherchent l'explication

18. Maxwell prévoit ainsi l'effet d'écran magnétique d'une paroi supraconductrice.

des faits dans une autre voie, pourront comparer cette théorie avec celle qui suppose que des courants circulent librement dans les corps,[19] et avec celle qui suppose que l'électricité exerce à distance une force qui dépend de sa vitesse, et qui n'est donc pas régie par la loi de conservation de l'énergie.[20]

Les faits observés en électromagnétisme sont très compliqués et divers ; expliquer un certain nombre d'entre eux à l'aide de plusieurs hypothèses différentes peut être intéressant, non seulement pour les physiciens, mais pour tous ceux qui souhaitent comprendre jusqu'à quel point l'explication des phénomènes peut prouver une théorie, ou encore dans quelle mesure nous devons considérer qu'une similitude dans les descriptions mathématiques de deux types de phénomènes est une indication que ces phénomènes sont de même nature. Nous savons que de telles similitudes partielles ont déjà été rencontrées ; le fait que la similitude n'est que partielle est avéré par les différences entre les lois qui régissent d'autres aspects des deux types de phénomènes. Il pourra nous arriver de trouver, dans des plus hautes sphères de la physique, des exemples de coïncidence plus large, qui demanderont beaucoup de travail pour découvrir où se trouve finalement la divergence.[21]

TROISIÈME PARTIE

LA THÉORIE DES TOURBILLONS MOLÉCULAIRES APPLIQUÉE À L'ÉLECTRICITÉ STATIQUE

Dans la première partie de cet article, j'ai montré qu'il est possible de rendre compte des forces d'interaction entre les aimants, les courants électriques et la matière susceptible d'induction magnétique en supposant que le champ magnétique est rempli d'innombrables tourbillons de matière en rotation, dont les axes coïncident en chaque point avec la direction de la force magnétique.

19. Allusion aux courants ampériens des aimants.

20. Allusion à la théorie de Wilhelm Weber (voir notre introduction générale). Toutefois, il est faux que la loi de Weber soit incompatible avec la conservation de l'énergie. Une loi de force peut dépendre de la vitesse sans violer la conservation de l'énergie (comme en témoigne la forme $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ de la force magnétique agissant sur une charge ponctuelle en mouvement).

21. Dans une note, Maxwell signale ici l'analogie que Helmholtz établit en 1858 entre la vitesse due à un tourbillon dans un fluide idéal et le champ magnétique dû à un courant.

La force centrifuge de ces tourbillons crée une distribution de pressions et la résultante finale est une force identique, en grandeur et en direction, à celle que l'on observe.

Dans la deuxième partie, j'ai décrit le mécanisme qui permettrait à toutes ces rotations de coexister, et de prendre les valeurs en accord avec ce que l'on connaît sur les lignes de force.

J'ai imaginé que la matière en rotation était la substance contenue dans un certain nombre de cellules, séparées les unes des autres par des parois composées de particules de taille très petite par rapport à celle des cellules : c'est grâce aux mouvements de ces particules et à leur action tangentielle sur la substance des cellules que le mouvement de rotation est communiqué d'une cellule à une autre.

Je n'ai pas essayé d'expliquer cette action tangentielle, mais, pour rendre compte de la transmission de la rotation depuis l'extérieur vers l'intérieur de la cellule, il faut supposer que la substance contenue dans les cellules possède une élasticité semblable à celle des solides, bien qu'à un degré différent. La théorie ondulatoire de la lumière rend compte des vibrations transverses en admettant ce genre d'élasticité pour le milieu luminifère. Nous ne devons donc pas nous étonner que le milieu électro-magnétique possède la même propriété.

D'après notre théorie, les particules qui forment les cloisons entre les cellules sont la matière de l'éléctricité. Le mouvement de ces particules constitue un courant électrique ; la force tangentielle avec laquelle les particules sont poussées par la matière contenue dans les cellules est la force électromotrice, et la pression exercée par les cellules les unes sur les autres corrrespond à la tension, ou potentiel, de l'électricité.[22]

Si nous arrivons maintenant à décrire l'état d'un corps par rapport au milieu environnant lorsqu'on dit qu'il est « chargé » d'électricité, et à rendre compte des forces qui s'exercent entre corps électrisés, nous aurons relié entre eux tous les principaux phénomènes connus en science de l'électricité.

D'après les expériences, nous savons que la tension électrique est une même grandeur, qu'elle soit observée en électrostatique ou en électrocinétique, de sorte que, pour charger une bouteille de Leyde, on peut

22. Cette interprétation du potentiel, suggérée par le fait que l'opposé de son gradient est une force électromotrice, semble peu compatible avec le reste du modèle de Maxwell. Mais elle ne joue aucun rôle dans la discussion qui suit du fonctionnement de ce modèle.

utiliser une force électromotrice produite par le magnétisme, comme dans une machine à bobine.

Quand il existe une différence de tension entre différents points d'un corps, l'électricité circule, ou tend à circuler, depuis les endroits où la tension est la plus grande vers ceux où elle est la plus faible. Lorsqu'il s'agit d'un corps conducteur, l'électricité passe effectivement et, si on maintient les différences de tensions, le courant continue à circuler à une vitesse inversement proportionnelle à la résistance, ou proportionnelle à la conductivité du corps.

La résistance électrique des corps varie sur une très large échelle ; celle des métaux est la plus faible, et celle du verre est tellement grande qu'une charge électrique a été conservée* pendant des années dans un récipient en verre, sans pénétrer dans l'épaisseur du verre.

Les corps qui ne se laissent pas traverser par un courant électrique sont appelés des isolants. Mais, bien que l'électricité n'y circule pas, les effets électriques s'y propagent, et l'importance de ces effets varie suivant la nature du corps, de sorte que des isolants également efficaces peuvent avoir des comportements différents en tant que diélectriques.†

Un même corps possède donc deux caractéristiques indépendantes, l'une en rapport avec le passage d'électricité et l'autre avec la transmission des effets électriques, en l'absence de passage d'électricité. On peut comparer un conducteur à une membrane poreuse qui oppose une résistance plus ou moins grande au passage d'un fluide, tandis qu'un diélectrique est semblable à une membrane élastique qui peut être imperméable au fluide, mais qui transmet la pression du fluide d'un de ses côtés à l'autre.

Tant qu'une force électromotrice agit sur un conducteur, elle produit un courant qui, lorsqu'il rencontre une résistance, transforme en permanence de l'énergie électrique en chaleur, qu'il n'est pas possible de régénérer en énergie électrique par inversion du processus.

Une force électromotrice agissant sur un diélectrique crée une polarisation de ses divers éléments de volume similaire à la distribution de polarité dans la limaille du fer sous l'influence d'un aimant,‡ et que l'on peut

* Par le Professeur W. Thomson.

† Faraday *Experimental Researches*.

‡ Voir Prof. Mossotti, "Discussione analitica", *memorie della Soc. Italiana (Modena)*, Vol. XXIV, Part 2, p. 49.

décrire, à l'instar de la polarisation magnétique, comme un état dans lequel les extrémités de chaque élément de volume ont des propriétés opposées.[23]

Dans un diélectrique soumis à une induction, nous pouvons considérer que, à l'intérieur de chaque molécule, l'électricité s'est déplacée de sorte qu'un des côtés est électriquement positif et l'autre négatif, mais que l'électricité reste liée à chaque molécule et ne se déplace pas d'une molécule à l'autre.

L'effet de cette action sur l'ensemble du diélectrique est un déplacement général de l'électricité dans un certain sens. Ce déplacement ne se traduit pas par un courant, parce que, une fois atteinte une certaine valeur, il reste constant ; mais c'est le commencement d'un courant, et ses modifications constituent un courant dans le sens positif ou négatif, suivant que le déplacement s'accroît ou diminue. La valeur du déplacement dépend de la nature du corps, et de la force électromotrice ; ainsi, si h est le déplacement, R la force électromotrice, et E un coefficient dépendant de la nature du diélectrique,[24]

$$R = -4\pi E^2 h\ ;$$

et si r est la valeur du courant électrique correspondant à ce déplacement

$$r = \frac{dh}{dt}.$$

Ces relations resteraient valables quelle que soit la théorie utilisée pour décrire le mécanisme interne des diélectriques ; mais, quand nous trouvons qu'une force électromotrice provoque un déplacement dans un diélectrique, et que le diélectrique reprend sa position initiale avec une force électromotrice égale,[25] nous ne pouvons nous empêcher de considérer que ces

23. Maxwell fait ici allusion aux théories de Coulomb et de Poisson du ferromagnétisme, et à la théorie analogue des diélectriques matériels, proposée par Ottaviano Mossotti en 1847 (et par Thomson en 1845).

24. Le signe moins dans cette formule est inexplicable du point de vue de la théorie de Mossotti (ou de la théorie électronique de Lorentz, qui est enseignée aujourd'hui). En effet, on s'attend à ce que les déplacements microscopiques de l'électricité (positive) soient dans le même sens que la force électromotrice. Maxwell ne se soucie point de cette difficulté et prend le signe moins imposé – comme on va le voir – par son modèle des tourbillons cellulaires élastiques. Heureusement, le fonctionnement de ce modèle est indépendant de l'interprétation du déplacement h comme polarisation.

25. Maxwell veut dire que le diélectrique se comporte alors comme un ressort comprimé, qui réagit à la force de compression par une force égale et opposée.

phénomènes sont ceux d'un corps élastique cèdant à une pression et retrouvant sa forme quand la pression est supprimée.

Dans notre modèle, le milieu magnétique est divisé en cellules, séparées par des cloisons constituées d'une couche de particules qui jouent le rôle de l'électricité. Lorsque les particules électriques sont poussées dans une direction, leur action tangentielle sur la substance élastique contenue dans les cellules provoque une déformation de chaque cellule, et met à l'œuvre des forces égales et opposées dues à l'élasticité des cellules. Quand la force est supprimée, les cellules retrouvent leur forme et l'électricité se remet dans la position précédente.

Dans ce qui suit, pour écrire la relation entre le déplacement et la force qui le provoque, j'ai supposé les cellules sphériques. La différence entre la véritable forme des cellules et une sphère est probablement suffisamment faible pour que cela ne change pas les résultats numériques de façon appréciable.

J'en ai déduit une relation entre les mesures statiques et dynamiques d'électricité et, en comparant les expériences électromagnétiques de MM. Kohlrausch et Weber avec la vitesse de la lumière déterminée par M. Fizeau, j'ai montré que l'élasticité du milieu électromagnétique dans l'air est identique à celle du milieu luminifère, si toutefois ces deux milieux qui coexistent, ont la même étendue et la même élasticité ne sont pas plutôt un seul et même milieu.

On montrera dans la proposition XV que l'attraction entre deux corps électrisés est proportionnelle à la valeur de E^2, et serait donc plus petite dans la térébenthine que dans l'air, pour des mêmes valeurs de l'électricité portée par chacun des corps. Par contre, si c'étaient les *potentiels* des deux corps qui gardaient leur valeur, l'attraction entre ces corps varierait de façon inversement proportionnelle à E^2, et serait donc plus grande dans la térébenthine que dans l'air.

PROPOSITION XII. Déterminons les conditions d'équilibre d'une sphère élastique dont la surface est soumise à des forces normales et tangentielles, les forces tangentielles étant proportionnelles au sinus de la distance angulaire à un point donné de la sphère.[26]

26. Comme on va le voir, Maxwell se limite à cette forme de la force tangentielle car elle représente la projection d'une force dirigée dans une direction constante (l'opposé de la force électromotrice).

Soit z l'axe des coordonnées sphériques.

Soit ξ, η, ζ les déplacements suivant les directions de x, y et z d'une particule de la sphère.

Soit p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} les contraintes normales aux plans perpendiculaires aux trois axes, et p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} les contraintes de déformation dans les plans yz, zx et xy.

Soit μ le coefficient d'élasticité en volume, de sorte que si[27]

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p,$$

$$p = \mu\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right). \tag{80}$$

Soit m le coefficient de rigidité, tel que

$$p_{xx} - p_{yy} = m\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}\right), \text{ \&c.} \tag{81}$$

Alors, les équations de l'élasticité dans un milieu isotrope sont

$$p_{xx} = \left(\mu - \frac{1}{3}m\right)\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) + m\frac{d\xi}{dx}\ ; \tag{82}$$

avec des équation analogues pour y et z, et aussi

$$p_{yz} = \frac{m}{2}\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right), \text{ \&c.} \tag{83}$$

Dans le cas d'une sphère de rayon égal à α, supposons que

$$\xi = exz, \quad \eta = ezy, \quad \zeta = f(x^2 + y^2) + gz^2 + d. \tag{84}$$

Alors

$$\left.\begin{aligned} p_{zz} &= 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g)z + mez = p_{yy} \\ p_{zz} &= 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e+g)z + 2mgz \\ p_{yz} &= \frac{m}{2}(e+2f)y \\ p_{zz} &= \frac{m}{2}(e+2f)z \\ p_{zy} &= 0 \end{aligned}\right\} . \tag{85}$$

27. Maxwell oublie ici qu'il a déjà utilisé la lettre μ pour désigner la perméabilité magnétique ou l'inertie de la matière des cellules.

La condition d'équilibre interne suivant z est

$$\frac{d}{dx} p_{zx} + \frac{d}{dy} p_{yz} + \frac{d}{dz} p_{zz} = 0, \tag{86}$$

qui, dans le cas considéré, est satisfaite si

$$m(e + 2f + 2g) + 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e + g) = 0. \tag{87}$$

La contrainte tangentielle sur la sphère de rayon α, dans le plan xz, à une distance angulaire θ de l'axe est

$$T = (p_{xx} - p_{zz}) \sin\theta \cos\theta + p_{xz} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \tag{88}$$

$$= 2m\,(e + f - g)\,\alpha \sin\theta \cos^2\theta - \frac{m\alpha}{2}(e + 2f)\sin\theta. \tag{89}$$

Pour que T soit proportionnelle à $\sin\theta$, il faut que le premier terme s'annule, et donc

$$g = e + f, \tag{90}$$

$$T = -\frac{ma}{2}(e + 2f)\sin\theta. \tag{91}$$

En tout point de la surface, la contrainte normale est

$$N = p_{zz}\sin^2\theta + p_{yy}\cos^2\theta + 2p_{xz}\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(\mu - \frac{1}{3}m\right)(e + g)\, a\cos\theta + 2ma\cos\theta\{(e + f)\sin^2\theta + g\cos^2\theta\} \tag{92}$$

ou, d'après (87) et (90)

$$N = -ma\,(e + 2f)\cos\theta. \tag{93}$$

Le déplacement tangentiel en un point quelconque est

$$t = \xi\cos\theta - \zeta\sin\theta = -(a^2 f + d)\sin\theta. \tag{94}$$

Le déplacement normal vaut

$$n = \xi\sin\theta + \zeta\cos\theta = \{a^2(e + f) + d\}\cos\theta. \tag{95}$$

Si l'on prend

$$a^2(e + f) + d = 0, \tag{96}$$

il n'y a aucun déplacement normal, et le déplacement est entièrement tangentiel, et nous avons

$$t = a^2 e\sin\theta. \tag{97}$$

Le travail total effectué par les forces agissant sur la surface est

$$U = \frac{1}{2}\Sigma(Tt)\,dS,$$

la somme étant effectuée sur la surface de la sphère.

L'énergie de déformation de la substance contenue dans la sphère est

$$U = \frac{1}{2}\Sigma\left\{\frac{d\xi}{dx}p_{xx} + \frac{d\eta}{dy}p_{yy} + \frac{d\zeta}{dz}p_{zz} + \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)p_{yz} + \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)p_{zz}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)p_{xy}\right\}dV\,,$$

la somme s'étendant au volume contenu à l'intérieur de la sphère.

Comme il se doit, nous trouvons que ces deux quantités ont la même valeur, à savoir

$$U = -\frac{2}{3}\pi a^2 me(e + 2f). \tag{98}$$

Supposons que les actions tangentielles qui s'exercent sur la surface proviennent de la couche de particules qui se trouvent en contact avec elle, ces particules étant mues par leurs pressions mutuelles et agissant sur les surfaces des deux cellules avec lesquelles elles se trouvent en contact.[28]

Nous supposons que l'axe des z a été choisi dans la direction où la pression au sein des particules varie le plus rapidement ; il nous reste à déterminer la relation entre la force électromotrice R agissant sur les particules dans cette direction et le déplacement d'électricité h qui l'accompagne.

PROPOSITION XIII. Déterminons la relation entre la force électromotrice et le déplacement d'électricité lorsque une force électromotrice uniforme R agit dans la direction de l'axe z.

Considérons un élément quelconque δS de la surface, dont la normale fait un angle θ avec l'axe des z, et recouvert d'une couche de densité ρ ; la

28. L'hypothèse d'une pression mutuelle ne joue aucun rôle dans la suite des raisonnements (voir note 22). En fait, pour que le modèle de Maxwell soit compatible avec les équations de l'électrodynamique, il suffit d'admettre que les particules sont soumises à trois types de force : des forces de résistance visqueuse du milieu matériel (responsables de l'effet Joule), les forces de réaction des cellules (qui comprennent la force électromotrice d'induction électromagnétique) et éventuellement une force électromotrice d'origine chimique ou thermoélectrique.

force tangentielle qui s'exerce sur cet élément est

$$\rho R \delta S \sin\theta = 2T\delta S. \tag{99}$$

T étant, comme précédemment, la force tangentielle agissant sur chacune des faces de la surface. En posant, comme dans l'équation (34) $\rho = \frac{1}{4\pi}$, nous trouvons

$$R = -2\pi ma(e+2f). \tag{100}$$

Le déplacement d'électricité causé par cette déformation de la sphère est

$$\Sigma\, \delta S \frac{1}{2}\rho t \sin\theta \qquad \text{sommé sur toute la surface} \tag{101}$$

et, si h est le déplacement par unité de volume, nous aurons

$$\frac{4}{3}\pi a^3 h = \frac{2}{3}a^4 e \tag{102}$$

ou

$$h = \frac{1}{2\pi}ae, \tag{103}$$

de sorte que[29]

$$R = 4\pi^2 m \frac{e+2f}{e} h. \tag{104}$$

Nous pouvons aussi écrire

$$R = -4\pi E^2 h \tag{105}$$

à condition de suppposer

$$E^2 = -\pi m \frac{e+2f}{e}. \tag{106}$$

29. Le signe de l'équation (104) est incompatible avec les signes des équations (100) et (102). Cette erreur permet à Maxwell de compenser une autre erreur de signe, située dans l'équation (99). Cette dernière erreur provient sans doute du fait que Maxwell est subrepticement passé d'une convention trigonométrique circulaire pour le signe de la force tangentielle T (T comptée positivement quand elle agit dans le sens des θ croissants) à une convention linéaire incompatible (T comptée positivement quand elle agit dans le sens de l'axe z). En tout cas, il est certain que le signe doit être négatif dans la formule (105) et que le déplacement moyen des particules doit être dans la direction opposée de celle de la force électromotrice. En effet, Maxwell définit plus haut la force électromotrice comme la force agissant des cellules vers les particules ; et donc le déplacement des particules dû à la déformation élastique des cellules doit être dans le même sens que la force opposée (réaction) qui agit des particules vers les cellules.

En déterminant e et f à partir de (87) et (90), nous obtenons

$$E^2 = \pi m \frac{3}{1 + \frac{5}{3}\frac{m}{\mu}}. \tag{107}$$

Le rapport de m et μ varie suivant les substances, mais, dans un milieu dont l'élasticité provient entièrement de forces agissant entre paires de particules, ce rapport est de 6 à 5 ; dans ce cas,

$$E^2 = \pi m. \tag{108}$$

Lorsque la résistance à la compression est infiniment plus grande que la résistance à la déformation, comme dans un liquide rendu un peu élastique par la présence de gomme ou dans une gelée

$$E^2 = 3\pi m. \tag{109}$$

La valeur de E^2 doit se trouver entre ces deux limites. Il est probable que la substance contenue dans nos cellules est du premier type, et que nous devons prendre la première valeur de E^2, qui est celle d'un hypothétique solide « parfait », dans lequel

$$5m = 6\mu, \tag{110}$$

de sorte que nous devons utiliser l'équation (108).

PROPOSITION XIV. Introduisons les corrections dues à l'élasticité du milieu dans les équations (9) pour les courants électriques.[30]

Nous avons vu que la force électromotrice et le déplacement d'électricité sont reliés par l'équation (105). En dérivant cette équation par rapport à t, on trouve

$$\frac{dR}{dt} = -4\pi E^2 \frac{dh}{dt}, \tag{111}$$

ce qui montre que, lorsque la force éléctromotrice varie, le déplacement d'électricité varie lui aussi. Mais une modification du déplacement est

* *Phil. Mag.* March, 1861.

30. L'équation (9) (introduite dans une section non reproduite) est $p = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right)$ etc. ou, en notation vectorielle, $\mathbf{j} = (1/4\pi)\,\nabla \times \mathbf{H}$. Comme Maxwell l'a montré dans la partie II de son mémoire, elle donne le courant des particules associés à une différence de vitesse de rotation de cellules contiguës quand on considère les cellules comme tangentiellement indéformables.

équivalente à un courant, et il faut tenir compte de ce courant et l'ajouter à r dans les équations (9). Ces trois équations deviennent alors[31]

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} - \frac{1}{E^2}\frac{dP}{dt}\right) \\ q &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\gamma}{dx} - \frac{1}{E^2}\frac{dQ}{dt}\right) \\ r &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} - \frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{112}$$

où p, q, r sont les courants électriques dans les directions x, y, z ; α, β, γ les composantes de l'intensité magnétique et P, Q, R les forces électromotrices. Si e est la quantité d'électricité libre par unité de volume, alors l'équation de continuité s'écrit[32]

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} + \frac{de}{dt} = 0. \tag{113}$$

En dérivant (112) respectivement par rapport à x, y, z, et en remplaçant dans (113), on trouve

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{4\pi E^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right), \tag{114}$$

d'où[33]

$$e = \frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}\right), \tag{115}$$

où il n'y a pas de constante, car $e = 0$ quand il n'y a pas de forces électromotrices.

PROPOSITION XV. Déterminons la force d'interaction entre deux corps électrisés.

---

31. En notation vectorielle, on a $\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{E^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$. Contrairement au point de vue final de Maxwell (et à celui de Faraday), le courant de déplacement est ici compris comme une contribution au courant de conduction (représenté par le courant de particules) qui s'ajoute au courant associé au rotationnel du champ magnétique.

32. C'est-à-dire, $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial e / \partial t = 0$.

33. Ou encore, $e = (1/4\pi E^2)\, \nabla \cdot \mathbf{E}$. Cette équation implique que la charge électrique correspond à une accumulation de particules. Mais Maxwell ne donne pas cette interprétation, qui est si peu conforme aux vues de Faraday.

La contribution des déplacements d'électricité à l'énergie d'un milieu est

$$U = -\Sigma\frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh)\delta V, \tag{116}$$

où P, Q, R sont les forces et f, g, h les déplacements. Lorsqu'il n'y a aucun mouvement des corps ni aucune modification des forces, les équations (77) montrent que[34]

$$P = -\frac{d\Psi}{dx}, \quad Q = -\frac{d\Psi}{dy}, \quad R = -\frac{d\Psi}{dz} \tag{118}$$

et, d'après (105), nous savons que

$$P = -4\pi E^2 f, \quad Q = -4\pi E^2 g, \quad R = -4\pi E^2 h, \tag{119}$$

d'où

$$U = -\frac{1}{8\pi E^2}\Sigma\left(\overline{\frac{d\Psi}{dx}}\Big|^2 + \overline{\frac{d\Psi}{dy}}\Big|^2 + \overline{\frac{d\Psi}{dz}}\Big|^2\right)\delta V. \tag{120}$$

En intégrant par parties dans tout l'espace, et en nous rappelant que Ψ s'annule lorsque la distance devient infinie,

$$U = -\frac{1}{8\pi E^2}\Sigma\Psi\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2}\right)\delta V \tag{121}$$

ou, selon (115),

$$U = \frac{1}{2}\Sigma(\Psi e)\delta V. \tag{122}$$

Considérons maintenant le cas de deux corps électrisés, et soit e_1 la distribution d'électricité sur le premier, et Ψ_1 le potentiel électrique qui en résulte ; on a

$$e_1 = -\frac{1}{4\pi E^2}\left(\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\Psi_1}{dy^2} + \frac{d^2\Psi_1}{dz^2}\right). \tag{123}$$

Soit e_2 la distribution d'électricité sur le deuxième corps et Ψ_2 la tension qui en résulte ; la tension totale en un point quelconque est égale à $\Psi_1 + \Psi_2$, et l'expression de U devient

$$U = \frac{1}{2}\Sigma(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \Psi_1 e_2 + \Psi_2 e_1)\delta V. \tag{124}$$

34. L'équation (77) (d'une section omise) est l'équation $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mu\mathbf{H} - \partial\mathbf{A} / \partial t - \nabla\psi$ donnant la force électromotrice dans un milieu en mouvement. Dans le cas envisagé, les deux premiers termes s'annulent.

Imaginons un déplacement quelconque du corps qui porte la distribution e_1, l'électricité se déplaçant en suivant le corps ; puisque la répartition de la tension Ψ_1 elle aussi se déplace avec le corps, la valeur de $\Psi_1 e_1$ reste constante.

La quantité $\Psi_2 e_2$ elle aussi reste constante, et Green a montré (Essay on Electricity, p.10) que $\Psi_1 e_2 = \Psi_2 e_1$, de sorte que le travail effectué contre les forces électriques pour déplacer le corps est

$$W = \delta U = \delta \Sigma(\psi_2 e_1)\delta V. \tag{125}$$

Si e_1 est confinée sur un corps petit,

$$W = e_1 \delta \Psi_2,$$

ou

$$F dr = e_1 \frac{d\Psi_2}{dr} dr, \tag{126}$$

où F est la résistance et dr le déplacement.

Supposons que le corps e_2 est petit, et soit r la distance à e_2, l'équation (123) donne

$$\Psi_2 = E^2 \frac{e_2}{r} ;$$

d'où

$$F = -E^2 \frac{e_1 e_2}{r^2}, \tag{127}$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'une force de répulsion qui varie de façon inversement proportionnelle au carré de la distance.

Soit maintenant η_1 et η_2 les mêmes quantités d'électricité mesurées de façon statique ; nous savons, d'après la définition de la quantité électrique que

$$F = -\frac{\eta_1 \eta_2}{r^2}, \tag{128}$$

ce qui sera réalisé à condition que

$$\eta_1 = E e_1, \text{ et } \eta_2 = E e_2, \tag{129}$$

de sorte que la quantité E, que nous avons déterminée dans la proposition XIII se trouve être le nombre par lequel il faut multiplier la mesure électrodynamique d'une quantité d'électricité pour obtenir sa valeur électrostatique.[35]

Un courant unité[36] est celui qui, circulant dans un anneau d'aire unité, produit sur un aimant éloigné un effet identique à celui qu'exercerait un aimant de force unité et de longueur unité que l'on aurait placé perpendiculairement au plan de l'anneau. La section de ce courant est traversée, en une seconde, par un nombre E d'unités de charges, telles qu'on les mesure de façon statique, c'est-à-dire telles que deux charges unités, situées à une distance unité, exercent l'une sur l'autre une force unité.

Nous pouvons supposer soit que E unités d'électricité positive circulent dans le fil dans le sens positif, ou que E unités d'électricité négative circulent dans le sens négatif, ou encore que $\frac{E}{2}$ unités d'électricité positive circulent dans le sens positif tandis que $\frac{E}{2}$ unités d'électricité négative circulent dans le sens négatif.

La troisième hypothèse est celle adoptée par MM. Weber et Kohlrauch ; ils ont trouvé[37]

$$\frac{1}{2}E = 155\ 370\ 000\ 000, \tag{130}$$

l'unité de longueur étant le millimère et l'unité de temps la seconde, d'où

$$E = 310\ 740\ 000\ 000. \tag{131}$$

Proposition XVI. Déterminons la vitesse de propagation de vibrations transverses dans le milieu élastique dont les cellules sont constituées, en supposant que l'élasticité provient uniquement de forces agissant entre paires de particules.[38]

35. Cette définition des unités électrostatiques et électromagnétiques, due à Wilhelm Weber (1847) et d'inspiration gaussienne, était alors bien connue des spécialistes de l'électricité.

36. Sous-entendu : dans le système d'unités électromagnétiques.

37. Wilhelm Weber et Rudolph Kohlrausch avait déterminé ce rapport d'unités en 1856 en mesurant un effet électrodynamique du courant de décharge d'un condensateur après avoir mesuré électrostatiquement la charge initiale de ce condensateur. Maxwell rappelle ici la conception du courant de Weber comme double flux symétrique, car Weber mesurait le courant par le flux d'électricité positive seulement, ce qui introduit un facteur deux dans le rapport d'unités qui intéresse Maxwell.

38. Cette supposition implique la relation (110), $5m = 6\mu$, entre le coefficient d'élasticité transverse m et le coefficient de compressibilité μ. Dans ce cas, des ondes longitudinales dénuées d'interprétation optique sont aussi possibles, difficulté dont Maxwell ne semble pas se soucier.

En utilisant la méthode habituelle, nous trouvons[39]

$$V = \sqrt{\frac{m}{\rho}}, \tag{132}$$

où m est le coefficient d'élasticité transverse, et ρ la densité. En nous reportant à la première partie, (tourbillons moléculaires appliqués aux phénomènes magnétiques), on trouve que si ρ est la densité de matière à l'intérieur des tourbillons, et μ le « coefficent d'induction magnétique »

$$\mu = \pi\rho, \tag{133}$$

d'où

$$\pi m = V^2\mu. \tag{134}$$

et, d'après (108),

$$E = V\sqrt{\mu}. \tag{135}$$

Dans l'air ou dans le vide, μ est égal à 1, et donc

$$\left.\begin{aligned} V &= E \\ &= 310\ 740\ 000\ 000 \text{ millimètres par seconde} \\ &= 193\ 088 \text{ miles par seconde} \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

La vitesse de la lumière dans l'air, mesurée par M. Fizeau* est égale à 70 843 lieues par seconde (25 lieues pour un degré), ce qui donne

$$V = 314\ 853\ 000\ 000 \text{ millimètres par seconde}$$

ou

$$V = 195\ 647 \text{ miles par seconde.} \tag{137}$$

La vitesse des ondes transverses dans notre milieu hypothétique, caclulée à partir des expériences électromagnétiques de MM. Kohlrausch et Weber, coïncide de façon tellement précise avec la vitesse de la lumière, calculée à partir des expériences optiques de M ; Fizeau, que nous ne pouvons pas

39. Comme le remarqua Pierre Duhem en 1902, la formule exacte, compte tenu de la définition (81) de la constante m, devrait être $\sqrt{m/2\rho}$.

* *Comptes Rendus*, Vol.xxix (1849) p. 90.

échapper à l'idée que *la lumière est une ondulation transverse du même milieu que celui qui est à l'origine des phénomènes électriques et magnétiques.*[40]

[...] Dans la section suivante, Maxwell montre que la capacité d'un condensateur varie comme le coefficient $1/4\pi E^2$, qui représente donc la « capacité inductive spécifique » (permittivité). En conséquence, l'indice optique d'un milieu matériel varie comme la racine carrée de sa permittivité diélectrique et comme l'inverse de la racine carré de sa perméabilité magnétique. Enfin, dans une quatrième et dernière partie de son mémoire intitulée « La théorie des tourbillons moléculaires appliquée à l'action du magnétisme sur la lumière polarisée », Maxwell montre comment la rotation de la substance élastique des cellules de son modèle implique une rotation du plan de polarisation d'ondes élastiques transverses se propageant à travers ce milieu. Il obtient ainsi une explication de l'effet Faraday. Pour ainsi dire, ce résultat ferme la boucle de l'argumentation de Maxwell car, comme il le signale lui-même (pp. 505-506 des *Scientific papers*), c'est le lien établi par Thomson entre cet effet et une rotation dans le milieu de propagation qui a suggéré l'idée des tourbillons moléculaires.

40. Contrairement à l'opinion émise par Maxwell, la précision de la coïncidence de la vitesse V et de la vitesse de la lumière est purement accidentelle. En effet, le calcul d'élasticité de Maxwell suppose les cellules sphériques, ce qui ne saurait être exact dans un modèle cohérent ; l'expression de V est fausse d'un facteur $\sqrt{2}$ (voir la note 38) ; enfin, la mesure de Weber et Kohlrausch et celle de Fizeau s'avérèrent plus tard fausses de 3% alors que l'accord constaté par Maxwell est à 1%. Par ailleurs, notons qu'à ce stade de sa théorie, Maxwell ne propose pas une véritable théorie électromagnétique de la lumière, puisqu'il ne fait pas correspondre un champ électromagnétique aux ondes lumineuses (et ne rend même pas compte de leur transversalité).

3. La maturité (1865-1873)

Le fondement dynamique

À nouveau, cinq années s'écoulèrent avant que Maxwell publiât un nouveau mémoire sur l'électromagnétisme, cette fois intitulé « A dynamical theory of the electromagnetic field » (1865). Dans cette dernière approche, il souhaitait ne retenir que l'essentiel des hypothèses physiques de 1862 et en tirer le plus directement possible la détermination électromagnétique de la vitesse de la lumière. Il comptait d'ailleurs sur sa participation au projet britannique d'élaboration d'un système d'unités et d'étalons électriques pour se donner les moyens de vérifier précisément cette conséquence essentielle de sa théorie.[1]

Le mot « dynamique » dans le titre de Maxwell annonce un aspect essentiel de sa nouvelle démarche. Dans la physique britannique de cette époque, ce terme indiquait une nouvelle conception de la mécanique et de son rapport à la physique, conception en un sens plus abstraite car elle n'exigeait plus d'expliciter les mécanismes sous-jacents aux phénomènes, mais aussi plus concrète car elle privilégiait des quantités directement accessibles à l'expérience et utiles en pratique. La thermodynamique, ainsi nommée par William Thomson, était le prototype de cette approche. Cette théorie considérait les machines comme des boîtes noires, dont seuls l'*input* et l'*output* comptaient vraiment. Elle admettait certes la nature mécanique de la chaleur et des phénomènes reliés, mais sans faire d'hypothèse précise sur les mouvements impliqués. Elle se contentait de relier entre elles des grandeurs mesurables telles que le volume, la pression, la température et l'énergie d'une substance. C'est dans cet esprit que Maxwell souhaitait désormais aborder l'électrodynamique.

Au nom de l'effet Faraday, Maxwell croyait fermement en la réalité d'un mouvement associé au champ magnétique et commandé par les courants. Toutefois, il ne souhaitait plus expliciter le mécanisme sous-jacent, car seuls les courants et les forces s'exerçant entre leurs supports matériels étaient accessibles à l'expérience. La notion de « quantité de mouvement réduite », introduite dans le mémoire de 1861 comme interprétation mécanique du vecteur **A** (voir plus haut, p. 52), lui fournit un point de départ suffisant. Considérons par exemple la corde enroulée autour du treuil d'un puits. La corde en elle-même possède une inertie négligeable. Néanmoins, il faut fournir un effort pour la tirer car il faut vaincre l'inertie du treuil qui se met à tourner. Cet effort est la dérivée temporelle d'une quantité proportionnelle à la vitesse de la corde, que les mécaniciens appellent quantité de mouvement réduite à la corde. C'est par analogie avec cette situation physique que Maxwell introduit la « quantité de mouvement électromagnétique » $p = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ d'un circuit linéaire fermé et identifie la

1. Cf. Schaffer 1995 ; Harman 1998 : 65-68.

force d'inertie associée $-\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ à la force électromotrice (scalaire) d'induction $e = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ dans ce circuit.[2]

Si $\mathbf{A}$ et la configuration du circuit varient tous deux, cette identité conduit à

$$\mathbf{E} = -\,\partial\mathbf{A} / \partial t + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \psi, \tag{1}$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse de la matière au point considéré, et ψ un potentiel scalaire.

La comparaison avec la loi d'induction de Faraday conduit alors Maxwell à poser

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2}$$

pour l'induction magnétique. Par ailleurs, des considérations analogues à celles du mémoire de 1856 donnent $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (en l'absence de ferromagnétisme) avec

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \tag{3}$$

Le vecteur $\mathbf{A}$ n'est déterminé qu'à un gradient près par la relation (2). Maxwell l'appelle « quantité de mouvement électromagnétique » (vectorielle) ou encore potentiel vecteur, car dans la jauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, il vérifie l'équation $\Delta\mathbf{A} + 4\pi\,\mathbf{j} = \mathbf{0}$, qui est similaire à l'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique.

Quant aux forces électromagnétiques, leur existence et leur expression résulte de la conservation de l'énergie. En effet, en utilisant les équations (1), (2) et (3), l'énergie dissipée dans les conducteurs par effet Joule peut s'écrire :

$$\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \frac{1}{2}\,\mu H^2 \mathrm{d}\tau - \int \mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B})\mathrm{d}\tau\,. \tag{5}$$

Le premier terme du second membre correspond à la diminution de l'énergie du mouvement caché dans le champ magnétique. L'opposé du second terme doit donc être identifié au travail de forces électromagnétiques de densité $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$.

Dans une section du *Traité* de 1873 reproduite plus bas (voir extrait n° 3), Maxwell simplifia sa dérivation des forces électrodynamiques grâce à un usage ingénieux de la mécanique lagrangienne. Cette forme des équations de la mécanique était alors privilégiée par les énergétistes britanniques, particulièrement Thomson et Tait, en raison de son lien étroit avec le concept d'énergie. Pour tout système dynamique dont la configuration est exactement déterminée par une suite de coordonnées généralisées $q = (q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots q_N)$, il suffit de connaître la fonction de Lagrange $L(q, \dot{q})$ (différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle) pour que les équations du mouvement soient connues. En effet, celles-ci peuvent s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i, \tag{6}$$

où F_i est la force généralisée appliquée à la coordonnée q_i. Mieux encore, la fonction L peut être complètement déterminée par un observateur qui agit exclusivement sur les coordonnées q, sans rien savoir de la constitution interne du système. Dans un mémoire de 1879, Maxwell prend l'exemple d'un carillon tel que la configuration des cloches (leur inclinaison) soit entièrement déterminée par un système de cordes (par

2. Cf. Siegel 1991.

leur hauteur). Un bedeau savant pourrait connaître le lagrangien du carillon, et donc les équations du mouvement, en observant le mouvement libre des cordes après communication d'impulsions à chacune d'elles.[3]

Dans le cas de l'électrodynamique d'un système de courants linéaires, il y a deux classes de coordonnées généralisées. Les dérivées temporelles de la première classe donnent les courants ; l'autre classe détermine la configuration spatiale des supports matériels des courants. La partie électrodynamique du lagrangien n'est autre que l'énergie cinétique T du mouvement caché dans le champ magnétique. Elle est donc une fonction quadratique des courants. Sa dérivée par rapport à l'un des courants est la quantité de mouvement électromagnétique $p = \oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ de Maxwell. L'équation de Lagrange correspondante fait intervenir la force d'inertie $-\,\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$, qui n'est autre que la force électromotrice d'induction. Quant aux dérivées spatiales de T, elles engendrent les forces électrodynamiques (au signe près), comme on peut s'en persuader en remarquant que $-\,T$ n'est autre que le potentiel de Neumann (formule (1) du chapitre 1, p. 12).

À travers ces considérations, Maxwell inaugurait un nouveau style de physique théorique dans lequel l'exigence d'une forme lagrangienne des équations fondamentales de la théorie se substituait à l'explicitation d'une représentation mécanique de ces équations. D'éminents commentateurs de Maxwell, comme Helmholtz, Poincaré et Lorentz, y virent une étape essentielle de l'évolution de la physique ; d'autres comme William Thomson, y virent une régression par rapport à l'idéal mécaniste. Maxwell, quant à lui, continuait d'espérer qu'un mécanisme simple puisse un jour représenter ses équations. En attendant, il souhaitait promouvoir le concept de quantité de mouvement électromagnétique associé au vecteur $\mathbf{A}$ et préférait donc écrire la loi d'induction sous la forme (1) plutôt que d'écrire une de nos « équations de Maxwell ».

Nouveaux concepts de charge et de courant

La justification dynamique que donnait Maxwell des équations de l'électrodynamique se limitait aux courants fermés. Il lui fallait pourtant étendre ses considérations aux courants ouverts, s'il voulait préserver la généralité de sa théorie de 1862. En l'absence d'un modèle précis, il ne pouvait plus exploiter l'idée d'une déformation élastique du mécanisme sous-jacent pour modifier la relation (3) entre le courant $\mathbf{j}$ et la force magnétique $\mathbf{H}$. Il s'inspira donc de Faraday pour décréter que tout courant était en fait fermé, car les variations de la polarisation $\mathbf{D}$ du milieu diélectrique constituaient un véritable courant susceptible de prolonger un courant de conduction au-delà des limites du conducteur (voir l'introduction générale, p. 21). Cette intuition permet d'écrire

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t \tag{7}$$

au lieu de l'équation (3). À partir de ce moment, Maxwell considéra le courant de déplacement comme complément au courant de conduction, alors que dans le

3. Cf. Buchwald 1985 : 20-23.

mémoire de 1862 le courant de déplacement avait le signe opposé et était conçu comme une contribution au courant de conduction. Néanmoins, il continua de parler de « déplacement » par analogie avec la théorie de Thomson-Mossotti des diélectriques, qui fait de la polarisation un déplacement microscopique des fluides électriques autour de leur position d'équilibre (un peu comme dans la théorie électronique actuelle). Cette illustration le conduisit malheureusement à poser

$$\rho = -\nabla \cdot \mathbf{D} \tag{8}$$

pour la densité de charge liée à la polarisation, sans voir que l'équation de conservation de l'électricité et l'équation obtenue en prenant la divergence de l'équation (7) impliquaient le signe opposé.

Maxwell ne résolut cette difficulté que plus tard, dans son *Traité* de 1873. Nous reproduisons plus bas les passages de cet ouvrage consacrés à l'interprétation de la charge et du courant. Certes, on y trouve encore la notion de « déplacement de l'électricité » dans un diélectrique, mais l'électricité n'est plus là qu'un fluide *neutre* remplissant tout l'espace et dont l'incompressibilité fournit une métaphore pour l'absence de divergence du courant total (de conduction *et* de déplacement). Une charge électrique à l'interface entre un conducteur et un isolant ne saurait être interprétée comme une accumulation de ce fluide ; conformément à l'idée de Faraday, Maxwell interprète cette charge comme une discontinuité spatiale de l'état de contrainte associé au déplacement. Le plus simple aurait été d'éviter toute idée de fluide et de traiter la polarisation **D** comme un concept primitif, avec une orientation définie par la formule

$$\rho = +\nabla \cdot \mathbf{D}. \tag{9}$$

Les schémas de la figure 2.6 indiquent la différence fondamentale entre le concept maxwellien de polarisation et celui admis dans les théories de Thomson, Mossotti et Lorentz.[4]

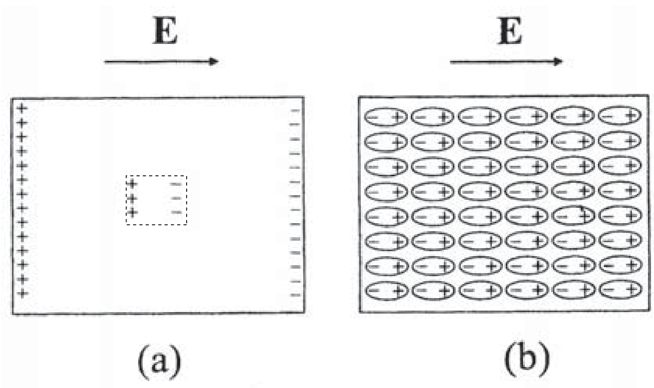


Figure 2.6 **Le concept de polarisation selon Faraday-Maxwell** (a), **et selon Thomson-Mossotti-Lorentz** (b). Dans le premier cas, une portion du diélectrique extraite par la pensée présente une charge positive du côté où pénètre le vecteur **E,** et une charge négative du côté ou il sort. Dans le second cas, les molécules du diélectrique subissent un déplacement de leur électricité positive dans le sens du vecteur **E** et un déplacement inverse de leur électricité négative.

4. Cf. Buchwald 1985.

Il est néanmoins possible de donner une idée cohérente du comportement du fluide incompressible de Maxwell. Pour cela, on peut s'inspirer du modèle d'un courant unidimensionnel construit par Oliver Lodge en 1876 et représenté sur la figure 2.7. La corde inextensible ABCD représente le fluide neutre de Maxwell. Sous l'effet du poids W, qui est l'analogue de la force électromotrice d'une pile (tandis que la vis S simule une résistance interne de la pile), la portion AB de la corde tend à se mouvoir vers la droite. Cependant, elle est retenue par les liens élastiques attachés aux perles 1, 2, 3….8. Quand la tension de ces liens devient trop forte, les perles peuvent soudainement glisser le long de la corde si bien qu'elles retrouvent leur position naturelle (celle qu'elles ont en l'absence de poids W). Le mouvement de la corde recommence alors à tendre les liens, et ainsi de suite. Dans l'analogue d'un isolant, le seuil de dérapement des perles est très élevé ; dans l'analogue d'un conducteur, ce seuil est très bas. L'écart des perles par rapport à leur position naturelle est l'analogue du déplacement de Maxwell.

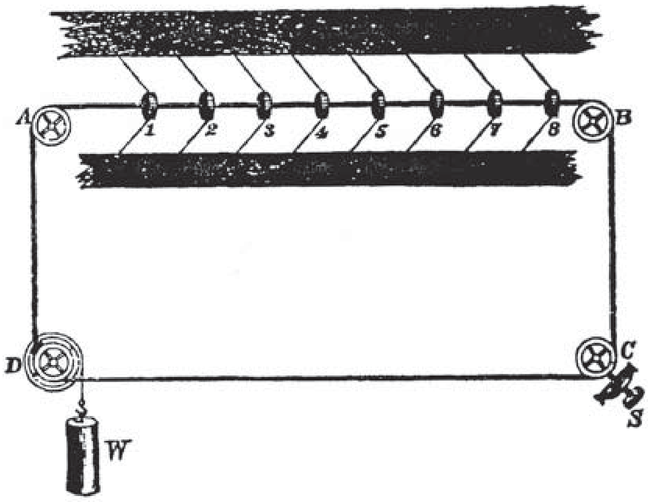


Figure 2.7 **Modèle de Lodge** pour représenter le courant électrique dans la théorie de Maxwell.

On comprend alors que dans un isolant le courant soit identifiable à la variation du déplacement, et que dans un conducteur le déplacement reste faible et s'accompagne d'un effet thermique (l'analogue de l'échauffement des perles dû à leur dérapage). Pour se représenter une charge électrique, il suffit de supposer que les perles 1, 2, 3, 4 (par exemple) dérapent très facilement, alors que les perles 5, 6, 7, 8 sont solidement fixées à la corde. Le poids W peut alors être équilibré par la tension des liens élastiques 5, 6, 7, 8, alors que les perles 1, 2, 3, 4 restent dans leur position naturelle. Ainsi apparaît, à la frontière qui sépare les deux jeux de perles, l'analogue d'une charge électrique.[5]

5. O. Lodge, "On a model illustrating the passage of electricity through metals, electrolytes, and dielectrics, according to Maxwell's theory", *Philosophical magazine*, 2 (1876), 353-374. Cf. Hunt 1991. Nous avons librement modifié la description de modèle de Lodge pour le render plus fidèle à la conception de Maxwell.

Il faut reconnaître qu'en maintenant une image fluidiste dans une conception de l'électricité radicalement opposée aux notions continentales, Maxwell semait une certaine confusion. Certains de ses disciples britanniques (FitzGerald et Heaviside) virent le piège et décidèrent d'éliminer complètement le fluide incompressible de Maxwell. Quant aux physiciens continentaux, ils s'avouèrent le plus souvent incapables de saisir ce que Maxwell pouvait entendre par électricité.[6]

La théorie électromagnétique de la lumière

Indépendamment de toute hypothèse physique, le système d'équations de Maxwell implique l'existence d'ondes électromagnétiques propagées à la vitesse $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ dans un milieu linéaire homogène de permittivité ε et de perméabilité μ. Sous le titre de « Théorie électromagnétique de la lumière », Maxwell obtint ce résultat capital à la fin de son mémoire de 1865 sur le champ électromagnétique. En l'absence de charges électriques, de courants de conduction, de ferromagnétisme et de mouvement de la matière, les équations de Maxwell se réduisent à

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D}/\partial t, \quad \mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}/\partial t - \nabla \psi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Une combinaison adéquate de ces équations conduit à

$$\Delta \mathbf{B} - \varepsilon\mu\, \partial^2 \mathbf{B}/\partial t^2 = 0, \tag{10}$$

ce qui signifie que l'induction magnétique **B** se propage à la vitesse $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Pour une onde plane, la relation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implique que **B** soit perpendiculaire à la direction de propagation. Comme Maxwell le montre dans le *Traité*, les équations $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D}/\partial t$ et $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ impliquent de plus que pour une onde plane monochromatique **E** soit perpendiculaire à **B** et à la direction de propagation. On peut donc identifier une onde lumineuse à une onde électromagnétique. Porté par l'interprétation dynamique de ses équations, Maxwell s'intéressait aussi à la propagation du potentiel vecteur **A**. Identifiant le potentiel ψ au potentiel électrostatique donné par la loi de Poisson (ce qui impose implicitement la jauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), Maxwell conclut que **A** se propage également à la vitesse finie $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Maxwell considérait lui-même l'interprétation électromagnétique de la lumière comme la conséquence la plus importante de sa théorie. Impliqué dans le projet britannique de mise au point d'unités électriques absolues, il s'appliqua à démontrer expérimentalement l'identité de la vitesse de la lumière dans le vide et du rapport $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique de charge. Dans une note de 1868 reproduite plus bas (extrait n° 4), il chercha à donner la forme la plus directe et la plus élémentaire possible à l'interprétation électromagnétique de la lumière, en partant de la loi d'Ampère, de la loi de Faraday et de l'hypothèse du courant de

6. Cf. Hunt 1991.

déplacement. Bien que cette note ne contienne pas explicitement l'expression symbolique générale des équations de Maxwell, elle se rapproche de la forme moderne de la théorie de Maxwell en ce qu'elle ne fait plus intervenir le potentiel vecteur **A**.

Notations

Avant la rédaction de son *Traité*, Maxwell représentait tout vecteur par ses coordonnées cartésiennes. Dans le *Traité*, il donne aussi la forme quaternionique des équations vectorielles, sous l'influence de son ami Peter Guthrie Tait, « le plus éminent joueur de nabla » (la harpe assyrienne dont le symbole ∇ rappelle la forme).[7] Comme nous l'avons vu, Maxwell s'intéressait beaucoup à la classification des grandeurs physiques, suivant leurs dimensions, leurs propriétés de transformation ou encore leurs analogies avec certaines grandeurs mécaniques (comme le flux et la force). Il y consacra un chapitre entier de son traité. Les quaternions de William Rowan Hamilton sont une extension des nombres complexes adaptée à l'espace euclidien tridimensionnel. Ils sont définis comme combinaisons linéaires à coefficients réels de l'unité et des symboles i, j, k tels que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$. Le coefficient de l'unité du quaternion q, noté $S.q$, s'appelle sa partie scalaire ; les trois autres coefficients, notés $V.q$, constituent sa partie vectorielle. Pour deux quaternions a et b de partie scalaire nulle et de parties vectorielles $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, il est aisé de voir que $S.ab = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ et $V.ab = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (dans la notation vectorielle moderne). De plus, à l'aide de l'opérateur $\nabla = i\,\partial/\partial x + j\,\partial/\partial y + k\,\partial/\partial z$ de Hamilton, on peut écrire $-\mathrm{div}\,\mathbf{a} = S.\nabla a$ et $\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = V.\nabla a$ pour les opérateurs que Maxwell nomma *convergence* et *curl* par analogie hydrodynamique. Oliver Heaviside, qui trouvait cette notation trop savante, y substitua la notation vectorielle moderne dans les années 1880, précisément pour simplifier l'écriture des équations de Maxwell. Nous y reviendrons dans la section 1 du chapitre 3.[8]

7. Cf. Lewis Campbell et William Garnett, *The life of James Clerk Maxwell* (Londres, 1882), 634-636.
8. Cf. Michael Crowe, *A history of vector analysis* (Notre Dame, 1967).

Extrait n° 3 :

TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ ET DE MAGNÉTISME

A treatise on electricity and magnetism, J. C. Maxwell
Deuxième édition (Oxford, 1881).
Traduction de G. Séligmann-Lui (Paris, 1885-89), revue par O. Darrigol.

PLAN DE CET OUVRAGE

59. Dans cet ouvrage, je me propose d'exposer la théorie ordinaire des actions électriques, théorie qui les considère comme ne dépendant que des corps électrisés et des positions respectives de ces corps, et qui ne fait pas entrer en compte les phénomènes qui peuvent se produire dans le milieu environnant. Nous établirons ainsi la loi de l'inverse du carré des distances, la théorie du potentiel et les équations de Laplace et de Poisson. Nous considérerons ensuite les charges et les potentiels d'un système de corps électrisés ; et, des équations qui les lient, équations dont on peut toujours supposer que les coefficients aient été déterminés par expérience dans les cas où les méthodes mathématiques actuelles ne sont pas applicables, nous déduirons les forces mécaniques qui agissent entre les différents corps électrisés.

Nous étudierons ensuite certains théorèmes généraux, au moyen desquels Green, Gauss et Thomson ont montré comment on peut résoudre les problèmes de distribution électrique. Un des résultats de ces théorèmes est que, si l'équation de Poisson est satisfaite par une certaine fonction qui, à la surface de chacun des conducteurs, a pour valeur la valeur du potentiel de ce conducteur, cette fonction représente en tout point le potentiel du système. Nous en déduirons aussi une méthode pour résoudre les problèmes susceptibles d'une solution exacte.

Dans le théorème de Thomson, l'énergie totale d'un système s'exprime par l'intégrale d'une certaine quantité prise dans tout l'espace compris entre les corps électrisés, ou par une autre intégrale qui ne s'étend qu'aux surfaces électrisées.[1] L'égalité de ces deux quantités peut recevoir l'interprétation physique suivante : On peut concevoir la relation physique qui existe entre les corps électrisés, soit comme effet de l'état dans lequel se trouve le milieu qui sépare les corps, soit comme résultat d'une action directe s'exerçant à distance entre les corps. Si nous adoptons cette dernière idée, nous pouvons déterminer la loi de l'action, mais nous ne pouvons pousser plus loin nos spéculations sur la cause de cette action. Si, au contraire, nous acceptons l'idée d'une action s'exerçant par l'entremise d'un milieu, nous sommes conduits à rechercher la nature de cette action en chaque point du milieu.

Il ressort de ce théorème que, si nous voulons voir le siège de l'action électrique dans les différentes parties du milieu diélectrique, l'énergie d'une petite partie de ce milieu doit dépendre du produit du carré de l'intensité de

1. Formellement, ce théorème s'écrit $\frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\,d\tau = \frac{1}{2}\int \sigma\psi\,d\mathrm{S}$ si σ désigne la densité superficielle de charge et ψ le potentiel électrostatique.

la force électromotrice résultante en ce point multiplié par un coefficient que l'on appelle *pouvoir inducteur spécifique du milieu*.

Cependant, considérant la théorie des diélectriques au point de vue le plus général, il vaut mieux faire une distinction entre l'intensité électromotrice en un point et la polarisation électrique du milieu en ce point : en effet, dans certaines substances solides, ces deux quantités dirigées, quoique liées l'une à l'autre, n'ont pas la même direction. L'expression la plus générale de l'énergie électrique pour l'unité de volume du milieu est le demi-produit de l'intensité électromotrice et de la polarisation électrique par le cosinus de l'angle compris entre leurs directions.[2]

Dans tous les diélectriques fluides, l'intensité électromotrice et la polarisation électrique sont dans la même direction et dans un rapport constant.

Si nous calculons, dans cette hypothèse, l'énergie totale du milieu, nous la trouvons égale à l'énergie qui serait due à l'électrisation des conducteurs dans l'hypothèse d'une action directe à distance. Donc, au point de vue mathématique, les deux hypothèses sont équivalentes.

Si nous examinons alors l'état mécanique du milieu, dans l'hypothèse que l'action mécanique observée entre les corps électrisés s'exerce au travers et par l'entremise d'un milieu ; comme dans les exemples familiers où un corps agit sur un autre par l'intermédiaire d'une corde tendue, ou d'une tige comprimée, nous trouvons que le milieu doit être dans un état de contrainte mécanique.

Ainsi que l'a indiqué Faraday,[*] cette contrainte consiste en une tension dirigée suivant les lignes de force, combinée à une pression égale suivant toutes les directions perpendiculaires à ces lignes.[3] La grandeur de ces contraintes est proportionnelle à l'énergie de l'électrisation par unité de volume, ou, en d'autres termes, au carré de la force électromotrice résultante multiplié par la capacité inductive spécifique du milieu.

Cette distribution de pressions et de tensions est la seule qui s'accorde avec les actions mécaniques observées entre les corps électrisés, et avec l'équilibre que l'on observe également dans le fluide diélectrique qui entoure les corps électrisés.[4] J'ai donc pensé que les règles de la recherche scientifique

2. c'est-à-dire $\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$.

* *Exp. Res.*, série XI, 1297.

3. C'est le tenseur des contraintes de Maxwell, $D_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$, introduit pour la première fois par Maxwell dans la première partie de « On physical lines of force » (extrait n° 2) dans le cas magnétique.

4. En réalité, il existe une infinité de systèmes de contraintes compatibles avec les actions observées.

m'autorisaient à faire ce pas : admettre l'existence effective de cet état de contrainte, et suivre cette hypothèse dans ses conséquences. Trouvant que le mot de tension électrique a été employé dans plusieurs sens mal définis, j'ai essayé de le réserver exclusivement pour cette conception que je crois avoir été dans l'idée de plusieurs de ceux qui ont fait usage de ce terme, pour cet état de déformation du milieu diélectrique qui produit le mouvement des corps électrisés, et qui, constamment accru, conduit à la décharge disruptive. Dans ce sens, la tension électrique est une tension de nature absolument semblable à la tension d'une corde et peut se mesurer de la même façon ; et, le milieu diélectrique pouvant supporter une certaine tension, mais non une plus considérable, on peut dire qu'il a une certaine robustesse, exactement dans le même sens où l'on dit qu'une corde a une certaine robustesse. Ainsi, par exemple, Thomson a trouvé qu'à la température et à la pression ordinaire l'air peut supporter une tension électrique de 9600 grains par pied carré avant de laisser passer une étincelle.*

60. De l'hypothèse que l'action électrique n'est pas une action directe s'exerçant à distance entre les corps, mais qu'elle s'exerce par l'intermédiaire du milieu qui est entre les corps, nous avons déduit que ce milieu devait être dans un état de contrainte. Nous avons aussi déterminé la nature de cette contrainte, et nous l'avons comparée à celles qui peuvent se présenter dans des corps solides. Le long des lignes de force, il y a une tension : perpendiculairement à ces lignes, il y a une pression ; les valeurs numériques de ces deux forces sont égales, et chacune d'elles est proportionnelle au carré de la force résultante au point considéré. Après avoir établi ces résultats, nous sommes préparés pour faire un nouveau pas, et nous former une idée de la nature de la polarisation électrique dans le milieu diélectrique.

On peut dire qu'un élément d'un corps est polarisé, quand il acquiert des propriétés égales et contraires sur deux faces opposées. La notion de polarité interne peut être étudiée avec grand avantage dans l'exemple que nous fournissent les aimants permanents ; nous l'expliquerons plus au long quand nous en viendrons à traiter du Magnétisme.

La polarisation électrique du diélectrique est un état forcé dans lequel le corps est jeté par l'action de la force électromotrice, et qui disparaît en même temps que cette force même. Nous pouvons concevoir qu'il consiste en ce que l'on peut appeler un déplacement électrique produit par l'intensité électromotrice. Lorsqu'une force électromotrice agit sur un milieu conducteur,

* [Le *grain* valant 0,06179895 grammes et le *pied* 30,179119 centimètres, la tension de 9600 grains par pied carré correspond à 0,669615 grammes ou 657 dynes par centimètre carré.]

elle y produit un courant ; mais si le milieu est un non-conducteur ou diélectrique, le courant ne peut s'établir à travers le milieu : l'électricité néanmoins est déplacée dans le milieu, dans la direction de la force électromotrice, et l'étendue de ce déplacement dépend de la grandeur de la force électromotrice ; en sorte que, si la force électromotrice augmente ou diminue, le déplacement électrique augmente ou diminue dans le même rapport.[5]

La grandeur du déplacement a pour mesure la quantité d'électricité qui traverse l'unité de surface, pendant que le déplacement croît de zéro à sa valeur maximum. Telle est, par suite, la mesure de la polarisation électrique.

L'analogie entre l'action d'une force électromotrice qui produit un déplacement électrique et celle d'une force mécanique ordinaire qui déplace un corps élastique est si évidente, que je me suis risqué à appeler *coefficient d'élasticité électrique du milieu* le rapport de la force électromotrice au déplacement électrique correspondant. Ce coefficient est différent pour les différents milieux, et varie en raison inverse du pouvoir inducteur spécifique de chaque milieu.

Les variations de déplacement électrique produisent évidemment des courants électriques. Mais ces courants ne peuvent exister que pendant que le déplacement varie, et, par suite, le déplacement ne pouvant dépasser une certaine valeur sans produire une décharge disruptive, ils ne peuvent continuer indéfiniment dans la même direction, comme font les courants dans les conducteurs.

[...] En quelques lignes omises, Maxwell décrit le cas des cristaux pyroélectriques pour lesquels une polarision existe sans force électromotrice extérieure.

Si une charge *e* est uniformément répartie sur la surface d'une sphère, la force résultante en un point quelconque du milieu qui entoure la sphère est numériquement égale à la charge *e* divisée par le carré de la distance du point au centre de la sphère. D'après notre théorie, cette force résultante donne lieu à un déplacement d'électricité dans une direction s'éloignant de la sphère.

5. C'est la relation que Maxwell écrira plus loin sous la forme $\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}k\mathbf{E}$. Il faut se garder d'attibuer à « l'électricité » déplacée une charge électrique. En effet, comme on va le voir, la charge électrique ne correspond pas pour Maxwell à une accumulation de « l'électricité », qui est incompressible, mais à une discontinuité du déplacement **D**, existant typiquement à la frontière d'un milieu diélectrique et d'un conducteur. De plus, l'interprétation de **D** comme un déplacement de charges électriques microscopiques conduirait à l'expression $-\nabla \cdot \mathbf{D}$ de la charge liée à la polarisation (comme dans la théorie électronique des diélectriques de Lorentz aujourd'hui enseignée) au lieu du $\nabla \cdot \mathbf{D}$ requis par Maxwell.

Traçons maintenant une surface sphérique concentrique de rayon r ; le déplacement total E à travers cette surface sera proportionnel à la force résultante multipliée par l'aire de la surface sphérique. Mais la force résultante est proportionnelle à la charge e, et inversement proportionnelle au carré du rayon, tandis que l'aire est proportionnelle au carré du rayon.

Donc le déplacement total E est proportionnel à la charge e, et indépendant du rayon.

Pour déterminer le rapport de la charge e et de la quantité d'électricité E déplacée à travers la surface sphérique vers le dehors d'une surface sphérique, considérons le travail effectué dans le milieu, dans la région comprise entre deux surfaces sphériques concentriques, pendant que le déplacement augmente de E à $E + \delta E$. Si V_1 et V_2 désignent respectivement les potentiels de la surface intérieure et de la surface extérieure, la force électromotrice qui produit le déplacement additionnel est $(V_1 - V_2)$, en sorte que le travail dépensé pour augmenter le déplacement est $(V_1 - V_2)\,\delta E$.

Si maintenant nous faisons coïncider la surface de la sphère intérieure avec celle de la sphère électrisée, et si nous faisons le rayon de l'autre infini, V_1 devient V, le potentiel de la sphère, et V_2 devient nul : le travail total effectué dans le milieu est donc $V\,\delta E$.

Mais, d'après la théorie ordinaire, le travail effectué pour augmenter la charge est $V\,\delta e$; et si, comme nous le supposons, il est dépensé à augmenter le déplacement, $\delta E = \delta e$, et, puisque E et e s'annulent à la fois, $E = e$, c'est-à-dire que[6]

Le déplacement vers l'extérieur à travers une surface sphérique quelconque concentrique à la sphère électrisée est égal à la charge de cette sphère.

Pour fixer nos idées sur le déplacement électrique, considérons un accumulateur[7] formé de deux plateaux conducteurs A et B, séparés par une couche de diélectrique C. Soit W un fil conducteur joignant A et B, et supposons que, par l'action d'une force électromotrice, une quantité Q d'électricité positive soit transportée de B vers A. L'électrisation positive de A et l'électrisation négative de B produisent une certaine force électromotrice agissant de A vers B dans la couche diélectrique, et cette force électromotrice produit un déplacement électrique de A vers B dans le diélectrique. La grandeur de ce déplacement, mesurée par la quantité d'électricité chassée à travers une

6. Formellement, $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = e$.

7. Par « accumulateur » il faut ici entendre « condensateur ».

section idéale qui partagerait le diélectrique en deux couches, sera, d'après notre théorie, exactement égale à Q. (*Voir § 75, 76 et 111.*)

On voit donc que, en même temps qu'une quantité d'électricité Q est transportée par la force électromotrice le long du fil de B en A, en traversant toutes les sections du fil, une quantité égale d'électricité traverse toutes les sections du diélectrique de A vers B, en vertu du déplacement électrique.

Les déplacements inverses d'électricité se produiront pendant la décharge de l'accumulateur. Dans le fil, la décharge est Q de A vers B ; dans le diélectrique, le déplacement s'arrête, et une quantité Q traverse toutes les sections de B vers A.

Tous les cas d'électrisation et de décharge peuvent donc être considérés comme des mouvements s'exécutant dans un circuit fermé tel, qu'au même instant, il passe dans chaque section la même quantité d'électricité ; il eu est ainsi, non seulement dans le circuit voltaïque, pour lequel la chose avait toujours été reconnue, mais aussi dans les cas où l'on supposait généralement que l'électricité s'accumulait en certains points.

61. Nous sommes ainsi conduits à une conséquence très remarquable de la théorie que nous examinons ; à savoir que les mouvements de l'électricité sont semblables à ceux d'un fluide *incompressible*, en sorte que la quantité total contenue à l'intérieur d'une surface fermée fictive déterminée reste toujours la même. Ce résultat parait, à première vue, en contradiction directe avec ce fait que l'on peut charger un conducteur, puis l'introduire dans un espace clos et changer ainsi la quantité d'électricité contenue dans cet espace. Mais nous devons nous rappeler que la théorie ordinaire ne tient pas compte du déplacement électrique à travers les substances diélectriques, et qu'elle borne son attention à l'électrisation des surfaces qui séparent les conducteurs et les diélectriques. Dans le cas d'un conducteur chargé, supposons la charge positive ; alors, si le diélectrique environnant s'étend de toutes parts autour de la surface fermée, il y aura polarisation électrique et déplacement du dedans vers le dehors sur toute l'étendue de la surface fermée ; et l'intégrale du déplacement, prise sur toute la surface, est égale à la charge du conducteur renfermé dans la surface.[8]

Ainsi, quand le conducteur chargé est introduit dans l'espace clos, il y a aussitôt déplacement du dedans vers le dehors à travers la surface, d'une quantité d'électricité égale à la charge, en sorte que la quantité totale d'électricité contenue dans la surface reste la même.

8. Formellement, $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho \, d\tau$ si ρ désigne la densité de charge.

La théorie de la polarisation électrique sera discutée plus longuement au Chapitre V, et l'on en donnera au § 334 une représentation mécanique ; mais son importance ne pourra être bien comprise que quand nous en viendrons à l'étude des phénomènes électromagnétiques.

62. Les traits particuliers de la théorie que nous venons de développer sont les suivants :

L'énergie de l'électrisation réside dans le milieu diélectrique, que ce milieu soit solide, liquide ou gazeux, dense, rare ou même entièrement privé de matière pondérable, pourvu qu'il soit toujours susceptible de transmettre l'action électrique.

L'énergie est emmagasinée en chaque point du milieu sous la forme d'un état de déformation appelé *polarisation électrique,* dont la grandeur dépend de la force électromotrice résultante en ce point.

La force électromotrice agissant sur un diélectrique produit ce que nous avons appelé *déplacement électrique ;* la relation entre la force et le déplacement, dans le cas le plus général, sera étudiée plus loin en traitant de la conduction ; mais, dans les cas les plus importants, le déplacement est dans la même direction que la force, et, numériquement, est égal à l'intensité multipliée par $\frac{1}{4\pi}K$, où K est le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique.

L'énergie due à la polarisation électrique est égale, pour l'unitée de volume du diélectrique, à la moitié du produit de l'intensité électromotrice par le déplacement électrique, et, s'il y a lieu, par le cosinus de l'angle de leurs directions.

Dans les diélectriques fluides, la polarisation électrique est accompagnée d'une tension suivant la direction des lignes d'induction, et d'une pression égale suivant toutes les directions perpendiculaires aux lignes d'induction, la grandeur de cette tension ou pression rapportée à l'unité de surface étant numériquement égale à l'énergie par unité de volume, au même point.

Si nous supposons le volume du diélectrique divisé en parties élémentaires, nous devons concevoir les surfaces de ces éléments comme électrisées, de telle manière que la densité superficielle en un point quelconque de la surface soit égale en grandeur au déplacement qui se produit en ce point à travers la surface, ce déplacement *compté vers l'intérieur* ;[9] c'est-à-dire que, si le déplacement a lieu dans la direction positive, la surface de l'élément doit

9. Ce choix de signe, incompatible avec la conception de la polarisation comme un déplacement de charges microscopiques, permet d'avoir le signe plus dans l'expression $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ de la densité de charge liée à une hétérogénéité de polarisation. Ce signe implique l'absence de divergence du courant total $\mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t$, en raison de l'équation de continuité de la charge ($\nabla \cdot \mathbf{j} = \partial\rho/\partial t = 0$).

être électrisée négativement du côté positif, et positivement du côté négatif. Ces charges superficielles se détruisent en général l'une l'autre lorsque l'on considère des éléments consécutifs, sauf aux points où le diélectrique a une charge interne, ou à la surface du diélectrique.

Quelle que soit la nature de l'électricité, et quoi que nous entendions par mouvement d'électricité, le phénomène que nous avons appelé *déplacement électrique* est un mouvement d'électricité, dans le même sens que le transport d'une quantité déterminée d'électricité à travers un fil est un mouvement d'électricité. La seule différence est que dans le diélectrique il y a une force, que nous avons appelée *élasticité électrique,* qui s'oppose au déplacement électrique et qui ramène l'électricité en arrière aussitôt que la force électromotrice est supprimée ; au contraire, dans un fil conducteur, l'élasticité électrique est constamment surmontée, en sorte qu'il s'établit un courant de conduction proprement dit, et que la résistance dépend, non de la quantité totale d'électricité déplacée de sa position d'équilibre, mais de la quantité qui traverse une section du conducteur dans un temps donné.

Dans tous les cas, le mouvement de l'électricité est soumis à la même condition que celui d'un fluide incompressible, c'est-à-dire qu'à chaque instant il doit entrer dans un espace fermé quelconque autant d'électricité qu'il en sort.

Il résulte de là que tout courant électrique doit former un circuit fermé. On verra l'importance de ce résultat quand nous étudierons les lois de l'électromagnétisme.

Puisque, comme nous l'avons vu, la théorie de l'action directe à distance est, au point de vue mathématique, identique à la théorie d'une action s'exerçant par l'intermédiaire d'un milieu, les phénomènes que l'on rencontre peuvent s'expliquer par une théorie aussi bien que par l'autre, à condition d'introduire des hypothèses convenables, quand on rencontre des difficultés. Ainsi, Mossotti a déduit la théorie mathématique des diélectriques de la théorie ordinaire de l'attraction, simplement en donnant une interprétation électrique au lieu d'une interprétation magnétique, aux symboles dont Poisson s'est servi pour déduire la théorie de l'induction magnétique de la théorie des fluides magnétiques. Il admet qu'il existe dans le diélectrique de petits éléments conducteurs, susceptibles d'avoir leurs extrémités électrisées en sens inverses par induction, mais incapables de gagner ou de perdre une quantité quelconque d'électricité, parce qu'ils sont isolés les uns des autres par un milieu non conducteur. Cette théorie des diélectriques cadre avec les lois de l'électricité ; elle peut être effectivement vraie. Si elle est vraie, le pouvoir inducteur spécifique d'un milieu peut être plus grand, mais jamais plus petit que celui de l'air ou du vide. Jusqu'à présent, on n'a pas trouvé d'exemple de diélectrique ayant un pouvoir inducteur plus faible que celui de l'air ; si l'on en trouve un, il faudra abandonner la théorie de Mossotti, mais ses formules resteront toutes exactes, et nous n'aurons à y changer que le signe d'un coefficient.[10]

Dans la théorie que je me propose de développer, les méthodes mathématiques sont fondées sur le plus petit nombre possible d'hypothèses ; on trouve ainsi que des équations de même forme s'appliquent à des phénomènes qui sont certainement de nature bien différente : par exemple, l'induction électrique à travers les diélectriques, la conduction dans les conducteurs et l'induction magnétique. Dans tous ces cas, la relation entre la force et l'effet qu'elle produit s'exprime par une série d'équations de même espèce ; de sorte, que si un problème est résolu pour un de ces sujets, le problème et sa solution peuvent être traduits dans le langage des autres sujets, et les résultats, sous leur nouvelle forme, seront encore vrais.[11]

10. Maxwell formule ici une objection assez forte à sa propre théorie : elle ne permet pas d'expliquer le fait que la permittivité d'un diélectrique matériel soit toujours supérieur à celle du vide (contrairement à la perméabilité magnétique μ qui est plus faible que celle du vide pour les corps diamagnétiques). Ce fut là une raison importante du rejet de la théorie de Maxwell par William Thomson. En fait la théorie moderne des diélectriques, due à Lorentz, abandonne l'analogie de Faraday entre vide et diélectrique matériel et distingue deux contributions au vecteur $\mathbf{D}$, une appartenant au vide ($\varepsilon_0\mathbf{E}$) et une correspondant au déplacement microscopique moyen des électrons ($\mathbf{P}$).

11. Maxwell fait ici allusion à la stratégie adoptée dans « On Faraday's lines of force » (traduit plus haut).

CHAPITRE VI

Théorie dynamique de l'électromagnétisme

568. Nous avons montré, au § 552, que quand un courant électrique existe dans un circuit conducteur, il est susceptible d'effectuer une certaine quantité de travail mécanique, et cela, indépendamment de toute force électromotrice extérieure entretenant le courant.[12] Or la capacité d'effectuer du travail, d'où qu'elle vienne, n'est autre que de l'énergie, et toutes les énergies sont de même espèce, quoiqu'elles puissent différer par la forme. L'énergie du courant électrique est ou bien de la forme qui consiste dans le mouvement actuel de la matière, ou bien de cette autre qui réside en la faculté de pouvoir être mis en mouvement sous l'influence de forces agissant entre des corps placés dans de certaines positions relatives.

La première sorte d'énergie, celle du mouvement, est appelée *énergie cinétique,* et, dès qu'on l'a une fois comprise, elle semble un fait si primordial dans la nature, que l'on a peine à concevoir la possibilité de la réduire à quelque autre. La seconde sorte d'énergie, celle qui dépend de la position, est appelée *énergie potentielle ;* elle est due à l'action de ce que nous appelons des *forces,* c'est-à-dire à des tendances à un changement de position relative. Pour ce qui est de ces forces, nous pouvons admettre leur existence comme un fait démontré ; mais il nous faut toujours convenir que toute explication du mécanisme, par lequel les corps sont mis en mouvement, constitue un réel accroissement de nos connaissances.[13]

569. On ne peut concevoir le courant électrique que comme un phénomène cinétique. Faraday même, qui s'efforça toujours de soustraire son esprit à l'influence des idées auxquelles on n'est que trop entraîné par l'emploi des mots tels que *courant électrique, fluide électrique,* parle du courant électrique comme de « quelque chose de progressif qui ne consiste pas seulement en un arrangement ».[*]

Les effets du courant, tels que l'électrolyse et le transport de l'électrisation d'un corps à un autre, sont tous des actions progressives qui demandent

12. Maxwell veut dire que le courant peut produire de la chaleur par effet Joule, ou encore du travail si le conducteur qui le porte se déplace dans un champ magnétique.
13. Maxwell faisait partie du groupe d'énergétistes britanniques (Thomson, Rankine et Tait) qui pensaient que toute énergie devait ultimement se ramener à une énergie cinétique (car la notion d'énergie potentielle fait appel à celle d'action directe à distance, qu'ils rejetaient). La théorie de Maxwell permet de comprendre l'énergie magnétique comme une énergie cinétique, mais elle admet encore une énergie potentielle électrique.

* *Exp. Res.*, 283.

du temps pour s'accomplir et qui, par suite, sont de la nature des mouvements.

Quant à la vitesse du courant, nous avons montré que nous n'en savons rien, pas plus si elle est de $\frac{1}{10}$ de pouce par heure que de cent mille milles par seconde.* Tant s'en faut que nous connaissions sa valeur absolue en un cas quelconque, que nous ignorons même si ce que nous appelons *direction positive* est, en réalité, la direction du mouvement ou si c'est la direction contraire.

Tout ce que nous admettons ici, c'est que le courant électrique implique un mouvement de quelque nature. La cause des mouvements électriques, nous l'avons appelée force électromotrice : depuis longtemps ce mot est employé avec avantage, et jamais il n'a conduit à aucune contradiction dans le langage scientifique. On doit toujours entendre que la force électromotrice agit sur l'électricité seulement, et non sur les corps dans lesquels cette électricité réside ; on ne doit jamais la confondre avec la force mécanique ordinaire qui agit sur les corps, et non sur l'électricité qu'ils renferment. Si jamais nous parvenons à connaître la nature de la relation qui existe l'électricité et la matière ordinaire, nous connaîtrons probablement aussi la relation de la force électromotrice et de la force ordinaire.

570. Quand une force ordinaire agit sur un corps et que ce corps cède à son action, le travail effectué par la force a pour mesure le produit de la force par la grandeur du déplacement du corps. Ainsi, si l'on refoule de l'eau à travers un tuyau, le travail effectué dans une section quelconque a pour mesure le produit de la pression du liquide en cette section par la quantité d'eau qui traverse la section.

De même, le travail d'une force électromotrice a pour mesure le produit de la force électromotrice par la quantité d'électricité qui traverse une section du conducteur sous l'action de cette force électromotrice.

Le travail effectué par une force électromotrice est exactement de la même nature que celui d'une force ordinaire, et se mesure avec les mêmes étalons ou unités.

Une partie du travail que fait une force électromotrice agissant dans un circuit conducteur est dépensée à vaincre la résistance du circuit, et cette partie du travail se convertit en chaleur. Une autre partie est dépensée à produire les phénomènes électromagnétiques observés par Ampère, dans lesquels des conducteurs se meuvent sous l'influence de forces électromagnétiques. Le

* *Exp. Res.*, 1648.

reste du travail est dépensé à accroître l'énergie cinétique du courant, et les effets de cette dernière partie s'aperçoivent dans les phénomènes des courants induits observés par Faraday.

Nous en savons donc assez sur le courant électrique pour reconnaître dans un système de conducteurs matériels traversés par des courants un système dynamique qui est le siège d'énergie, en partie cinétique, et en partie potentielle.

Nous ne connaissons pas la nature des liaisons qui existent entre les parties de ce système ; mais nous avons en dynamique des méthodes de recherche qui n'exigent pas la connaissance du mécanisme du système, et nous allons les appliquer à ce cas.

Nous examinerons d'abord quelles conséquences résulteraient de l'hypothèse que la fonction qui exprime l'énergie cinétique du système a la forme la plus générale.

571. Soit un système consistant en un certain nombre de circuits conducteurs, dont la forme et la position sont déterminées par les valeurs d'un système de variables x_1, x_2, ..., dont le nombre est égal au nombre des degrés de liberté du système.

Si toute l'énergie cinétique du système était due au mouvement de ces conducteurs, elle serait exprimée par

$$T = \frac{1}{2}(x_1 x_1)\dot{x}_1^2 + \ldots + (x_1 x_2)\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \ldots$$

où les symboles (x_1x_1)... représentent les quantités que nous avons appelées *moments d'inertie,* et les symboles (x_1x_2)... les quantités dites *produits d'inertie.*

Si X′ est la force motrice tendant à accroître la coordonnée x, qui est nécessaire pour produire le mouvement actuel, d'après l'équation de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx} = X'.$$

Quand T désignera l'énergie due au mouvement visible seulement, nous l'indiquerons par l'indice m, donc, T_m.

Mais une partie de l'énergie cinétique d'un système de conducteurs traversés par des courants électriques est due à l'existence de ces courants. Soit une autre série de coordonnées y_1, y_2,... déterminant le mouvement de l'électricité et tous les autres mouvements qui dépendent de celui de l'électricité ; T sera une fonction homogène des carrés et des produits de toutes les vitesses des deux séries de coordonnées. Nous pouvons donc diviser T en trois parties : dans la première, T_m, ne figureront que les vitesses des coordonnées x ; dans la seconde, T_e, les vitesses des coordonnées y seulement ; dans la troisième, T_{me}, chaque terme est formé du produit des vitesses d'une coordonnée x et d'une coordonnée y.

Nous avons donc

$$T = T_m + T_e + T_{me},$$

où

$$T_m = \frac{1}{2}(x_1 x_2)\dot{x}_1^2 + \ldots + (x_1 x_2)\dot{x}_1\dot{x}_2 + \ldots$$

$$T_e = \frac{1}{2}(y_1 y_1)\dot{y}_1^2 + \ldots + (y_1 y_2)\dot{y}_1\dot{y}_2 + \ldots$$

$$T_{me} = (x_1 y_1)\dot{x}_1\dot{y}_1 + \ldots$$

572. Dans la théorie dynamique générale, les coefficients de tous les termes peuvent être des fonctions de toutes les coordonnées x et y. Dans le cas des courants électriques, il est aisé de voir que les coordonnées de l'espèce y ne figurent pas dans les coefficients.

En effet, si l'on maintient tous les courant électriques constants et tous les conducteurs en repos, l'état total du champ reste constant : or, dans ce cas, les coordonnées y sont variables, quoique les vitesses $\dot{y}$ soient constantes ; donc ces coordonnées y ne peuvent intervenir ni dans l'expression de T, ni dans aucune autre expression de l'état actuel du système.

En outre, en vertu de l'équation de continuité, si tous les conducteurs sont des circuits linéaires, il ne faut qu'une seule variable pour exprimer l'intensité du courant dans chacun d'eux. Supposons que les vitesses $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$, ... représentent les intensités des courants dans les divers conducteurs.

Tout cela serait vrai si, au lieu de courants électriques, nous avions des courants d'un fluide incompressible, circulant dans des tubes flexibles : les vitesses des courants interviendraient dans l'expression de T, mais les coefficients ne dépendraient que des variables x qui déterminent la forme et la position des tubes.

Mais, dans ce cas, le mouvement du fluide dans un tube n'a d'action directe sur le mouvement ni d'un autre tube ni du fluide qui s'y trouve renfermé. Donc, dans la valeur de T_e ne figurent que les carrés des vitesses $\dot{y}$ et non leurs produits, et dans T_{me} une vitesse y ne se trouve associée qu'aux vitesses de forme $\dot{x}$ qui sont relatives au même tube.

Nous savons que, dans le cas des courants électriques, il n'y a plus lieu de faire ces restrictions, puisque les courants des divers circuits réagissent les uns sur les autres. Nous devons donc admettre l'existence de termes de la forme $\dot{y}_1\dot{y}_2$, ce qui implique l'existence d'une certaine chose en mouvement, dont le mouvement dépend de l'intensité des deux courants électriques $\dot{y}_1$ et $\dot{y}_2$. Cette matière mobile, quelle qu'elle soit, n'est pas renfermée à l'intérieur des conducteurs où circulent les deux courants, mais s'étend probablement dans tout l'espace qui les entoure.

573. Considérons maintenant la forme que prennent, dans ce cas, les équations de Lagrange. Soit X' la force motrice correspondant à l'une des variable x qui déterminent la forme et la position des circuits conducteurs. C'est là une force, au sens ordinaire du mot, une tendance à un changement de position. Elle est donnée par l'équation

$$X' = \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx}.$$

Nous pouvons regarder cette force comme formée de trois parties correspondant à chacune des trois parties en lesquelles on peut partager l'énergie cinétique du système et que nous désignerons par les mêmes indices.

$$X' = X'_m + X'_e + X'_{me}.$$

La partie X'_m est celle qui dépend de considérations dynamiques ordinaires, et nous n'avons pas besoin de nous y arrêter.

Puisque T_e ne renferme pas $\dot{x}$, le premier terme de X'_e est nul et sa valeur se réduit à

$$X'_e = -\frac{dT_e}{dx}.$$

Telle est l'expression de la force mécanique qui doit être appliquée à un conducteur pour faire équilibre à la force électromagnétique : nous voyons qu'elle a pour mesure la *diminution* de l'énergie purement électrocinétique par unité de variation de la variable x. La force électromagnétique X_e, qui met en jeu cette force mécanique extérieure, est égale et opposée à X'_e et, par suite, a pour mesure l'accroissement d'énergie électrocinétique par unité de variation de la variable x. Puisque la valeur de X_e dépend des carrés et des produits de courants, elle reste la même si l'on renverse le sens de tous les courants.

La troisième partie de X' est

$$X'_{me} = \frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{d\dot{x}} - \frac{dT_{me}}{dx}. \tag{1}$$

La quantité T_{me} ne renferme que des produits de la forme $\dot{x}\dot{y}$, de sorte que $dT_{me}/d\dot{x}$ est une fonction linéaire des intensités des courants $\dot{y}$. Le premier terme dépend donc de la variation de l'intensité des courants dans l'unité de temps, et indique une force mécanique agissant sur le conducteur, laquelle est nulle quand le courant est constant, et positive ou négative suivant que le courant augmente ou diminue d'intensité.

Le second terme dépend, non de la variation des courants, mais de leur intensité actuelle. Puisque c'est une fonction linéaire de ces courants, il change de signe quand les courants changent de signe ; et, puisque chaque terme renferme une vitesse $\dot{x}$, il est nul quand les conducteurs sont en repos. Il y a aussi des termes dus à la variation dans le temps des coefficients de $\dot{y}$ dans $dT_{me}/d\dot{x}$: ces remarques s'appliquent aussi à eux.

Nous pouvons donc étudier ces termes séparément : si les conducteurs sont en repos, nous n'avons affaire qu'au premier terme ; si les courants sont constants, nous n'avons que le second.

574. Comme il est très important de déterminer si une partie de l'énergie cinétique est de la forme T_{me}, qui consiste en produits des vitesses proprement dites des conducteurs par les intensités des courants électriques, il est à désirer que les expériences soient faites, à ce sujet, avec le plus grand soin.

[...] Dans ce paragraphe et le suivant, Maxwell décrit les effets qui résulteraient d'une valeur non nulle de T_{me} ainsi que des expériences pertinentes.

Nous avons donc trois méthodes pour découvrir l'existence des termes de la forme T_{me} ; aucune n'a donné, jusqu'à présent, de résultat positif. Je les ai signalées avec un soin tout particulier, parce qu'il me semble très important d'atteindre le plus haut degré de certitude possible en une question qui touche de si près la véritable théorie de l'électricité.

Puisque jusqu'à présent on n'a pu surprendre aucun indice de l'existence de ces termes, je vais passer outre, et supposer que ces termes n'existent pas ou, du moins, qu'ils ne produisent pas d'effet sensible : cette hypothèse simplifie considérablement notre théorie dynamique. Mais, en discutant les relations du magnétisme et de la lumière, nous aurons l'occasion de montrer que le mouvement qui constitue la lumière peut entrer comme facteur dans des termes comprenant le mouvement qui constitue le Magnétisme.

CHAPITRE VII

Théorie des circuits électriques

578. Nous pouvons maintenant limiter notre attention à cette partie de l'énergie cinétique du système qui dépend des carrés et des produits des intensités des courants électriques : c'est ce que nous pouvons appeler l'*énergie électrocinétique* du système. La partie qui dépend du mouvement des conducteurs appartient à la Dynamique ordinaire, et nous avons montré que la partie qui dépendrait des produits des vitesses et des intensités n'existe pas.

Soient A_1, A_2,... les différents circuits conducteurs. Exprimons leurs formes et leurs positions au moyen des variables x_1, x_2,..., dont le nombre est égal au nombre des degrés de liberté du système mécanique. Nous appellerons ces variables *variables géométriques.*

Désignons par y_1 la quantité d'électricité qui a traversé une section donnée du conducteur A_1 depuis l'origine du temps t. L'intensité du courant est représentée par la dérivée $\dot{y}_1$ de cette quantité.

Nous appellerons $\dot{y}$ l'intensité actuelle et y_1 l'intensité intégrale. Il y a une variable de cette espèce pour chacun des circuits du système.

Désignons par T l'énergie électrocinétique du système : c'est une fonction homogène du second degré des intensités des courants, de la forme

$$T = \frac{1}{2}L_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}L_2\dot{y}_2^2 + \ldots + M_{12}\dot{y}_1\dot{y}_2 + \ldots \quad , \tag{1}$$

où les coefficients L, M,... sont des fonctions des variables géométriques. Les variables électriques y_1, y_2,... n'interviennent pas dans cette expression.

Nous pouvons appeler L_1, L_2,...les moments d'inertie électrique des circuits A_1, A_2,..., et M_{12} le produit d'inertie électrique des deux circuits A_1 et A_2,...

Si nous voulons éviter le langage de la théorie dynamique, nous appellerons L_1 le *coefficient de self-induction* du circuit A_1, et M_{12} le *coefficient d'induction mutuelle* des circuits A_1 et A_2 ; M_{12} est aussi appelé le *potentiel* du circuit A_1 par rapport au circuit A_2. Ces quantités ne dépendent que de la forme et de la position relative des circuits. Nous verrons que, dans le système de mesure électromagnétique, ces quantités sont de la dimension d'une longueur. (*Voir* § 627.)

En différenciant T par rapport à $\dot{y}_1$, nous obtenons la quantité p_1, que, dans la théorie dynamique, on peut appeler la *quantité de mouvement* correspondant à y_1. Dans la théorie électrique, nous appellerons p_1 la *quantité de* *mouvement électrocinétique* du circuit A_1. Sa valeur est

$$p_1 = L_1 \dot{y}_1 + M_{12}\, \dot{y}_2 + \ldots$$

Ainsi, la quantité de mouvement électrocinétique du circuit A_1 se compose du produit de l'intensité dans ce circuit par son coefficient de self-induction, et de la somme des intensités dans les autres circuits, multipliées chacune par le coefficient d'induction mutuelle de A_1 et du circuit considéré.

Force électromotrice

579. Soit E la force électromotrice appliquée au circuit A_1, due à une pile voltaïque ou thermo-électrique ou à toute autre cause capable de produire un courant indépendamment de toute induction magnéto-électrique.

Soit R la résistance du circuit. D'après la loi de Ohm, il faut une force électromotrice $R\dot{y}$ pour surmonter cette résistance, ce qui laisse une force électromotrice $E - R\dot{y}$ disponible pour changer la quantité de mouvement dans le circuit. Appelant Y' cette force, nous avons, par les équations générales,

$$Y' = \frac{dp}{dt} - \frac{dT}{dy}\,; \tag{1}$$

mais, puisque T ne renferme pas y, le dernier terme disparaît.

L'équation de la force électromotrice est donc

$$E - R\dot{y} = Y' = \frac{dp}{dt}$$

ou

$$E = R\dot{y} + \frac{dp}{dt}.$$

La force électromotrice appliquée E comprend donc deux parties : la première, $R\dot{y}$, nécessaire pour entretenir l'intensité $\dot{y}$ malgré la résistance R ; la seconde, nécessaire pour accroître la quantité de mouvement électromagnétique p. Telle est la force électromotrice qui doit être fournie par des sources indépendantes de l'induction magnéto-électrique. La force électromotrice due à l'induction magnéto-électrique seule est évidemment $-\frac{dp}{dt}$, c'est-à-dire *la diminution par unité de temps de la quantité de mouvement électrocinétique du circuit*.

Force électromagnétique

580. Soit X' la force motrice mécanique, due à des causes extérieures, qui tend à accroître la variable x. Par les équations générales,

$$X' = \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx}.$$

Puisque l'expression de l'énergie électrocinétique ne contient pas la vitesse ($\dot{x}$), le premier terme du second membre disparaît, et nous trouvons

$$X' = -\frac{dT}{dx}.$$

Ici X' est la force extérieure nécessaire pour faire équilibre aux forces dues aux causes électriques ; on a l'habitude de la considérer comme la réaction contre la force électromagnétique que nous appellerons X et qui est égale et contraire à X'.

On a donc

$$X = \frac{dT}{dx};$$

c'est-à-dire que *la force électromagnétique qui tend à augmenter une variable est égale à l'accroissement de l'énergie électrocinétique pour l'unité d'accroissement de la variable, les courants restant constants*.

[...] Dans un passage omis, Maxwell développe les conséquences bien connues des formules précédentes dans le cas de deux circuits couplés : courants induits et forces électromagnétiques.

CHAPITRE VIII

Exploration du champ au moyen du circuit secondaire

585. Nous avons démontré, aux §§ 582, 583, 584, que l'action électromagnétique entre le circuit primaire et le circuit secondaire dépend de la quantité désignée par M, qui est une fonction de la forme et de la position relative des deux circuits.

Quoique, en réalité, cette quantité M ne soit autre chose que le potentiel des deux circuits dont nous avons déduit (§§ 423, 492, 521, 539) la forme mathématique et les propriétés des phénomènes magnétiques et électromagnétiques, nous ne nous reporterons pas ici à ces résultats ; mais nous commencerons sur une base nouvelle, sans faire d'autres hypothèses que celles de la théorie dynamique exposée au Chapitre VII.[14]

La quantité de mouvement électrocinétique du circuit secondaire comprend deux parties (§ 578) : l'une, Mi_1, dépend du courant primaire i_1, et l'autre, Ni_2, du courant secondaire i_2. Nous allons étudier la première de ces parties, que nous désignerons par p :

$$p = Mi_1. \tag{1}$$

Nous supposerons aussi le circuit primaire fixe et le courant primaire constant. La quantité p, quantité de mouvement électrocinétique du circuit secondaire, ne dépendra, dans ce cas, que de la forme et de la position du circuit secondaire ; en sorte que, si l'on prend pour circuit secondaire une courbe fermée quelconque, et si l'on choisit sur cette courbe la direction que l'on comptera positive, la valeur de p est déterminée pour cette courbe fermée. Si l'on avait pris la direction contraire pour direction positive sur la courbe, le signe de p aurait été renversé.

586. Puisque la quantité p dépend de la forme et de la position du circuit, nous pouvons supposer que chaque partie du circuit contribue pour une certaine part à la valeur de p, et que la part due à chacune des parties du circuit ne dépende que de la forme et de la position de cette partie seulement, et non de la position des autres parties du circuit.

14. La quantité M (coefficient d'induction mutuelle) est aussi le potentiel de Neumann de deux courants linéaires unité, $\frac{1}{2}\oint\oint \frac{d\mathrm{l}_1 \cdot d\mathrm{l}_2}{|\mathrm{l}_1 - \mathrm{l}_2|}$, comme Maxwell le démontre dans les paragraphes cités en utilisant l'équivalence entre un courant linéaire fermé et un double feuillet magnétique.

Cette supposition est légitime ; car nous ne considérons pas ici un *courant,* dont les différentes parties peuvent réagir, et réagissent effectivement les unes sur les autres, mais seulement un *circuit,* c'est-à-dire une courbe fermée le long de laquelle un courant électrique *peut* circuler, mais qui n'est en somme qu'une figure géométrique, dont on ne saurait concevoir que les parties puissent avoir une action physique les unes sur les autres.

Nous pouvons donc admettre que la part due à l'élément ds du circuit soit Jds, J étant une fonction dépendant de la position et de la direction de l'élément ds. La valeur de p peut alors s'exprimer par une intégrale prise le long du circuit,

$$P = \int J ds, \tag{2}$$

l'intégration étant effectuée une seule fois tout le long du circuit.

587. Il s'agit maintenant de déterminer la forme de la quantité J.

> [...] Nous omettons la démonstration, qui passe par la décomposition d'un courant fermé en deux autres courants fermés en partie contigus.

Si donc nous substituons à l'élément ds trois petits éléments dx, dy, dz, tracés à la suite l'un de l'autre, de manière à former une ligne continue du commencement à la fin de l'élément ds, et si Fdx, Hdy, Gdz désignent les éléments de l'intégrale prise le long de dx, dy et dz,

$$Jds = Fdx + Gdy + Hdz. \tag{4}$$

590. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer de quelle manière la quantité J dépend de la direction de l'élément ds ; car, d'après (4),

$$J = F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}. \tag{5}$$

Or c'est là l'expression de la composante suivant ds d'un vecteur dont les composantes, suivant les axes des x, des y et des z, seraient F, G et H.

Si l'on désigne ce vecteur par $\mathfrak{A}$ et par ρ le vecteur mené de l'origine à un point quelconque du circuit, l'élément de circuit sera $d\rho$, et l'expression de Jds en quaternions sera[15]

$$-S.\mathfrak{A}\, d\rho\,.$$

15. Voir notre introduction, p. 105, pour la notation quaternionique. En notation vectorielle moderne, on aurait $J\mathrm{d}s = \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ et $\mathrm{p} = \int \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$.

Nous pouvons maintenant écrire l'équation (2) sous la forme

$$p = \int \left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds \tag{6}$$

ou

$$p = -\int S.\mathfrak{A}d\rho \tag{7}$$

Le vecteur $\mathfrak{A}$ et ses composantes F, G, H dépendent de la position de ds dans le champ, et non de la direction dans laquelle est tracé cet élément. Ce sont donc des fonctions des coordonnées x, y, z de ds, et non de ses cosinus directeurs l, m, n.

Le vecteur $\mathfrak{A}$ représente en grandeur et direction l'intégrale de temps de la force électromotrice à laquelle serait soumis un point placé en (x, y, z), si le courant primaire venait à être brusquement interrompu. Nous l'appellerons donc la quantité de mouvement électrocinétique *au point* (x, y, z). Il est identique à la quantité que nous avons étudiée, au § 405, sous le nom de *potentiel vecteur* de l'induction magnétique.[16]

La quantité de mouvement électrocinétique d'une ligne ou d'un circuit fini est l'intégrale, prise le long de cette ligne ou de ce circuit, de la composante de la quantité de mouvement électrocinétique en chaque point de ce circuit.

[…] Dans le passage omis Maxwell donne un cas particulier infinitésimal du résultat général énoncé ci-après.

Si nous introduisons trois nouvelles quantités a, b, c, telles que

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ b &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ c &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}, \end{aligned}\right. \tag{A}$$

et si nous les considérons comme les composantes d'un nouveau vecteur $\mathfrak{B}$, nous pouvons, au moyen du théorème IV, art. 24, exprimer l'intégrale $\mathfrak{A}$ prise le long du circuit au moyen de l'intégrale $\mathfrak{B}$ prise sur une surface limitée

16. Dans le paragraphe cité, Maxwell définissait le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ comme un vecteur tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Le nom de « potentiel vecteur » vient du fait que dans la jauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, ce vecteur vérifie l'équation $\Delta\,\mathbf{A} + 4\pi\mathbf{j} = 0$, de même forme que l'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique.

par le circuit ; on a[17]

$$p = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds = \int (la + mb + nc)dS \tag{11}$$

ou bien

$$p = \int T.\mathfrak{A}\cos\varepsilon ds = \iint T.\mathfrak{B}\cos\eta \ dS \tag{12}$$

où ε est l'angle compris entre $\mathfrak{A}$ et *ds,* et η est l'angle compris entre $\mathfrak{B}$ et la normale à *dS* dont les cosinus directeurs sont *l, m, n,* et où $T.\mathfrak{A}$ et $T.\mathfrak{B}$ désignent les valeurs numériques de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

Comparant ces résultats à l'équation (3), il est évident que la quantité *I* de cette équation est égale à $\mathfrak{B}$ cos η ou à la composante de $\mathfrak{B}$ suivant la normale à *dS*.

592. Nous avons déjà vu (§ 490, 511) que, suivant la théorie de Faraday, les phénomènes de force électromagnétique et d'induction dans un circuit dépendent de la variation du nombre des lignes d'induction magnétique qui passent dans le circuit. Or l'expression mathématique du nombre de ces lignes est l'intégrale de surface de l'induction magnétique à travers une surface quelconque limitée par le circuit. Nous devons donc considérer le vecteur $\mathfrak{B}$ et ses composantes *a, b, c* comme représentant ce que nous connaissions déjà sous le nom d'*induction magnétique* et de ses composantes.

Dans l'étude actuelle, nous nous proposons de déduire les propriétés de ce vecteur des principes dynamiques exposés dans le Chapitre précédent, en faisant aussi peu que possible appel à l'expérience.

Nous ne nous écartons pas de cette méthode quand nous identifions ce vecteur, qui se présente à nous comme résultat d'une étude mathématique, avec l'induction magnétique, dont nous avons appris les propriétés par des expériences faites sur les aimants ; car nous n'introduisons point de faits nouveaux dans la théorie, nous ne faisons que donne un nom à une quantité mathématique, et l'on jugera de la convenance de ce nom par l'accord entre les relations de la quantité mathématique et celles de la quantité physique indiquée par ce nom.

Le vecteur $\mathfrak{B}$, qui paraît dans une intégrale de surface, appartient évidemment à la catégorie des flux décrits au § 13 ; au contraire, le vecteur $\mathfrak{A}$, qui paraît dans une intégrale de ligne, appartient à la catégorie des forces.[18]

17. En notation moderne, on a $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ et, d'après le théorème cité (dit de Stokes), $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$.

18. Maxwell se réfère ici à la dictinction entre intensité et quantité introduite dans « On Faraday's lines of force » (extrait n° 1) par analogie avec l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux sous l'effet d'un gradient de pression. Une « intensité » (ou « force » dans la seconde édition du *Traité*) est l'analogue du gradient de pression ; une « quantité » (ou « flux ») est l'analogue du courant du fluide.

593. Nous devons ici rappeler les conventions faites sur les quantités et les directions positives et négatives, dont quelques-unes ont été énoncées au § 23. Nous adoptons le système d'axes droit, en sorte qu'une vis à droite étant placée le long de l'axe, un écrou placé sur cette vis et tourné dans le sens de la rotation positive, c'est-à-dire dans le sens des y vers les z, se déplace sur la vis dans le sens des x positifs.

Nous considérons aussi comme positifs l'électricité vitrée et le magnétisme austral. La direction positive pour un courant électrique ou pour une ligne d'induction électrique est la direction dans laquelle l'électricité positive se meut ou tend à se mouvoir, et la direction positive d'une ligne d'induction magnétique est la direction vers laquelle une aiguille de boussole tourne son extrémité qui marque habituellement le nord. (Voir *fig.* 24, § 498, et *fig.* 25, § 501.)

On recommande au lecteur d'employer telle méthode qui lui paraîtra préférable, pour fixer ces conventions dans sa mémoire ; car il est bien plus difficile de se rappeler une règle déterminant entre deux formes, également acceptables en elles-mêmes, celle que l'on doit prendre pour énoncer quelque chose, qu'une règle faisant choix d'une forme entre beaucoup d'autres.

594. Nous devons maintenant déduire des principes dynamiques les expressions de la force électromagnétique qui agit sur un conducteur traversé par un courant et mobile dans un champ magnétique, et de la force électromotrice qui agit sur l'électricité d'un corps mobile dans un champ magnétique. La méthode mathématique que nous allons employer peut être comparée à la méthode expérimentale de Faraday,* consistant à explorer le champ au moyen d'un fil et à ce que nous avons déjà fait au § 490 par une méthode fondée sur l'expérience. Nous devons déterminer maintenant l'effet produit sur la valeur de la quantité de mouvement électrocinétique *p du circuit secondaire par un changement donné de la forme de ce circuit.*

[…] Maxwell développe ici les lois de l'induction dans une portion de fil rectiligne en mouvement parallèle uniforme et s'en sert pour définir les lignes de force magnétique suivant un procédé déjà envisagé par Faraday.

Équations générales de la force électromotrice

598. Nous avons vu que la force électromotrice E, due à l'induction exercée sur un circuit secondaire, est égale à $-\frac{dp}{dt}$, où

$$p = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds\,. \qquad (1)$$

* *Exp. Res.*, p 3082, 3087, 3113.

Pour déterminer la valeur de E, différencions par rapport à t la quantité sous le signe $\int$, en nous souvenant que si le circuit est en mouvement, x, y et z sont des fonctions du temps. Nous avons

$$\left\{\begin{aligned} E = &-\int\left(\frac{dF}{dt}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dt}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dt}\frac{dz}{ds}\right)ds \\ &-\int\left(\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dx}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dx}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds \\ &-\int\left(\frac{dF}{dy}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dy}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dy}{dt}ds \\ &-\int\left(\frac{dF}{dz}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dz}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz}{dt}ds \\ &-\int\left(F\frac{d^2x}{dsdt}+G\frac{d^2y}{dsdt}+H\frac{d^2z}{dsdt}\right)ds. \end{aligned}\right.$$

Considérons le second terme de l'intégrale et substituons-y les valeurs de $\frac{dG}{dx}$ et $\frac{dH}{dx}$, tirées des équations (A), § 591 ; ce terme devient alors

$$-\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds,$$

ce qu'on peut écrire

$$-\int\left(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds.$$

Traitant de même le troisième et le quatrième terme, réunissant les termes en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et nous souvenant que

$$\int\left(\frac{dF}{ds}\frac{dx}{dt}+F\frac{d^2x}{dsdt}\right)ds = F\frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

et que, par suite, l'intégrale prise le long d'une courbe fermée s'annule,

$$\left\{\begin{aligned} E = &\int\left(c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}\right)\frac{dx}{ds}ds \\ &+\int\left(a\frac{dz}{dt}-c\frac{dx}{dt}-\frac{dG}{dt}\right)\frac{dy}{ds}ds \\ &+\int\left(b\frac{dx}{dt}-a\frac{dy}{dt}-\frac{dH}{dt}\right)\frac{dz}{ds}ds. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Nous pouvons mettre cette expression sous la forme[19]

$$E = \int \left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds}\right)ds\ , \tag{5}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Équation}\\ \text{de la force}\\ \text{électromotrice.}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} P &= c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \\ Q &= a\frac{dz}{dt} - c\frac{dz}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy}, \\ R &= b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}. \end{aligned}\right. \tag{B}$$

Les termes comprenant la nouvelle quantité Ψ ont été introduits pour donner de la généralité aux expressions de P, Q, R. Ils disparaissent quand l'intégrale est prise tout le long d'un circuit fermé. La quantité Ψ est donc indéterminée, du moins en ce qui concerne le problème actuel, où nous nous proposons d'obtenir la force électromotrice totale qui agit le long du circuit. Mais nous verrons que, quand on connaît toutes les conditions du problème, on peut assigner à Ψ une valeur déterminée qui est le potentiel électrique au point (x, y, z).[20]

La quantité sous le signe $\int$, dans l'équation (5), représente la force électromotrice qui agit sur l'élément ds du circuit, rapportée à l'unité de longueur.

Si nous désignons par $T.\mathfrak{E}$ la valeur numérique de la résultante de P, Q, R et par ε l'angle de cette résultante et de l'élément ds, on peut écrire l'équation (5) sous la forme

$$E = \int T.\mathfrak{E} \cos \varepsilon\, ds. \tag{6}$$

Le vecteur $\mathfrak{E}$ est la force électromotrice au point où se trouve l'élément mobile

19. L'absence de distinction (au niveau de la notation) entre les dérivées partielles et les dérivées ordinaires rend la déduction un peu confuse. En notation vectorielle, l'équation (B) se démontre comme suit. A l'équation (2) de Maxwell correspond $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\oint \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}\right] \cdot d\mathbf{l} - \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{v}$. Comme par ailleurs $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{v} = -\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = -\oint \mathbf{v} \cdot (d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ et $-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{v} \cdot (d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{A} = [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \cdot d\mathbf{l}$, on a $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint \left[-\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})\right] \cdot d\mathbf{l}$ pour tout circuit fermé. Il en résulte $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - d\mathbf{A}/dt - \nabla\psi$.

20. Ce potentiel est indirectement déterminé par l'équation $\nabla \cdot K\mathbf{E} = 4\pi\rho$. Dans la jauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ et dans le cas des corps aux repos ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), il est identique au potentiel électrostatique des théories continentales (Maxwell oubliera la première restriction dans le chapitre sur la théorie électromagnétique de la lumière).

ds. Sa direction et sa grandeur dépendent de la position et du mouvement de *ds* et de la variation du champ magnétique, mais non de la direction de *ds*. Nous pouvons donc ne plus tenir compte de ce fait que d*s* fait partie d'un circuit, et nous pouvons le considérer simplement comme une partie d'un corps mobile soumise à l'action d'une force électromotrice $\mathfrak{E}$. La force électromotrice en un point a déjà été définie au § 68. On l'a aussi appelée la *force électrique résultante,* puisque c'est la force à laquelle serait soumise une unité d'électricité positive placée en ce point. Nous avons maintenant obtenu la forme la plus générale de cette quantité, dans le cas d'un corps mobile au milieu du champ magnétique dû à un système électrique variable.

Si le corps est conducteur, la force électromotrice produit un courant ; si le corps est un diélectrique, la force électromotrice ne produit qu'un déplacement électrique.

La force électromotrice en un point doit être distinguée avec soin de la force électromotrice qui agit suivant un arc de courbe : cette dernière quantité est l'intégrale de la première le long de la courbe. (*Voir* § 69.)

599. La force électromotrice, dont les composantes sont définies par les équations (B), dépend de trois circonstances. La première est le mouvement du point dans le champ magnétique. La partie de la force qui dépend de ce mouvement est exprimée par les deux premières termes du second membre de chaque équation : elle dépend de la vitesse de ce point transversalement aux lignes d'induction magnétiques. Si $\mathfrak{G}$ est un vecteur représentant la vitesse et $\mathfrak{B}$ un autre vecteur représentant l'induction magnétique, et si $\mathfrak{E}_1$ est la partie de la force électromotrice qui dépend de ce mouvement,

$$\mathfrak{E}_1 = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B}, \tag{7}$$

c'est-à-dire que la force électromotrice est la partie vectorielle du produit de l'induction magnétique et de la vitesse ; en d'autres termes, la force électromotrice est figurée par l'aire du parallélogramme dont les côtés représentent la vitesse et l'induction magnétique, et sa direction est celle d'une normale à ce parallélogramme menée de façon que la vitesse, l'induction magnétique et la force électromotrice se suivent dans un ordre cyclique à droite.

Le troisième terme de chacune des équations (B) dépend de la variation dans le temps du champ magnétique. Cette variation peut être due à une variation dans le temps de l'intensité du courant dans le circuit primaire ou à un mouvement de ce circuit. Soit $\mathfrak{E}_2$ la partie de la force électromotrice qui dépend de ces termes. Les composantes sont

$$-\frac{dF}{dt}, \qquad -\frac{dG}{dt}, \qquad \text{et } -\frac{dH}{dt},$$

c'est-à-dire les composantes du vecteur $-\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ ou $-\dot{\mathfrak{A}}$. Donc

$$\mathfrak{E}_2 = -\dot{\mathfrak{A}}. \tag{8}$$

Le dernier terme de chaque équation (B) est dû à la variation de la fonction Ψ aux différents points du champ. Nous pouvons écrire la troisième partie de la force électromotrice dérivant de cette cause,

$$\mathfrak{E}_3 = -\nabla\Psi. \tag{9}$$

Ainsi, dans la notation des quaternions, la force électromotrice définie par les équations (B) peut s'écrire

$$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi. \tag{10}$$

[...] Les deux paragraphes suivants, consacrés aux équations dans un repère mobile, ne sont pas reproduits.

Force électromagnétique agissant sur un conducteur traversé par un courant et mobile dans un champ magnétique

602. Nous avons vu dans l'étude générale (§ 583) que si x_1 est une des variables qui définissent la forme et la position du circuit secondaire, et si X_1 est la force dont l'action sur ce circuit tend à accroître cette variable,

$$X_1 = \frac{dM}{dx_1} i_1 i_2. \tag{1}$$

Puisque i_1 est indépendant de x_1, nous pouvons écrire

$$M i_1 = p = \int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds, \tag{2}$$

et nous avons, pour valeur de X_1,

$$X_1 = i_2 \frac{d}{dx_1}\int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)ds. \tag{3}$$

Supposons que le déplacement consiste à déplacer chacun des points du circuit parallèlement à x d'une longueur δx, δx étant une fonction continue de s quelconque, en sorte que les différentes parties du circuit se meuvent indépendamment les unes des autres, le circuit lui-même restant continu et fermé.

Soit X la force totale qui agit parallèlement aux x sur la partie du circuit comprise entre $s = 0$ et $s = s$: la partie qui correspond à l'élément ds est $\frac{dX}{ds}\,ds$.

Nous aurons alors l'expression suivante du travail effectué par la force pendant le déplacement

$$\int \frac{dX}{ds}\delta x ds = i_2 \int \frac{d}{d\delta x}\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right)\delta x ds, \tag{4}$$

où l'intégration doit être étendue tout le long de la courbe fermée, en se rappelant que δx est une fonction arbitraire de s. Nous pouvons donc effectuer la différenciation, par rapport à δx, de la même manière que celle relative à t, au § 598, nous souvenant que

$$\frac{dx}{d\delta x} = 1, \quad \frac{dy}{d\delta x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{d\delta x} = 0. \tag{5}$$

Nous trouverons ainsi

$$\int \frac{dX}{ds}\delta x ds = i_2 \int \left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds}\right)\delta x ds + i_2 \int \frac{d}{ds}(F\delta x) ds. \tag{6}$$

Le dernier terme s'annule quand l'intégrale est étendue tout le long d'une courbe fermée, et, puisque l'équation doit subsister pour toutes les formes de la fonction δx, nous devons avoir[21]

$$\frac{dX}{ds} = i_2\left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds}\right), \tag{7}$$

équation qui donne la composante parallèle aux x de la force qui agit sur un élément quelconque du circuit. Les forces parallèles à y et z sont

$$\frac{dY}{ds} = i_2\left(a\frac{dz}{ds} - c\frac{dx}{ds}\right), \tag{8}$$

$$\frac{dZ}{ds} = i_2\left(b\frac{dx}{ds} - a\frac{dy}{ds}\right). \tag{9}$$

La force résultante agissant sur chaque élément est donnée en grandeur et direction par l'expression (en symboles de quaternions) $i_2 V.d\rho\mathfrak{B}$, où i_2 est la mesure numérique du courant, et où $d\rho$ et $\mathfrak{B}$ sont des vecteurs représentant l'élément de circuit et l'induction magnétique, et où l'on doit entendre la multiplication dans le même sens que Hamilton.

603. Si le conducteur doit être traité, non comme une ligne, mais comme un corps, nous devons exprimer la force qui agit sur un élément de longueur et le courant qui passe à travers la section complète en fonction de symboles représentant la force rapportée à l'unité de volume et le courant rapporté à l'unité d'aire.

21. Sous forme vectorielle, la force élémentaire $\mathbf{df}$ doit vérifier
$\oint \mathbf{df} \cdot \delta\mathbf{l} = i_2\delta \oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = i_2 \oint \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} + i_2 \oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}\delta\mathbf{l}$. Une intégration par partie de la dernière intégrale donne alors
$\oint \mathbf{df} \cdot \delta\mathbf{l} = i_2 \oint [(\delta\mathbf{l} \cdot \nabla)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{dl}) - \delta\mathbf{l} \cdot (\mathbf{dl} \cdot \nabla)\mathbf{A}] = \mathrm{i}_2 \oint \delta\mathbf{l} \cdot [\mathbf{dl} \times (\nabla \times \mathbf{A})]$. Comme la déformation $\delta\mathbf{l}$ est arbitraire, on doit avoir $\mathbf{df} = \mathrm{i}_2\mathbf{dl} \times \mathbf{B}$.

Soient X, Y, Z les composantes de la force rapportée à l'unité de volume ; u, v, w celles du courant rapporté à l'unité d'aire. Si S représente la section du conducteur (que nous supposerons petite), le volume de l'élément ds est Sds et $u = \frac{i_2}{S}\frac{dx}{ds}$. Donc l'équation (7) devient

$$\frac{XSds}{ds} = S(vc - wb) \tag{10}$$

ou de même[22]

Équations de la force électromagnétique

$$\left\{\begin{aligned} X &= vc - wb, \\ Y &= wa - uc, \\ Z &= ub - va. \end{aligned}\right. \tag{C}$$

Ici X, Y, Z sont les composantes de la force électromagnétique qui agit sur un élément de conducteur, divisées par le volume de cet élément ; u, v, w sont les composantes du courant électrique qui passe par cet élément, rapportées à l'unité d'aire ; a, b, c sont les composantes de l'induction magnétique en cet élément, rapportées aussi à l'unité d'aire.

Si le vecteur $\mathfrak{F}$ représente en grandeur et en direction la force qui agit sur l'unité de volume du conducteur, et si $\mathfrak{C}$ représente le courant électrique qui le traverse,

$$\mathfrak{F} = V.\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}. \tag{11}$$

22. Cette expression de la force électromagnétique dans un conducteur tridimensionnel, $\mathbf{f} = \mathbf{C} \times \mathbf{B}$ en notation vectorielle, fut contestée par Joseph Larmor, qui y ajoutait un terme $(\mathbf{C} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{A}$. Elle est en fait correcte et la seule à être compatible avec l'interprétation physique du courant $\mathbf{C}$ comme un flux.

CHAPITRE IX

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU CHAMP MAGNÉTIQUE

604. Dans notre discussion théorique de l'Électrodynamique, nous avons commencé par admettre qu'un système de circuits traversés par des courants est un système dynamique, où les intensités peuvent être regardées comme des vitesses, et où les coordonnées qui correspondent à ces vitesses ne paraissent pas par elles-mêmes dans les équations. Il résulte de là que l'énergie cinétique du système, en tant qu'elle dépend des courants, est une fonction homogène du deuxième degré des intensités, dont les coefficients ne dépendent que de la forme et de la position relative des circuits. Supposant ces coefficients connus, par expérience ou autrement, nous avons déduit par un raisonnement purement dynamique les lois de l'induction des courants et de l'attraction électromagnétique. Dans cette étude, nous avons introduit la conception de l'énergie électrocinétique d'un système de courants, de la quantité de mouvement électromagnétique d'un circuit et du potentiel mutuel de deux circuits.

Nous nous sommes ensuite occupés d'explorer le champ en donnant différentes formes au circuit secondaire, et nous avons ainsi été conduits à concevoir un vecteur $\mathfrak{A}$ ayant en chaque point du champ une grandeur et une direction déterminées. Nous avons appelé ce vecteur quantité de mouvement électromagnétique au point considéré. Cette quantité peut être considérée comme l'intégrale de temps de la force électromotrice qui serait produite au point donné, si l'on supprimait brusquement tous les courants du champ. Elle est identique avec la quantité déjà étudiée, au § 405, sous le nom de *potentiel vecteur* de l'induction magnétique. Ses composantes parallèles à x, y, z sont F, G, H. La quantité de mouvement électromagnétique du circuit est l'intégrale de $\mathfrak{A}$ prise le long du circuit.

Alors, nous servant du théorème IV, § 24, nous avons transformé l'intégrale de $\mathfrak{A}$ suivant une ligne en une intégrale sur une surface d'un autre vecteur $\mathfrak{B}$, dont les composantes sont a, b, c, et nous avons trouvé que les phénomènes d'induction dus au mouvement d'un conducteur et ceux de force électromagnétique peuvent s'exprimer en fonction de $\mathfrak{B}$. Nous avons donné à $\mathfrak{B}$ le nom d'*induction magnétique*, puisque ses propriétés sont identiques à celles des lignes d'induction magnétique étudiées par Faraday.

Nous avons aussi établi trois séries d'équations : la première, (A), exprime l'induction magnétique en fonction de la quantité de mouvement électromagnétique ; la seconde, (B), exprime la force électromotrice en fonction du mouvement du conducteur à travers les lignes d'induction magnétique, et du taux de variation de la quantité de mouvement électromagnétique ; la troisième série, (C), comprend les équations de la force électromagnétique exprimées en fonction du courant et de l'induction magnétique.

Dans tous ces cas, on doit entendre par courant, le courant effectif qui comprend non seulement le courant de conduction, mais aussi celui qui est dû à la variation de déplacement électrique.[23]

L'induction magnétique $\mathfrak{B}$ est la quantité que nous avons déjà considérée au § 400. Dans un corps non magnétique, elle est identique à la force qui agirait sur l'unité de pôle magnétique ; mais, si le corps est magnétisé, d'une manière permanente ou par induction, c'est la force qui agirait sur l'unité de pôle magnétique placée dans une fente étroite dont les parois seraient perpendiculaires à la direction de l'aimantation. Les composantes de $\mathfrak{B}$ sont a, b, c.[24]

Il résulte des équations (A), qui définissent a, b, c, que

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz} = 0.$$

On a montré, au § 403, que c'est là une propriété de l'induction magnétique.

605. Nous avons défini la force magnétique à l'intérieur d'un aimant, par distinction avec l'induction magnétique, comme étant la force exercée sur l'unité de pôle placée dans une fente étroite ouverte parallèlement à la direction d'aimantation. Cette quantité est désignée par $\mathfrak{H}$ et ses composantes sont α, β, γ. (*Voir* § 398.)

Si $\mathfrak{I}$ est l'intensité d'aimantation et A, B, C ses composantes, on a, d'après le § 400,[25]

$$\text{Équations d'aimantation} \left\{ \begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A, \\ b &= \beta + 4\pi B, \\ c &= \gamma + 4\pi C. \end{aligned} \right. \qquad \text{(D)}$$

23. En effet, les raisonnements antérieurs de Maxwell supposent que tout courant est fermé. Cette condition est bien satisfaite si l'on inclut le courant de déplacement.

24. Cette définition opérationnelle de **B**, due à William Thomson, exploite la continuité de la composante normale de **B** à la traversée de la frontière entre deux milieux différents. De même, la définition de **H** donnée au paragraphe suivant exploite la continuité de la composante tangentielle de **H**.

25. En effet, il résulte des définitions de **B** et **H** que leur différence correspond au champ magnétiques créé par les charges magnétiques portées par les parois circulaires d'une cavité en forme de disque mince. Il est aisé de voir que ce champ est identique (à 4π près) à l'aimantation (moment dipolaire magnétique par unité de volume).

Nous pouvons appeler ces équations *équations d'aimantation :* elles indiquent que, dans le système électromagnétique, l'induction magnétique $\mathfrak{B}$, considérée comme un vecteur, est la somme (au sens géométrique du mot) de deux vecteurs, la force magnétique $\mathfrak{H}$ et l'aimantation $\mathfrak{I}$ multipliée par

$$4\pi \quad \text{ou} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{I}.$$

Dans certaines substances, l'aimantation dépend de la force magnétique : c'est ce qu'exprime le système des équations de magnétisme induit, données aux §§ 426 et 436.

606. Jusqu'ici, dans cette étude, nous avons tout déduit de considérations purement dynamiques, sans nous reporter en rien aux résultats quantitatifs obtenus dans des expériences d'électricité ou de magnétisme. Nous ne nous sommes servis des connaissances que nous devons à l'expérience que pour reconnaître dans les quantités abstraites déduites de notre théorie les quantités concrètes découvertes par l'expérience, et pour leur donner des noms rappelant plutôt leurs relations physiques que leur origine mathématique.

Ainsi nous avons montré que la quantité de mouvement électromagnétique $\mathfrak{A}$ est un vecteur dont la grandeur et la direction varient d'un point à l'autre de l'espace, et nous en avons déduit comme vecteur dérivé par une opération mathématique l'induction magnétique $\mathfrak{B}$; mais nous n'avons point obtenu de données qui permettent de déterminer $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ d'après la distribution des courants dans le champ. Pour cela, il nous faut trouver la relation mathématique entre ces quantités et les courants.

Nous admettrons d'abord qu'il existe des aimants permanents dont l'action mutuelle satisfait au principe de la conservation de l'énergie. Nous ne ferons sur les lois de la force magnétique d'autres hypothèses que celles qui résultent de ce principe, à savoir, que la force qui agit sur un pôle magnétique doit pouvoir se déduire d'un potentiel.

Observant alors l'action des courants et des aimants, nous trouvons que l'action d'un courant sur un aimant semble identique à celle d'un autre aimant de force, de forme et de position convenables, et que l'aimant agit sur le courant de la même manière qu'un autre courant. Il n'est pas nécessaire de supposer que ces observations aient été accompagnées de mesures de forces proprement dites. On ne doit donc pas les considérer comme nous fournissant des données numériques, mais seulement comme étant fort utiles en signalant des points à examiner.[26]

26. Ce genre d'analogie remonte à Ampère.

La question que nous suggèrent ces observations est celle-ci : le champ magnétique produit par les courants électriques, semblable à tant d'égards au champ produit par des aimants permanents, lui ressemble-t-il aussi par le fait d'être lié à un potentiel ?

On a établi, aux §§ 482, 485, ce fait, qu'un circuit électrique produit dans l'espace avoisinant précisément les mêmes effets que produirait un feuillet magnétique limité par ce circuit.

Nous savons que, dans le cas d'un feuillet magnétique, il existe un potentiel qui a une valeur déterminée pour tous les points extérieurs à la substance de ce feuillet, mais dont les valeurs en deux points voisins situés de part et d'autre du feuillet diffèrent d'une quantité finie.

Si le champ magnétique au voisinage d'un courant électrique ressemble à celui qui existe au voisinage d'un feuillet magnétique, le potentiel magnétique obtenu en intégrant la force magnétique le long d'une ligne doit être le même pour deux contours d'intégration quelconques, pourvu qu'un de ces contours puisse se transformer en l'autre par un mouvement continu, sans couper le courant électrique.

Mais, si une des lignes d'intégration ne peut être ramenée à l'autre sans couper le courant, l'intégrale de la force magnétique prise le long d'une des lignes doit différer de l'intégrale prise le long de l'autre ligne d'une quantité dépendant de l'intensité du courant. Le potentiel magnétique dû à un courant électrique est donc une fonction qui a une série infinie de valeurs différant les unes des autres d'une même quantité, chaque valeur particulière dépendant de la forme de la ligne d'intégration. A l'intérieur de la masse d'un conducteur, il n'y a rien qui ressemble au potentiel magnétique.

607. Admettant que l'action magnétique d'un courant ait un potentiel de la nature que l'on vient d'indiquer, nous allons exprimer mathématiquement ce résultat.

En premier lieu, l'intégrale de la force magnétique suivant une courbe fermée quelconque est nulle, pourvu que la courbe fermée n'entoure pas le courant électrique.

En second lieu, si le courant traverse une fois, et une seule, la courbe fermée dans le sens positif, l'intégrale prise le long de la courbe a une valeur déterminée, que l'on peut prendre comme mesure de l'intensité du courant ; car, si la courbe fermée change de forme d'une manière continue quelconque sans couper le courant, l'intégrale reste la même.

En mesure électromagnétique, l'intégrale de la force magnétique le long d'une courbe fermée est numériquement égale à l'intensité du courant qui traverse la courbe fermée, multipliée par 4π.

Si nous prenons pour courbe fermée le parallélogramme dont les côtés sont *dy* et *dz*, l'intégrale de la force magnétique prise le long des côtés de ce parallélogramme est

$$\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) dydz \quad ;$$

si, d'autre part, *u*, *v*, *w* sont les composantes du flux d'électricité, le courant qui passe à travers le parallélogramme est

$$u\, dy\, dz.$$

Multipliant par 4π, et égalant le résultat à l'intégrale, nous avons l'équation

$$\text{Équations des courants électriques} \begin{cases} 4\pi u = \dfrac{d\gamma}{dy} - \dfrac{d\beta}{dz} \\ \text{et, de même,} \\ 4\pi v = \dfrac{d\alpha}{dz} - \dfrac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w = \dfrac{d\beta}{dx} - \dfrac{d\alpha}{dy}, \end{cases} \qquad \text{(E)}$$

qui déterminent la grandeur et la direction des courants électriques quand on donne en chaque point la force magnétique.

Quand il n'y a point de courant, ces équations équivalent à la condition que

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = -d\Omega$$

c'est-à-dire que la force magnétique peut se déduire d'un potentiel magnétique en tous les points du champ où il n'y a pas de courant.

En différenciant les équations (E) par rapport à *x*, *y* et *z* et ajoutant les résultats, nous obtenons l'équation

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

qui indique que le courant, dont les composantes sont *u*, *v* et *w*, est soumis à la condition du mouvement des fluides incompressibles, et qu'il doit nécessairement circuler dans des circuits fermés.

Cette équation n'est vraie que si nous considérons *u*, *v* et *w* comme les composantes du flux électrique comprenant la variation de déplacement électrique aussi bien que la conduction proprement dite.

Nous n'avons guère de preuves expérimentales d'une action électromagnétique directe des courants dus à la variation du déplacement électrique dans les diélectriques ;[27] mais l'extrême difficulté d'accorder les lois de l'électromagnétisme avec l'existence de courants électriques non fermés est une raison, parmi bien d'autres, pour nous faire admettre l'existence de courants instantanés dus à la variation de déplacement. On en verra l'importance quand nous viendrons à la théorie électromagnétique de la lumière.

608. Nous avons maintenant déterminé les relations des diverses quantités qui interviennent dans les phénomènes découvert par Œrsted, Ampère et Faraday. Pour les relier aux phénomènes décrits dans les premières parties de cet ouvrage, il faut quelques relations supplémentaires.

Quand une force électromotrice agit sur un corps matériel, elle produit deux effets que Faraday a appelés *induction* et conduction, le premier plus apparent dans les diélectriques, l'autre dans les conducteurs.

Dans ce traité, nous avons mesuré l'électricité statique au moyen de ce que nous avons appelé le *déplacement électrique :* c'est une quantité dirigée ou vectorielle, que nous avons désignée par $\mathfrak{D}$ et dont les composantes ont été représentées par f, g, h.

Dans les substances isotropes, le déplacement s'effectue le sens de la force électromotrice qui le produit, et il lui est proportionnel, au moins pour de petites valeurs de cette force. C'est ce que l'on peut exprimer par l'équation

$$\text{Équation de déplacement électrique,}\quad \mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}K\mathfrak{E}, \tag{F}$$

où K est la capacité diélectrique de la substance. (*Voir* § 69.)

Dans les substances non isotropes, les composantes f, g, h du déplacement électrique $\mathfrak{D}$ sont des fonctions linéaires des composants P, Q, R de la force électromotrice.

La forme des équations du déplacement électrique est semblable à celle des équations de la conduction données au § 298.

On peut exprimer ces relations en disant que, dans les substances isotropes, K est une quantité scalaire, et que, dans les autres corps c'est une fonction linéaire et vectorielle opérant sur le vecteur $\mathfrak{E}$.

27. En effet, une telle preuve faisait défaut à l'époque ou écrivait Maxwell. Hertz tenta le premier, en 1887, de la fournir grâce à des oscillations électriques de très hautes fréquence. C'est ainsi qu'il découvrit les ondes hertziennes.

609. L'autre effet de la force électromotrice est la conduction. Les lois de la conduction, considérée comme conséquence de la force électromotrice, ont été données par Ohm et sont exposées dans la seconde partie de ce traité (§ 241). On peut les résumer dans l'équation

$$\text{Équation de conduction, } \mathfrak{K} = C\mathfrak{E}, \tag{G}$$

où $\mathfrak{E}$ est la grandeur de la force électromotrice au point considéré ; $\mathfrak{K}$ est la densité du courant de conduction dont les composantes sont p, q, r ; et C est la conductibilité de la substance, laquelle est une quantité scalaire dans le cas des substances isotropes, et, dans le cas des autres substances, une quantité linéaire et vectorielle opérant sur le vecteur $\mathfrak{E}$. La forme de cette fonction en coordonnées cartésiennes est donnée au § 298.

610. Une des particularités les plus importantes de ce traité consiste dans cette théorie que le courant électrique vrai $\mathfrak{C}$ duquel dépendent les phénomènes électromagnétiques n'est pas identique au courant de conduction $\mathfrak{K}$, et que, pour évaluer le mouvement total d'électricité, on doit tenir compte de la variation dans le temps du déplacement électrique $\mathfrak{D}$, en sorte que nous devons écrire

$$\text{Équation du courant vrai, } \mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}, \tag{H}$$

ou, en fonction des composantes,

$$\left\{\begin{aligned} u &= p + \frac{df}{dt}, \\ v &= q + \frac{dg}{dt}, \\ w &= r + \frac{dh}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{H'}$$

611. Puisque $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{D}$ dépendent de la force électromotrice $\mathfrak{E}$, nous pouvons exprimer le courant vrai $\mathfrak{C}$ en fonction de la force électromotrice ; on a

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi}K\frac{d}{dt}\right)\mathfrak{E} \tag{I}$$

ou, dans le cas où C et K sont constants,

$$\left\{\begin{aligned} u &= CP + \frac{1}{4\pi}K\frac{dP}{dt}, \\ v &= CQ + \frac{1}{4\pi}K\frac{dQ}{dt}, \\ w &= CR + \frac{1}{4\pi}K\frac{dR}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{I'}$$

612. La densité de volume de l'électricité libre en un point quelconque s'obtient au moyen des composantes du déplacement électrique par l'équation

$$\rho = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}. \qquad \text{(J)}$$

613. La densité superficielle de l'électricité est

$$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h', \qquad \text{(K)}$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à la surface dirigée vers le milieu où les composantes du déplacement sont f, g, h, et l', m', n' sont celles de la normale à la surface dirigée vers le milieu où les composantes sont f', g', h'.

614. Si la magnétisation du milieu est due en entier à l'induction d'une force magnétique agissant sur ce milieu, on peut écrire l'équation du magnétisme induit

$$\mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}, \qquad \text{(L)}$$

où μ est le coefficient de perméabilité magnétique, que l'on peut regarder comme une quantité scalaire ou comme une fonction linéaire et vectorielle opérant sur $\mathfrak{H}$, suivant que le milieu est ou non isotrope.

615. Ces relations peuvent être regardées comme les principales qui existent entre les quantités que nous avons considérées. On peut les combiner de manière à éliminer quelques-unes de ces quantités : mais notre objet présent n'est pas d'obtenir des formules mathématiques condensées, mais bien d'exprimer toutes les relations dont nous avons connaissance. En l'état de notre étude, éliminer une quantité qui exprime une idée utile serait une perte plutôt qu'un avantage.[28]

Toutefois il y a un résultat de grande importance que nous pouvons obtenir en combinant les équations (A) et (E).

Supposons qu'il n'existe point d'aimants dans le champ, si ce n'est sous forme de circuits électriques : la distinction que nous avons maintenue jusqu'ici entre la force magnétique et l'induction magnétique disparaît, puisque c'est seulement à l'intérieur des substances aimantées que ces quantités diffèrent l'une de l'autre.[29]

28. C'est pour cela que dans son traité, Maxwell ne cherche pas à éliminer le potentiel vecteur A et ne donne donc pas les équations de Maxwell sous leur forme moderne.

29. En fait, Maxwell envisage, comme Wilhelm Weber, d'interpréter toute forme de magnétisme de la matière (ferromagnétisme, paramagnétisme et diamagnétisme) par des courants moléculaires.

Suivant la théorie d'Ampère, qui sera exposée au § 833, les propriétés de ce que nous appelons la *matière magnétisée* sont dues à des circuits électriques moléculaires. C'est donc seulement quand nous considérons la matière aimantée sous forme de grandes masses que notre théorie de l'aimantation peut s'appliquer ; et, si l'on supposait nos méthodes mathématiques capables de rendre compte de ce qui se passe dans chaque molécule séparément, elles n'y découvriraient rien que des circuits électriques, et nous trouverions la force magnétique et l'induction magnétique identiques dans tout l'espace. Pour pouvoir employer à volonté le système des mesures électrostatiques ou celui des mesures électromagnétiques, nous conserverons le coefficient μ, nous souvenant que sa valeur est l'unité dans le système électromagnétique.

616. D'après les équations (A), les composantes de l'induction magnétique sont

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$

$$b = \frac{dF}{d\zeta} - \frac{dH}{dx},$$

$$c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

D'après les équations (E), § 607, les composantes du courant électrique sont données par

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$

$$4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx},$$

$$4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}.$$

Suivant notre hypothèse, a, b, c sont respectivement identiques à $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$. Nous avons donc

$$4\pi\mu\, u = \frac{d^2G}{dxdy} - \frac{d^2F}{dy^2} - \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{d^2H}{dzdx}. \tag{1}$$

Si nous posons

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}. \tag{2}$$

et*

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right), \tag{3}$$

* On emploie ici le signe - pour mettre nos équations en accord avec celles où l'on emploie les quaternions.

nous pouvons écrire l'équation (1)

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi\mu u &= \frac{dJ}{dx} + \nabla^2 F, \\ &\text{de même,} \\ 4\pi\mu v &= \frac{dJ}{dy} + \nabla^2 G, \\ 4\pi\mu w &= \frac{dJ}{dz} + \nabla^2 H. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Si nous posons

$$\left\{\begin{aligned} F' &= \mu\iiint \frac{u}{r}\,dxdydz, \\ G' &= \mu\iiint \frac{v}{r}\,dxdydz, \\ H' &= \mu\iiint \frac{w}{r}\,dxdydz, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{J}{r}\,dxdydz, \tag{6}$$

où r est la distance du point donné à l'élément (x, y, z), et où les intégrations sont étendues à tout l'espace, on a

$$\left\{\begin{aligned} F &= F' - \frac{d\chi}{dx}, \\ G &= G' - \frac{d\chi}{dy}, \\ H &= H' - \frac{d\chi}{dz}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

La quantité χ disparaît des équations (A) et n'a rapport à aucun phénomène physique. Si nous supposons qu'elle soit nulle en tout point, J est aussi nul en tous points, et les équations (5) donnent en supprimant les accents les vraies valeurs des composantes de $\mathfrak{A}$.[30]

617. Nous pouvons donc adopter la définition suivante de $\mathfrak{A}$: c'est le potentiel vecteur du courant électrique, et il est lié à ce courant par la même relation qui existe entre le potentiel scalaire et la matière à laquelle est relatif ce potentiel ; il s'obtient par la même opération d'intégration que l'on peut décrire comme il suit :

D'un point donné, menons un vecteur qui représente en grandeur et direction un élément de courant électrique divisé par la distance de cet élément au point donné, et faisons de même pour tous les éléments du courant : la

30. Nous dirions aujourd'hui que Maxwell sélectionne ici la jauge $\nabla \cdot A = 0$.

résultante de tous les vecteurs ainsi obtenus est le potentiel du courant entier. Puisque le courant est une quantité vectorielle, son potentiel est aussi un vecteur. (*Voir* § 422.)

Quand la distribution des courants électriques est donnée, il y une et une seule distribution des valeurs de $\mathfrak{A}$, telle qu'en tous les points $\mathfrak{A}$ soit fini, continu, satisfasse aux équations

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi\mu\mathfrak{C}, \qquad S.\nabla \mathfrak{A} = 0$$

et s'annule à une distance infinie du système électrique. Cette valeur est celle que donnent les équations (5) et qui peut s'écrire

$$\mathfrak{A} = \mu\iiint \frac{\mathfrak{C}}{r} dx\, dy\, dz.$$

Expressions en quaternions des équations électromagnétiques

618. Nous nous sommes efforcé, dans cet ouvrage, d'éviter toute opération qui exige du lecteur la connaissance du calcul des quaternions. En même temps, nous n'avons pas hésité à introduire la notion du vecteur, là où il a été nécessaire de le faire. Quand nous avons eu l'occasion de désigner un vecteur par un symbole, nous avons employé une lettre gothique, le nombre des différents vecteurs étant si grand que les symboles favoris de Hamilton auraient été épuisés tout de suite. Donc, toutes les fois qu'une lettre gothique est employée, elle désigne un vecteur, au sens que Hamilton donnait à ce mot, et indique non seulement sa grandeur, mais aussi sa direction. Les composantes d'un vecteur sont désignées par des lettres latines ou grecques.

Les principaux vecteurs que nous avons à considérer sont :

	Symbole du vecteur.	Composantes.
Le rayon vecteur d'un point...	ρ	$x\ y\ z$
La quantité de mouvement électromagnétique en un point...	A	$F\ G\ H$
L'induction magnétique...	$\mathfrak{B}$	$a\ b\ c$
Le courant électrique total...	$\mathfrak{C}$	$u\ v\ w$
Le déplacement électrique...	$\mathfrak{D}$	$f\ g\ h$
La force électromotrice...	$\mathfrak{E}$	$P\ Q\ R$
La force mécanique...	$\mathfrak{F}$	$X\ Y\ Z$
La vitesse d'un point...	$\mathfrak{G}$ ou $\dot{\rho}$	$\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}$
La force magnétique...	$\mathfrak{H}$	$\alpha\ \beta\ \gamma$
L'intensité d'aimantation...	$\mathfrak{I}$	$A\ B\ C$
Le courant de conduction...	$\mathfrak{K}$	$p\ q\ r$

Nous avons aussi les fonctions scalaires suivantes :

ψ, le potentiel électrique ;

Ω, le potentiel magnétique (là où il existe) ;

e, la densité électrique ;

m, la densité de la « matière magnétique ».

Enfin, nous avons les quantités suivantes qui indiquent des propriétés du milieu en chacun de ses points :

C, la conductibilité pour les courants électriques ;

K, le pouvoir inducteur diélectrique ;

μ, le pouvoir inducteur magnétique.

Dans les milieux isotropes, ces quantités ne sont que des fonctions scalaires de ρ ; mais, en général, ce sont des fonctions linéaires et vectorielles, opérant sur les fonctions vectorielles auxquelles elles sont appliquées. Il est certain que K et μ sont toujours autoconjuguées[*] et il est probable que C l'est aussi.[†,31]

619. Les équations (A) de l'induction magnétique, dont la première est

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$

peuvent alors s'écrire

$$\mathfrak{B} = V.\nabla\,\mathfrak{A},$$

où ∇ est l'opérateur

$$i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz},$$

et où $V.$ indique que l'on prend la partie vectorielle du résultat de cette opération.

Puisque $\mathfrak{A}$ est soumis à la condition $S.\nabla\,\mathfrak{A} = 0$, $\nabla\,\mathfrak{A}$ est un vecteur simple, et le symbole $V.$ est inutile.

Les équations (B) de la force électromotrice, dont la première est

$$P = c\dot{y} - b\dot{z} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx},$$

* Voir § 101. c

† Sauf dans le milieu soumis à l'action des forces magnétiques (expériences de Hall).

31. Nous dirions aujourd'hui que les tenseurs associés sont symétriques.

deviennent

$$\mathfrak{E} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - \dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi.$$

Les équations (C) de la force mécanique, dont la première est[32]

$$X = cv - bw - e\frac{d\Psi}{dx} - m\frac{d\Omega}{dx},$$

deviennent

$$\mathfrak{F} = V.\mathfrak{G}\mathfrak{B} - e\nabla\Psi - m\nabla\Omega.$$

Les équations (D) de l'aimantation, dont la première est

$$a = \alpha + 4\pi A,$$

deviennent

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{I}$$

Les équations (E) des courants électriques, dont la première est

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$

deviennent

$$4\pi\mathfrak{C} = V.\nabla\mathfrak{H},$$

L'équation du courant de conduction est, d'après la loi de Ohm,

$$\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}.$$

Celle du déplacement électrique est

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi}K\mathfrak{E}.$$

L'équation du courant électrique total, dû tant à la variation de déplacement électrique qu'à la conduction, est

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}.$$

Quand l'aimantation est due à l'induction magnétique,

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}.$$

Nous avons aussi, pour déterminer la densité de volume,

$$e = S.\nabla\mathfrak{D}.$$

Pour déterminer la densité de volume magnétique,

$$m = S.\nabla\mathfrak{I}.$$

Quand la force magnétique peut se déduire d'un potentiel,

$$\mathfrak{H} = -\nabla\Omega.$$

32. Comme le remarqua plus tard FitzGerald, il faut substituer **E** à $-\nabla\psi$ dans cette formule.

CHAPITRE XX

Théorie électromagnétique de la lumière

781. En plusieurs passages de ce traité, on a tenté d'expliquer les phénomènes électromagnétiques par une action mécanique transmise d'un corps à un autre par l'intermédiaire d'un milieu qui remplirait l'espace compris entre les corps. La théorie ondulatoire de la lumière suppose aussi l'existence d'un milieu. Nous avons maintenant à montrer que le milieu électromagnétique a des propriétés identiques à celles du milieu où se propage la lumière.

Remplir l'espace d'un nouveau milieu toutes les fois que l'on doit expliquer un nouveau phénomène ne serait point un procédé bien philosophique ; au contraire, si, étant arrivés indépendamment par l'étude de deux branches différentes de la Science à l'hypothèse d'un milieu, les propriétés qu'il faut attribuer à ce milieu pour rendre compte des phénomènes électromagnétiques se trouvent être de la même nature que celles que nous devons attribuer à l'éther lumineux pour expliquer les phénomènes de la lumière, nos raisons de croire à l'existence physique d'un pareil milieu se trouveront sérieusement confirmées.

Mais les propriétés des corps sont susceptibles de mesures quantitatives. Nous obtenons ainsi la valeur numérique de certaines propriétés du milieu, par exemple de la vitesse avec laquelle s'y propage une perturbation, vitesse que nous pouvons calculer d'après les expériences électromagnétiques et que nous pouvons observer directement dans le cas de la lumière. Si l'on trouve que la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques est la même que la vitesse de la lumière, et cela, non seulement dans l'air, mais dans tous les autres milieux transparents, nous aurons de fortes raisons de croire que la lumière est un phénomène électromagnétique, et, par la combinaison des preuves optiques et électriques, nous nous convaincrons de la réalité de ce milieu, absolument comme, dans le cas des autres espèces de matière, nous nous convainquons par le témoignage combiné des sens.

782. Lorsque de la lumière est émise, le corps lumineux dépense une certaine quantité d'énergie, et, si cette lumière est absorbée par un autre corps, ce corps s'échauffe, témoignant ainsi qu'il reçoit de l'énergie du dehors. Durant le temps que la lumière, ayant déjà quitté le premier corps, n'a pas encore atteint le second, elle doit exister à l'état d'énergie dans le milieu intermédiaire.

Dans la théorie de l'émission, le transport de l'énergie s'effectue par le transport effectif des particules de lumière allant du corps lumineux au corps éclairé et emportant avec elles leur énergie cinétique, ainsi que toute autre espèce d'énergie dont elles pourraient être le siège.

Dans la théorie des ondulations, il y a un milieu matériel qui remplit tout l'espace compris entre les deux corps, et c'est par l'action des parties contiguës de ce milieu que l'énergie se transmet de proche en proche, jusqu'à ce qu'elle atteigne le corps éclairé.

Donc, pendant le passage de la lumière, le milieu lumineux renferme de l'énergie. Dans la théorie ondulatoire, telle que l'ont développée Huygens, Fresnel, Young, Green, etc., on suppose que cette énergie est en partie potentielle, en partie cinétique. On suppose que l'énergie potentielle est due à la déformation des parties élémentaires du milieu. Nous devons considérer ce milieu comme élastique. L'énergie cinétique est due au mouvement vibratoire du milieu, d'où la conséquence que ce milieu a une densité finie.

Dans la théorie de l'électricité et du magnétisme, adoptée dans cet Ouvrage, on reconnaît deux formes d'énergie, électrostatique et électrocinétique (voir § 630 et 636), et l'on suppose qu'elles ont leur siège non seulement dans les corps électrisés ou magnétisés, mais aussi en tout point de l'espace environnant où l'on observe une action de la force électrique ou magnétique. Ainsi, notre théorie est d'accord avec la théorie ondulatoire sur ce point, qu'elle admet l'existence d'un milieu susceptible de devenir le siège de deux sortes d'énergie.[*,33]

783. Déterminons maintenant dans quelles conditions se propage une perturbation électromagnétique dans un milieu que nous supposerons en repos, c'est-à-dire n'ayant d'autres mouvements que ceux qui peuvent faire partie de la perturbation électromagnétique.

Soient

C la conductibilité spécifique du milieu ;

K son pouvoir spécifique pour l'induction électrostatique ;

μ sa *perméabilité* magnétique.

---

* « Pour ma part, lorsque je considère la relation qui pourrait exister entre un espace vide et la force magnétique, ainsi que le caractère général des phénomènes magnétiques en dehors de l'aimant, je penche à croire que la transmission de la force se fait par une certaine action extérieure à l'aimant, et non que ces effets sont simplement des attractions et des répulsions à distance. Une telle action pourrait être une fonction de l'éther ; car il n'est pas du tout invraisemblable que l'éther, s'il existe, ait d'autres usages que d'être simplement le véhicule des radiations. » (*Experimental Researches* de Faraday, 3075).

33. En fait, Faraday était hostile à l'idée d'un éther considéré comme milieu mécanique. Mais il pensait que la lumière pouvait correspondre à une sorte de vibration transversales des lignes de force.

Pour obtenir l'équation générale d'une perturbation électromagnétique, nous allons exprimer le courant vrai $\mathfrak{C}$ en fonction du potentiel vecteur $\mathfrak{A}$ et du potentiel électrique Ψ.

Le courant vrai $\mathfrak{C}$ se compose du courant de conduction $\mathfrak{K}$ et de la variation de déplacement électrique $\mathfrak{D}$; et, puisque ces deux éléments dépendent l'un et l'autre de la force électromotrice $\mathfrak{E}$, nous trouvons, comme au § 611,

$$\mathfrak{C} = \left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt}\right) \mathfrak{E}\,; \tag{1}$$

mais, puisqu'il n'y a point de mouvement dans le milieu, nous pouvons exprimer la force électromotrice comme au § 599,

$$\mathfrak{E} = -\,\dot{\mathfrak{A}} - \nabla\Psi, \tag{2}$$

d'où

$$\mathfrak{C} = -\left(C + \frac{1}{4\pi} K \frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \nabla\Psi\right). \tag{3}$$

Mais nous pouvons déterminer autrement une relation entre $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{A}$, ainsi qu'on l'a vu au § 616, dont les équations (4) peuvent s'écrire[34]

$$4\pi\mu\mathfrak{C} = \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J, \tag{4}$$

où

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}. \tag{5}$$

En combinant les équations (3) et (4), nous avons

$$\mu\left(4\pi C + K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \nabla\Psi\right) + \nabla^2\mathfrak{A} + \nabla J = 0\,, \tag{6}$$

ce que nous pouvons exprimer par les trois équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\mu\left(4\pi C + K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dF}{dt} + \frac{d\Psi}{dx}\right) + \nabla^2 F + \frac{dJ}{dx} = 0,\\ &\mu\left(4\pi C + K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dt} + \frac{d\Psi}{dy}\right) + \nabla^2 G + \frac{dJ}{dy} = 0,\\ &\mu\left(4\pi C + K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dt} + \frac{d\Psi}{dz}\right) + \nabla^2 H + \frac{dJ}{dz} = 0.\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Telles sont les équations générales des perturbations électromagnétiques.

34. Sous forme vectorielle (au lieu de quaternionique), on a $4\pi\mu\mathbf{C} = -\Delta\mathbf{A} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$, puisque $4\pi\mu\mathbf{C} = \nabla\times\mathbf{B} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$.

Si nous différentions ces équations par rapport à x, y et z, respectivement, et que nous les ajoutions, nous avons

$$\mu\left(4\pi C + K\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{dJ}{dt} - \nabla^2\Psi\right) = 0. \tag{8}$$

Si le milieu n'est pas conducteur, $C = 0$ et $\nabla^2\Psi$, qui est proportionnel à la densité de volume de l'électricité libre, est indépendant de t.[35] Donc J doit être une fonction linéaire de t, ou une constante ou zéro, et nous pouvons ne tenir compte ni de J ni de ψ, si nous considérons des perturbations périodiques.

Propagation des ondes dans un milieu non conducteur

784. Dans ce cas, $C = 0$ et les équations deviennent

$$\left\{\begin{aligned} K\mu\frac{d^2F}{dt^2} + \nabla^2 F &= 0, \\ K\mu\frac{d^2G}{dt^2} + \nabla^2 G &= 0, \\ K\mu\frac{d^2H}{dt^2} + \nabla^2 H &= 0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Sous cette forme, ces équations sont semblables à celles du mouvement d'un corps élastique, et, quand des conditions initiales sont données, la solution peut être obtenue sous une forme indiquée par Poisson[*] et appliquée par Stockes à la théorie de la diffraction.[†]

Posons

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}. \tag{10}$$

Si, pour l'époque $t = 0$, nous connaissons, en chaque point de l'espace, les valeurs de F, G, H et de $\frac{dF}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$, $\frac{dH}{dt}$, nous pourrons déterminer ces valeurs, pour une époque quelconque, de la manière suivante :

Soit O le point pour lequel nous voulons déterminer la valeur de F au temps t. De O comme centre, avec un rayon égal à Vt, décrivons une sphère.

35. Maxwell suppose à tord que l'équation de Poisson $\Delta\psi + 4\pi\rho/K$ est généralement valable. En réalité, on a $4\pi\rho = \nabla\cdot(K\mathbf{E}) = \nabla\cdot[K(-\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\psi)] = -K\Delta\psi - K\partial(\nabla\cdot\mathbf{A})/\partial t$. En omettant le second terme, Maxwell a implicitement choisi la jauge $\nabla\cdot A = 0$. Comme il n'est pas pleinement conscient de la liberté de jauge et comme il est attaché à l'interprétation physique de **A** comme une quantité de mouvement généralisée (au sens lagrangien), il préfère raisonner sur **A** plutôt que sur **E** et **B**.

* *Mémoires de l'Académie*, t. III, p. 130.

† *Cambridge Transactions*, vol. IX, p. 10 (1850).

Cherchons la valeur initiale de F en chacun des points de cette surface, et prenons la *valeur moyenne* $\overline{F}$. Cherchons aussi la valeur initiale de dF/dt en chacun des points de la surface, et soit $\overline{dF}/dt$ la moyenne de ces valeurs.

Alors la valeur de F au point O, au temps t, est

$$\left\{\begin{aligned} &F = \frac{d}{dt}(\overline{F}\,t) + t\frac{\overline{dF}}{dt}, \\ &\text{de même} \\ &G = \frac{d}{dt}(\overline{G}t) + t\frac{\overline{dG}}{dt}, \\ &H = \frac{d}{dt}(\overline{H}t) + t\frac{\overline{dH}}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

785. On voit donc qu'à chaque instant l'état des choses au point O dépend de l'état de choses qui existait à une distance Vt, à une époque antérieure de t ; c'est-à-dire qu'une perturbation se propage dans le milieu avec la vitesse V.

Supposons qu'au temps $t = 0$ les quantités $\mathfrak{A}$ et $\dot{\mathfrak{A}}$ soient nulles, sauf dans un certain espace S. Leur valeur en O, au temps t, sera zéro, à moins que la sphère, décrite de O comme centre avec Vt comme rayon, ne se trouve comprise en tout ou en partie dans l'espace S. Si O est extérieur à l'espace S, il n'y a point de perturbation en O avant que Vt soit devenu égal à la plus courte distance de O à l'espace S. Alors la perturbation commence à se produire en O et y dure jusqu'à ce que Vt soit devenu égal à la plus longue distance du point O à un point quelconque de l'espace S : à ce moment, la perturbation cesse pour toujours en O.

786. La quantité V, qui exprime la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques dans un milieu non conducteur, est, d'après l'équation (9) du § 784, égale à $1/\sqrt{K\mu}$.

Si le milieu est l'air, et si nous employons le système de mesure électrostatique, $K = 1$ et $\mu = 1/v^2$; de sorte que $V = v$, ou la vitesse de propagation est numériquement égale au nombre des unités électrostatiques d'électricité contenues dans une unité électromagnétique. Si nous prenons le système de mesure électromagnétique, $K = 1/v^2$ et $\mu = 1$, de sorte que l'équation $V = v$ reste vraie.

Si l'on se place dans la théorie qui fait de la lumière une perturbation électromagnétique se propageant dans le même milieu qui transmet les autres actions électromagnétiques, V doit être la vitesse de la lumière, quantité dont la valeur a été mesurée par plusieurs méthodes. D'autre part, v est le nombre d'unités électrostatiques d'électricité qui sont contenues dans une unité électromagnétique, et l'on a décrit, au chapitre précédent, les méthodes permettant de déterminer cette quantité. Or ces méthodes sont entièrement indépendantes de celles qui servent à mesurer la vitesse de la lumière. Donc l'accord ou le désaccord des valeurs de V et de v fournit une vérification de la théorie électromagnétique de la lumière.

787. Dans la table suivante, on met en regard les principaux résultats d'observations directes faites sur la vitesse de la lumière dans l'air ou les espaces planétaires, et les principaux résultats obtenus dans la comparaison des unités électriques :

Vitesse de la lumière (en mètres, par seconde).		Rapport des unités électriques.	
Fizeau	314 000 000	Weber	310 740 000
Aberration, etc., parallaxe du Soleil	308 000 000	Maxwell	288 000 000
Foucault	298 360 000	Thomson	282 000 000

Il est manifeste que la vitesse de la lumière et le rapport des unités sont des quantités de même ordre de grandeur ; mais, jusqu'à ce jour, on ne saurait dire qu'aucune des deux ait été déterminée avec assez de précision pour que l'on puisse affirmer que l'une est plus grande que l'autre. Il est à souhaiter que de nouvelles expériences déterminent, avec plus de précision, le rapport de grandeur de ces deux quantités.[36]

En attendant, notre théorie, qui affirme l'égalité de ces deux quantités et qui donne une raison physique de cette égalité, ne se trouve certainement pas contredite par la comparaison de ces résultats, tels qu'ils sont.

788. Dans les milieux autres que l'air, la vitesse V est inversement proportionnelle à la racine carrée du produit du pouvoir inducteur diélectrique et du pouvoir inducteur magnétique. Dans la théorie ondulatoire, la vitesse de la lumière dans les différents milieux est inversement proportionnelle aux indices de réfraction de ces milieux.

36. Le souhait de Maxwell fut exhaucé : avant la fin du siècle l'identité recherchée était établi à 2×10^{-3} près.

Il n'y a point de milieu transparent dont le pouvoir magnétique diffère du pouvoir magnétique de l'air de plus d'une très petite fraction. La plus grande partie de la différence qui existe entre ces milieux doit donc tenir à leur pouvoir diélectrique. Donc, d'après notre théorie, le pouvoir diélectrique d'un milieu transparent doit être égale au carré de son indice de réfraction.

Mais l'indice de réfraction a des valeurs différentes pour les différentes sortes de lumière, et il est d'autant plus grand que la lumière a des vibrations plus rapides. Nous devons donc choisir l'indice de réfraction qui correspond aux ondes dont la période est la plus longue, ces ondes étant les seules dont le mouvement puisse se comparer aux opérations lentes à l'aide desquelles nous déterminons la capacité d'un diélectrique.

789. Le seul diélectrique dont la capacité ait été, jusqu'à présent, déterminée avec une exactitude suffisante, est la paraffine ; MM. Gibson et Barclay ont trouvé pour cette substance, à l'état solide,[*]

$$K = 1{,}975.$$

Le Dr Gladstone a trouvé pour la paraffine fondue, de densité 0,779, les valeurs suivantes des indices de réfraction relatifs aux lignes A, D et H :

Température	A	D	H
54 °C	1,4306	1,4357	1,4499
57 °C	1,4294	1,4343	1,4493

De là on tire, pour l'indice de réfraction des ondes de longueur infinie,

$$1{,}422.$$

La racine carrée de K est

$$1{,}405.$$

La différence entre ces deux nombres dépasse ce que l'on peut attribuer aux erreurs d'observation, et montre que nos théories sur la structure des corps doivent être encore bien perfectionnées, avant que nous puissions déduire les propriétés électriques des propriétés optiques des corps.[37] En même temps, je crois que l'accord de ces nombres est tel que, si les nombres obtenus pour les propriétés électriques et optiques d'un grand nombre de corps ne présentaient pas de plus grandes différences, nous serions en droit de

* *Phil. Trans.*, 1871, p. 573.

37. Les successeurs de Maxwell durent en effet introduire la structure moléculaire de la matière et modifier les équations de Maxwell pour expliquer la dispersion optique.

conclure que la racine carrée de K forme, sinon l'expression complète, au moins le terme le plus important de l'indice de réfraction.

Ondes planes

790. Bornons maintenant notre attention aux ondes planes que nous supposerons normales à l'axe des z. Toutes les quantités, dont la variation constitue ces ondes, seront uniquement fonctions de z et de t et ne dépendront pas de x et y. Les équations de l'induction magnétique (A), § 591, se réduisent à

$$a = -\frac{dG}{dz}, \quad b = \frac{dF}{dz}, \quad c = 0\,; \tag{13}$$

c'est-à-dire que la perturbation magnétique est dans le plan de l'onde. Résultat conforme à ce que nous savons sur la nature de la perturbation qui constitue la lumière.

Posant $\mu\alpha$, $\mu\beta$ et $\mu\gamma$ au lieu de a, b,..., les équations des courants électriques deviennent

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi\mu u &= -\frac{db}{dz} = -\frac{d^2F}{dz^2}, \\ 4\pi\mu v &= \frac{da}{dz} = -\frac{d^2G}{dz^2}, \\ 4\pi\mu w &= 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Ainsi, l'ébranlement électrique est aussi dans le plan de l'onde, et, si la perturbation magnétique se produit suivant une seule direction, celle de x par exemple, la perturbation électrique ne se produit que suivant la direction perpendiculaire, c'est-à-dire celle des y.

Mais nous pouvons calculer autrement la perturbation électrique : si f, g, h sont les composantes du déplacement électrique dans un milieu non conducteur,

$$u = \frac{df}{dt}, \quad v = \frac{dg}{dt}, \quad w = \frac{dh}{dt}\,; \tag{15}$$

si P, Q, R sont les composantes de la force électromotrice,

$$f = \frac{K}{4\pi}P, \quad g = \frac{K}{4\pi}Q, \quad h = \frac{K}{4\pi}R\,; \tag{16}$$

et, puisqu'il n'y a point de mouvement du milieu, les équations (B) du § 598 deviennent

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt}\,; \tag{17}$$

d'où

$$u = -\frac{K}{4\pi}\frac{d^2F}{dt^2}, \quad v = -\frac{K}{4\pi}\frac{d^2G}{dt^2}, \quad w = -\frac{K}{4\pi}\frac{d^2H}{dt^2}. \tag{18}$$

Comparant ces valeurs à celles que donne l'équation (14), on a

$$\begin{cases} \dfrac{d^2F}{dz^2} = K\mu\dfrac{d^2F}{dt^2}, \\[2ex] \dfrac{d^2G}{dz^2} = K\mu\dfrac{d^2G}{dt^2}, \\[2ex] 0 = K\mu\dfrac{d^2H}{dt^2}. \end{cases} \tag{19}$$

La première et la deuxième de ces équations sont les équations de la propagation d'une onde plane, et les solutions sont de la forme bien connue

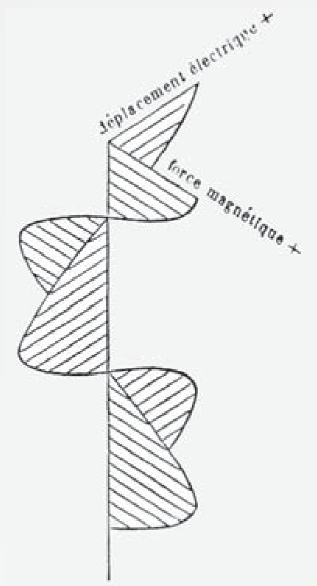
$$\begin{cases} F = f_1(z - Vt) + f_2(z + Vt), \\ G = f_3(z - Vt) + f_4(z + Vt). \end{cases} \tag{20}$$

La solution de la troisième équation est

$$H = A + Bt, \tag{21}$$

où A et B sont des fonctions de z. Donc H est constant, ou varie proportionnellement au temps, mais, dans aucun cas, n'a part à la propagation de l'onde.

791. Il résulte de là que les perturbations électrique et magnétique sont dans le plan de l'onde ; et la forme mathématique de ces perturbations, comme celle des perturbations qui constituent la lumière, est transversale à la direction de propagation.



Si nous supposons $G = 0$, la perturbation correspondra à un rayon de lumière polarisée dans un plan.

Dans ce cas, la force magnétique est parallèle à l'axe des y et égale à $\frac{1}{\mu}\frac{dF}{dz}$, et la force électromotrice est parallèle à l'axe des x et égale à $-\frac{dF}{dz}$. La force magnétique est donc dans un plan perpendiculaire à celui qui contient la force électrique.

La *fig.* 73 représente, pour le cas d'une perturbation harmonique simple dans un plan, les valeurs que prennent, à un instant donné, la force magnétique et la force électromotrice en un point quelconque du rayon. C'est le cas qui correspond à un rayon de lumière polarisée dans un plan ; mais il reste à voir si le plan de polarisation correspond au plan de la perturbation magnétique ou au plan de la perturbation électrique. (*Voir* le § 797.)[38]

Énergie et contraintes de la radiation

792. En un point de l'onde, dans un milieu non conducteur, l'énergie électrostatique par unité de volume est

$$\frac{1}{2}fP = \frac{K}{8\pi}P^2 = \frac{K}{8\pi}\left.\overline{\frac{dF}{dt}}\right|^2. \tag{22}$$

L'énergie électrocinétique, au même point, est

$$\frac{1}{8\pi}b\beta = \frac{1}{8\pi\mu}b^2 = \frac{1}{8\pi\mu}\left.\overline{\frac{dF}{dt}}\right|^2 . \tag{23}$$

En vertu de l'équation (20), ces deux expressions sont égales pour une onde isolée, de sorte qu'en chaque point de l'onde l'énergie intérieure du milieu est pour moitié électrostatique, et pour moitié électrocinétique.

Soit p la valeur de l'une ou l'autre de ces quantités, énergie électrostatique ou énergie électrocinétique, par unité de volume : en vertu de l'état électrostatique du milieu, il y a une tension de grandeur p, dans une direction parallèle à x, en même temps qu'une pression aussi égale à p et parallèle à y et à z. (*Voir* § 107.)

En vertu de l'état électrocinétique, il y a une tension égale à p, dans une direction parallèle à y, combinée à une pression aussi égale à p, dans les directions parallèle à x et à z. (*Voir* § 643.)

Donc, l'effet combiné des actions électrostatique et électrocinétique consiste en une pression égale à $2p$, dans le sens de la propagation de l'onde. Or

38. Au paragraphe 797, Maxwell montre que la théorie électromagnétique de la lumière redonne les lois de Fresnel pour les milieus anisotropes si le vecteur **E** est pris perpendiculaire au plan de polarisation conventionnel de l'optique.

$2p$ exprime la totalité de l'énergie contenue dans l'unité de volume. Donc, dans un milieu où se propagent des ondes, il y existe suivant la direction normale aux ondes une pression numériquement égale à l'énergie contenue dans l'unité de volume.[39]

793. Ainsi, si l'énergie de la lumière qu'un fort rayon de soleil envoie sur un espace d'un pied carré est de 83,4 livres-pieds (0^{kgm},01241 par centimètre carré) par seconde, l'énergie moyenne contenue dans un pied cube de l'espace traversé par le rayon de soleil est d'environ 0,0000000882 livre-pied (0^{kgm},000043223 par centimètre cube), et la pression moyenne par pied carré est de 0,0000000882 livre (0,00000004407 par centimètre carré). Un corps plan, exposé à la lumière solaire, subirait cette pression sur sa face éclairée et serait ainsi repoussé loin de la source lumineuse. Il est probable que l'on pourrait obtenir une bien plus grande énergie de radiation en concentrant les rayons d'une lampe électrique. De pareils rayons, tombant sur un disque métallique léger, suspendu d'une manière très sensible au milieu d'un espace vide, pourraient peut-être déterminer un effet mécanique appréciable. Lorsqu'une perturbation, de nature quelconque, est formée de termes qui comprennent les sinus ou les cosinus d'angles variant avec le temps, l'énergie maximum est double de l'énergie moyenne. Si donc P est la force électromotrice maximum, et β la force magnétique maximum mise en jeu pendant la propagation de la lumière,

$$\frac{K}{8\pi}P^2 = \frac{\mu}{8\pi}\beta^2 = \text{l'énergie moyenne par unité de volume.} \tag{24}$$

En admettant pour l'énergie de la lumière solaire les chiffres de Pouillet, cités par sir W. Thomson (*Trans. R. S. E.*, 1834), on trouve, en mesure électromagnétique,

$P = 60000000$ ou 600 daniells environ par mètre,

$\beta = 0{,}193$, ou un peu plus du dixième de la force magnétique horizontale en Angleterre.

39. Il s'agit de la pression de radiation, dont Pëtr Nikolayevitch Lebedev donna la première preuve expérimentale en 1901 (suivi de peu par Ernest Nichols et Gordon Hull).

Extrait n° 4 :

NOTE SUR LA THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE LA LUMIÈRE

« On a method for the direct comparison of electrostatic with electromagnetic force; with a note on the electromagnetic theory of light », J.C. Maxwell, Royal Society of London, *Philosophical Transactions* (1868), reproduit dans *The scientific papers of James Clerk Maxwell*, 2 vols. (Cambridge, 1890), vol. 2 : 125-143.
Extrait traduit par Danièle Lederer.

Il y a quelques années, dans un article sur le champ électromagnétique[*] j'ai présenté devant la Royal Society les raisons qui m'avaient amené à penser que la lumière est un phénomène électromagnétique dont les lois peuvent se déduire de celles de l'électricité et du magnétisme, me fondant sur l'idée que tous ces phénomènes sont des modifications d'un seul et même milieu.[1] Deux articles sur le même sujet ont paru dans les *Annalen* de Poggendorff pour l'année 1867. Le premier, écrit par feu l'éminent mathématicien Bernhards Riemann fut présenté en 1858 à la Société Royale de Göttingen mais, retiré avant publication, il resta ignoré jusqu'à l'année dernière. Riemann montre que si l'on remplace l'équation de Laplace par[2]

$$\frac{d^2V}{dt^2} - \alpha^2\Delta^2 V + \alpha^2 4\pi\rho = 0, \tag{13}$$

où V est le potentiel électrostatique et α une vitesse, on trouve des résultats

* *Philosophical Transactions*, 1865, p.459.

1. Ce mémoire n'est pas traduit dans le présent recueil. On y trouve une ébauche du point de vue exposé dans les passages du *Traité* (extrait n° 3).

2. La référence de cette plublication posthume de Riemann est « Ein Beitrag zur Elektrodynamik », *Annalen der Physik*, 131 (1867), 237-242. Comme le remarqua Rudoph Clausius dans la même année, ce mémoire comporte une erreur mathématique fatale, ce qui explique sans doute que Riemann ne l'ai pas publié lui-même. Par ailleurs, Maxwell commet une erreur de signe dans le troisième terme de l'équation (13). Le symbole Δ^2 de Maxwell désigne notre laplacien Δ.

en accord avec les phénomènes connus dans tous les domaines de la science de l'électricité. Cette équation revient à considérer que le potentiel se propage dans tout l'espace à une certaine vitesse. Toutefois, l'auteur semble éviter de faire explicitement mention d'un milieu dans lequel se produirait la propagation, mais il montre que cette vitesse est pratiquement, si ce n'est exactement, égale à la vitesse de la lumière que l'on connaît.

Le deuxième article, de M. Lorenz, montre que, selon la théorie de Weber, des perturbations électriques périodiques se propageraient à une vitesse égale à celle de la lumière. La propagation des attractions dans l'espace est aussi incluse dans cette hypothèse, bien que le milieu ne soit pas explicitement évoqué.[3]

À partir des hypothèses de ces deux articles, on peut tirer les conclusions, tout d'abord que l'action et la réaction ne sont pas toujours égales et opposées, et aussi qu'il est possible de construire un appareil qui fournirait autant de travail que l'on veut, sans apport extérieur.

Considérons en effet deux corps A et B portant des charges opposées, et se déplaçant le long de la droite qui va de l'un à l'autre avec des vitesses égales, dans le sens AB. Si le potentiel ou encore l'attraction des corps à un instant donné sont ceux qui correspondent à leurs positions à un instant antérieur (ce que supposent ces auteurs), le corps le plus en avant, B, attirera plus A vers l'avant que A n'attirera B vers l'arrière.

Supposons maintenant que l'écart de A et B soit maintenu par une tringle rigide.

Si ce système est mis en mouvement dans le sens AB, il va tirer dans ce sens avec une force qui peut soit faire croître indéfiniment la vitesse, soit être utilisée comme une source inépuisable d'énergie.[4]

Je pense que ces conséquences remarquables des derniers développements de la théorie de Weber et Neumann ne peuvent être évitées qu'en admettant l'intervention d'un milieu dans les phénomènes électromagnétiques.

Dans mon article précédent, la théorie électromagnétique de la lumière était présentée en relation avec plusieurs autres recherches électromagnétiques, et n'était donc pas facile à comprendre par elle-même. Je propose donc

3. Ce mémoire de Lorenz est traduit et commenté plus bas (extrait n° 9).

4. Dans ses *Principia mathematica*, Newton s'était servi d'une expérience de pensée similaire pour justifier sa troisième loi du mouvement (l'égalité de l'action et de la réaction).

de la formuler dans ce que je pense être la forme la plus simple, en la déduisant de faits bien établis, et en montrant le lien entre les expériences déjà décrites et celles qui déterminent la vitesse de la lumière.

Les relations entre les phénomènes électromagnétiques peuvent s'énoncer de la façon suivante.

THÉORÈME A. Si une courbe fermée enlace un courant électrique, l'intégrale de l'intensité magnétique le long de cette courbe est égale au produit du courant par 4π.[5]

On peut par ailleurs définir l'intégrale de l'intensité magnétique comme le travail effectué sur un pôle magnétique unité lorsqu'il parcourt entièrement la courbe.

Ce théorème bien connu nous donne un moyen de déterminer la position et l'amplitude des courants électriques, lorsqu'on connaît la distribution des forces magnétiques dans le champ. Il découle directement de la découverte d'Œrsted.

THÉORÈME B. Lorsqu'un circuit conducteur enlace un certain nombre de lignes de force magnétique, si, pour une raison quelconque, le nombre de ces lignes diminue, alors apparaît une force électromotrice dans le circuit, dont la valeur totale est égale à la diminution du nombre de lignes par unité de temps.[6]

On peut par ailleurs définir le nombre de lignes de force magnétique comme l'intégrale de la composante perpendiculaire à une surface de l'intensité magnétique, multipliée par l'élément de surface et par le coefficent d'induction magnétique, l'intégrale étant effectuée sur n'importe quelle surface s'appuyant sur le circuit conducteur.

Ce théorème est dû à Faraday, qui a découvert et les phénomènes et cette façon de les décrire, que je trouve la plus simple et la plus compréhensible.

THÉORÈME C. Quand un diélectrique est soumis à une force électromotrice, il manifeste ce que l'on peut appeler une polarisation électrique. Si le sens de la force électromotrice est choisi comme sens positif, et si nous supposons que le diélectrique est placé entre deux conducteurs, *A* du côté négatif

5. C'est le théorème dit « d'Ampère » : $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 4\pi \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$

6. Symboliquement : $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

et B du côté positif, alors la surface du conducteur A est électrisée de façon positive, et B de façon négative.[7]

Si nous admettons que l'énergie du système ainsi électrisé réside dans le diélectrique polarisé, nous devons aussi admettre qu'il se produit un déplacement d'électricité dans le sens de la force électromotrice, dont la valeur est proportionnelle à la force électromotrice en chaque point, et dépend aussi de la nature du diélectrique.[8]

L'énergie emmagasinée dans une portion du diélectrique est égale à la moitié du produit de la force électromotrice par le déplacement électrique, le tout multiplié par le volume de cette portion.

On peut aussi montrer qu'en tout point du diélectrique existe une tension mécanique dans la direction des lignes de force électrique, qui se superpose à une pression qui a même valeur dans toutes les directions perpendiculaires à ces lignes, la valeur de cette tension sur une unité de surface étant égale à la quantité d'énergie par unité de volume.[9]

Je pense que ces affirmations traduisent de façon exacte les idées de Faraday, telle qu'on les trouve en plusieurs endroits de ses « Experimental Researches ».

THÉORÈME D. Quand le déplacement électrique augmente ou diminue, l'effet produit est le même que celui d'un courant électrique dans le sens positif ou négatif.

Ainsi, si les deux conducteurs de l'exemple précédent sont reliés par un fil électrique, celui-ci sera parcouru par un courant allant de A à B.

Parallèlement, le déplacement électrique dans le diélectrique diminuant, il apparaîtra une action électromagnétique équivalente à celle d'un courant circulant de B à A dans le diélectrique.

7. Le signe ici adopté pour la charge liée à la polarisation est conforme à celui donné plus tard dans le traité. Symboliquement, on a $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$. Bien que Maxwell parle ici de l'électrisation de la surface du métal, il approuvait la conception de Faraday selon laquelle c'est la surface du diélectrique qui est véritablement électrisée. Enfin, Maxwell admet implicitement l'idée de Faraday selon laquelle le vide est polarisable au même titre que les diélectriques matériels.

8. Le « déplacement d'électricité » ne saurait correspondre à un déplacement de charges électriques situées dans le diélectrique, car cela contredirait le signe adopté dans l'énoncé du théorème précédent (voir notre introduction).

9. C'est le tenseur des contraintes de Maxwell, $D_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$, introduit pour la première fois par Maxwell dans la première partie de « On physical lines of force » (traduit plus haut) dans le cas magnétique.

Dans cette description, le courant produit par la décharge d'un condensateur constitue un circuit fermé, et pourrait être suivi à l'intérieur du diélectrique à l'aide de galvanomètres convenablement fabriqués. À ma connaissance cela n'a pas été fait, de sorte que cette partie de la théorie, bien qu'elle apparaisse comme une conséquence naturelle de la précédente, n'a pas fait l'objet d'une vérification expérimentale directe. Ce serait sans aucun doute une expérience délicate et difficile.[10]

Appliquons maintenant ces quatre principes à la théorie de la lumière, considérée comme une perturbation qui se propage en ondes planes.

Choisissons la direction de propagation comme axe des z, et considérons que toutes les quantités sont des fonctions de z et du temps t, c'est-à-dire que, à un instant donné, toutes les parties d'un plan perpendiculaire à z sont dans le même état.

Supposons aussi que la force magnétique est dans la direction de l'axe y, et soit β la composante dans cette direction de l'intensité magnétique.

Choisissons comme courbe fermée du théorème A un rectangle dans le plan yx, la longueur des côtés parallèles à l'axe y étant b, et celles des côtés parallèles à l'axe z étant z. L'intégrale de l'intensité magnétique le long de ce rectangle est égale à $b(\beta_0 - \beta)$, où β_0 est la valeur de β à l'origine.[11]

Appelons p, en un point quelconque, la quantité de courant électrique par unité de surface dans la direction x, alors le courant total qui traverse le rectangle est

$$\int_0^z bp\,dz$$

et, d'après (A),

$$b(\beta_0 - \beta) = 4\pi \int_0^z bp\,dz.$$

En divisant par b et en dérivant par rapport à z, on trouve[12]

$$\frac{d\beta}{dz} = -4\pi p\,. \tag{14}$$

Considérons maintenant un rectangle dans le plan xz, dont les côtés parallèles à l'axe x sont de longueur a, et ceux parallèles à l'axe z de longueur z.[13]

10. Hertz fut le premier à réaliser une telle expérience en 1887 (dans le cas d'un diélectrique matériel).

11. Il faut supposer que $b \ll z$ et que l'origine des coordonnées se situe à l'un des coins du rectangle.

12. Il s'agit là d'un cas particulier de la relation $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

13. Il faut supposer que $a \ll z$ et que l'origine des coordonnées se situe à l'un des coins du rectangle.

Soit P la force électromotrice par unité de longueur dans la direction de x, alors la force électromotrice totale le long du rectangle est $a\,(P-P_0)$.

Si μ est le coefficient d'induction magnétique, alors le nombre de lignes de force enlacées par ce rectangle est

$$\int_0^z a\mu\beta dz,$$

et, puisque d'après (B) la force électromotrice totale est égale à la diminution du nombre de lignes par unité de temps,

$$a(P-P_0) = -\frac{d}{dt}\int_0^z a\mu\beta dz.$$

En divisant par a et en dérivant par rapport à z, on trouve[14]

$$\frac{dP}{dz} = -\mu\frac{d\beta}{dt}. \tag{15}$$

Supposons que le diélectrique considéré est tel qu'une force électromotrice P y crée un déplacement électrique f :

$$P = kf, \tag{16}$$

où k est une quantité qui dépend du diélectrique considéré, que l'on peut appeler son « élasticité électrique ».

Supposons enfin que le courant p que nous avons introduit est entièrement dû à la variation du déplacement électrique f, alors

$$p = \frac{df}{dt}. \tag{17}$$

Nous avons maitenant quatre équations (14), (15), (16), (17) qui relient les quatre quantités β, p, P et f. En éliminant p, P et f, on trouve

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{k}{4\pi\mu}\frac{d^2\beta}{dz^2}. \tag{18}$$

En posant

$$\frac{k}{4\pi\mu} = V^2, \tag{19}$$

la solution bien connue de cette équation est

$$\beta = \phi_1(z-Vt)+\phi_2(z+Vt), \tag{20}$$

qui montre que la perturbation se propage avec la vitesse V.

14. Il s'agit là d'un cas particulier de la relation $\nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$.

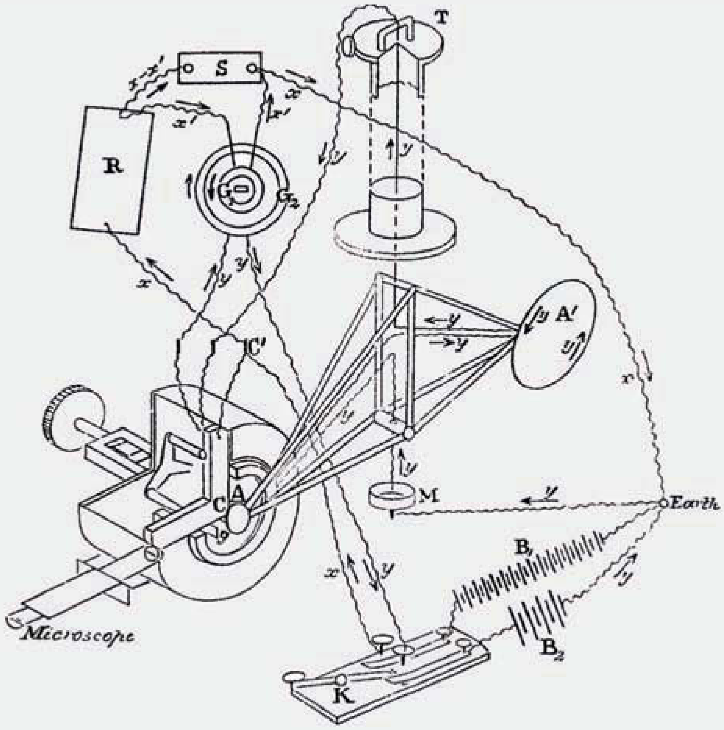


Figure 2.8 Dispositif de Maxwell pour déterminer le rapport de l'unité électromagnétique de charge à l'unité électrostatique (figure extraite du mémoire de 1868).

Les quantités p, P et f se déduisent de β :

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= c\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-Vt)\\
p &= \frac{c}{2\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-Vt)\\
P &= c\mu V\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-Vt)\\
f &= \frac{c}{4\pi V}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-Vt)
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Il me faut maintenant montrer que la vitesse V est celle que l'on peut déduire des expériences sur l'électricité.

[...] Maxwell démontre ici que le rapport $V = \sqrt{k/4\pi\mu}$ de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique de charge peut s'obtenir grâce à l'appareil de la figure 2.8, sur lequel il mena des expériences dans le cadre du projet d'unités électriques de la British Association for the Advancement of Science. Cet appareil permet d'équilibrer, dans la balance de torsion suspendue en T, la force électromagnétique agissant entre la bobine mobile (en A) et la bobine fixe (en C) par la force électrostatique agissant entre un disque mobile (en A) entouré d'un anneau de garde et un disque fixe (en C). La bobine symétrique A' sert à contrebalancer l'effet du champ magnétique terrestre. La tension appliquée entre les deux disques est prise aux bornes d'une résistance dont la mesure électromagnétique (en unités de vitesse) est déjà connue. Cette résistance est parcourue par une fraction mesurable (grâce au galvanomètre G) du courant qui circule dans les deux bobines. A l'équilibre, la résistance R doit être une fraction déterminée de V, que la géométrie simple du système permet de calculer.

Chapitre 3

Maxwell pour tous

L'étrange et difficile théorie de Maxwell fut généralement ignorée jusqu'à sa nomination à la tête du nouveau Cavendish Laboratory en 1871 – ce qui lui permit de l'enseigner – et la publication de son *Traité* en 1873. Peu après sa mort, survenue en 1879, quelques lecteurs du *Traité* parvinrent à franchir les nombreux obstacles à sa compréhension et s'appliquèrent à faire connaître le nouveau point de vue, à le simplifier et à en approfondir les conséquences. Parmi les plus influents, citons trois professeurs de physique : l'Irlandais George Francis FitzGerald, l'expérimentateur et vulgarisateur londonien Oliver Lodge, et un diplômé de l'Université de Cambridge, John Henry Poynting. Toutefois, c'est en dehors du milieu académique britannique qu'apparurent les deux interprétations de Maxwell à nos yeux les plus modernes : celle de « l'ermite du Devonshire » Oliver Heaviside et celle de l'Allemand Heinrich Hertz.[1]

1. La formulation de Heaviside

Oliver Heaviside, opérateur télégraphiste, physicien autodidacte, excentrique et rebelle, fut un des premiers lecteurs enthousiastes du *Traité* de Maxwell. Au début des années 1880, il tira de cet ouvrage une formulation de l'électromagnétisme particulièrement adaptée aux applications électrotechniques et s'en servit pour résoudre nombre de problèmes concrets de propagation de signaux électriques dans des lignes télégraphiques ou téléphoniques. Certains aspects de la théorie de Maxwell, tels que la notion de fluide électrique incompressible, les potentiels et la formulation lagrangienne, lui semblaient n'être que des échafaudages qu'il fallait éliminer de l'édifice final. À son sens, le vrai fondement de la théorie devait être

1. Cf. Hunt 1991, Buchwald 1985.

quelques relations empiriques complétées par des considérations énergétiques ou dynamiques. La nature profonde de l'électricité et le soubassement mécanique de la théorie lui étaient indifférents.[2]

Au fameux *Traité de Philosophie Naturelle* de Thomson et Tait (1867), Heaviside emprunta le « principe d'activité », suivant lequel la somme algébrique des « activités » des forces s'exerçant dans un système dynamique doit être égale à la variation de l'énergie de ce système par unité de temps. Par activité il faut entendre un taux de production de travail (une puissance), exprimable comme le produit d'une force et d'une vitesse généralisées. Par exemple, le produit $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ est l'activité de la force électrique $\mathbf{E}$ pour le courant total $\mathbf{J}$. Pour des corps au repos, Heaviside s'inspira des équations du *Traité* de Maxwell et de la symétrie entre électricité et magnétisme pour écrire

$$\nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{h}) = \mathbf{J}, \quad \nabla \times (\mathbf{e} - \mathbf{E}) = \mathbf{G}, \tag{1}$$

où $\mathbf{e}$ et $\mathbf{h}$ sont des « forces imposées » (*impressed forces* : force électromotrice d'origine galvanique ou thermoélectrique, et aimantation des aimants permanents),[3] $\mathbf{J}$ est le courant total $\sigma\mathbf{E} + \partial\mathbf{D}/\partial t$, et $\mathbf{G}$ est le « courant magnétique » $\partial\mathbf{B}/\partial t$.

Ces équations conduisent à l'identité

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{h}\cdot\mathbf{G} = \sigma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right) + \nabla\cdot[(\mathbf{E} - \mathbf{e}) \times (\mathbf{H} - \mathbf{h})]. \tag{2}$$

Le premier membre de l'équation représente l'activité des forces imposées en un point. Dans le second membre, le premier terme représente l'énergie dissipée par effet Joule en ce point par unité de temps, le second terme représente la variation temporelle de la densité d'énergie du champ en ce point. Par conséquent, le troisième terme doit être interprété comme la divergence du flux d'énergie électromagnétique. Ainsi, en 1885, Heaviside formulait le concept et l'expression de ce flux, indépendamment de John Henry Poynting, qui y était parvenu en 1884.

Fort de ce nouveau concept, Heaviside pouvait justifier sa méfiance à l'égard de l'idée de courant électrique comme circulation d'un ou deux fluides, y compris l'électricité incompressible de Maxwell. Ces notions suggéraient en effet que l'énergie se propage à travers les fils électriques. Après avoir noté les conséquences paradoxales de cette manière de voir, Heaviside s'interroge :[4]

> « N'aurions-nous pas mieux fait d'abandonner tout-à-fait l'idée que l'énergie est transmise à travers le fil ? C'est la voie évidente. L'énergie de la pile ne passe dans

2. Cf. Hunt 1991 ; Yavetz 1995.

3. Les équations de Heaviside diffèrent des équations de Maxwell modernes par la manière d'introduire les forces imposées. Aujourd'hui, nous écrivons (comme Maxwell et Hertz) $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{e})$ dans un conducteur et $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{h})$ dans un aimant, alors que Heaviside prend $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ respectivement. Il est aisé de voir que cette différence est pratiquement compensée par l'introduction des forces imposées dans les équations du champ.

4. Extrait n°5, p. 183.

le fil ni dans un sens ni dans l'autre. Elle ne reste pas non plus en place. La transmission se fait intégralement à travers le diélectrique [entourant le fil]. Dans ces conditions, à quoi sert le fil ? C'est un récipient dans lequel l'énergie se déverse depuis le diélectrique et où elle est dissipée, disparaissant ainsi du système électrique ».

La théorie électrique de Heaviside se passait non seulement de tout fluide électrique, mais aussi des potentiels **A** et ψ. Comme ils étaient eux aussi dépourvus de signification énergétique, il se flattait de les avoir « assassinés ». De plus, ce télégraphiste avait inventé une variante de la notation vectorielle moderne (**AB** pour le produit scalaire de deux vecteurs **A** et **B**, et V**AB** pour leur produit vectoriel) ; il « rationalisait » les unités en éliminant tous les 4π des équations fondamentales ; et il introduisait des termes nouveaux que l'usage a souvent consacrés, comme permittivité, inductance, capacitance, etc. Rappelons que Maxwell, quant à lui, se servait de notations cartésiennes ou quaternioniques, qu'il gardait quelques 4π dans ses équations et qu'il refusait d'éliminer le potentiel vecteur. C'est donc bien à Heaviside que nous devons l'écriture moderne des équations de Maxwell (mis à part la manière d'introduire les forces imposées).

Extrait n° 5 :

L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET SA PROPAGATION

« Electromagnetic induction and its propagation » (Sections I-IV), O. Heaviside, *The electrician* (1885), reproduit dans Heaviside, *Electrical papers*, 2 vols. (Londres, 1892), vol. 1 : 429-451.
Extraits traduits par Danièle Lederer.

Première partie. exposé succinct de la théorie de maxwell

Conductivité, Capacité, Perméabilité

Dans la vision électromagnétique de Maxwell, on admet que chaque corps possède trois caractéristiques différentes qui ont un lien avec les forces électrique et magnétique ; ce sont la conductivité, la capacité électrostatique et la perméabilité magnétique. Un corps peut être le lieu d'un courant de conduction, d'un déplacement électrique et d'une induction magnétique. Ces trois phénomènes peuvent coexister en tout point, et en général le font. De façon quantitative, ce sont des grandeurs vectorielles qui ont des directions déterminées et des amplitudes, rapportées à l'unité de surface perpendiculaire à leur direction et aux unités choisies.

Pour des énergies égales, la plus ou moins grande facilité avec laquelle peuvent s'établir le courant de conduction, le déplacement électrique et l'induction magnétique dépend de la nature du corps, ce qui introduit trois coefficients : la conductivité électrique k, la capacité électrique c et la perméabilité magnétique μ. À première vue, on pourrait penser qu'il existe trois autres grandeurs vectorielles, reliées aux précédentes par l'intermédiaire de ces coefficients. Mais, en fait, il n'y en a que deux : la force électrique et la force magnétique ; la première étant reliée à la fois tant au courant de conduction qu'au déplacement.

En premier lieu, nous avons la loi d'Ohm. Si **C** est la densité de courant de conduction, **E** la force électrique et k la conductivité spécifique

$$\mathbf{C} = k\mathbf{E} \qquad \text{(courant de conduction).} \tag{1}$$

On en sait beaucoup plus sur la conductivité que sur la capacité ou la perméabilité. Dans un métal isotrope non déformé, k ne dépend que de la température, et pas de façon très rapide. En fait, k est pratiquement une constante, cette simplicité étant très utile. Dans de très grands intervalles, k ne dépend ni de la valeur du courant ni de celle de la force électrique.

Les valeurs de la conductivité varient beaucoup d'un corps à l'autre. Celle du cuivre et celle du verre sont tellement différentes que leur rapport fait intervenir des nombres astronomiques ; c'est un titre de gloire de la science de l'électricité que de pouvoir comparer de façon précise des quantités aussi différentes.

L'air sec dans son état ordinaire se trouve avoir une conductivité nulle mais, dans la théorie de Maxwell, c'est le vide qui est considéré comme le non-conducteur parfait.[1] Là où il n'y a pas de matière, au sens ordinaire, il n'y a pas de dissipation d'énergie et l'éther, quoi qu'il puisse être, est parfaitement conservatif et non-dissipatif, du point de vue dymanique. Autant que l'on sache, une dissipation d'énergie accompagne toujours le passage d'un courant de conduction mais, bien sûr, on peut imaginer un conducteur parfait dans lequel le passage du courant ne produirait aucune chaleur. Mais on ne peut considérer l'éther comme un tel conducteur parfait car les perturbations magnétiques ne peuvent pas se propager dans les conducteurs parfaits.[2] Étant admis qu'elles se propagent dans l'éther pur (l'espace dont a été retirée toute « matière ») sans perte d'énergie dans le milieu, il en résulte que c'est l'éther qui est le non-conducteur parfait. Mais nous anticipons sur le déplacement électrique et l'induction magnétique.

L'équation (1) est une équation vectorielle. Dans un milieu isotrope, k est une constante scalaire. Nous pouvons représenter **E**, **C** ou toute grandeur physique vectorielle par des vecteurs géométriques, segments de la bonne longueur tracés dans la bonne direction. Ainsi **E** est un vecteur, **C** un autre et lorsque k est une constante scalaire, comme d'ordinaire, (1) énonce simplement que **C** et **E** sont parallèles, et que **C** est k fois plus long que **E**.

1. Certains physiciens continentaux pensaient au contraire que le vide était un conducteur parfait, puisqu'il ne pouvait présenter aucun obstacle à la circulation des fluides électriques.

2. ainsi que Maxwell l'avait remarqué dans « On physical lines of force ».

Les quantités vectorielles se combinent comme des vitesses ; dans une équation vectorielle faisant intervenir n vecteurs, séparés par des signes + ou −, les n vecteurs sont les n côtés d'un polygone. Mais deux segments ne peuvent pas délimiter un espace, aussi, dans l'équation (1), **C** et k **E** doivent être parallèles et égaux.

[...] Dans le passage omis, Heaviside traite le cas des conducteurs anisotropes, dans lequel k devient un opérateur linéaire.

Passons ensuite à la capacité spécifique. Il existe des milieux, comme l'air, qui ont une conductivité nulle ; pourtant, compte tenu de la continuité du courant électrique, ils peuvent porter un courant, pas permanent, mais transitoire et soumis à un rappel élastique.[3] Une analogie mécanique évidente fait que l'on appelle l'intégrale de ce courant le déplacement électrique. Notons la **D**, et soit **E** la force électrique, comme précédemment. On a alors

$$\mathbf{D} = c\,\mathbf{E}/4\pi \qquad \text{(Déplacement électrique).} \qquad (6)$$

L'excroissance 4π est simplement une question d'unités, et il n'y a pas lieu d'en discuter ici. Les 4π sont particulièrement insupportables et trompeurs dans la théorie du magnétisme. En privé, j'utilise des unités qui les font complètement disparaître, puis, au moment de la publication, j'assaisonne généreusement de 4π pour me conformer aux goûts des lecteurs nourris d'unités B.A.[4] Bien entendu, quand il s'agit de faire des comparaisons quantitatives, il faut prendre en considération les rapports entre les unités du système ordinaire et celles de ce que j'appellerai le système rationnel. C'est parfois $\sqrt{4\pi}$, parfois $(4\pi)^{-1/2}$, ou encore 4π, et aussi l'unité mais, dans les calculs, il ne s'agit que de rajouter des 4π par-ci par-là en traduisant les unités rationnelles en unités ordinaires. Dans un milieu diélectrique, la force et le déplacement sont simultanés, comme la force et le courant dans un conducteur. Le temps n'apparaît pas dans les équations. Dans un diélectrique isotrope, c est tout simplement une constante scalaire ; dans un diélectrique anisotrope c'est, comme nous l'avons expliqué ci-dessus pour k, un opérateur linéaire vectoriel [symétrique].

3. Heaviside veut dire que comme les lignes de courant sont toujours continues d'après Faraday et Maxwell, elles doivent se prolonger au-delà d'un conducteur interrompu (par exemple un plateau de condensateur).

4. Il s'agit du système d'unités électriques et magnétiques élaboré dans le cadre de la British Association for the Advancement of Science.

En multipliant (6) par $\frac{1}{2}$ **E**, il vient

$$\frac{1}{2}\mathbf{E}\,\mathbf{D} = \mathbf{E}\,c\,\mathbf{E}/8\pi = U, \text{ disons.} \quad \text{(Énergie électrique)} \tag{7}$$

U est l'énergie électrique par unité de volume, travail effectué par la force sur le déplacement lorsqu'ils passent de 0 à leurs valeurs finales, ou encore le produit du déplacement final par la moyenne de la force qui l'a produit. Il n'est pas utile de supposer qu'un déplacement réel de quoi que ce soit a eu lieu dans le sens du déplacement électrique. Toutes les quantités électriques et magnétiques sont plus ou moins des abstractions, des abstractions mesurables, dont on ne connaît pas encore la signification réelle.

On en sait beaucoup moins sur *c* que sur *k*, et elle n'est malheureusement pas aussi bien définie que *k*. Il se trouve que l'élasticité électrique des diélectriques solides, tout comme leur élasticité mécanique, n'est pas parfaite.[5] Un ressort déformé ne retrouve pas exactement sa position d'équilibre lorsqu'on supprime la force appliquée et qu'on l'immobilise doucement. Une partie de la déformation subsiste, et disparaît lentement. Lorsqu'on ne peut pas le voir avec les yeux, cela peut être mis en évidence en utilisant un contact microphonique ; encore que l'instabilité du contact lui-même en fasse une mauvaise méthode. Il est probable que la réversibilité parfaite n'existe pas, même pour des petits déplacements ; il n'est pas possible de marquer précisément la limite de l'élasticité parfaite.

Tous les non-conducteurs sont diélectriques. Les mauvais conducteurs aussi sont diélectriques. Les bons conducteurs, même les meilleurs, peuvent être également diélectriques, de sorte qu'à une force **E** sont associés un courant de conduction $k\mathbf{E}$ et un déplacement $(4\pi)^{-1}c\mathbf{E}$. Mais, dans ce cas, comme pour les mauvais conducteurs doués de propriétés diéletriques, $k\mathbf{E}$ ne représente pas le courant complet ou vrai, à moins que le déplacement ne soit constant. La variation au cours du temps du déplacement constitue elle-même un courant électrique, et le vrai courant est la somme du courant de conduction et du taux de variation du déplacement. Soit $\boldsymbol{\Gamma}$ le courant vrai ; nous avons alors dans un diélectrique conducteur ou conducteur diélectrique :

$$\mathbf{C} = k\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = c\mathbf{E}/4\pi,$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{C} + \dot{\mathbf{D}} = k\mathbf{E} + c\dot{\mathbf{E}}/4\pi. \qquad \text{(Courant vrai)} \tag{8}$$

5. Ce phénomène, découvert par Faraday sous le nom d'absorption électrique, s'appelle aujourd'hui hystérésis diélectrique.

Nous prendrons $c = 0$ pour un conducteur pur, et $k = 0$ pour un pur diélectrique. C'est le courant vrai qui est « le courant » quand nous en arrivons à l'induction[6] et aux états variables.

L'équation $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{C} + \dot{\mathbf{D}}$ contient trois vecteurs. Ils forment les trois côtés d'un triangle, à moins que $\dot{\mathbf{D}}$ ne soit parallèle à $\mathbf{C}$. Mais $\dot{\mathbf{D}}$ peut ne pas être parallèle à $\mathbf{C}$, et n'a pas non plus de raison d'être parallèle à $\mathbf{D}$. Chargeons un condensateur constitué de deux grands conducteurs plats très proches l'un de l'autre ; un raisonnement général montre que, pendant que le déplacement se met en place, le courant de déplacement lui est parallèle – en tous cas loin des bords. Mais ce n'est pas toujours le cas. Quand on décharge des conducteurs chargés, le courant de déplacement ne suit en général pas les tubes de déplacement. Pour cela, il faudrait que les perturbations se propagent instantanément à des distances infinies. Le courant de déplacement peut être perpendiculaire au déplacement ; c'est le cas lorsque, en un point, le déplacement change de direction sans changer d'amplitude.

Multiplions (8) par $\mathbf{E}$, alors

$$\mathbf{E}\,\mathbf{\Gamma} = \mathbf{E}k\mathbf{E} + \mathbf{E}c\dot{\mathbf{E}}/4\pi = Q + \dot{U}. \tag{9}$$

Le taux de production de travail par la force sert en partie à chauffer (Q par seconde) et en partie à accroître l'énergie U de déplacement (équations (4) et (7)). Le premier terme est perdu par le système et le second est emmagasiné.

Tandis que la conductivité dépend de la présence de matière, l'existence de la capacité n'en dépend pas, bien que sa valeur soit modifiée par cette présence. En fait, la capacité est liée à l'éther, qui est le milieu diélectrique référence de capacité minimale. L'éther est une chose tout à fait merveilleuse. Il est possible qu'il n'existe que dans l'imagination des savants, ayant été inventé et doté de propriétés au gré de leurs hypothèses ; mais nous ne pouvons pas nous en passer. Comment l'énergie pourrait-elle se propager dans l'espace en l'absence d'un milieu ? Et pourtant, d'un autre côté, la gravitation semble être indépendante du temps.[7] C'est peut-être une illusion. Mais, admettons que l'éther transmette la gravitation instantanément : il doit avoir des propriétés merveilleuses, qui ne ressemblent à rien de ce que nous connaissons.

6. Il s'agit ici d'induction électromagnétique.

7. Heaviside veut dire que l'action gravitationnelle se fait sentir instantanément à distance.

Arrivons-en à la perméabilité : tous les corps peuvent être le siège d'une induction magnétique, presque au même degré pour la plupart d'entre eux. Soit **H** la force magnétique, **B** l'induction et μ la perméabilité,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{(Induction magnétique)} \tag{10}$$

μ est choisie égale à 1 dans l'éther (dans le système « électromagnétique » d'unités) et, dans la plupart des corps, elle est un peu plus petite ou un peu plus grande que 1. Mais, dans certains corps, de façon singulière, elle prend des valeurs très élevées. Le fer est le principal contrevenant ; viennent ensuite le nickel et le cobalt, magnétiques mineurs pourtant très éloignés de la foule des corps pratiquement impossibles à aimanter : Fe = 56, Ni et Co environ 58,5. De quoi peut-il bien s'agir ?

La relation linéaire entre **H** et **B** n'est pas satisfaisante. La valeur de μ varie de façon appréciable avec la température et énormément d'un morceau de fer à l'autre : pour une force magnétique modérée, elle est plus grande dans le fer doux et plus petite dans l'acier dur. De surcroît elle varie en fonction de la force magnétique : elle commence par augmenter lorsque la force augmente puis elle décroît de façon importante, on ne sait pas jusqu'où. Pour rendre les choses encore plus compliquées, une partie de l'induction créée par l'application d'une force magnétique devient permanente, et se maintient après la suppression de la force. La relation linéaire entre **H** et **B** doit donc être considérée avec réserves.[8] Toutefois, dans un domaine limité et en excluant l'aimantation permanente qui doit être étudiée à part, le μ de l'équation (10) peut être considéré, ainsi que c et k auparavant, comme une constante scalaire dans un milieu isotrope et, dans un milieu anisotrope, comme un opérateur vectoriel linéaire qui est, comme c, son propre conjugué, c'est-à-dire sans pouvoir rotatoire.

On dit que dans le fer doux, μ peut atteindre 5 000 ou 10 000 (expériences de Rowland, j'ai oublié le chiffre exact). Sa valeur est en général beaucoup plus petite que ces chiffres énormes. D'après des expériences que j'ai faites il y a quelques années sur le retard[9] dans des bobines, y compris des solénoides rectilignes, je suis arrivé à la conclusion qu'il était raisonnable de prendre μ entre 50 et 200 (pour des forces petites).

8. Heaviside vient ici de décrire l'hystérésis magnétique.

9. Par retard, il faut entendre un effet de la self-induction.

Ce n'est pas $\mathbf{B}$, mais plutôt $\mathbf{B}/4\pi$, qu'il convient de comparer à $\mathbf{D}$, l'induction électrique, ou déplacement. Alors, en divisant (11) par 4π et en multipliant par $\frac{1}{2}\mathbf{H}$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\mathbf{H}\,\mathbf{B}/4\pi = \mathbf{H}\mu\mathbf{H}/8\pi = T, \text{ disons.} \quad \text{(Énergie magnétique)} \qquad (11)$$

T est l'énergie par unité de volume de l'induction magnétique, lorsqu'elle est entièrement induite, et que l'on agit de façon conservative (dans les limites de l'élasticité).

Deuxième partie. De la transmission de l'énergie le long des fils par le courant électrique

Examinons le courant électrique, et comment il s'écoule. De Londres à Manchester, Edinbourg, Glasgow, et des centaines d'autres endroits, jour et nuit, à grande vitesse et en succession rapide, des courants électriques sont envoyés dans un sens et dans l'autre, pour opérer à distance des mouvements mécaniques et servir ainsi les intérêts matériels de l'homme.

À propos, le courant électrique existe-t-il vraiment ? Ce n'est pas que je veuille laisser planer un doute sur l'existence du phénomène que l'on nomme ainsi ; mais s'agit-il d'un courant – c'est-à-dire de quelque chose qui se déplace dans le fil ?

Rien n'aurait pu me faire croire à la doctrine de la matérialité de l'électricité et de son déplacement d'un endroit à un autre à moins qu'on ne me l'ait inculquée consciencieusement depuis le plus jeune âge, en continuant sans cesse jusqu'à la maturité. Pourtant, tellement d'aspects des phénomènes électriques soutiennent l'idée que l'électricité est une entité à part, et la force de l'habitude est si grande qu'il n'est pas facile de se débarraser de cette idée une fois qu'elle s'est présentée. Dans l'histoire du développement des sciences, les phénomènes statiques ont été connus en premier. Ce sont ceux qui suggèrent le plus clairement l'individualité apparente de l'électricité, sous la forme de charges sur les conducteurs. Les fluides sont peut-être des notions infantiles, appropriées aux premiers pas de la science ; mais malgré tout il est facile d'imaginer que les charges électriques sont des quantités de quelque-chose, pas de matière toutefois, qui peuvent être déplacées d'un endroit à l'autre. De façon toute naturelle, quand on commença à étudier l'électricité dynamique, on transposa les idées de l'électrostatique au courant électrique, qui devint un mouvement réel de l'électricité le long de fils. Cette conception a atteint ses développements les plus complets entre les mains des physiciens allemands, de Weber à Clausius, ce qui donna des explications ingénieuses des phénomènes électriques, basées sur des forces agissant à distance entre des éléments individuels d'électricité, immobiles ou en mouvement. Il se trouve que j'ai découvert l'électricité avec les phénomènes dynamiques, et après avoir lu avec beaucoup d'intérêt un livre très instructif de Tyndall : « La chaleur comme un mode de mouvement ».[10] C'est peut-être la raison pour laquelle, lorsqu'il m'a fallu plus tard apprendre l'électricité dans les livres, j'eus les plus grandes réticences devant toutes les explications, et ne voulus pas admettre que le courant électrique fût le mouvement de l'électricité (statique) dans les fils, mais pensai qu'il s'agissait de quelque chose de tout à fait différent. Je ne croyais tout simplement pas, sauf lorsqu'on s'en tenait à l'énoncé des faits expérimentaux. Cela a des inconvénients ; avec la foi, dont on sait qu'elle peut déplacer les montagnes, on arrive plus vite à accepter sans hésiter certaines hypothèses comme des faits, et on en tire les conséquences sans être soumis au doute, indifférent au risque de fixer ses idées de façon prématurée.

Comme l'a fait remarquer Maxwell, nous ne savons rien sur la vitesse de l'électricité ; cela peut être un pouce par an ou un million de miles par seconde.[11] À la limite, ce n'est peut être rien du tout. En fait, on ne peut nourrir l'idée que l'électricité a une vitesse qu'en admettant l'hypothèse que le courant électrique est quelque chose qui se déplace, une certaine quantité dans un espace déterminé. Alors, le produit de son hypothétique densité par sa vitesse est la mesure du courant. Mais, puisqu'il s'agit d'une simple hypothèse, à moins que nous ne choisissions de l'accepter, parler de la vitesse de l'électricité dans un courant devient dénué de sens. D'autre part, quand on applique les idées de la dynamique abstraite à l'électricité,[12] et qu'on compare le courant à une vitesse, la quantité à laquelle on se réferre n'est de toutes façons pas l'hypothétique vitesse de l'électricité mentionnée plus haut. Celle-ci n'est alors pas pertinente. Elle est la vitesse supposée de l'électricité dans le courant ; tandis que dans la théorie dynamique, c'est le courant lui-même qui est une vitesse, au sens généralisé, la force électromotrice étant la force généralisée ; de sorte que force × vitesse = activité.[13] Je pense que parler de la vitesse de

10. L'expérimenateur londonien John Tyndall était réputé pous ses talents de vulgarisateur. Pour beaucoup de physiciens britanniques, l'élimination du fluide calorique au profit de la conception cinétique de la chaleur suggérait l'élimination des autres fluides impondérables électriques et magnétiques.

11. L'allusion est au paragraphe 569 du *Traité* de Maxwell (qui renvoie aux justifications de Faraday).

12. Par dynamique abstraite, il faut entendre la formulation lagrangienne de la mécanique, utilisée par Maxwell dans sa justification des équations de l'électrodynamique (voir l'extrait n° 3).

13. L'activité est le mot utilisé par Thomson et Tait dans la seconde édition de leur *Treatise on natural philosophy* (Cambridge, 1879-83) pour désigner ce que nous appelons la puissance.

l'électricité ne peut avoir qu'une seule signification, en accord avec la théorie de Maxwell, à savoir selon l'hyptohèse que le courant dans un fil correspond à la décharge continuelle des molécules chargées contiguës : c'est alors tout simplement la vitesse du mouvement de la molécule que l'on peut appeler la vitesse de la charge qu'elle transporte. Puisque les molécules sont séparées les unes des autres par le milieu électrique, l'éther, cette vision du courant de conduction se ramène finalement à des courants de « déplacement » dans un diélectrique.[14]

Mais n'est-il pas réel que l'on peut envoyer un courant dans des circuits très longs, et qu'il se déplace tout simplement le long du fil, mettant un certain temps pour arriver à l'autre bout ? Est-ce que cela ne démontre pas que l'électricité se déplace le long du fil ? Autrefois, lorsque j'étais imprégné de « La chaleur comme un mode de mouvement », j'aurais répondu qu'il est vrai qu'il se produit une transformation de l'énergie dans la pile, que cette énergie est transmise le long du fil, où elle subit une nouvelle transformation, en chaleur ; que lorsque le courant est permanent, la chaleur est produite de façon stationnaire ; et que le courant électrique dans le fil est donc une sorte de mouvement stationnaire des particules du fil, pas exactement comme la chaleur, mais présentant une spécificité directionnelle qui fait la différence entre du courant positif ou négatif ; mais que, dans un circuit fermé, il n'y a aucune preuve d'un déplacement de l'électricité le long du fil, mais seulement d'un transfert d'énergie le long du fil.

Cela dit, laissons de côté des détails personnels qui n'intéressent que moi et examinons la transmission d'énergie le long d'un fil. Pour fixer les idées, prenons comme circuit un fil isolé, suspendu entre Londres et Edinbourg, par lequel nous envoyons à Edimbourg de l'énergie produite par une pile située à Londres, le circuit étant complété par la terre. Maintenons le courant. Premièrement, le phénomène est stationnaire. Il ne varie pas au cours du temps. Deuxièmement, à une certaine distance du fil, la force magnétique est la même tout le long du fil ; en d'autres termes, le fil est partout dans le même état en ce qui concerne l'induction magnétique à côté de lui, et, lorque nous utilisons nos connaissances pour l'intérieur du fil, considéré comme un faisceau de fils plus petits, nous trouvons que la force magnétique dans le fil

14. Heaviside propose ici une interprétation du courant de conduction comme résultant de la migration de molécules chargées (convection de charge interrompue par le transfert de charge à la première molécule neutre rencontrée). Pour Maxwell et ses disciples, la convection de charge constitue un courant de déplacement, puisque le champ électrique créé par la charge en mouvement varie dans le temps.

ne varie pas suivant sa longueur. La chaleur est produite dans le fil à un taux constant (une implication de la stationnarité indiquée ci-dessus), et cette production est identique tout le long du fil. La chaleur est sans aucun doute un phénomène cinétique, et donc le courant électrique est lui aussi, au moins en partie, un phénomène cinétique. Le courant électrique lui-même n'est pas de la chaleur ; mais, puisque sa présence dans le fil est associée à une production continue de chaleur, nous en déduisons qu'une sorte de mouvement est forcément mise en oeuvre dans le courant électrique en dehors de la chaleur produite, et, d'après l'uniformité des phénomènes le long du fil, qu'il s'agit d'une sorte de mouvement stationnaire. Répétons-le, la force électrique est identique partout dans le fil. Il ne semble y avoir aucune différence d'un point à l'autre. Pourtant, à l'extérieur du fil, dans le diélectrique, il y a une différence car, non seulement la force électrique dépend de la distance au fil mais aussi, pour une distance donnée, de la partie du fil considérée (nous négligeons ici toutes les perturbations causées par d'autres conducteurs ou courants).

Ce qui se passe dans la pile est plus difficile à suivre, à cause de la complexité des conditions, bien que l'état de la force électrique, de la force magnétique et de la production de chaleur prennent la même valeur que dans le fil, si l'on en choisit convenablement la forme, etc. Mais, dans la pile, il se produit une chose tout à fait remarquable, à savoir la perte régulière d'énergie chimique ; et, dans le système dans son ensemble, une chose encore plus remarquable, un gain de chaleur, constant, exactement équivalent. La chaleur qui aurait pu être produite sur place par la réaction chimique, si elle avait été réalisée autrement, apparaît dans tout le circuit. Comment y va-telle ? La réponse naturelle est : à travers le fil. Mais pour arriver aux endroits éloignés, elle doit d'abord passer par les endroits plus proches, et il doit donc y avoir ce que nous pouvons appeler un courant d'énergie, qui, dans le fil, à un endroit donné, serait le taux de transfert de l'énergie à travers une section du fil située à cet endroit. Et maintenant, de quel côté va le courant ? Ce serait équitable de le laisser partir de la pile dans les deux sens. Admettons d'abord que ce soit le cas. Il entrerait donc dans le fil un courant d'énergie, égal à la moitié de l'énergie dissipée, et dont la valeur diminuerait régulièrement jusqu'au milieu du fil, où elle serait nulle ; cette diminution de la valeur étant due à la production de chaleur. De même, l'autre courant d'énergie se rendrait à Edimbourg en passant par la terre, pratiquement sans perte, puis, il se dirigerait d'Edimbourg vers le milieu du fil, où sa valeur serait réduite à zéro.[15]

15. Heaviside considère ici que la résistance de la terre est négligeable (en raison de l'épaisseur du fuseau de courants terrestres).

Cela semble absurde. Imaginons que tout le courant aille dans un seul sens, disons avec le courant positif. Si le pôle positif de la pile est connecté à la ligne, il y a un courant d'énergie tout le long du circuit, de Londres à Edimbourg et retour par la terre. S'il est maximum au départ de la pile, il tombe pratiquement à zéro à l'endroit le plus éloigné, et s'annule complètement après le retour par la terre jusqu'à l'autre pôle de la pile. Mais nous ne possédons aucune donnée qui permette de dire où le courant d'énergie est maximum. Il faut faire une deuxième supposition. Le lecteur peut de façon analogue envisager ce qui se passerait si l'on inversait le branchement de la pile, ou si l'on supposait que l'énergie se déplace dans le sens du courant négatif. Nous n'arrivons à rien de précis, si ce n'est que la valeur du courant d'énergie doit varier beaucoup, bien que régulièrement, mais que rien ne précise dans quel sens le courant se déplace, ni en quel endroit sa valeur est maximale. Encore une fois, le courant d'énergie est un phénomène cinétique, et, puisqu'il varie tellement d'un endroit à l'autre, nous pouvons nous attendre à ce que les diverses parties du fil lui-même se trouvent dans des états électriques différents, ce qui n'est pas précisément le cas, bien que son potentiel varie, car le potentiel n'est pas un état physique, mais un simple concept scientifique.[16]

N'aurions-nous pas mieux fait d'abandonner tout-à-fait l'idée que l'énergie est transmise à travers le fil ? C'est la voie évidente. L'énergie de la pile ne passe dans le fil ni dans un sens ni dans l'autre. Elle ne reste pas non plus en place. La transmission se fait intégralement à travers le diélectrique. Dans ces conditions, à quoi sert le fil ? C'est un récipient dans lequel l'énergie se déverse depuis le diélectrique et où elle est dissipée, disparaissant ainsi du système électrique. Toutes les difficultés mentionnées ci-dessus ont maintenant disparu.

Que l'énergie de la pile se transforme immédiatement en chaleur nécessiterait qu'elle soit transmise instantanément en tous les points du fil, ce que l'on ne peut pas imaginer. Il doit y avoir un ou plusieurs états intermédiaires, après avoir quitté la pile et avant de devenir de la chaleur. Et il doit y avoir une quantité déterminée d'énergie en transit à un instant donné ; cette quantité doit être constante dans un état stationnaire, tout comme le taux total de transmission doit être constant. Pourtant, nous ne devons pas individualiser de petits éléments d'énergie, et suivre leur mouvement, mais nous devons considérer le problème uniquement de façon quantitative.[17] L'énergie

16. En effet, seules les différences de potentiel sont mesurables. Heaviside se méfiait beaucoup des fausses intuitions physiques liées aux potentiels.

17. Heaviside condamne ici l'interprétation substantialiste de l'énergie.

en transit peut être comparée à l'énergie d'une machine qui transmet un mouvement : lorsque c'est fait de façon stationnaire, elle reste constante et déterminée, et le taux de transmission est déterminé.

Bien. Dans la théorie de Maxwell il y a l'énergie potentielle du déplacement provoqué par la force électrique dans les parties diélectriques, et il y a l'énergie cinétique ou énergie magnétique de l'induction magnétique, causée par la force magnétique dans tout le champ, y compris dans les conducteurs. Tout est supposé mis en place par le courant qui passe dans le fil. Nous inversons tout cela : le courant dans le fil est généré par l'énergie transmise dans le mileu qui l'entoure. La somme des énergies électrique et magnétique est l'énergie de la machine électrique[18] qui transmet l'énergie depuis la pile jusqu'au fil. Sa quantité est déterminée et le taux (total) de transmission de l'énergie est lui aussi déterminé.

Il devient important de connaître les trajectoires suivant lesquelles l'énergie est transmise. Définissons tout d'abord le courant d'énergie en un point comme la quantité d'énergie qui traverse, en une unité de temps, une surface unité perpendiculaire à la direction de transmission. Comme dans cette partie de l'exposé nous nous limitons à des raisonnements et à des descriptions, nous ne pouvons pas entrer dans les détails mathématiques, si ce n'est pour dire que, si **H** est le vecteur force magnétique et si **E** est le vecteur force électrique, compte non tenu des forces imposées, le courant d'énergie défini ci-dessus est égal à V**EH**/4π.[19] C'est un résultat universel, indépendant des propriétés du milieu comme sa conductivité, sa capacité et sa perméabilité, et son isotropie ou anisotropie ; c'est vrai pour les états transitoires aussi bien que pour les états stationnaires. Une ligne de courant d'énergie est perpendiculaire à la force électrique et à la force magnétique, et c'est une ligne de pression.[20] Donnons maintenant quelques notions générales.

Revenons à notre fil qui va de Londres à Edimbourg avec un courant stationnaire provenant de la pile située à Londres. L'énergie se répand dans le diélectrique *par les côtés* de la pile, à un taux constant. Divisons l'espace en tubes limités par les lignes de courant d'énergie. Ils ont en général une forme solénoïdale[21] à l'intérieur du diélectrique, et aboutissent sur le conducteur. La

18. Machine électrique » est à prendre métaphoriquement, comme le mécanisme caché de l'éther qui permet la propagation de l'énergie (par exemple, les tourbillons moléculaires de Maxwell).

19. V**EB** est la notation de Heaviside pour le produit vectoriel $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

20. En effet la pression due aux contraintes de Maxwell sur un élément de surface est maximale quand cet élément de surface est perpendiculaire à **E** et à **B** (dans le cas d'un milieu isotrope).

21. Heaviside veut dire que le vecteur courant d'énergie a une divergence nulle dans le diélectrique (et donc que le flux est constant dans toute section d'un même tube de courant).

quantité d'énergie qui entre par une certaine longueur du fil est la même tout le long du fil. Les lignes de courant d'énergie sont les intersections des surfaces équipotentielles magnétique et électrique. La majeure partie de l'énergie est transmise parallèlement au fil, la direction de propagation étant légèrement inclinée vers le fil ; ainsi, les lignes de courant d'énergie rencontrent le fil de façon très oblique. Mais certains des tubes externes vont dans l'espace à des distances immenses, en particulier ceux qui aboutissent sur le fil dans sa partie éloignée. D'autres passent entre le fil et la terre, mais aucun ne passe à l'intérieur même de la terre entre Londres et Edimbourg, ni dans l'autre sens, bien qu'une petite quantité d'énergie pénètre dans la terre verticalement, en particulier à l'emplacement des « plaques » de mise à la terre. Si un instrument est branché à Edimbourg, il est mis en action par de l'énergie qui a parcouru tout le trajet dans le diélectrique, puis a trouvé son chemin vers l'instrument ; elle y pénètre dans le bobinage où elle est dissipée, ou alors elle provoque des mouvements visibles des parties mobiles de l'instrument [...].

Regardons ce qui se passe dans le fil. Un tube d'énergie qui arrive à la surface du fil par une longue pente, tourne brusquement et se dirige droit vers l'axe. De la pile jusqu'au fil, à travers le diélectrique, le courant d'énergie est continu[22] si l'état est stationnaire (ou le mécanisme de l'éther est sans frottement) ; mais, sitôt atteinte la substance conductrice du fil, la dissipation commence et le courant d'énergie se met à diminuer ; lorsqu'il arrive sur l'axe, il est réduit à zéro. Pas la moindre fraction d'un erg n'est transmise par le fil. Une petite partie de l'énergie qui quitte la pile peut y repénétrer, mais la dissipation à l'intérieur de la pile elle-même est décrite par l'affaiblissement des tubes avant leur sortie de la pile.

Mettons la pile au milieu de la ligne, avec la terre aux deux bouts. Dans ce cas, la moitié des tubes de courant d'énergie qui quittent la pile par les côtés prennent un virage pour aller d'un côté de la ligne, l'autre moitié tourne dans l'autre sens. Pour le reste, la situation est la même que précédemment.

Lorsque la ligne est constituée de deux fils, sans passage dans la terre, la plus grande partie de l'énergie est transmise entre les deux fils.

Pour un circuit circulaire, la pile étant située à l'extrémité d'un diamètre, c'est l'autre extrémité de ce diamètre qui est le point neutre ; les lignes de courant d'énergie se répartissent de façon symétrique par rapport au diamètre en question.

22. Par courant continu, Heaviside désigne un courant de divergence nulle (dont les lignes de courant sont ininterrompues).

Lorsqu'on branche la pile, l'énergie se précipite imédiatement vers le diélectrique et, dans un premier temps, vers tous les corps qui sont proches de la pile et dans lesquels elle se perd, sous forme de courants induits, plus ou moins selon la conductivité de ces corps. Pendant cet état transitoire, les tubes de courant d'énergie eux-mêmes se déplacent. Il faut un certain temps pour que que le mécanisme électrique devienne stationnaire. Parallèlement, le courant d'énergie dans le diélectrique n'est pas continu,[23] car il faut fournir partout de l'énergie potentielle de déplacement et de l'énergie magnétique. Mais, au bout d'un certain temps, le courant d'énergie dans le diélectrique devient continu, fait le tour des conducteurs extérieurs plutôt que d'entrer à l'intérieur comme pendant l'état transitoire, et atteint finalement le conducteur auquel la pile est branchée, et s'évanouit lorsqu'il y pénètre.

Si nous négligeons l'énergie magnétique par rapport à l'énergie du déplacement électrique, comme dans la théorie originale du télégraphe par Sir W. Thomson,[24] il est facile de se faire une idée générale de la façon dont s'établit un état stationnaire dans un long fil suspendu ; le cas d'un câble sous-marin est plus complexe à cause de la gaine. L'énergie atteint d'abord le début du fil, et n'arrive à la fin que plus tard, même si c'est de façon insignifiante. Mais la théorie fait état de la présence immédiate d'un courant à l'extrémité du fil, même si c'est en quantité négligeable. Cela vient de ce que l'on a négligé l'énergie magnétique. Dans un milieu diélectrique, en l'abscence de perturbation, la vitesse de propagation est égale à $(c\mu)^{-1/2}$; où c est la capacité, et μ la perméabilité ; considérer que l'énergie magnétique est nulle revient à prendre $\mu = 0$ partout, d'où une transmission instantanée. Le « retard » provient en fait de l'établisssement de l'énergie potentielle de déplacement. Mais, en toute rigueur, nous ne devons pas négliger μ. Il n'est alors pas aussi facile, sans simplifications, de suivre l'état transitoire. Il se produit un phénomène oscillant dans le diélectrique et une transmission d'énergie et de pression en avant et en arrière parallèlement au fil, sur toute sa longueur, à une vitesse dont le maximum possible correspond à la vitesse de propagation sans perturbation. La dissipation dans le fil modifie cet état lors de sa progression, et il disparaît. Cela se produit si rapidement que, pour un fil long, les ondes ne sont importantes que près de la pile. Ce phénomène suppose que le mécanisme électrique[25] ait une masse, outre son élasticité, puisque l'on est enclin

23. Ici, « continu » veut dire « de divergence nulle ».

24. Pour les câbles sous-marins envisagés par Thomson en 1854, l'inductance est négligeable et la déformation du signal est due à la résistance et à la capacitance du fil.

25. Le « mécanisme électrique » désigne métaphoriquement le mécanisme caché reponsable de la transmission des actions électriques et magnétiques à travers l'éther.

à croire (d'après la théorie de la lumière de Maxwell) que le milieu électromagnétique n'est pas l'air, mais quelque chose qui se trouve entre les molécules d'air, l'air ne faisant que modifier quelque peu le phénomène.

Pour le courant stationnaire à travers un câble sous-marin, avec une gaine en fer à l'extérieur du diélectrique, l'énergie est intégralement transmise à travers la gutta percha ou tout autre isolant adéquat (en négligeant la petite quantité qui passe par la Terre) ; elle se déplace donc presque parallèlement au fil, et en pratique tout à fait parallèlement, sauf si l'on considère les lignes proches du fil lui-même, puisqu'elles finissent toutes par rencontrer le fil. Il n'y a pas de transmisssion à l'intérieur de la gaine dans le sens de la longueur, bien que de la dissipation y prenne place si, comme cela arrive, la gaine contient une partie du courant de retour. Dans l'état transitoire il y a évidemment toujours plus ou moins de dissipation dans la gaine, en plus de l'énergie dépensée pour l'aimanter.

Voyons maintenant les choses de façon plus générale. Quelles que soient les forces imposées,[26] dans l'état stationnaire de courant qui en résulte, depuis les endroits où agissent ces forces imposées, et où l'énergie est fournie au système électrique, partent sur les côtés des tubes de courant d'énergie, qui suivent des trajectoires déterminées, sans perte dans le diélectrique et avec des pertes dans les parties conductrices, pour finalement disparaître dans la matière conductrice ; ou encore, ils peuvent aller d'un endroit où se trouvent des forces imposées à un autre, avec ou sans dissipation entre les deux quand, dans l'une des sources le courant va dans le sens de la force imposée et le sens contraire dans l'autre. Pour certaines dispositions (solénoïdales) de la force imposée, aucune énergie n'est transmise dans l'état stationnaire.[27]

Puisque, lorsqu'un courant s'installe, l'énergie atteint le fil depuis le milieu situé à l'extérieur, on peut s'attendre à ce que le courant électrique dans le fil soit d'abord établi dans la partie externe, et prenne du temps pour arriver au milieu. Je l'ai vérifié en faisant des expériences dans des cas particuliers.[28]

Augmentons énormément la conductivité du fil, en la maintenant finie, malgré tout. Supposons que cela prenne plusieurs minutes pour que le courant

26. Par force imposée (*impressed force*) il faut entendre, par exemple, les forces électromotrices d'origine chimique ou thermoélectrique. Heaviside formalise cette notion dans sa quatrième partie.

27. Heaviside veut probablement dire qu'une force imposée de divergence nulle ne peut fournit aucune énergie, dans la mesure où cette force s'exerce dans une région de courant uniforme (en effet, l'intégrale volumique d'un champ vectoriel de divergence nulle à support borné est toujours nulle).

28. Il s'agit de l'effet de peau, que Heaviside fut l'un des premiers à décrire. Cet effet, plus aisément concevable dans la théorie de Maxwell, est toutefois contenu dans les théories allemandes d'action à distance.

arrive à l'axe. Alors un signal de rapidité ordinaire « le long du fil » serait accompagné uniquement d'un courant de surface, pénétrant à une très faible profondeur. La perturbation se propage alors parallèlement au fil à la manière des ondes, avec réflexion à l'extrémité, et pratiquement pas de diminution. Si la conductivité devient infinie, il ne peut y avoir aucun courant à l'intérieur du fil. Il n'y a pas de dissipation ; la propagation des ondes dans le milieu est parfaite. Le courant dans le fil est purement superficiel — une abstraction —, pourtant il en va presque de même pour une très forte conductivité. C'est une manifestation de la propriété qu'ont les conducteurs parfaits d'être impénétrables à l'induction magnétique (et, de façon semblable, au courant électrique), utilisée par Maxwell dans la théorie moléculaire du magnétisme.[29] Tout état d'induction magnétique ou de courant électrique dans un conducteur parfait est indestructible. Si l'on déplace le conducteur dans un champ magnétique, il apparaît immédiatement des courants superficiels, dont la seule utilité est de le protéger de l'induction extérieure, et de garder inchangé l'état intérieur.

Dans un circuit thermoélectrique constitué de deux métaux, une jonction étant un peu plus chaude que l'autre, il se produit un passage d'énergie d'une jonction à l'autre à travers le diélectrique, avec, en général, une perte insignifiante dans le circuit. Dans ce cas, c'est la chaleur qui est à l'origine du courant électrique, et le résultat final est de la chaleur. Une des jonctions est refroidie et l'autre réchauffée, de façon réversible. Comme la chaleur est l'énergie d'agitation moléculaire, à première vue, la seule différence est que cette agitation est un peu plus vive à l'une des jonctions qu'à l'autre. Mais toutes les parties du circuit agitent l'éther.[30] Il semblerait donc que, à cause de son irrégularité, l'agitation moléculaire ordinaire ne produise aucune manifestation électrique ; pour constituer une force imposée électrique, il ne suffit pas d'influencer vigoureusement le mécanisme électrique, il faut le faire de façon symétrique et régulière. Aux jonctions, on change de matériau, les molécules sont différentes ; à leur contact, les agitations acquièrent une qualité directionnelle. C'est sans aucun doute très vague, mais cela attire l'attention sur le fait que la force imposée est une forme symétrique de rayonnement.

Après ces remarques générales, reprenons le cours de l'exposé mathématique provisoirement interrompu.

29. Voir l'extrait n° 2.

30. Car elles produisent les mouvements cachés dont le champ magnétique est la manifestation.

Transitoires réels, et hypothèse d'un courant magnétique dissipatif

De même que le taux d'augmentation du déplacement dans un diélectrique non-conducteur est le courant électrique, on peut donner au taux d'accroissement de $\mathbf{B}/4\pi$ le nom de courant magnétique. Notons le $\mathbf{G}$. Alors

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{B}}/4\pi = \mu\dot{\mathbf{H}}/4\pi. \text{ (Courant magnétique)} \tag{12}$$

Tout comme les courants de déplacement, les courants magnétiques ne sont que transitoires, c'est-à-dire qu'il ne peuvent pas durer indéfiniment dans un sens, comme un courant de conduction électrique. De plus, comme les courants électriques dans un diélectrique, ils ne sont accompagnés d'aucun dégagement de chaleur. Dans l'éther, le courant électrique et le courant magnétique ont le même statut.

Il est probable qu'il n'existe pas courant de conduction magnétique, avec dissipation d'énergie. Si toutefois il en existe un, analogue au courant électrique de conduction, posons

$$\mathbf{G} = g\mathbf{H} + \mu\dot{\mathbf{H}}/4\pi. \tag{13}$$

Ici, $g\mathbf{H}$ est le courant de conduction magnétique qui, ajouté au courant magnétique incontesté de l'équation (12), donne le courant magnétique vrai. Le coefficient g peut être un scalaire ou, comme k un opérateur linéaire. Multiplions (13) par $\mathbf{H}$. En utilisant (11), on trouve

$$\mathbf{HG} = \mathbf{H}g\mathbf{H} + \dot{T}. \tag{14}$$

Ici, $\mathbf{H}g\mathbf{H}$ est le taux de dissipation. À comparer avec (9).

[...] Dans le passage omis, Heaviside calcule l'effet qu'aurait une valeur non nulle de la conductivité magnétique g sur la magnétisation d'un anneau de fer doux.

Première relation croisée entre forces électrique et magnétique

Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés aux relations directes entre la force électrique et ses conséquences, le courant de conduction et le déplacement électriques et aussi à celles entre la force magnétique et l'induction magnétique. Nous avons aussi introduit le courant de déplacement dans un diélectrique, et le courant vrai dans un diélectrique conducteur. De plus, de façon symétrique avec le courant de déplacement, nous avons introduit le courant magnétique. Mais, jusqu'ici, nous n'avons aucune relation entre les quantités électriques et magnétiques, qui doivent exister pour que le système soit cohérent.

La première relation croisée s'exprime sous la forme

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{\Gamma}, \tag{15}$$

où $\mathbf{H}$ est la force magnétique et $\mathbf{\Gamma}$ le courant vrai. Ici « rot » est, comme sin et cos, le symbole d'une opération, qui revient tellement souvent en électromagnétisme qu'on pourrait l'appeler L'opérateur électromagnétique. En se référant aux coordonnées cartésiennes, on peut le définir ainsi : si H_1, H_2 et H_3 sont les trois composantes de $\mathbf{H}$, celles de rot $\mathbf{H}$ sont

$$\frac{dH_3}{dy}-\frac{dH_2}{dz}, \qquad \frac{dH_1}{dz}-\frac{dH_3}{dx}, \qquad \frac{dH_2}{dx}-\frac{dH_1}{dy}. \tag{16}$$

Mais la définition la plus utile est celle qui est implicitement contenue dans le théorème fondamental de la circulation : – L'intégrale curviligne d'un vecteur le long d'une courbe fermée (ou « circulation » de $\mathbf{H}$) est égale à l'intégrale de surface d'un autre vecteur, à savoir rot $\mathbf{H}$, sur toute surface limitée par la courbe. Si l'on applique successivement ce théorème à de petits carrés situés dans les plans perpendiculaires à x, y et z, on en déduit immédiatement les expressions des composantes de rot $\mathbf{H}$ données dans (16). En appliquant le théorème à des aires infinitésimales judicieusement choisies, on obtient les expressions des composantes de « rot » dans n'importe quel système de coordonnées, de façon beaucoup plus simple que par la transformation laborieuse des opérateurs différentiels. Alors que les expressions des composantes varient suivant le système de coordonnées choisi pour traiter un problème donné, le théorème est universel et nous donne la signification profonde de l'opération. Dans les recherches générales, il est de loin préférable de n'utiliser aucun système de coordonnées mais de se libérer de leur complication en utilisant des symboles qui renvoient à la signification intrinsèque des opérations ; on y gagne aussi une plus grande légèreté dans l'écriture des calculs. Dans cet article, nous donnerons rapidement la signification de toutes les expressions susceptibles de ne pas être familières, et nous éviterons gâcher de la place avec de longues formules. L'opérateur « rot » est relié à la rotation de la façon suivante : si $\mathbf{H}$ est la vitesse instantanée en un point d'un fluide en mouvement, rot $\mathbf{H}$ est un vecteur dont la direction est celle de l'axe de rotation instantanée du fluide au voisinage de ce point, et dont l'amplitude est égale au double de la vitesse angulaire de rotation.

Remarquez que (15) ne contient aucune constante physique. D'une certaine façon, c'est une équation purement géométrique. Étant donné une répartition de force magnétique **H**, qu'on se représente par des lignes ou des tubes de force qui organisent l'espace d'une certaine façon, l'utilisation de l'opérateur « rot » nous donne un autre système de lignes et de tubes qui organisent l'espace de façon différente, en l'occurrence suivant les lignes ou tubes de courant. Que **H** soit tout à fait continu ou pas, le **Γ** calculé est forcément continu (c'est-à-dire circuital).[31] Le rot d'un vecteur ne peut avoir de divergence en aucun point, ce qui se traduit par

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Gamma} = 0; \quad \text{or,} \quad \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_1}{dx} + \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_2}{dy} + \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_3}{dz} = 0, \tag{17}$$

qui définit la « divergence » en coordonnées cartésiennes. La divergence de **Γ** est la quantité de **Γ** qui quitte un point, calculée par unité de volume. Lorsque **Γ**, comme ici, représente un courant électrique, il est continu ; il y a autant de courant qui entre dans un volume donné qu'il n'en sort, ou encore l'intégrale du courant sortant est nulle, en comptant négativement le courant entrant. On vérifie que (17) découle de (15) en calculant la dérivée correspondante de chacune des composantes de (16) et en faisant leur somme.

> [...] Heaviside discute ici le problème de la détermination du champ **H** en fonction des courants **C**. Puis il envisage une autre manière de créer un champ magnétique : en déplaçant un corps à la vitesse **v** dans un champ électrostatique **D**. Il obtient l'expression $4\pi\mathbf{D}\times\mathbf{v}$ de ce champ motionnel par analogie avec le champ électrique $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ que produirait le déplacement du corps dans un champ magnétostatique **B**.

Quatrième partie. Fin du résumé succinct

Deuxième relation entre les forces électrique et magnétique

L'équation (15), $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\boldsymbol{\Gamma}$ qui exprime une relation, indépendante de constantes physiques, entre la force magnétique et le courant électrique, est une généralisation des résultats d'Ampère sur les circuits linéaires. **Γ** y représente le courant vrai de Maxwell, c'est-à-dire la somme du courant de conduction et du courant de déplacement lorsque le corps considéré est à la fois conducteur et diélectrique, le courant de conduction seul si le corps n'a pas

31. Un champ circuital est un champ de divergence nulle (les lignes de force d'un tel champ sont « continues » et forment des circuits).

de propriétés diélectriques, et le courant de déplacement seul si la conductivité est nulle. Tous les corps sont soit conducteurs soit diélectriques, ou les deux, et l'éther est diélectrique, de sorte que le courant électrique peut exister partout. Écrivons $\mathbf{\Gamma}$ en termes de $\mathbf{E}$ à l'aide de l'équation (8) pour le courant vrai, nous obtenons

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi k\mathbf{E} + c\dot{\mathbf{E}}, \tag{19}$$

ce qui est une relation entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$.

On obtient une deuxième relation en écrivant sous forme mathématique la loi de Faraday sur la force électrique induite dans un circuit linéaire. Il est remarquable que les idées de Faraday, qui n'était pas mathématicien, se transcrivent immédiatement dans un langage mathématique ; cela vient de ce qu'il se passait de l'hypothèse des actions directes à distance et utilisait le mécanisme intermédiaire des lignes et tubes de force. Dans la langue de tous les jours, la f.e.m. d'induction totale le long d'un circuit est mesurée par le nombre de lignes de force retirées du circuit en une seconde. Il convient ici de se rappeller la convention qui lie le sens choisi comme positif lorsqu'on traverse un circuit et le sens positif de circulation sur le circuit. Choisissons l'un des sens de traversée comme positif et regardons le circuit dans ce sens : le sens positif pour la rotation est celui des aiguilles d'une montre dont le cadran se trouve face à l'observateur. Dans ces conditions, augmenter le nombre de lignes de force qui traversent le circuit donne naissance à une f.e.m. négative dans le circuit.

Jusqu'ici, la perméabilité du milieu était égale à 1. Mais, si nous admettons des différences de perméabilité magnétique, ce n'est pas la variation de la force magnétique $\mathbf{H}$ qui détermine la f.e.m. induite, mais celle de l'induction magnétique $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. L'énoncé modifié dit que la f.e.m. d'induction totale le long d'un circuit est égale au taux de décroissance de la quantité d'induction magnétique qui traverse le circuit. Mais, puisque nous avons une intégrale curviligne, en l'occurrence celle de la force électrique d'induction le long d'un circuit, et une intégrale de surface, à savoir celle de $-\mu\dot{\mathbf{H}}$ ou $-\dot{\mathbf{B}}$ sur toute surface qui s'appuie sur le circuit, nous pouvons utiliser le théorème de la circulation mentionné plus haut et en déduire

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = -\mu\dot{\mathbf{H}}, \tag{20}$$

qui est une forme de la deuxième relation entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$.

La méthode qui suit est, elle aussi, instructive. Puisque le taux d'accroissement de l'induction magnétique en un point est égal à $4\pi\mathbf{G}$, où $\mathbf{G}$ est le courant magnétique défini par l'équation (12), nous pouvons énoncer la loi sur la force électrique induite ainsi : – La f.e.m. totale d'induction le long d'un circuit parcouru dans le sens négatif est égale au produit par 4π du courant magnétique total qui traverse le circuit dans le sens positif. Comparons cet énoncé avec celui qui correspond à l'équation (15), à savoir que la force magnétique totale le long d'un circuit est égale au produit par 4π du courant électrique total qui traverse le circuit, et modifions ce dernier de façon à retrouver l'énoncé de la phrase précédente. Nous devons remplacer « force magnétique » par « force électrique prise dans le sens négatif », et « courant électrique » par « courant magnétique ». Ainsi

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi\boldsymbol{\Gamma} \qquad (15)\ \textit{bis}$$

devient

$$-\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{G}, \qquad (21)$$

qui est équivalente à (20).

Pour simplifier la démonstration de (20) ou (21), nous avons omis de mentioner la f.e.m. induite dans un circuit linéaire par son déplacement dans le champ, qui peut ou peut ne pas varier de façon indépendante. La quantité d'induction ainsi ajoutée ou retirée au circuit peut évidemment être représentée par une intégrale curviligne, puisqu'elle dépend du nombre de lignes d'induction croisées par unité de temps par les différents éléments du circuit. Si l'induction avait la même valeur en tous les points mobiles du circuit, et si toutes les parties mobiles se déplaçaient dans la direction perpendiculaire à leur longueur et aussi perpendiculairement aux lignes d'induction, la f.e.m. totale aurait pour valeur le produit de B par le taux d'augmentation de l'aire du circuit. Mais si B ou la vitesse des divers éléments à travers les lignes de B changent, il faut considérer séparément chaque élément. La contribution à la f.e.m. totale d'un élement de longueur unité est égale à la composante, dans la direction parallèle à sa longueur, de[32]

$$\mathrm{V}\mathbf{v}\mathbf{B}, \qquad (21a)$$

où $\mathbf{v}$ est le vecteur vitesse. Mais, si un courant est induit, s'introduisent des forces mécaniques qui travaillent, et tout cela doit donc être traité à part. J'en reviens maintenant au cas où c, k et μ ne dépendent pas du temps, et où il n'y a pas de parties mobiles.

32. $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ en notation vectorielle moderne.

Dans l'équation (21), $\mathbf{E}$ est seulement la force électrique d'induction, pas la force électrique totale. Il peut s'y ajouter une force électrostatique et aussi une force électrique imposée. Mais la force électrostatique est polaire,[33] elle dérive d'un potentiel scalaire. Si ce dernier est P, la force est $-\nabla P$. Mais, $\mathrm{rot}\,(\nabla P) = 0$, de sorte que l'on peut inclure la force polaire dans le $\mathbf{E}$ de l'équation (21). De même, toute force polaire peut être incluse dans le $\mathbf{H}$ de l'équation (15). Dans toutes les équations de (1) à (14) qui ne font intervenir aucune relation entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, ces symboles représentent la force électrique et la force magnétique totales, toutes causes confondues. Ainsi, pour que les deux équations (15) et (21) puissent être compatibles avec les équations préliminaires (1) à (14), non seulement là où il n'y a pas de force imposée, mais aussi là où il en existe, nous devons, tout en continuant à utiliser $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ pour représenter les forces réelles, en soustraire les forces imposées quand nous utilisons les relations (15) et (21).[34] Notons $\mathbf{e}$ la force électrique imposée et $\mathbf{h}$ la force magnétique imposée. Les deux relations entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ s'écrivent alors :

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{H}-\mathbf{h}) = 4\pi\boldsymbol{\Gamma} = 4\pi k\,\mathbf{E} + c\dot{\mathbf{E}}\,, \tag{22}$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{e}-\mathbf{E}) = 4\pi\mathbf{G} = 4\pi g\,\mathbf{H} + \mu\dot{\mathbf{H}}\,, \tag{23}$$

où le coefficient g de conductivité magnétique, que nous avons introduit pour faire apparaître la symétrie, peut être pris égal à 0. Nous avons maintenant un système dynamiquement complet.

Nous étudierons plus en détail dans une section ultérieure la question des forces imposées, en particulier la force magnétique imposée et son interprétation en termes d'aimantation. En attendant, nous pouvons définir la force électrique imposée de la façon suivante. Si $\mathbf{e}$ est la force électrique imposée en un point, et $\boldsymbol{\Gamma}$ le courant électrique au même point, une quantité $\mathbf{e}\boldsymbol{\Gamma}$ d'énergie est apportée au système électromagnétique en ce point, par unité de volume et par seconde.[35] De façon semblable, nous pouvons définir la force magnétique imposée $\mathbf{h}$ en un point en disant que s'il y existe un courant magnétique $\mathbf{G}$, une quantité d'énergie $\mathbf{hG}$ est captée en cet endroit par le système électromagnétique, par unité de volume et par seconde. En général, $\mathbf{e}\boldsymbol{\Gamma}$ et $\mathbf{hG}$ sont des produits scalaires (voir équation (5)), qui ont le sens des

33. Par force polaire, il faut entendre une force engendrée par des pôles ou charges électriques de la même manière qu'une force gravitationnelle est engendrée par des masses.

34. De manière (presque) équivalente, Heaviside aurait pu changer la loi d'Ohm $\mathbf{C} = k\mathbf{E}$ en $\mathbf{C} = k(\mathbf{E} + \mathbf{e})$ et garder $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -4\pi\mathbf{G}$, comme le fit Heinrich Hertz.

35. Cette définition d'une force électromotrice est due à William Thomson.

produits ordinaires lorsque **e** est parallèle à **Γ**, ou **h** à **G** ; lorsque ce n'est pas le cas, il faut multiplier par le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs.

L'équation de l'énergie et son transfert

Nous devons trouver le taux de production de travail par les forces imposées, et le comparer avec la dissipation et les changements qui se produisent dans l'énergie de déplacement et dans l'énergie magnétique. Multiplions (22) par $(\mathbf{e}-\mathbf{E})$ et (23) par $(\mathbf{h}-\mathbf{H})$, puis ajoutons les résultats. Nous trouvons

$$4\pi\{(\mathbf{e}-\mathbf{E})\mathbf{\Gamma}+(\mathbf{h}-\mathbf{H})\mathbf{G}\}=(\mathbf{e}-\mathbf{E})\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{H}-\mathbf{h})+(\mathbf{h}-\mathbf{H})\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{e}-\mathbf{E})$$

ou, en réarrangeant,

$$\mathbf{e\Gamma}+\mathbf{hG}=\mathbf{E\Gamma}+\mathbf{HG}+\{(\mathbf{H}-\mathbf{h})\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{E}-\mathbf{e})\ -(\mathbf{E}-\mathbf{e})\ \mathrm{rot}\ (\mathbf{H}-\mathbf{h})\}/4\pi. \tag{24}$$

Les termes $\mathbf{E\Gamma}$ et $\mathbf{HG}$ qui apparaissent ici ont déjà été exprimés en fonction de la dissipation Q, de l'énergie électrique de déplacement U, et de l'énergie magnétique T ; voir équations (9) et (14), soit

$$\mathbf{E\Gamma}+\mathbf{HG}=Q+\dot{U}+\dot{T}. \tag{25}$$

Dans le membre de gauche on reconnaît les taux de production de travail par unité de volume des forces vraies **E** et **H** sur les courants **Γ** et **G** ; dans le membre de droite la dissipation, ou taux auquel le système perd de l'énergie par production irréversible de chaleur par effet Joule, et le taux d'augmentation des énergies électrique et magnétique, toujours par unité de volume.

Regardons maintenant (24) : le membre de gauche représente le taux d'augmentation (réversible) de l'énergie du système grâce aux forces imposées **e** et **h**. Ainsi, la différence entre $(\mathbf{e\Gamma}+\mathbf{hG})$ et $(\mathbf{E\Gamma}+\mathbf{HG})$ doit être l'énergie qui quitte le système, par unité de volume et par seconde, en traversant ses limites. Or, si **X** et **Y** sont deux vecteurs quelconques,

$$\mathbf{Y}\ \mathrm{rot}\mathbf{X}-\mathbf{X}\ \mathrm{rot}\mathbf{Y}=\mathrm{div}(\mathrm{V}\mathbf{XY}) \tag{26}$$

ou, en explicitant à l'aide de (5), (16), (17) et (3),

$$\begin{aligned}&Y_1(dX_3/dy-dX_2/dz)+Y_2(dX_1/dz-dX_3/dx)+Y_3(dX_2/dx-dX_1/dy)\\&-X_1(dY_3/dy-dY_2/dz)-X_2(dY_1/dz-dY_3/dx)-X_3(dY_2/dx-dY_1/dy)\\&=(d/dx)(X_2Y_3-X_3Y_2)+(d/dy)(X_3Y_1-X_1Y_3)+(d/dz)(X_1Y_2-Y_1X_2)\end{aligned}$$

où les indices 1,2,3, dénotent les composantes suivant x, y et z. Posons alors

$$\mathbf{W} = \mathrm{V}\,(\mathbf{E} - \mathbf{e})(\mathbf{H} - \mathbf{h})/4\pi. \tag{27}$$

D'après (26) en posant $\mathbf{X} = \mathbf{E} - \mathbf{e}$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{H} - \mathbf{h}$, l'équation (24) devient

$$\begin{aligned} \mathbf{e}\Gamma + \mathbf{h}\mathbf{G} &= \mathbf{E}\Gamma + \mathbf{H}\mathbf{G} + \operatorname{div}\mathbf{W} \\ &= Q + \dot{U} + \dot{T} + \operatorname{div}\mathbf{W}, \end{aligned} \tag{28}$$

qui est l'équation de l'énergie sous sa forme la plus parlante.

Lorsqu'on somme dans tout l'espace, le terme en **W** s'en va ; c'est-à-dire que le travail total fourni par seconde par les forces imposées est égal à la somme de la dissipation totale et du taux d'accroissement des énergies électriques et magnétiques totales.

W est le vecteur taux de transfert d'énergie [ou] courant d'énergie. C'est un vecteur dont la direction est celle du transfert d'énergie, et dont l'amplitude est égale à la quantité transmise à travers une surface unité d'un plan perpendiculaire à la direction du vecteur. [...] L'amplitude de **W** est égale au produit des amplitudes des deux forces par le sinus de l'angle entre leurs directions, et la direction de **W** est perpendiculaire aux deux forces, avec la convention énoncée précédemment sur les sens positifs.

La nature générale d'un courant d'énergie a été décrite dans la section II, où l'on ne considérait que la force électrique imposée. Le même résultat général est valable pour la force magnétique imposée : l'énergie vient des endroits où cette force existe ; elle peut être dissipée en chaleur dans les corps conducteurs, ou servir à augmenter les énergies électrique et magnétique, ou aller à d'autres endroits où une force magnétique est imposée. Mais il y a de grandes différences entre les forces imposées électrique et magnétique, dues à l'aspect transitoire des courants magnétiques et à d'autres causes.

2. La formulation de Hertz

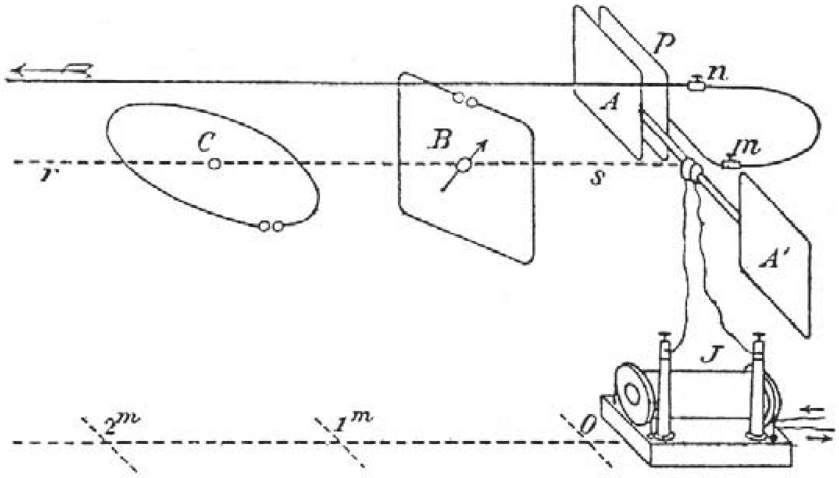
Avant même que la théorie de Maxwell eût attiré l'attention de ses collègues britanniques, en 1870, le géant de la physique et de la physiologie allemandes Hermann von Helmholtz parvint à en retrouver les équations fondamentales sur une base conceptuelle totalement différente. Cette réinterprétation consistait à introduire, dans une théorie d'action à distance, des sources supplémentaires associées aux déplacements de charges microscopiques d'un milieu indéfiniment polarisable, l'éther (présent même dans le vide). Cette vision allait à l'encontre du concept d'action contiguë et des concepts maxwelliens de charge et de courant que Helmholtz avouait ne pas comprendre. En revanche, elle facilitait la comparaison des théories de Maxwell, de Weber et de Neumann en les insérant toutes trois dans un même cadre formel et conceptuel. Helmholtz s'intéressait aux prédictions divergentes de ces trois théories pour les courants rapidement variables et ouverts qu'il avait rencontrés dans ses expériences d'électrophysiologie.[1]

Dans le cadre commun qu'il donnait aux théories concurrentes, Helmholtz se servit d'un argument d'instabilité énergétique des conducteurs pour exclure la théorie de Weber. Il restait alors trois options : une généralisation naturelle du potentiel électrodynamique de Neumann aux courants ouverts, une généralisation de la théorie d'Ampère comprenant l'induction électromagnétique, et la théorie de Maxwell réinterprétée. En 1875, Helmholtz élimina la première option par une expérience de son cru : une charge électrique apparaissait aux extrémités d'un barreau conducteur tournant rapidement dans un champ magnétique, bien que le potentiel de Neumann fût invariable. Enfin, en 1879, Helmholtz demanda à son disciple le plus brillant, Heinrich Hertz, de trancher expérimentalement entre les deux dernières options. Plus précisément, la question était de savoir si le vide était polarisable comme l'admettaient Faraday et Maxwell et si les variations de cette polarisation constituaient bien un courant (le courant de déplacement) source de champ magnétique.

Après quelques tentatives infructueuses de réponse directe à cette question, Hertz jugea qu'il valait mieux tester une conséquence indirecte de la polarisabilité du vide : l'existence d'une vitesse finie de propagation des forces électriques et magnétiques dans le vide (en pratique dans l'air). À la fin de 1887, en exploitant sa découverte accidentelle d'un oscillateur électrique de fréquence que nous qualifierions de hertzienne, il crut enfin observer le retard de propagation attendu dans la théorie de Maxwell. Sa méthode reposait sur la comparaison des déphasages des oscillations propagées dans un fil et dans l'air. Quelques mois plus tard, il obtint des ondes stationnaires électromagnétiques dans l'air et mesura leur longueur d'onde (voir fig. 3.1). La théorie de Maxwell semblait confirmée pour l'essentiel. L'intérêt qu'on lui accordait crut alors très rapidement, même sur le continent.

1. Cf. Buchwald 1994.

a)



b)

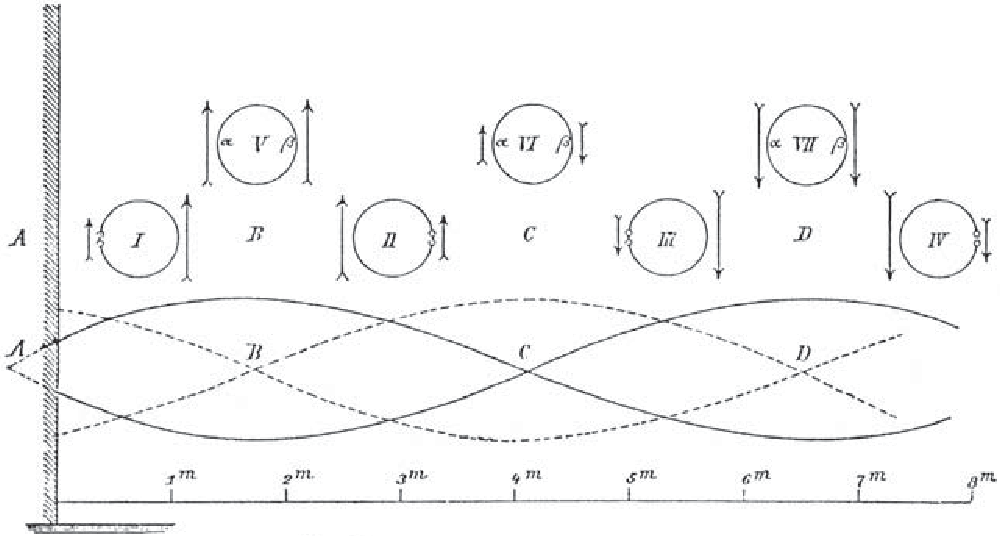


Figure 3.1 a) **Expérience de Hertz** pour démontrer une vitesse finie de propagation de l'induction électromagnétique dans l'air (1887). L'oscillateur AA' alimenté par la bobine de Ruhmkorff J produit une onde progressive le long du fil conducteur horizontal (connecté par mn à la Plaque P parallèle à l'une des plaques de l'oscillateur). Les circuits détecteurs C et B, munis d'un éclateur à étincelle et centrés sur la ligne horizontale en pointillés rs, permettent d'observer la superposition des champs électrique ou magnétique dus d'une part au courant oscillant le long du fil et d'autre part à l'action directe de l'oscillateur. Hertz jugeait ainsi de la phase de l'action directe (celle de l'action du fil étant déjà connue). D'après Hertz, *Untersuchungen* (Leipzig, 1892), p. 116.
b) **Diagramme de Hertz (1888)** représentant les ondes stationnaires dans l'air dues à un oscillateur de haute fréquence (loin sur la droite, non représenté) et une plaque conductrice A. Les courbes indiquent l'amplitude des champs électrique et magnétique estimée grâce au circuit circulaire à étincelle dans les positions I-VII. D'après Hertz, *Untersuchungen* (Leipzig, 1892), p. 137.

Dans l'analyse de ses expériences, Hertz se servait de la réinterprétation helmholtzienne de la théorie de Maxwell plutôt que de sa version originale. Fort de ses travaux, il proposa sa propre version de la théorie de Maxwell dans le mémoire de 1890 reproduit ci-dessous. Il s'agissait d'une théorie épurée de notions jugées inutiles, et présentée d'une manière hypothético-déductive et rigoureuse. Selon lui, les concepts de déplacement, de fluide hypothétique et de potentiel dont Maxwell se servait abondamment, relevaient du « vêtement coloré dont nous habillons arbitrairement la nature ». À la question « qu'est la théorie de Maxwell ? », il répondait : « La théorie de Maxwell est le système d'équations de Maxwell ».[2]

Plus précisément, dans son mémoire Hertz définit les forces électrique et magnétique **E** et **H** de manière opérationnelle, à partir des forces mécaniques agissant sur une charge ou un pôle unité ; il admet l'expression $\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$ de la densité d'énergie du champ ; et il postulait (sous forme cartésienne) les équations

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mu\mathbf{H} = -\nabla\times\mathbf{E}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\mathbf{E} = \nabla\times\mathbf{H} - \frac{\sigma}{c}\mathbf{E}.$$

Selon lui, ces équations déterminent complètement la théorie. Cependant, pour faciliter l'étude de leurs conséquences et le raccord aux théories antérieures, il introduit des concepts dérivés tels que les « polarisations » $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}^2$ et $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, « l'électricité vraie » $\nabla\cdot\mathbf{D}$ et la densité de courant $\sigma\mathbf{E}$. Le plus délicat est d'obtenir l'expression des forces électrodynamiques (actions mécaniques d'origine électromagnétique). Hertz y parvient dans un second mémoire (non reproduit), en étendant ses équations à un milieu en mouvement et en identifiant dans le bilan d'énergie un terme correspondant au travail des forces électrodynamiques (un peu comme le faisait Maxwell en 1865 : voir p. 99). Il pouvait ainsi se féliciter d'avoir obtenu une expression complète et générale de la théorie de Maxwell, applicable à tout problème imaginable d'électrodynamique, alors que la convection[3] de charge et les effets du mouvement des diélectriques échappaient aux équations du Traité de Maxwell. La pureté, l'élégance et la clarté de cette théorie de Hertz séduisirent immédiatement les physiciens continentaux, qui la préférèrent à la formulation originale de Maxwell.

2. H. Hertz, *Electric waves* (London, 1893), 20-21, 28.

3. On entend par là les courants résultant du mouvement de corps électrisés.

Extrait n° 6 :

À PROPOS DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE POUR LES CORPS AU REPOS

Par M. H. Hertz Professeur à l'Université de Bonn

« Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper ». *Annalen der Physik* 40 (1890), 577-624.
Extraits revus par O. Darrigol d'une traduction (mal) vérifiée par Hertz et publiée dans *Archives des sciences physiques et naturelles* 24 (1890), 5-66.

Le système de notions et de formules par lequel Maxwell a réussi à obtenir une théorie des phénomènes électromagnétiques est plus riche et plus étendu, en tenant compte des ressources de développement dont il est susceptible, que tout autre des systèmes imaginés pour atteindre ce but. Il est certainement désirable que la forme d'une théorie si satisfaisante en elle-même se perfectionne le plus possible. Le système édifié devrait laisser distinguer partout clairement les bases logiques sur lesquelles il repose, supprimer les notions accessoires et réduire à leur forme la plus simple les notions essentielles. L'exposition de Maxwell lui-même est imparfaite à cet égard ; elle vacille souvent entre les conceptions que Maxwell a trouvées formées avant lui et celles auxquelles il est parvenu. Maxwell accepte l'action à distance comme point de départ, il cherche les lois de la modification que cette action fait subir aux polarisations hypothétiques de l'éther diélectrique, et adopte comme conclusion que ces polarisations se modifient effectivement de cette façon mais que des forces à distance n'en sont pas la cause.[1] Ce procédé laisse l'impression fâcheuse que, de la conclusion finale ou de la méthode pour y parvenir, l'une des deux est incorrecte. En outre il conserve des notions

1. Maxwell parle en effet d'un « déplacement de l'électricité » dans les diélectriques sous l'effet d'une force électromotrice, et semble ainsi adopter l'interprétation de Mossotti selon laquelle la polarisation serait causée par une action à distance sur des charges liées aux molécules du diélectrique. En réalité, il ne peut s'agir que d'une analogie partielle, rendant compte de la proportionnalité entre $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ et de l'expression $\partial\mathbf{D}/\partial t$ du courant de déplacement, mais fondamentalement incompatible avec l'expression $\nabla\cdot\mathbf{D}$ de la charge liée au déplacement.

rudimentaires dont la signification disparaît avec l'ancienne théorie de l'action à distance. Telle est la distinction entre le déplacement électrique dans l'éther libre et la force électrique qui s'y développe, donnant lieu au rapport de ces deux quantités, à la constante diélectrique de l'éther. Maintenir de semblables distinctions impliquerait qu'en supprimant l'éther dans une portion d'espace on y laisse subsister la force électrique. Elles pouvaient être conformes aux idées d'où Maxwell est parti mais ne le sont pas à celles auxquelles ses travaux nous ont conduits. Comme un autre exemple de notion rudimentaire, je citerai le rôle dominant attribué au potentiel vecteur dans les équations fondamentales. Dans la construction de la nouvelle théorie, les potentiels ont joué le rôle d'un échafaudage en permettant de remplacer la force variable d'un point à l'autre par une quantité dont la valeur ne dépend que des points voisins, mais du moment que les forces elles-mêmes rentrent pour nous dans cette catégorie de grandeurs, il ne convient de leur substituer un potentiel que si cette transformation présente un avantage. C'est ce qui ne semble pas être le cas lorsqu'on introduit le potentiel vecteur dans les équations fondamentales, lesquelles devraient exprimer des relations entre des grandeurs physiques et non entre des expressions analytiques.

Ces imperfections de forme rendent difficile l'usage de la théorie de Maxwell. C'est en cherchant à l'appliquer à des cas particuliers que depuis longtemps je me suis efforcé de réduire le nombre des formules de Maxwell, et d'en rendre la véritable signification indépendante de la forme accidentelle sous laquelle elles se sont d'abord présentées. M. Oliver Heaviside a commencé déjà en 1885 à s'occuper d'un travail analogue. Les notions qu'il élimine des équations de Maxwell sont les mêmes que j'élimine aussi, et la forme simplifiée qu'il leur donne concorde, à quelques détails d'expression près, avec celle que j'obtiens.[*,2] Quant à ces équations la priorité appartient donc à M. Heaviside, mais j'espère que cette étude ne semblera pas superflue. C'est un exposé qui ne prétend pas être définitif, mais offrir des ressources nouvelles pour des améliorations plus étendues.

Je partage le sujet en deux parties. Dans la première partie A je donne les notions fondamentales et les formules qui les font dépendre les unes des autres. Les formules sont commentées, mais ces éclaircissements ne sont pas des démonstrations des formules. Les énoncés sont plutôt envisagés comme

* On trouve les équations dans le *Philosophical Magazine* de février 1888. Un travail antérieur a paru dans *Electrician* en 1885, mais je n'ai pas pu en prendre connaissance.

2. Voir les extraits du mémoire de 1885 de Heaviside reproduits plus haut (extrait n° 5).

des faits d'observation et leur preuve est d'ordre expérimental. Ce n'est pas toutefois chacune des formules mais leur ensemble considéré comme un tout qu'il peut être question de vérifier par leur accord avec les faits. Il n'en est guère autrement pour le système des équations de la mécanique ordinaire. Dans la seconde partie B j'établis comment on peut déduire des formules d'une manière systématique les résultats susceptibles d'être constatés directement par l'observation et par conséquent les vérifier. Cette partie comporterait une grande extension si on la traitait en entrant dans les questions de détail, mais il ne peut s'agir ici que d'indications sommaires.

A. Les notions fondamentales et leurs relations

1. *La force électrique et la force magnétique*

L'intérieur de tous les corps, y compris l'éther libre, peut sortir de son état de repos en subissant deux sortes de perturbations que nous désignons par électriques et magnétiques. Nous ignorons la nature de ces perturbations et connaissons seulement les phénomènes qui en résultent. Admettant que ceux-ci sont connus, nous en déduisons les rapports géométriques des variations d'état. Les perturbations de l'espèce électrique et de l'espèce magnétique sont liées entre elles par cette condition que les unes peuvent exister d'une manière permanente, indépendamment des autres, et qu'au contraire des perturbations, soit d'une espèce soit de l'autre ne peuvent pas subir des variations en fonction du temps sans que des perturbations de l'autre espèce se produisent. La production du changement d'état suppose un emploi d'énergie ; cette énergie est restituée par la disparition de la perturbation ; l'existence de la perturbation implique donc l'existence d'une énergie disponible. En un point quelconque la variation d'état relative à l'une ou à l'autre espèce de perturbation peut différer par la direction, le sens et la grandeur. Il est donc nécessaire pour la détermination de l'état électrique ou magnétique de considérer une grandeur dirigée ou ses trois composantes. Mais une première et importante hypothèse de notre théorie consiste à admettre qu'une seule grandeur dirigée suffit pour déterminer complètement la variation d'un seul état, soit électrique soit magnétique.[3] Certains phénomènes, par exemple le magnétisme permanent, la dispersion de la lumière, etc., ne peuvent pas être rattachés à ce point de départ, mais

3. Hertz se restreint aux milieux linéaires, pour lesquels les champs **D** et **B** sont des fonctions linéaires à coefficients prédéterminés des champs **E** et **H** et peuvent dont être éliminés des équations.

exigent que les états respectivement électrique et magnétique du point considéré soient exprimés par plus d'une variable. Il faut donc exclure ces phénomènes du domaine auquel nos déductions sont applicables.

Nous appelons force électrique une grandeur dirigée dont dépend l'état électrique. Nous la définissons par la force mécanique qui s'exerce sur un corps électrisé, lorsqu'il se trouve dans un espace vide où a lieu une perturbation électrique. Dans le vide nous posons en principe que la composante de la force électrique suivant une direction quelconque est proportionnelle à la composante de la force mécanique. Nous appelons force électrique dans l'intérieur d'un corps la force électrique qui se produirait au point considéré dans l'intérieur d'une cavité cylindrique infiniment étroite ayant la direction de la force, supposition que l'on peut réaliser toujours.[4] Quelle que soit la relation entre la force ainsi mesurée et le véritable changement d'état, celui-ci, se trouve complètement déterminée par notre prescription. En remplaçant le mot électrique par le mot magnétique, et le corps auxiliaire électrisé par un pôle magnétique, nous obtenons la définition de la force magnétique. Afin de fixer le sens des forces nous convenons que le corps électrisé est chargé d'électricité vitrée et que le pôle magnétique employé est celui qui se dirige vers le nord. Pour le moment, nous ne précisons pas les unités. Les composantes de la force électrique suivant les x, y, z sont désignées par X, Y, Z, celles de la force magnétique par L, M, N.

2. *Énergie du champ*

L'énergie électrique disponible d'un volume d'un corps dans l'intérieur duquel la force électrique a une valeur constante est une fonction homogène et du second degré des trois composantes de la force électrique. Le même énoncé s'applique à l'énergie magnétique disponible. L'énergie disponible totale que nous appelons énergie disponible électromagnétique est la somme des deux précédentes.

Pour un corps isotrope la quantité d'énergie de chaque espèce est d'après cela égale au produit du carré de la force correspondante et d'une constante. Celle-ci peut-être différente pour l'énergie électrique et l'énergie magnétique et dépend de la substance du corps ainsi que du choix des unités d'énergie et de force. Nous convenons de mesurer l'énergie d'après la mesure

4. Cette définition s'inspire des définitions analogues de Thomson et de Maxwell dans le cas magnétique (voir la note 24 des extraits du *Traité* de Maxwell).

absolue de Gauss et de choisir l'unité de force de telle manière que la valeur de la constante dans l'éther libre soit 1/8 π, en sorte que l'énergie de l'unité de volume de l'éther subissant une perturbation est égale à

$$\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{1}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\,.$$

En mesurant ainsi les forces nous disons que nous les mesurons en mesure absolue de Gauss.[*,5] La dimension de la force électrique ou magnétique est telle que son carré à la dimension d'une énergie rapportée à l'unité de volume ; cette dimension est donc, d'après la notation usitée, représentée par $M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$.

Pour tout corps pondérable isotrope nous pouvons maintenant, d'après ce qui précède, exprimer l'énergie de l'unité de volume par

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\,.$$

Les constantes qu'on vient d'introduire, ε et μ, sont nécessairement des nombres positifs. Nous appelons ε la constante diélectrique et μ la constante magnétique de la substance. Il est évident que ε et μ sont des rapports numériques par lesquels l'énergie d'une substance est comparée à celle d'une autre. La nature d'une substance considérée en elle-même ne suffit pas pour en déterminer la valeur, ce que nous exprimons lorsque nous disons que les constantes diélectrique et magnétique ne sont pas une constante intérieure de la substance. Il n'est pas incorrect de dire que ces constantes sont égales à l'unité pour l'éther, mais cette assertion n'implique aucun fait expérimental, seulement une convention arbitraire.

Pour les corps cristallisés, l'énergie de l'unité de volume devient égale à

$$\frac{1}{8\pi}(\varepsilon_{11}X^2+\varepsilon_{22}Y^2+\varepsilon_{33}Z^2+2\varepsilon_{12}XY+2\varepsilon_{23}YZ+2\varepsilon_{13}XZ)$$
$$+\frac{1}{8\pi}(\mu_{11}L^2+\mu_{22}M^2+\mu_{33}N^2+2\mu_{12}LM+2\mu_{23}MN+2\mu_{13}LN).$$

Par un choix possible d'axes on peut transformer l'une ou l'autre des deux parties de cette expression en une somme de trois carrés. Il est très vraisemblable que les mêmes axes donnent lieu à cette simplification pour

* Voir H. Helmholtz, *Wiedemann Annalen*, Bd. 17, p. 42, 1882.

5. Par mesures absolues, Gauss entendait des mesures ramenées aux unités mécaniques fondamentales de longueur, de temps et de masse (ou de force).

les deux parties. Les ε et les μ sont assujettis à la condition d'être tels que dans la transformation en une somme de carrés les coefficients des carrés soient tous positifs.

3. *Relations des forces dans l'éther*

Le système d'axes choisi est tel que l'axe des x positifs étant dirigé en avant par rapport à l'origine, et celui des z positifs en haut, l'axe des y positifs va de gauche à droite. En admettant cette disposition, les forces électrique et magnétique dans l'éther dépendent l'une de l'autre par les équations suivantes[6]

$$3a.\quad \begin{cases} A\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz} \\ A\dfrac{dM}{dt} = \dfrac{dX}{dz} - \dfrac{dZ}{dx} \\ A\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{dY}{dx} - \dfrac{dX}{dy} \end{cases} \qquad 3b.\quad \begin{cases} A\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy} \\ A\dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dN}{dx} - \dfrac{dL}{dz} \\ A\dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{dL}{dy} - \dfrac{dM}{dx} \end{cases}$$

auxquelles se joignent dans l'éther libre sans incompatibilité les deux équations

$$3c.\quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dx} = 0, \qquad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dx} = 0$$

qui n'ont pas d'analogue dans la matière pondérable.

Ces équations une fois trouvées, il ne semble pas qu'il reste opportun de les déduire de considérations sur la constitution électrique et magnétique de l'éther et sur la nature des forces agissantes, comme de données mieux connues, ainsi que l'indiquerait la voie historique. Il convient bien mieux au contraire de rattacher à ces équations de nouvelles vues sur la constitution de l'éther.

Comme les dimensions des L, M, N et des X, Y, Z sont les mêmes, la constante A est la réciproque d'une vitesse. Elle est une constante intérieure de l'éther, et par cette expression nous entendons que sa valeur ne dépend ni de la présence d'un autre corps ni d'aucune convention arbitraire de notre part.

Nous multiplions toutes nos équations par $d\tau/4\pi A$, puis chacune dans leur ordre respectif par L, M, N, X, Y, Z et nous les additionnons. Nous intégrons les deux membres de l'équation obtenue relativement à un certain

6. ou encore : $A\partial\mathbf{H}/\partial t = -\nabla\times\mathbf{E}$ et $A\partial\mathbf{E}/\partial t = \nabla\times\mathbf{H}$.

espace limité pour lequel la normale à l'élément de surface $d\omega$ fait avec les axes de coordonnées les angles $n, x, \; n, y, \; n, z$. Pour le second membre, l'intégration s'effectue par parties et nous obtenons :[7]

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{1}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\right\}d\tau$$
$$=\frac{1}{4\pi A}\int\{(NY-MZ)\cos n, x+(LZ-NX)\cos n, y$$
$$+(MX-LY)\cos n, z\}d\omega.$$

L'intégrale du premier membre est l'énergie électromagnétique du volume ; l'équation donne donc la variation de cette énergie exprimée par des grandeurs qui se rapportent à la surface seulement de l'espace considéré.

4. *Isolants isotropes*

Dans les isolants homogènes isotropes les phénomènes ont lieu, sous le rapport qualitatif, de la même manière que dans l'éther libre. Sous le rapport quantitatif, la différence consiste en premier lieu en ce que la constante intérieure a une valeur différente de celle de l'éther, et en second lieu en ce que l'énergie disponible contient les constantes ε et μ de la manière déjà fixée. Nous nous conformons à cet énoncé et nous satisfaisons aux faits expérimentaux en faisant :

$$4a.\quad\begin{cases} A\mu\dfrac{dL}{dt}=\dfrac{dZ}{dy}-\dfrac{dY}{dz}\\ A\mu\dfrac{dM}{dt}=\dfrac{dX}{dz}-\dfrac{dZ}{dx}\\ A\eta\dfrac{dN}{dt}=\dfrac{dY}{dx}-\dfrac{dX}{dy}\end{cases}\qquad 5b.\quad\begin{cases} A\varepsilon\dfrac{dX}{dt}=\dfrac{dM}{dz}-\dfrac{dN}{dy}\\ A\varepsilon\dfrac{dY}{dt}=\dfrac{dN}{dx}-\dfrac{dL}{dz}\\ A\varepsilon\dfrac{dZ}{dt}=\dfrac{dL}{dy}-\dfrac{dM}{dx}\end{cases}$$

Supposons en effet pour un instant que les forces dans un isolant soient mesurées d'après le principe établi pour leur mesure dans l'éther libre, et remplaçons par conséquent dans ces équations X, Y, Z par $X/\sqrt{\varepsilon}$, $Y/\sqrt{\varepsilon}$, $Z/\sqrt{\varepsilon}$, et de même L, M, N par $L/\sqrt{\mu}$, $M/\sqrt{\mu}$, $N/\sqrt{\mu}$. Elles prennent bien une forme identique à celles de l'éther sauf que la grandeur A est remplacée par $A/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Si maintenant nous conservons le mode adopté de mesures des forces, nous trouvons que les équations donnent pour l'énergie l'expression voulue. En effet, les mêmes opérations qu'au paragraphe

7. ou encore : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{4\pi A}\int(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.

précédent donnent ici :

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\right\}d\tau$$

$$= \frac{1}{4\pi A}\int\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,y$$

$$+(MX-LY)\cos n,z\}d\omega.$$

Les principes généraux qui nous ont permis d'établir nos équations nous font défaut si nous ne pouvons plus considérer l'isolant comme homogène. On peut donc douter si dans ce cas les équations soient encore valables. L'expérience résout la question dans un sens affirmatif, et il en résulte que dans les équations 4 *a* et 4 *b* les quantités ε et μ peuvent devenir des variables dépendant du point considéré.

[...] Hertz donne ici la généralisation de ses équations aux milieux anisotropes.

6. *Distribution des forces dans les conducteurs*

Dans les corps considérés jusqu'ici, toute variation de la force électrique paraît dépendre de l'état préalable de la force magnétique. Si les forces magnétiques sont nulles dans tout l'intérieur d'un espace fini, toute cause de variation fait défaut et une distribution donnée des forces électriques persiste invariablement aussi longtemps qu'une perturbation franchissant les limites de l'espace considéré n'y pénètre pas. Dans un grand nombre de corps, au contraire, la force électrique laissée à elle-même disparaît plus ou moins rapidement, et dans les corps de cette espèce des forces magnétiques ou d'autres causes sont nécessaires pour s'opposer à cette tendance.[8]

Pour des raisons qui seront exposées plus loin nous appelons ces corps conducteurs. L'hypothèse la plus simple à faire à leur sujet est en premier lieu que la perte subie par la force électrique dans l'unité de temps est proportionnelle à la force elle-même, et en second lieu qu'indépendamment de cette perte les forces magnétiques tendent à déterminer les mêmes variations que dans les autres corps. Introduisant une nouvelle constante λ, le premier principe énoncé revient à admettre que la composante X laissée à elle-même se modifie d'après l'équation $A\varepsilon dX/dt = -4\pi\lambda AX$.

8. Plus précisément, ce sont les forces électromotrices d'induction électromagnétique et celles d'origines électrochimique ou thermoélectrique qui s'opposent à l'amortissement du champ électrique.

Le second complète le premier en exprimant que si les forces magnétiques existent la modification a lieu d'après l'équation $A\varepsilon dX/dt = dM/dz - dN/dy - 4\pi\lambda AX$. La constante λ s'appelle la conductibilité spécifique du corps mesurée dans le système électrostatique. Sa dimension est la réciproque d'une durée. La grandeur $\varepsilon/4\pi\lambda$ est par conséquent une durée ; c'est le temps qu'il faut pour qu'une force laissée à elle-même devienne la *e* ième partie de sa valeur initiale, et qu'on a appelé temps de relaxation. Cette grandeur est, ainsi que l'a fait ressortir le premier M. E. Cohn,* distincte de λ et constitue une seconde constante intérieure du corps qui est complètement déterminée sans la considération auxiliaire d'un second milieu.

Nos énoncés nous conduisent ainsi par induction aux équations suivantes qui satisfont aux faits d'observation :

$$6a.\quad \begin{cases} A\mu \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz} \\ A\mu \dfrac{dM}{dt} = \dfrac{dX}{dz} - \dfrac{dZ}{dx} \\ A\mu \dfrac{dN}{dt} = \dfrac{dY}{dx} - \dfrac{dX}{dy} \end{cases} \qquad 6b.\quad \begin{cases} \mathrm{A}\varepsilon \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX \\ A\varepsilon \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dN}{dx} - \dfrac{dL}{dz} - 4\pi\lambda AY \\ A\varepsilon \dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{dL}{dy} - \dfrac{dM}{dx} - 4\pi\lambda AZ. \end{cases}$$

Ces équations ne s'appliquent évidemment qu'aux corps isotropes, mais n'exigent pas nécessairement, comme nous l'avons laissé implicitement admis, que les corps soient homogènes. Avant toutefois de pouvoir les appliquer au cas d'un corps non homogène, nos équations ont besoin d'une certaine extension. En effet lorsque la constitution d'un corps varie d'un point à l'autre, la force électrique laissée à elle-même ne diminue pas jusqu'à devenir nulle mais tend vers une certaine limite différente de zéro.[9] Nous appelons cette valeur dont les composantes sont X', Y', Z' force électromotrice agissant au point donné. Nous la supposons indépendante du temps ; elle est en général d'autant plus grande que la variation de constitution chimique pour l'unité de longueur est grande elle-même. Nous tenons compte de l'action de la force électromotrice en évaluant la diminution de la force électrique laissée à elle-même comme étant proportionnelle non à sa valeur absolue mais à la différence entre cette valeur absolue et la valeur limite. Nos équations pour des conducteurs dont la

* Consulter à ce sujet et sur la manière dont la grandeur λ est introduite ici : E. Cohn, *Sitzungsber. d. Berl. Akad.*, XXVI, p. 405.

9. Hertz fait ici allusion aux effets électrochimiques et thermoélectriques.

structure donne lieu à la production de la force électromotrice deviennent ainsi[10]

$$6c.\quad \begin{cases} A\mu \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz} \\ A\mu \dfrac{dM}{dt} = \dfrac{dX}{dz} - \dfrac{dZ}{dx} \\ A\mu \dfrac{dN}{dt} = \dfrac{dY}{dx} - \dfrac{dX}{dy} \end{cases} \qquad 6d.\quad \begin{cases} A\varepsilon \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy} - 4\pi\lambda A(X - X') \\ A\varepsilon \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dN}{dx} - \dfrac{dL}{dz} - 4\pi\lambda A(Y - Y') \\ A\varepsilon \dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{dL}{dy} - \dfrac{dM}{dx} - 4\pi\lambda A(Z - Z'). \end{cases}$$

[...] Suit une extension aux corps anisotropes et une discussion des conditions aux limites à la frontière de deux milieux différents. Hertz obtient ces conditions en partant du cas d'une transition graduelle entre les deux milieux et en exigeant qu'aucun terme infini n'apparaisse dans les équations fondamentales lors du passage à la limite d'une transition brutale.

Chacun des paragraphes précédents a augmenté le nombre des faits d'observation que comprend la théorie. Ne donnant que de nouvelles désignations, les paragraphes qui suivent ont une autre tendance. Ils ne forment qu'une partie auxiliaire de la théorie : leur valeur consiste soit dans la concision des énoncés qu'ils permettent, soit dans un moyen de relier notre théorie aux anciennes notions de la science de l'électricité.

9. *Polarisation électrique et magnétique*

En tant que nos équations se rapportent à des milieux isotropes, chacune donne la valeur, pour l'instant immédiatement ultérieur, d'une des grandeurs physiques considérées exprimée comme fonction univoque de l'état actuel. Cette forme des équations est avantageuse au point de vue mathématique parce qu'elle implique que les équations détermineront complètement le déroulement de tout processus, quel que soit le mode d'excitation. Elle est satisfaisante aussi au point de vue philosophique, parce qu'elle fait connaître par le premier membre de l'équation l'état futur et par le second membre, comme cause du premier, l'état présent. Celles de nos équations qui se rapportent aux milieux anisotropes n'ont pas une forme également simple, puisque le premier membre ne représente pas la variation

10. ou encore : $A\mu\partial\mathbf{H}/\partial t = -\nabla\times\mathbf{E}$ et $A\varepsilon\partial\mathbf{E}/\partial t = \nabla\times\mathbf{H} - 4\pi\lambda A(\mathbf{E}-\mathbf{E}')$.

d'une seule quantité mais une fonction de ces variations.[11] Toutefois, comme ces fonctions sont linéaires, il est possible, en résolvant les équations par rapport aux variations séparées, de leur donner la forme voulue. Un autre moyen d'obtenir ce résultat consiste à introduire les quantités que nous désignons par polarisations. Nous faisons :

$$9c.\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \rho_{11}L + \rho_{12}M + \rho_{13}N \\ \mathfrak{M} = \rho_{12}L + \rho_{22}M + \rho_{23}N \\ \mathfrak{N} = \rho_{13}L + \rho_{23}M + \rho_{33}N \end{cases} \qquad 9d.\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \rho_{13}Z \\ \mathfrak{Y} = \varepsilon_{12}X + \varepsilon_{22}Y + \rho_{23}Z \\ \mathfrak{Z} = \varepsilon_{13}X + \varepsilon_{23}Y + \rho_{33}Z \end{cases}$$

et appelons la résultante de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ la polarisation magnétique et la résultante des $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ la polarisation électrique. Pour les milieux isotropes, les polarisations et les forces ont la même direction et le rapport des premières aux secondes se trouve être respectivement la constante diélectrique et la constante magnétique. Pour l'éther les polarisations et les forces sont identiques. En introduisant les polarisations dans le premier membre de nos équations, chaque équation donne la variation d'une seule composante de polarisation, en fonction des forces à l'instant correspondant. Comme les forces sont des fonctions linéaires des polarisations, il est aisé d'introduire les polarisations également dans le second membre. Nous aurions ainsi substitué à la grandeur dirigée par laquelle nous avons en premier lieu représenté l'état électromagnétique, à la force, la polarisation qui lui est équivalente mais ne saurait pas présenter beaucoup d'avantages. Le fait que la considération simultanée des polarisations et des forces simplifie notablement les équations, indique qu'il faut au moins deux grandeurs dirigées pour l'expression complète soit de l'état électrique soit de l'état magnétique.

Afin de simplifier davantage nos équations, nous faisons

$$9e.\quad \begin{cases} u = \lambda_{11}(X - X') + \lambda_{12}(Y - Y') + \lambda_{13}(Z - Z') \\ v = \lambda_{21}(X - X') + \lambda_{22}(Y - Y') + \lambda_{23}(Z - Z') \\ w = \lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z'). \end{cases}$$

11. Ces équations [données dans une section omise] ont la forme $A[\mu]\partial\mathbf{H}/\partial t = -\nabla\times\mathbf{E}$ et $A[\varepsilon]\partial\mathbf{E}/\partial t = \nabla\times\mathbf{H} - 4\pi\lambda A(\mathbf{E}-\mathbf{E}')$, où $[\varepsilon]$ et $[\mu]$ sont des opérateurs linéaires symétriques que Hertz représente par des matrices 3×3. Par la suite, Hertz définit les polarisations $\mathbf{D} = [\varepsilon]\mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H}$.

Pour des raisons que l'on trouvera dans le paragraphe suivant nous appelons u, v, w les composantes (mesurées électrostatiquement) du courant électrique.

Nos équations les plus générales prennent maintenant la forme :[12]

$$9a.\begin{cases} A\dfrac{d\mathfrak{L}}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz} \\ A\dfrac{d\mathfrak{M}}{dt} = \dfrac{dX}{dy} - \dfrac{dZ}{dx} \\ A\dfrac{d\mathfrak{N}}{dt} = \dfrac{dY}{dx} - \dfrac{dX}{dy} \end{cases} \qquad 9b.\begin{cases} A\dfrac{d\mathfrak{X}}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy} - 4\pi Au \\ A\dfrac{d\mathfrak{Y}}{dt} = \dfrac{dN}{dx} - \dfrac{dL}{dz} - 4\pi Av \\ A\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dt} = \dfrac{dL}{dy} - \dfrac{dM}{dx} - 4\pi Aw \end{cases}$$

et l'expression de l'énergie électromagnétique de l'unité de volume devient par l'introduction des polarisations :

$$\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z) + \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)\,.$$

Aucune qualité spécifique se rapportant aux corps considérés n'entre dans l'expression de ces énoncés. Le principe établissant que les équations 9*a* et 9*b* doivent être satisfaites pour tout point de l'espace infiniment étendu, comprend tous les problèmes relatifs à ce domaine, et la diversité infinie de ces problèmes consiste seulement en ceci que les constantes des relations linéaires 9*c*, 9*d*, 9*e*, c'est-à-dire les ε, μ, λ, X', Y', Z' peuvent être des fonctions de l'espace comportant une grande diversité de variation, soit continue, soit discontinue.

10. *Électricité et magnétisme*

Soit un système de corps pondérables dans lequel des actions électromagnétiques sont en jeu et qui se trouve séparé par le vide de tout autre système. En différentiant les trois équations 9*b* respectivement par rapport à x, y, z et en les ajoutant, nous obtenons pour tout point du système :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right) = -4\pi\left(\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dz}\right).$$

Nous multiplions cette équation par l'élément de volume $d\tau$ et nous intégrons relativement à un volume limité par une surface comprenant le système pondérable. Soit $d\omega$ l'élément de surface et soient n, x, n, y, n, z les angles de la direction normale à l'élément avec les axes. Comme les u, v, w

12. ou encore : $A\partial\mathbf{B}/\partial t = -\nabla\times\mathbf{E}$ et $A\partial\mathbf{D}/\partial t = \nabla\times\mathbf{H} - 4\pi A\mathbf{j}$.

sont nuls à la surface, nous obtenons[13]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau = \frac{d}{dt}\int(\mathfrak{X}\cos n,x+\mathfrak{Y}\cos n,y+\mathfrak{Z}\cos n,z)d\omega$$
$$= -4\pi\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)d\tau = -4\pi\int(u\cos n,x+v\cos n,y\cdot$$
$$+\,w\cos n,z)d\omega = 0.$$

Par conséquent, si *e* désigne une quantité indépendante du temps

$$10a.\quad \int\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)d\tau = \int(\mathfrak{X}\cos n,x+\mathfrak{Y}\cos n,y$$
$$+\,\mathfrak{Z}\cos n,z)d\omega = 4\pi e.$$

La quantité *e* qui vient d'être introduite est, comme on le voit, une fonction de l'état électrique du système et une fonction telle qu'elle ne peut être augmentée ou diminuée par aucune action électrodynamique intérieure ou extérieure. L'invariabilité de la quantité *e*, qui reste vraie pour des perturbations non électrodynamiques intérieures au système, a donné lieu à la supposition que *e* est la quantité d'une substance renfermée dans le système.

Conformément à cette notion, nous appelons *e* la quantité d'électricité renfermée dans le système pondérable. Mais *e* peut être positif ou négatif, tandis qu'une quantité de substance est forcément positive. On a donc complété l'hypothèse par la notion de deux électricités de propriétés opposées et on a donné à *e* pour signification la différence des deux ou on a résolu la difficulté en admettant que *e* représente l'écart de la quantité réelle à la quantité normale d'électricité. Mais que sous une forme ou sous l'autre on assimile *e* à la quantité d'une substance, il faut que chaque élément $d\tau$ entre pour sa partie aliquote dans la valeur d'ensemble. Il faut avoir recours à une hypothèse pour précision cette répartition. Une première possibilité est de donner à l'élément de volume $d\tau$ la quantité d'électricité

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau.$$

Nous convenons d'appeler la quantité d'électricité de l'élément de volume ainsi évaluée l'électricité vraie de l'élément ; il en résulte que l'expression

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)$$

13. ou encore : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\nabla\cdot\mathbf{D})\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -4\pi\int(\nabla\cdot\mathbf{j})\mathrm{d}\tau = -4\pi\int\mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0$.

à l'intérieur d'un corps est la densité volumique vraie et qu'à la surface de séparation de corps de substances différentes, l'expression

$$\frac{1}{4\pi}\{(\mathfrak{X}_2-\mathfrak{X}_1)\cos n, x+(\mathfrak{Y}_2-\mathfrak{Y}_1)\cos n, y-(\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1)\cos n, z\}$$

est la densité surfacique vraie.

Nous obtenons une autre distribution possible et plausible de e en remarquant que dans le vide la polarisation et la force sont identiques et que par conséquent nous pouvons écrire à la place de $10a$:

$$10b.\quad \begin{cases} 4\pi e = \displaystyle\int (X\cos n, x+Y\cos n, y+Z\cos n, z)\,d\omega \\ \quad\;\; = \displaystyle\int\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)d\tau \end{cases}$$

et alors considérer l'expression

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)d\tau$$

comme la contribution de l'élément $d\tau$ à e. La quantité d'électricité d'un élément de volume ainsi évaluée est appelée l'électricité libre de l'élément, d'où résulte l'expression

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)$$

pour la densité de volume de l'électricité libre et l'expression

$$\frac{1}{4\pi}\{(X_2-X_1)\cos n, x+(Y_2-Y_1)\cos n, y+(Z_2-Z_1)\cos n, z\}$$

pour la densité de surface de l'électricité libre sur la couche de séparation de milieux différents. Nous appelons électricité dissimulée la différence entre l'électricité vraie et l'électricité libre. Ces notions se relient aux notions usitées qui sont fondées sur l'action à distance. D'après celles-ci une partie des quantités d'électricité « vraie » ou d'origine externe introduite dans un isolant est « liée » aux molécules du milieu ambiant par des déplacements électriques,* tandis que le reste demeure « libre » d'exercer son action à distance.[14] Certes notre mode d'expression s'écarte à plusieurs égards du mode usuel – mais comme celui-ci fluctue et manque de cohérence, je n'ai

* qui ne sont pas identiques à nos polarisations.

14. Hertz veut sans doute dire qu'une partie de la charge vraie (supposée concentrée dans une petit volume) est compensée par la charge superficielle du diélectrique polarisé qui l'entoure.

pu trouver de définitions qui ne soient dans aucun cas en contradiction avec le langage usité. Celui-ci fluctue au point d'attribuer sans distinction la désignation d'électricité soit à l'électricité vraie, soit à l'électricité libre.

D'après ce qui précède l'intégrale

$$\int(\mathfrak{X}\cos n, x + \mathfrak{Y}\cos n, y + \mathfrak{Z}\cos n, z)\,d\omega$$

divisée par 4π et étendue à une surface donnée représente l'électricité vraie contenue dans l'intérieur de la surface. Nous appelons nombre des lignes de force électrique qui coupent la surface dans le sens de la normale positive la valeur de cette même intégrale relative à une surface non fermée. Cette définition nous rattache à la conception de Faraday d'après laquelle les lignes de force sont des lignes qui ont en tout point, dans les corps isotropes, la direction de la force et dont le nombre est proportionnel à la grandeur de celle-ci.[15] Nous avons d'autre part complété et précisé cette notion en admettant que les lignes de force, dans un corps quelconque, ont pour direction non la force mais la polarisation et c'est aussi à la grandeur de la polarisation que leur densité est proportionnelle. Nos définitions impliquent que la quantité d'électricité vraie contenue dans un espace donné multipliée par 4π est égale à l'excès du nombre des lignes de force qui entrent sur le nombre de lignes de force qui sortent. Toute ligne de force qui se termine aboutit à de l'électricité vraie et celle-ci pourrait être définie comme l'extrémité libre des lignes de force. Si dans le voisinage de la surface à laquelle se rapporte notre intégrale, il se trouve un espace dépourvu d'électricité vraie, la valeur de l'intégrale ne dépend que de la ligne qui limite la surface tant que celle-ci reste dans cet espace. Dans ce cas, on peut aussi dire que l'intégrale est le nombre de ligne de forces embrassées par cette ligne, moyennant quelques conventions destinées à éliminer toute ambiguïté.

Considérons la variation de l'électricité vraie e_v dans une portion limitée quelconque du système, et soit $d\omega$ l'élément de surface de cette position. Nous obtenons

$$10c.\quad \frac{de_v}{dt} = -\int\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)d\tau$$
$$= -\int(u\cos n, x + v\cos n, y + w\cos n, z)\,d\omega.$$

15. En fait Faraday, comme Hertz, donnait la densité des lignes de force électrique comme proportionnelle à la quantité d'induction électrique, qui correspond à la polarisation **D** de Maxwell et Hertz.

Si la surface limite ne traverse que des corps pour lesquels les λ sont nuls, les u, v, w s'annulent à la surface et la quantité d'électricité vraie contenue est constante. Ainsi hors d'un espace dont la surface limite satisfait à ces conditions il ne peut s'échapper aucune quantité d'électricité vraie par une opération exclusivement électrodynamique.

C'est pour cette raison que de tels corps sont et ont été appelés isolants. Mais si la surface limite traverse des corps pour lesquels les λ sont différents de zéro, la variation du contenu d'électricité vraie devient possible par des mouvements purement électriques et les corps de cette espèce sont appelés conducteurs. La distinction entre les isolants et les conducteurs est donc relative à l'électricité vraie ; à l'égard de l'électricité libre tous les corps peuvent être considérés comme conducteurs (courants de déplacement).[16] La quantité d'une substance ne peut varier dans l'intérieur d'un espace limité que par l'introduction ou la sortie d'une certaine quantité de la substance à travers la surface limite. La donnée que toute surface fermée est traversée dans l'unité de temps par la quantité définie par notre intégrale, est compatible avec l'hypothèse qu'au travers un élément de surface unité passe la quantité

$$u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z\,.$$

Conformément à cette hypothèse, on appelle et appelait u, v, w les composantes du courant électrique et l'intégrale

$$\int (u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z)\, d\omega$$

étendue à une surface non fermée le courant électrique qui traverse cette surface. Il faut remarquer cependant que cette hypothèse est arbitraire à un certain point, même si l'on admet la substantialité de l'électricité. On peut superposer à un instant quelconque au système de courants trouvé un système arbitraire de courants fermés sans changer en aucun point l'augmentation ou la diminution d'électricité.

Si une partie du système a passé d'un état non électrique à son état actuel par un processus purement électromagnétique ou peut y revenir, alors

16. Cette remarque semble peu pertinente, car si la permittivité est constante sur la surface limite, la charge libre contenue à l'intérieur de cette surface est proportionnelle à la charge vraie et donc ne varie pas plus que cette dernière quand la surface est isolante. Mais il est vrai que le courant de conduction se réfère à la charge vraie en ce sens que l'équation de conservation $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial\rho/\partial t$ ne vaut que pour la charge vraie $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$.

l'électricité vraie est nulle dans tous les isolants de cette partie. Pour de telles parties du système on doit donc joindre aux équations générales les équations suivantes qui restreignent les états initiaux possibles :

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}=0$$

pour l'intérieur des isolants ;

$$(\mathfrak{X}_2-\mathfrak{X}_1)\cos n, x+(\mathfrak{Y}_2-\mathfrak{Y}_1)\cos n, y+(\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1)\cos n, z \;=\; 0$$

pour la surface de séparation de deux corps hétérogènes.

Les phénomènes magnétiques donnent lieu à des considérations tout à fait analogues. En partant des équations 9*a*, nous appelons pour l'intérieur d'un corps

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)$$

la densité magnétique de volume vraie, et à la surface de séparation de deux corps

$$\frac{1}{4\pi}\{(\mathfrak{L}_2-\mathfrak{L}_1)\cos n, x+(\mathfrak{M}_2-\mathfrak{M}_1)\cos n, y+(\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_1)\cos n, z\}$$

la densité de surface vraie du magnétisme, et l'intégrale de ces expressions relative à un certain espace le magnétisme vrai contenu dans cet espace. L'intégrale de l'expression

$$\int(\mathfrak{L}\cos n, x+\mathfrak{M}\cos n, y+\mathfrak{N}\cos n, z)\,d\omega$$

étendue à une surface non fermée est appelée le nombre de lignes de force magnétique à travers cette surface ou embrassées par le contour de cette surface. Enfin nous appelons pour l'intérieur d'un corps

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\right)$$

la densité de volume et à la surface de séparation

$$\frac{1}{4\pi}\{(L_2-L_1)\cos n, x+(M_2-M_1)\cos n, y+(N_2-N_1)\cos n, z\}$$

la densité de surface du magnétisme libre. La différence entre les conducteurs et les isolants fait ici défaut, car les équations 9*a* n'ont pas de terme correspondant aux u, v, w des équations 9*b*. Relativement au magnétisme libre tous les corps sont compris dans la catégorie des conducteurs.[17]

17. On peut faire ici une critique analogue à celle de la note (16).

Si un système ou une partie d'un système ont passé d'un état non magnétique à l'état actuel ou peuvent subir le changement inverse par une opération électromagnétique, l'intérieur d'un corps satisfait à l'équation

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}=0\,,$$

et la surface de séparation à l'équation

$$(\mathfrak{L}_2-\mathfrak{L}_1)\cos n,x+(\mathfrak{M}_2-\mathfrak{M}_1)\cos n,y+(\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_1)\cos n,z\ =\ 0,$$

équations qui jointes aux équations générales concourent à déterminer l'état initial.

11. *Conservation de l'énergie*

Désignons par S l'énergie électromagnétique d'un espace τ limité par la surface ω. Nous calculons la variation de S en multipliant toutes les équations 9*a* et 9*b* par $d\tau/4\pi A$, puis chacune respectivement par L, M, N, X, Y, Z, en additionnant et en intégrant relativement à l'espace τ. Nous obtenons :[18]

$$11a.\quad \frac{dS}{dt}=\frac{1}{4\pi A}\int\{(NY-MZ)\cos n,x+(LZ-NX)\cos n,\mathrm{y}$$
$$+(MX-LY)\cos n,z\}dw-\int(uX+vY+wZ)d\tau.$$

En étendant l'espace τ à celui d'un système électromagnétique complet, c'est-à-dire jusqu'à une surface sur laquelle les forces s'annulent, notre équation devient

$$\frac{dS}{dt}=-\int(uX+vY+wZ)d\tau.$$

Ainsi la conservation de l'énergie exige que dans tout système qui n'est soumis à aucune influence extérieure, une quantité d'énergie exprimée par l'intégrale du second membre se produise dans l'unité de temps sous une forme autre que celle d'énergie électromagnétique. Les faits expérimentaux s'accordent avec cet énoncé ; ils prouvent en outre que chaque élément de volume $d\tau$ contribue au total de l'énergie transformée pour la proportion $(uX+vZ+wZ)d\tau$, et montrent quelles nouvelles formes l'énergie affecte. La preuve expérimentale n'a pas toutefois, à proprement parler, un caractère général, mais est restreinte aux cas particuliers suivants. Dans l'intérieur d'un

18. ou encore : $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{4\pi A}\int(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}-\int\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau.$

conducteur homogène isotrope, la quantité d'énergie développée pendant l'unité de temps dans l'unité de volume prend d'après la théorie comme aussi d'après les résultats de l'observation la forme :

$$\lambda(X^2 + Y^2 + Z^2) = \frac{1}{\lambda}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Elle est toujours positive et correspond à un développement de chaleur – l'effet Joule. À la limite de deux corps isotropes homogènes, l'énergie qui se produit dans l'unité de volume prend la forme $uX' + vZ' \; wZ'$ et une intégration relative à la couche de passage donne pour l'énergie dans l'unité de surface de la couche limite

$$(u \cos n, x + v \cos n, y + w \cos n, z) \cdot \varphi_{1,2}$$

expression qui est confirmée par l'expérience.[19] Cette expression peut être positive ou négative correspondant à une disparition ou à une production d'énergie sous une autre forme. Ou bien cette énergie étrangère est de la chaleur – l'effet Peltier – dans lequel cas nous qualifions la force électromotrice agissante de thermoélectrique, ou bien la transformation comprend aussi de l'énergie chimique dans lequel cas la force est dite électrochimique.

Considérons maintenant pour une certaine portion limitée de notre système la variation totale d'énergie, c'est-à-dire la quantité

$$\frac{dS}{dt} + \int (uX + vY + wZ)\, d\tau.$$

Nous trouvons d'après ce qui précède que cette variation est égale à une intégrale étendue à la surface limitant la portion d'espace. La variation d'énergie disponible d'une portion quelconque d'espace est donc évaluée correctement lorsqu'on suppose qu'elle passe au travers de la surface, comme le ferait une substance, et dans une proportion telle que la quantité

$$\frac{1}{4\pi A}\{(NY - MZ)\cos n, x + (LZ - NX)\cos n, y + (MX - LY)\cos n, z\}$$

traverse l'unité de surface. La discussion géométrique de cette expression fait voir qu'elle a pour conséquence l'énoncé suivant : l'énergie se meut suivant une direction qui est perpendiculaire aux directions de la force électrique et de la force magnétique et le flux dans l'unité de temps à travers l'unité de

19. Le symbole $\varphi_{1,2}$ représente la discontinuité normale de la force électromotrice.

surface est égal au produit des deux forces par le sinus de l'angle compris entre elles et le facteur $1/4\pi A$. C'est là le principe de la très remarquable théorie de M. Poynting sur le mouvement de l'énergie dans le champ électromagnétique.[*] En cherchant à apprécier sa signification physique, nous devons en premier lieu remarquer que la décomposition de notre intégrale de surface dans ses éléments était hypothétique et que certaines conséquences auxquelles on est conduit par cette théorie ne sont pas vraisemblables. Si un aimant permanent en repos se trouve à côté d'un corps électrisé, il faut que l'énergie dans son voisinage prenne un mouvement continu le long de circuits fermés. Une difficulté d'un ordre plus important me semble consister dans la question de savoir si la localisation de l'énergie et son passage de point en point ont une signification suffisante dans l'état actuel de nos connaissances. Les transformations d'énergie les plus simples de la mécanique ordinaire ne donnent pas lieu encore à des considérations de cette nature ; reste donc à savoir si la notion d'énergie est susceptible d'être traitée par un tel procédé et dans quelles limites.

12. *Forces pondéromotrices.*

Nous considérons les forces mécaniques qui se manifestent entre des corps pondérables dans le champ électromagnétique, comme les résultantes des pressions qui se développent par suite des perturbations électromagnétiques dans l'éther et dans les autres corps. Il en résulte que les forces mécaniques agissant sur un corps sont complètement déterminées par l'état électromagnétique dans son voisinage immédiat, sans qu'il y ait lieu de rechercher quelles en sont les causes. Nous posons en principe que les pressions auxquelles les corps sont soumis sont telles qu'il n'existe pas de résultante tendant à mettre l'éther en mouvement. Sans cette hypothèse notre système serait incorrect ou incomplet, car on ne pourrait alors parler de forces électromagnétiques dans l'éther en repos. Cette supposition a pour conséquence que les forces mécaniques à constater entre les corps pondérables satisfont à l'égalité de l'action et de la réaction.[20]

On doit maintenant se demander si l'on trouve pour la pression une forme qui réponde à ces intuitions et qui explique les résultats observés. Maxwell et, avec une plus grande généralité, von Helmholtz ont obtenu des

* J.-H. Poynting, *Phil. Transactions*, 1884, II, p. 343.
20. Hertz refusait ainsi d'attribuer une quantité de mouvement au champ électromagnétique, ce que font pourtant les physiciens d'aujourd'hui (sur les traces de Heaviside et de Max Abraham).

expressions qui satisfont à toutes les conditions exigées pour le cas d'un état statique et stationnaire. Mais dans le cas général d'un état variable ces mêmes pressions devraient mettre l'éther en mouvement.[21] Nous considérons à cause de cela que l'expression complète des pressions n'a pas encore été trouvée, nous évitons de spéculer sur cette question et nous préférons obtenir les forces pondérables au moyen des énoncés déjà établis, au moyen du principe de la conservation de l'énergie et au moyen de l'énoncé expérimental suivant : Si les corps pondérables d'un système dans lequel se produisent des phénomènes électriques ou magnétiques et qui demeure toujours infiniment voisin d'un état statique se meuvent les uns par rapport aux autres, et si l'on considère comme invariable et liée à l'élément chaque quantité d'électricité vraie ou de magnétisme vrai qui se trouve dans chaque élément, le travail mécanique dépensé pour mouvoir les corps ne peut trouver sa compensation que dans l'accroissement de l'énergie électromagnétique disponible et par conséquent lui est équivalent.

Il reste à se demander s'il est possible de trouver une expression des pressions exactement conforme à ces exigences. Si ce n'était pas le cas, l'ensemble de nos suppositions renfermerait quelque contradiction qui exigerait une correction. Les changements nécessités sont toutefois de telle nature que leur influence ne porte sur aucun des phénomènes observés jusqu'ici. Il faut du reste souligner que si notre théorie offre ici une lacune, elle ne se trouve pas dans les principes fondamentaux mais dans les développements. En effet étant donné notre point de départ, la production des forces mécaniques est un phénomène secondaire des forces électromagnétiques ; on pourrait traiter la théorie de celles-ci sans même mentionner les premières ainsi que nous l'avons fait pour les autres phénomènes secondaires de moindre importance que nous avons omis.

[...] Dans la seconde partie de son mémoire, Hertz déduit les lois connues de l'électrostatique, de la magnétostatique, des courant stationnaires et de l'optique à partir de ses équations fondamentales.

21. En effet la densité de force résultant du tenseur des contraintes de Maxwell contient un terme $\partial(\mathbf{D}\times\mathbf{B})/\partial t$, que nous interprétons aujourd'hui comme le taux de variation de la densité de quantité de mouvement électromagnétique $\mathbf{D}\times\mathbf{B}$.

Chapitre 4

La théorie de Lorentz

La théorie de Hertz, aussi adaptée qu'elle fût aux phénomènes électrodynamiques ordinaires et à l'étude des ondes hertziennes, avait l'inconvénient de ne pas rendre compte de phénomènes bien connus de l'optique des corps en mouvement, de la dispersion optique, et de la magnéto-optique. Maxwell et ses disciples se doutaient que ces phénomènes dépendaient de la structure moléculaire de la matière, mais ils préféraient en général se confiner à des raisonnements macroscopiques plus conformes à l'esprit maxwellien. Et ils considéraient les concepts électriques comme des concepts macroscopiques dont l'éventuel soubassement microphysique était d'essence mécanique. En revanche, sur le continent, les disciples de Wilhelm Weber n'hésitaient pas à introduire des notions de particule d'électricité, d'ion et de courant intramoléculaire dans leurs analyses des phénomènes électrochimiques, magnétiques et magnéto-optiques.[1]

À la croisée de ces deux traditions, le physicien néerlandais Hendrik Antoon Lorentz chercha à intégrer des considérations atomistiques dans la théorie électromagnétique de la lumière. La tâche était éminemment difficile, car elle impliquait d'assimiler et de combiner des modes de représentations et des techniques mathématiques très diverses et même contradictoires. Mais Lorentz, en polyglotte ouvert sur toutes les cultures européennes, avait lu avec une égale pénétration les grands auteurs français, allemands et britanniques. Et il avait le don d'exposer les sujets les plus complexes et les plus mathématiquement abstrus avec une clarté éblouissante. Le succès de sa nouvelle électrodynamique fut tel que les physiciens d'aujourd'hui tendent à appeler « théorie de Maxwell » une théorie de Lorentz fondée sur des concepts de charge et de courant électrique radicalement opposés à ceux de Maxwell !

Dès son travail de thèse de 1875 sur la théorie électromagnétique de la lumière, Lorentz signalait déjà la nécessité d'introduire la structure moléculaire pour aborder la dispersion, l'effet Faraday, et les spectres lumineux. Il le fit lui-même pour la dispersion dans un mémoire de 1878, en introduisant l'idée d'une polarisation due au déplacement d'ions élastiquement liés aux molécules du milieu. Contrairement à

1. Voir Buchwald 1985.

Faraday et Maxwell, qui traitaient le vide et les diélectriques matériels sur le même pied, Lorentz distinguait deux contributions au déplacement **D** : un terme $\varepsilon_0\mathbf{E}$ appartenant à l'éther, et un terme **P** correspondant à l'écart des ions par rapport à leur position d'équilibre.

Vers 1890, Lorentz poursuivit cette séparation entre l'éther et matière en réduisant tous les phénomènes électromagnétiques à l'interaction mutuelle de particules chargées *via* l'éther. Il donnait à de telles particules le non générique d' « ions », qu'il s'agisse ou non des ions de l'électrolyse. Comme dans les théories weberiennes, un courant de conduction correspondait à la migration d'ions à travers le conducteur ; la polarisation d'un diélectrique matériel à un déplacement microscopique d'ions ; le magnétisme à une variation ou à une orientation de courants moléculaires. Par souci de simplicité et par conformité avec une hypothèse qu'Augustin Fresnel avait faite en 1818 pour rendre compte de l'aberration des étoiles,[2] Lorentz admettait que le mouvement des ions à travers l'éther se faisait sans que celui-ci bougeât aucunement :[3]

> « Il m'a semblé utile de développer une théorie des phénomènes électromagnétiques basée sur l'idée d'une matière pondérable parfaitement perméable à l'éther et pouvant se déplacer sans communiquer à ce dernier le moindre mouvement. Certains faits de l'optique peuvent être invoqués à l'appui de cette hypothèse et, bien que le doute soit encore permis, il importe certainement d'examiner toutes les conséquences de cette manière de voir. »

Il suffisait alors d'appliquer les équations de Maxwell (dans le vide) au champ créé par les ions, en tenant compte du courant de convection des ions (le produit de leur charge par leur vitesse) ; puis de faire agir la force électromagnétique, dite de Lorentz, $q(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b})$ sur un ion de charge q et de vitesse **v** plongé dans les champs microscopiques **e** et **b** ; et enfin de moyenner les diverses équations microscopiques sur un élément macroscopique du milieu matériel pour obtenir des équations pour les champs macroscopiques **E** et **B**. Dans le cas de corps macroscopiques en mouvement, les équations ainsi obtenues rendaient compte de l'entraînement partiel des ondes lumineuses par un milieu transparent en mouvement (coefficient de Fresnel). Hippolyte Fizeau avait confirmé cet effet en 1851 en faisant interférer des faisceaux lumineux issus de la même source mais ayant traversé deux courants d'eau de directions opposées. L'explication de Lorentz apportait une nouveauté essentielle, car les théories maxwelliennes, y compris celle de Hertz, traitaient l'éther et la matière sur le même pied et prévoyaient donc un entraînement total des ondes lumineuses par la matière en mouvement. La théorie de Lorentz permettait aussi d'expliquer les phénomènes magnétiques et magnéto-optiques, dont l'effet de triplement de certaines raies spectrales dans un champ magnétique découvert par Pieter Zeeman en 1896. Dans la dernière décennie du XIX^e, elle s'imposa comme la plus propre à rendre compte de

2. On appelle ainsi l'erreur que le mouvement de la terre implique dans l'appréciation de la position des étoiles dans le ciel.

3. Lorentz, extrait n° 7, p. 228.

l'ensemble des phénomènes électromagnétiques et optiques connus. Elle bénéficia aussi du développement contemporain d'une microphysique expérimentale des ions et des électrons.

Comme Lorentz, les physiciens d'aujourd'hui considèrent que les équations de Maxwell ne s'appliquent rigoureusement qu'aux deux champs microscopiques **e** et **b** sous la forme

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\partial \mathbf{b}/\partial t, \quad \nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 (\rho_m \mathbf{v} + \varepsilon_0 \partial \mathbf{e}/\partial t), \quad \nabla \cdot \mathbf{e} = \rho_m/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0,$$

où ρ_m est la densité microscopique de charge et **v** sa vitesse de déplacement. Ils admettent aussi la formule de Lorentz

$$\mathbf{f} = \rho_m(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b})$$

pour la densité de force électromagnétique agissant sur les charges. Les équations macroscopiques sont obtenues en moyennant les équations microscopiques. Interviennent alors quatre champs macroscopiques :

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle, \quad \mathbf{H} = \langle \mathbf{h} \rangle, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

où **P** est la polarisation moyenne (due à des déplacements microscopiques de charges liées), et **M** le moment magnétique moyen (dû à des courants microscopiques ou à des spins). Dans le cas des corps au repos, ces quatre champs vérifient les équations de Maxwell-Hertz

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}/\partial t, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

où

$$\mathbf{j} = \langle \rho_m \mathbf{v} \rangle - \partial \mathbf{P}/\partial t - \nabla \times \mathbf{M}$$

désigne le courant de conduction obtenu par soustraction du courant de polarisation et du courant d'aimantation au courant moyen total, et

$$\rho = \langle \rho_m \rangle + \nabla \cdot \mathbf{P}$$

désigne la charge libre obtenue en soustrayant la charge de polarisation ($-\nabla \cdot \mathbf{P}$) à la charge moyenne totale.

Du point de vue de Lorentz, la conception maxwellienne de la charge comme discontinuité du déplacement et celle du courant comme variation ou propagation de déplacement ne sont applicables qu'à l'échelle des ions. À l'échelle macroscopique, le courant de conduction résulte du transfert de charges microscopiques, et le déplacement **D** comprend une contribution **P** due à une petite séparation des charges microscopiques positives et négatives à l'intérieur des molécules de matière, comme dans les vieilles théories de la polarisation. Si bien que les physiciens d'aujourd'hui préfèrent oublier complètement l'intuition maxwellienne de l'électricité et n'appeler courant que la convection de charges. Comme le pressentait Hertz, nous avons gardé les équations de Maxwell mais presque totalement perdu leur interprétation maxwellienne. Le seul vestige de cette interprétation est le maintien, dans le Système International d'unités, d'un paramètre ε_0 de « permittivité du vide ».

Qu'en advint-il du rapport des équations de Maxwell avec la mécanique ? On a vu que Maxwell, après avoir obtenu ses équations dans le contexte d'un modèle mécanique précis, favorisa une approche dynamique plus abstraite, selon laquelle les équations fondamentales devaient se mettre sous forme lagrangienne. Helmholtz et Henri Poincaré saluèrent cette nouvelle approche comme l'inauguration d'une nouvelle « physique des principes » dans laquelle on ne chercherait plus à exhiber une représentation mécanique explicite des phénomènes physiques, mais on continuerait d'exiger la compatibilité de toute théorie avec des principes généraux de la mécanique tels que le principe de conservation de l'énergie ou le principe de moindre action. Heaviside et Hertz préféraient se passer de ce dernier principe et poser les équations de Maxwell d'une manière quasi axiomatique. En revanche, Helmholtz, Poincaré et Lorentz jugèrent utile de donner un fondement lagrangien à l'électrodynamique de Maxwell. Comme on le sait, les physiciens d'aujourd'hui considèrent ce fondement comme indispensable, ne serait-ce que parce qu'il sert de base à la version quantique de l'électrodynamique.

Lorentz ne se contentait pas d'établir la forme lagrangienne de ses équations. Comme on le verra dans l'extrait qui suit, il montrait aussi comment elles se raccordaient aux équations de Maxwell et de Hertz, et comment elles permettaient de retrouver les lois les mieux établies de l'électrodynamique macroscopique. Cependant, il sentait bien que certains de ces contemporains regretteraient l'abandon d'un idéal mécaniste plus exigent et il leur demandait seulement d'admettre la simplicité et l'efficacité descriptive de ses hypothèses :[4]

> « Dans le chemin qui nous a conduits à ces équations nous avons rencontré plus d'une difficulté sérieuse, et on sera probablement peu satisfait d'une théorie qui, loin de dévoiler le mécanisme des phénomènes, nous laisse tout au plus l'espoir de le découvrir un jour. Les physiciens qui éprouvent ce sentiment peuvent toutefois admettre l'idée fondamentale qui a été la base des recherches de Faraday et de Maxwell, et ils peuvent considérer les formules [de Maxwell-Lorentz] comme des équations hypothétiques assez simples qui pourraient servir à la description des phénomènes. »

De fait, les équations de Maxwell-Lorentz sont devenues le fondement de l'électrodynamique classique. Elles ont préparé l'avènement de la relativité restreinte, selon laquelle nous ne nous soucions plus d'imaginer la mécanique d'un éther sous-tendant l'électromagnétisme.

4. Lorentz, extrait n° 7, p. 234.

Extrait n° 7 :

LA THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE MAXWELL ET SON APPLICATION AUX CORPS MOUVANTS

H. A. Lorentz, *Archives néerlandaises* (1892), reproduit dans H.A. Lorentz, *Collected papers*, 9 vols. (La Haye, 1934-39), vol. 2 : 164-321.

TABLE DES MATIÈRES

[...] Dans les trois premières parties, Lorentz reprend la théorie de Maxwell proprement dite. Comme Maxwell, il suppose que l'éther et la matière constituent un seul milieu homogène susceptible de « déplacement », que la divergence de ce déplacement constitue la charge électrique et que sa dérivée temporelle constitue un courant. Il félicite Maxwell d'avoir montré « comment les principes de la mécanique peuvent servir à élucider les questions d'électrodynamique et la théorie des courants induits, sans qu'il soit nécessaire de pénétrer les secret du mécanisme qui produit les phénomènes » (p. 164), et généralise la dérivation lagrangienne des lois de l'induction et des forces électromagnétiques au cas de courants tridimensionnels et de corps en mouvement. Il retrouve ainsi les équations de Maxwell-Heaviside-Hertz pour les corps en mouvement : $\nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{D} \times \mathbf{v}) = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}/\partial t + \rho \mathbf{v}$, $\nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, avec $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ et $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Enfin, il montre que ces équations sont incompatibles avec les lois connues de l'optique des corps en mouvement, car elles supposent un entraînement complet de l'éther par la matière, alors que suivant l'hypothèse d'Augustin Fresnel vérifiée par Hippolyte Fizeau en 1851 les ondes lumineuses ne sont que partiellement entraînées par un milieu transparent en mouvement, avec un coefficient d'entraînement $1-1/n^2$, où n désigne l'indice optique de ce milieu.

CHAPITRE IV

THÉORIE D'UN SYSTÈME DE PARTICULES CHARGÉES QUI SE DÉPLACENT À TRAVERS L'ÉTHER SANS ENTRAÎNER CE MILIEU

Considérations préliminaires

§ 74. Il m'a semblé utile de développer une théorie des phénomènes électromagnétiques basée sur l'idée d'une matière pondérable parfaitement perméable à l'éther et pouvant se déplacer sans communiquer à ce dernier le moindre mouvement. Certains faits de l'optique peuvent être invoqués à l'appui de cette hypothèse et, bien que le doute soit encore permis, il importe certainement d'examiner toutes les conséquences de cette manière de voir. Malheureusement une difficulté bien sérieuse se présente dès le début. Comment, en effet, se faire une idée précise d'un corps qui, se déplaçant au sein de l'éther et traversé par conséquent par ce milieu, est en même temps le siège d'un courant électrique ou d'un phénomène diélectrique ? Pour surmonter la difficulté, autant qu'il m'était possible, j'ai cherché à ramener tous les phénomènes à un seul, le plus simple de tous, et qui n'est autre chose que le mouvement d'un corps électrisé. On verra que, sans approfondir la relation entre la matière pondérable et l'éther, on peut établir un système d'équations propres à décrire ce qui se passe dans un système de tels corps. Ces équations se prêtent à des applications très variées qui feront l'objet des chapitres suivants ; elles nous fourniront une déduction théorique du « coefficient d'entraînement » que FRESNEL introduisit dans la théorie de l'aberration.[1] Il

1. Par « théorie de l'aberration », Lorentz entend ici non seulement la déduction de l'aberration des étoiles (en raison du mouvement de la Terre et de la vitesse finie de la lumière, les étoiles nous apparaissent dans une position légèrement différente de leur position réelle) dans l'hypothèse d'un éther lumineux stationnaire, mais aussi l'explication que donna Fresnel de l'absence d'effet du mouvement de la Terre sur les lois de la réfraction observées sur Terre. C'est dans ce dernier contexte qu'intervient l'hypothèse d'un entraînement partiel de l'éther par les milieux transparents en mouvement.

suffira, dans ces applications, d'admettre que tous les corps pondérables contiennent une multitude de petites particules à charges positives ou négatives et que les phénomènes électriques sont produits par le déplacement de ces particules. Selon cette manière de voir, une charge électrique est constituée par un excès de particules dont les charges ont un signe déterminé, un courant électrique est un véritable courant de ces corpuscules et dans les isolateurs pondérables il y aura « déplacement diélectrique » dès que les particules électrisées qu'il contient sont éloignées de leurs positions d'équilibre.

Ces hypothèses n'ont rien de nouveau en ce qui concerne les électrolytes et elles offrent même une certaine analogie avec les idées sur les conducteurs métalliques qui avaient cours dans l'ancienne théorie de l'électricité. Des atomes des fluides électriques aux corpuscules chargés la distance n'est pas grande.[2]

On voit donc que, dans la nouvelle forme que je vais lui donner, la théorie de MAXWELL se rapproche des anciennes idées. On peut même, après avoir établi les formules assez simples qui régissent les mouvements des particules chargées, faire abstraction du raisonnement qui y a conduit et regarder ces formules comme exprimant une loi fondamentale comparable à celles de WEBER et de CLAUSIUS.[3] Cependant, ces équations conservent toujours l'empreinte des principes de MAXWELL. WEBER et CLAUSIUS regardaient les forces qui s'exercent entre deux atomes d'électricité comme déterminées par la position relative, les vitesses et les accélérations que présentent ces atomes au moment pour lequel on veut considérer leur action. Les formules, au contraire, auxquelles nous parviendrons expriment d'une part quels changements d'état sont provoqués dans l'éther par la présence et le mouvement de corpuscules électrisés ; d'autre part, elles font connaître la force avec laquelle l'éther agit sur l'une quelconque de ces particules. Si cette force dépend du mouvement des autres particules, c'est que ce mouvement a modifié l'état de l'éther ; aussi la valeur de la force, à un certain moment, n'est-elle pas déterminée par les vitesses et les accélérations que les petits corps possèdent à ce même instant ; elle dérive plutôt des mouvements qui ont déjà eu lieu. En termes généraux, on peut dire que les phénomènes excités dans l'éther par le

2. Les physiciens continentaux admettaient en général la théorie ionique de l'électrolyse (due à Helmholtz, Wilhelm Hittorf, Rudolph Clausius et Friedrich Kohlrausch). La plupart d'entre eux adhéraient aussi à la conception de Wilhelm Weber qui faisait du courant électrique une circulation d'atomes de fluides électriques. Bien des britanniques, à la suite de Faraday, se méfiaient de toute une circulation de charge. Mais Maxwell reconnaissait lui-même que dans le cas de l'électrolyse, on ne possédait rien de mieux que la théorie ionique.

3. En 1877, Rudolph Clausius avait proposé de modifier la loi de Weber de telle sorte que la déduction de la loi d'Ampère ne requière plus l'égalité des courants des fluides électriques positif et négatif.

mouvement d'une particule électrisée se propagent avec une vitesse égale à celle de la lumière. On revient donc à une idée que GAUSS énonça déjà en 1845 et suivant laquelle les actions électrodynamiques demanderaient un certain temps pour se propager de la particule agissante à la particule qui en subit les effets.[4]

Hypothèses fondamentales

§ 75. *a.* Les particules chargées seront regardées comme étant de la « matière pondérable » à laquelle des forces peuvent être appliquées ; cependant, je supposerai que dans tout l'espace occupé par une particule se trouve aussi l'éther, et même qu'un déplacement diélectrique et une force magnétique, produits par une cause extérieure, peuvent exister dans cet espace comme si la « matière pondérable » n'y existait pas. Cette dernière est donc considérée comme parfaitement perméable à ces actions.

b. Je désignerai par f, g et h les composantes du déplacement diélectrique dans l'éther, et je prendrai (§ 49) pour l'énergie potentielle du système la valeur

$$2\pi V^2 \int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau,$$

V étant la vitesse de la lumière dans l'éther. Dans tous les points extérieurs aux particules on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \qquad (50)$$

mais je suppose (§ 43) qu'à l'intérieur d'une particule cette équation doit être remplacée par

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \rho, \qquad (51)$$

où ρ désigne quelque quantité propre au point considéré de la particule et à laquelle il nous est impossible de rien changer.[5]

Cette quantité ρ sera appelée la *densité* de la charge électrique.

---

4. Dans des lettres et manuscrits de 1845, Carl Friedrich Gauss tentait (comme le fit plus tard son collaborateur Weber) d'expliquer les actions électrodynamiques par des forces entre particules d'électricité dépendant de leur vitesse. Il pensait que cette dépendance était la trace d'une action propagée dans un milieu et espérait que l'on puisse trouver un jour une "représentation constructible" de ce milieu.

5. Ces équations, $\int (D^2/2\varepsilon_0)\,\mathrm{d}\tau$ pour l'énergie associée au déplacement $\mathbf{D}$ (avec $\varepsilon_0 = 1/4\pi V^2$ dans le système électromagnétique d'unités) et $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$, sont celles qui résultent de la conception maxwellienne de l'électricité appliquée à un milieu possédant la permittivité et la perméabilité du vide. Dans ce cas, un seul vecteur suffit pour d'écrire le champ électrique. Lorentz choisit $\mathbf{D}$ plutôt que $\mathbf{E}$.

Pour simplifier les calculs, cette densité sera regardée comme une fonction continue des coordonnées ; on supposera donc que la valeur de ρ, zéro à l'extérieur d'une particule et positive ou négative à l'intérieur, ne présente pas une transition brusque à la surface. Cette dernière hypothèse nous donne le droit de regarder comme continues toutes les variables qui dépendent des coordonnées.

Du reste, x, y et z désigneront les coordonnées d'un point immobile dans l'espace. En général, toutes les quantités variables seront des fonctions de x, y, z et du temps t.

c. Les particules se comporteront comme des corps rigides ; elles ne pourront donc avoir d'autre mouvement qu'une translation et une rotation. Dans ce mouvement, chaque point d'une particule conservera la même valeur de ρ. Les valeurs de f, g et h dans l'éther, lui-même immobile, doivent changer de telle façon que ce soit chaque fois dans un nouveau point de l'espace qu'il est satisfait à l'équation (51).

d. Je désignerai par ξ, η et ζ les composantes de la vitesse d'un point d'une particule chargée, et je supposerai que le « courant électrique », c'est-à-dire le vecteur qui donne lieu à une énergie cinétique de la grandeur à indiquer tantôt, a pour composantes

$$u = \rho\xi + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \rho\eta + \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \rho\zeta + \frac{\partial h}{\partial t}. \tag{52}$$

À l'appui de cette hypothèse, que j'ai empruntée à M. HERTZ, on peut rappeler l'expérience bien connue de M. ROWLAND, dans laquelle la rotation rapide d'un disque chargé a produit les mêmes effets électromagnétiques qu'un système de courants circulaires. Elle a démontré que le déplacement d'un corps chargé constitue un vrai courant électrique, ce qui d'ailleurs est conforme à la théorie généralement acceptée de l'électrolyse.[6]

Or, on mesure toujours les composantes d'un courant par les quantités d'électricité, rapportées à l'unité de surface et à l'unité de temps, qui traversent des éléments de surface perpendiculaires aux axes des coordonnées. Si donc l'unité de volume d'un corps chargé, animé de la vitesse (ξ, η, ζ), contient la quantité d'électricité ρ, les composantes du courant seront $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$.

D'un autre côté, on admet dans la théorie de MAXWELL que les variations du déplacement diélectrique constituent un courant aux composantes $\partial f/\partial t$,

6. FitzGerald avait donné le premier, en 1881, l'expression $\rho\mathbf{v}$ du courant de convection qui contribue au courant total quand les charges sont en mouvement. Elle se trouve aussi dans les équations de Hertz de 1890 pour l'électrodynamique des corps en mouvement, comme partie du courant de déplacement liée à l'entraînement du milieu.

$\partial g/\partial t$, $\partial h/\partial t$. Les équations (52) expriment donc que le vecteur dont dépend l'énergie cinétique est composé des deux courants dont nous venons de parler.

Ce « courant total » a la propriété importante que la distribution en est solénoïdale.

En effet, dans le mouvement d'un corps rigide on a[7]

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0\,, \tag{53}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = \xi\frac{\partial\rho}{\partial x}+\eta\frac{\partial\rho}{\partial y}+\zeta\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right),$$

ou bien, en vertu de la formule (51),

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial t}+\xi\frac{\partial\rho}{\partial x}+\eta\frac{\partial\rho}{\partial y}+\zeta\frac{\partial\rho}{\partial z}.$$

Ici le second membre représente la variation par unité de temps de la densité électrique dans un point qui se déplace avec la particule ; l'expression s'annule donc en vertu de l'hypothèse *c*.

e. Grâce à la propriété que je viens de démontrer, on peut admettre que la relation entre le courant électrique (u, v, w) et l'énergie cinétique est toujours celle que nous avons appris à connaître dans le premier chapitre. Comme il s'agit des phénomènes dans l'éther il n'y a pas lieu de distinguer la force et l'induction magnétiques ; je déterminerai donc la force magnétique (α, β, γ) par les équations[8]

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z} &= 4\pi\left(\rho\xi+\frac{\partial f}{\partial t}\right),\\
\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x} &= 4\pi\left(\rho\eta+\frac{\partial g}{\partial t}\right),\\
\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y} &= 4\pi\left(\rho\zeta+\frac{\partial h}{\partial t}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0\,, \tag{55}$$

et j'attribuerai à l'énergie cinétique la valeur

$$T = \frac{1}{8\pi}\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\tau\ .$$

7. En fait, la rigidité de la distribution ρ n'est nullement nécessaire car, comme le remarqua Heaviside en 1885, on a $\nabla\cdot(\partial\mathbf{D}/\partial t+\rho\mathbf{v}) = \partial\rho/\partial t+\nabla\cdot\rho\mathbf{v} = 0$ du fait de la conservation de la charge (équation de continuité).

8. c'est-à-dire $\nabla\times\mathbf{H} = 4\pi(\rho\mathbf{v}+\partial\mathbf{D}/\partial t)$, $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$ et $T = (1/8\pi)\int H^2\,\mathrm{d}\tau$. Ces formules correspondent au cas particulier $\mu = 1$ des équations correspondantes de Maxwell (compte-tenu du courant de convection), rappellées plus haut par Lorentz dans ses paragraphes 9 et 10. Les fonctions auxiliaires F, G, et H sont les composantes du potentiel vecteur $\mathbf{A}$.

On obtient ces formules en posant $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ dans celles des §§ 9 et 10 ; on fera les mêmes substitutions dans les équations (14) qui servent à définir les fonctions auxiliaires *F*, *G* et *H*.

f. Enfin, je supposerai que la position de chaque point qui prend part aux mouvements électromagnétiques est déterminée dès qu'on connaît la position de toutes les particules chargées du système et les valeurs de *f*, *g* et *h* dans tous les points de l'espace. C'est une hypothèse analogue à celle que j'ai discutée au chapitre précédent et présentant les mêmes difficultés.

[...] Dans les trois sections suivantes, Lorentz applique la méthode lagrangienne pour obtenir les équations du mouvement du système à partir de l'expression de l'énergie cinétique *T* des mouvements cachés. Une variation virtuelle du déplacement **D** conduit à l'équation $4\pi V^2 \nabla \times \mathbf{D} = -\partial \mathbf{H}/\partial t$, conformément à l'expression maxwellienne de la loi d'induction de Faraday. Une translation virtuelle des particules conduit à l'expression $4\pi V^2 \int \rho \mathbf{D} \, \mathrm{d}\tau + \int \rho \mathbf{v} \times \mathbf{H} \, \mathrm{d}\tau$ de la force s'exerçant sur les particules chargées (équation (61) du mémoire de Lorentz). Cette formule, dite de Lorentz, avait déjà était obtenue par Heaviside en 1885. Enfin, une rotation virtuelle des particules conduit à l'expression $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \rho (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) \, \mathrm{d}\tau$ du couple agissant sur les particules. Dans les deux sections suivantes, Lorentz montre que l'on peut faire abstraction de la rotation des particules (nous dirions de leur spin) si le rapport e^2/mR est très petit (*e* désignant la charge d'une particule, *m* sa masse et *R* son rayon).

Récapitulation des formules les plus importantes

§ 90. Je suis bien éloigné de vouloir attacher trop d'importance aux considérations précédentes. Elles n'avaient d'autre but que de rendre plus acceptable l'hypothèse que voici, dont je me servirai dans tout ce qui suit :

Les particules chargées dont le déplacement donne lieu aux phénomènes électriques ne peuvent pas tourner autour de leur centre et, pour en déterminer le mouvement de translation, il suffit d'employer les équations (61), qui peuvent être mises sous la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= 4\pi V^2 \int \rho f d\tau + \eta \int \rho \gamma d\tau - \zeta \int \rho \beta d\tau, \\ \mathbf{Y} &= 4\pi V^2 \int \rho g d\tau + \zeta \int \rho \alpha d\tau - \xi \int \gamma d\tau, \\ \mathbf{Z} &= 4\pi V^2 \int \rho h d\tau + \xi \int \beta d\tau - \eta \int \rho \alpha d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

À ces formules il faut joindre les équations qui déterminent l'état de l'éther et qu'il sera utile de récapituler ici,

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z} = \rho, \tag{II}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0, \tag{III}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z} &= 4\pi\left(\rho\xi+\frac{\partial f}{\partial t}\right),\\
\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial x} &= 4\pi\left(\rho\eta+\frac{\partial g}{\partial t}\right),\\
\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial y} &= 4\pi\left(\rho\zeta+\frac{\partial h}{\partial t}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

$$\left.\begin{aligned}
4\pi V^2\left(\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial y}\right) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t},\\
4\pi V^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}\right) &= \frac{\partial \beta}{\partial t},\\
4\pi V^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right) &= \frac{\partial \gamma}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

§ 91. Dans le chemin qui nous a conduit à ces équations nous avons rencontré plus d'une difficulté sérieuse, et on sera probablement peu satisfait d'une théorie qui, loin de dévoiler le mécanisme des phénomènes, nous laisse tout au plus l'espoir de le découvrir un jour. Les physiciens qui éprouvent ce sentiment peuvent toutefois admettre l'idée fondamentale qui a été la base des recherches de FARADAY et de MAXWELL, et ils peuvent considérer les formules (I) – (V) comme des équations hypothétiques assez simples qui pourraient servir à la description des phénomènes. J'ose même dire que si l'on n'avait en vue autre chose que cette description, sans vouloir tenter une explication mécanique, il se pourrait que le choix tombât précisément sur ces équations que nous avons appris à connaître. Dès qu'on a renoncé à l'idée d'une action des corps où le milieu interposé n'intervient pas, il faudra décrire ce qui se passe dans un système de particules chargées à l'aide de deux systèmes d'équations, relatives, les unes à l'état de l'éther et les autres à la réaction de ce milieu sur les particules.

Tant que, dans le champ que l'on considère, il ne se trouve aucun corps chargé, les formules données par M. HERTZ dans son premier mémoire sont bien les plus simples qu'on puisse admettre pour exprimer l'état de l'éther, et si l'on veut établir un système d'équations pouvant servir à l'étude d'un système de particules chargées, il est naturel de se borner à des modifications dont on reconnaît immédiatement la nécessité. Or, on obtient les formules (II) – (V) en remplaçant dans celles de M. HERTZ l'équation[9]

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

par

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z} = \rho$$

et en substituant (§ 75, *d*) dans les équations

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z} = 4\pi u, \text{ etc.}$$

$$u = \rho\xi+\frac{\partial f}{\partial t},\ \ v = \rho\eta+\frac{\partial g}{\partial t},\ \ w = \rho\xi+\frac{\partial h}{\partial t}.$$

Dans le chapitre suivant on verra que les équations (I) s'obtiennent également par des considérations bien simples.[10]

Si, du reste, ces équations sont établies à titre d'hypothèses, on y peut ajouter la supposition que les particules chargées ne sont jamais sujettes à un mouvement rotatoire.

§ 92. Le physicien qui voudrait admettre les équations (I) – (V) sans les déduire des principes de la mécanique, serait obligé de justifier son choix en démontrant que ces équations sont compatibles avec la loi de la conservation de l'énergie. Voici comment on le vérifie.

Soient m la masse d'une particule chargée, $\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}'$ les composantes de la force extérieure à laquelle elle est soumise.

Alors

$$\mathbf{X}+\mathbf{X}' = m\dot{\xi},\quad \mathbf{Y}+\mathbf{Y}' = m\dot{\eta},\quad \mathbf{Z}+\mathbf{Z}' = m\dot{\zeta}. \tag{66}$$

9. En l'absence de toute matière, les formules de Hertz s'écrivent $\nabla\cdot\mathbf{D} = 0$, $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$, $\nabla\times\mathbf{H} = 4\pi\partial\mathbf{D}/\partial t$ et $4\pi V^2\nabla\times\mathbf{D} = -\partial\mathbf{H}/\partial t$.

10. Lorentz montrera en effet que le terme $e\mathbf{v}\times\mathbf{H}$ dans l'expression de la force agissant sur une particule de charge e est nécessaire pour expliquer la force électromagnétique $\mathbf{j}\times\mathbf{H}$ agissant sur un courant de conduction $\mathbf{j}$ plongé dans un champ magnétique $\mathbf{H}$.

Il faut que le travail des forces extérieures par unité de temps, c'est-à-dire l'expression

$$A = \Sigma(X'\xi + Y'\eta + Z'\zeta),$$

soit égal à *dU/dt, U* étant une fonction qui est déterminée par l'état du système. Or, en employant les formules (I) et (66), on trouve d'abord

$$\begin{aligned} A &= \frac{d}{dt}\sum\frac{1}{2}m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 4\pi V^2\sum\left[\xi\int\rho f d\tau + \eta\int\rho g d\tau + \zeta\int\rho h d\tau\right] \\ &= \frac{d}{dt}\sum\frac{1}{2}m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 4\pi V^2\int\rho(\xi f + \eta g + \zeta h)d\tau. \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, qui doit être étendue à l'espace infini, on peut substituer les valeurs de $\rho\xi$, $\rho\eta$, $\rho\zeta$ qu'on tire des équations (IV) ; ensuite, on peut intégrer par parties et employer les équations (V). En fin de compte

$$A = \frac{dU}{dt},$$

si on pose

$$U = \sum\frac{1}{2}m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2\pi V^2\int(f^2 + g^2 + h^2)d\tau + \frac{1}{8\pi}\int(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)d\tau.$$

C'est la valeur de l'énergie du système. Le premier terme n'est autre chose que l'énergie cinétique que les particules possèdent en vertu de leurs masses. Les deux autres termes ont la forme que nous connaissons déjà. Seulement, du point de vue où nous nous sommes placés maintenant, il n'est pas nécessaire de regarder comme potentielle l'énergie

$$2\pi V^2\int(f^2 + g^2 + h^2)d\tau$$

et comme cinétique l'énergie

$$\frac{1}{8\pi}\int(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)d\tau.$$

[...] Dans le reste de son mémoire, Lorentz développe les conséquences macroscopiques de ses hypothèses microscopiques. Il retrouve ainsi les lois classiques de l'électrodynamique, avec toutefois une expression nouvelle de l'effet du mouvement des milieux polarisables. Cette différence lui permet de dériver le coefficient de Fresnel et l'absence d'effets du premier ordre du mouvement de la terre (par rapport à l'éther) sur les phénomènes optiques terrestres.

Les équations de Maxwell sans Maxwell

Faut-il chercher les équations de Maxwell seulement sous la plume de Maxwell et de ses disciples ? C'est ce que semblent indiquer la profondeur et la puissance des contributions du grand maître écossais de la théorie électromagnétique. Pourtant, des équations similaires ou étroitement reliées à celles de Maxwell furent proposées de manière tout à fait indépendante. C'est ce que nous allons voir dans ce dernier chapitre. Le propos n'est bien sûr pas de minimiser l'apport de Maxwell, qui reste de loin le plus ample et le plus influent, mais de montrer une sorte de nécessité logique et historique de ses équations.

1. L'optique de MacCullagh

Plus de vingt ans avant que Maxwell publie son système d'équations, en 1839, l'Irlandais James MacCullagh obtint un système similaire dans un contexte purement optique. MacCullagh appartenait à la grande tradition de mathématiques de Trinity College Dublin, qui avait importé, perfectionné et appliqué la nouvelle analyse mathématique française avant même qu'elle fût enseignée à Cambridge. Il pouvait donc aborder l'optique physique avec une profondeur mathématique comparable à celle avec laquelle son génial collègue William Rowan Hamilton avait transformé l'optique géométrique.

Comme le savait MacCullagh, dans les années 1820 Augustin Fresnel avait proposé une théorie ondulatoire de la lumière, fondée sur l'hypothèse d'un éther élastique et rigide, de structure moléculaire. Plusieurs physiciens du XIX^{e} siècle, dont Poisson, Cauchy, Neumann, Kirchhoff et Thomson, tentèrent d'améliorer cette théorie, en gardant l'idée d'un milieu élastique rigide, mais en variant les hypothèses sur la constitution de ce milieu. Ils se heurtèrent tous à une difficulté fondamentale : un solide élastique permet en général la propagation d'ondes longitudinales, alors que les phénomènes optiques ne mettent en jeu que des ondes transverses. Ces théoriciens devaient donc artificiellement exclure les vibrations longitudinales et, afin qu'elles ne réapparaissent pas lors du passage des ondes d'un milieu transparent à un autre, ils devaient arbitrairement omettre une partie des conditions aux limites exigées par les lois de la mécanique.

MacCullagh voulait lui aussi donner une justification dynamique aux lois de l'optique ondulatoire. Mais au lieu d'identifier dès le départ l'éther à un solide élastique, il préféra adopter une démarche inductive qui consistait à inférer les propriétés dynamiques de l'éther à partir des lois empiriques connues dans le cas le plus général des milieux anisotropes. De ces lois, il retint particulièrement la transversalité des vibrations (loi I) et le fait (loi II) que dans un cristal la direction de polarisation d'une vibration rectiligne est déterminée par la normale des plans d'onde et l'orientation des axes du cristal (cette direction doit être l'un des axes de la trace de l'ellipsoïde des indices sur un plan d'onde). Voici comment d'étranges conséquences de ces deux lois sont établies dans le mémoire reproduit plus bas.

Pour rendre compte de la transversalité des vibrations, MacCullagh admet que la densité de l'éther reste inchangée quand il est soumis à des vibrations lumineuses. En effet, pour une onde plane, comme le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ d'une particule de l'éther au lieu $\mathbf{r}$ dépend seulement de $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ (où $\mathbf{k}$ est un vecteur normal aux plans d'onde), l'absence de compression du milieu ($\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$) implique la condition de transversalité $\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} = 0$. Par ailleurs, MacCullagh utilise les lois I et II pour établir que pour une onde plane, l'énergie potentielle de déformation $V(\mathbf{r})$ ne peut dépendre que du vecteur $\nabla\times\mathbf{u}$ et de l'orientation du cristal. Il admet implicitement que ce résultat reste vrai pour toute petite déformation du milieu. Pour un milieu isotrope et à l'ordre le plus bas, on a

$$V = \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(\nabla\times\mathbf{u})^2 .$$

MacCullagh fait alors appel à la méthode de Lagrange, chère à son maître William Rowan Hamilton, pour établir les équations du mouvement du milieu. Suivant l'équation fondamentale de la dynamique de Lagrange, la somme des travaux des forces intérieures de rappel et des forces d'inertie lors de toute déformation virtuelle $\delta\mathbf{u}$ du milieu de densité μ doit être identiquement nulle :

$$-\int\delta V\mathrm{d}\tau - \int\mu\ddot{\mathbf{u}}\cdot\delta\mathbf{u}\mathrm{d}\tau = 0$$

ou encore,

$$\int\mu\ddot{\mathbf{u}}\cdot\delta\mathbf{u}\mathrm{d}\tau + \int\varepsilon^{-1}(\nabla\times\mathbf{u})\cdot(\nabla\times\delta\mathbf{u})\mathrm{d}\tau = 0 .$$

Une intégration par partie donne

$$\int[\mu\ddot{\mathbf{u}} + \varepsilon^{-1}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})]\cdot\delta\mathbf{u} = 0,$$

ce qui ne peut être vrai pour une déformation arbitraire que si

$$\mu\ddot{\mathbf{u}} = -\varepsilon^{-1}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}).$$

Comme le remarqua en 1879 un disciple irlandais de Maxwell, George Francis FitzGerald, si l'on pose $\mathbf{B} = \mu\dot{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{D} = \nabla\times\mathbf{u}$, on a

$$\dot{\mathbf{B}} = -\nabla\times(\mathbf{D}/\varepsilon)\,,\ \dot{\mathbf{D}} = \nabla\times(\mathbf{B}/\mu)\,.$$

La théorie de MacCullagh contient donc les équations de Maxwell (en l'absence de sources). En retour, il est possible d'interpréter ces équations comme les équations du mouvement de l'éther de MacCullagh : c'est ce que fit FitzGerald dans son traitement des effets magnéto-optiques, et plus tard un troisième Irlandais, Joseph Larmor, dans sa théorie de l'électron. Bien que Maxwell n'en ait sans doute pas eu connaissance, le mémoire de MacCullagh a donc eu, à long terme, une considérable influence sur l'électromagnétisme britannique.

La théorie de MacCullagh a l'avantage, comme la théorie de Maxwell, de conduire aux bonnes conditions de continuité à la frontière de deux milieux transparents homogènes, alors que les théories de l'optique de Fresnel et de Neumann nécessitent, comme nous l'avons rappelé plus haut, une omission *ad hoc* d'une partie des conditions de continuité pour les solides élastiques considérés. Elle n'est cependant pas dépourvue de difficultés. Comme le remarqua George Stokes, elle est incompatible avec la théorie générale de l'élasticité, car elle conduit à un tenseur des contraintes asymétrique $(\partial_i u_j - \partial_j u_i)$.[1] C'est ce qui explique que l'éther rotationnel de MacCullagh soit longtemps tombé dans l'oubli (et peut-être aussi le suicide de son inventeur à l'âge de 38 ans). Thomson et Larmor parvinrent néanmoins à en donner une représentation mécanique grâce à un assemblage astucieux de gyrostats. L'idée de base est que l'effort qu'il faut fournir pour faire tourner (de $\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u}$) les éléments de l'éther de MacCullagh est comparable à l'effort nécessaire pour changer la direction de l'axe d'un gyrostat. On voit à quel point les équations de Maxwell se sont accommodées des plus étranges interprétations.

1. Concrètement, cela signifie qu'un élément de volume de l'éther de MacCullagh est soumis à un couple d'ordre infinitésimal trop bas pour être compensé par une variation de moment cinétique de la matière qu'il contient.

Extrait n° 8 :

VERS UNE THÉORIE DYNAMIQUE DE LA RÉFLEXION CRISTALLINE ET DE LA RÉFRACTION

« An essay toward a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction », J. MacCullagh, Royal Irish Academy, *Transactions* (1839), reproduit dans *The collected works of James MacCullagh* (Dublin, 1880), 145-184.
Extraits traduits par Danièle Lederer.

PREMIÈRE PARTIE.– OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES – ÉQUATION DU MOUVEMENT

Il y a près de trois ans, j'ai présenté devant cette académie* les lois qui semblent gouverner la réflexion et la réfraction des vibrations lumineuses à la surface des cristaux. J'ai trouvé ces lois – remarquables par leur simplicité, leur élégance et leur accord avec des expériences exactes – en partant d'un système d'hypothèses qui, par certains aspects, étaient en contradiction avec les notions admises auparavant et n'étaient reliées entre elles par aucun principe connu de mécanique, la seule preuve de leur véracité étant la réalité des résultats auxquels elles conduisaient. J'ai toutefois remarqué que ces hypothèses n'étaient pas indépendantes les unes des autres et, peu après, j'ai montré que les lois de la réflexion à la surface d'un cristal sont liées, d'une façon très particulière, aux lois de la double réfraction, et donc de la propagation à l'intérieur. J'ai été amené à en déduire que « toutes ces lois et hypothèses ont une origine commune dans d'autres lois plus fondamentales qui restent encore à découvrir » ; et que « la prochaine avancée en optique physique mènerait probablemment à ces principes plus

* Dans l'article "On the Laws of Crystalline Reflexion and Refraction". –*Transactions of the Royal Irish Academy*, Vol. xviii. p.31].

profonds et plus élémentaires qui unissent, en un même système, les lois de la réflexion et celles de la propagation ».[*] Cette avancée a eu lieu depuis, et ces prévisions ont été réalisées. Dans le présent article, je me propose d'établir le lien entre ces deux ensembles de lois, grâce à une théorie très simple, qui repose sur un certain nombre d'hypothèses, et utilise les méthodes habituelles de la dynamique analytique.

Dans cette thérorie, les lois des deux types, qui ont la même origne, sont reliées d'emblée et expliquées séparément ; on remarquera que les explications de chacune d'elles, ainsi que la raison de leur connexion, sont exposées pour la première fois. Car, bien que les lois de la propagation dans les cristaux aient suscité beaucoup d'intérêt depuis leur découverte par Fresnel,[†] elles ont jusqu'ici résisté à toutes les tentatives entreprises pour les expliquer par des raisonnement dynamiques ; et les lois de la réflexion, découvertes récemment, semblaient encore plus difficiles à établir par ce genre de considérations.[1] Pourtant, rien n'est plus simple que le raisonnement qui permet de déduire des mêmes principes ces deux ensembles de lois.

Les hypothèses sur lesquelles repose la théorie sont les suivantes : – *Premièrement*, la densité de l'éther luminifère est constante ; cela implique que cette densité n'est modifiée ni par les mouvements produits par la lumière, ni par la présence de particules de matière, de sorte que, dans tous les corps, sa valeur est la même que dans l'espace libre, et n'est pas affectée par les vibrations les plus intenses. – *Deuxièmement*, dans une onde plane, les vibrations sont rectilignes et , tandis que le plan de l'onde se déplace parallèlement à lui-même, les vibrations restent parallèles à une droite fixe, la direction de cette droite et celle de la normale à l'onde étant fonction l'une de l'autre. Cette supposition est avérée dans tous les cristaux connus, sauf le quartz, dans lequel les vibrations sont elliptiques.

En ce qui concerne la constitution particulière de l'éther, nous ne savons rien, et nous ne supposerons rien, si ce n'est ce qui est indiqué dans les hypothèses précédentes. Mais, pour ce qui est de son état physique général, nous admettrons, ce qui est tout à fait naturel, qu'un élément de volume différentiel contient un très grand nombre de particules d'éther ;[2] et, pour l'instant, nous allons considérer que les interactions entre ces particules ne sont perceptibles

* *Ibid*, p. 53, note. La note à laquelle il est fait référence a été rajoutée quelques temps après la lecture de l'article lui-même.

† Ces lois ont été publiées dans son mémoire sur la double réfraction –*Mémoires de l'institut*, tome VII. p.45.

1. Sur ce sujet, voir Whittaker 1951 et Schaffner 1972.

qu'à des distances insignifiantes lorsque on les compare avec la longueur de l'onde.

En rassemblant toutes les suppositions que nous avons faites, on s'aperçoit que, lorsqu'un ensemble d'ondes planes perturbe l'éther, les vibrations sont transverses, c'est-à-dire parallèles aux plans des ondes. En effet, toutes les particules situées dans des plans parallèles aux ondes sont déplacées, par rapport à leur position au repos, de quantités égales, dans des directions parallèles ; il en résulte que si nous considérons une surface fermée de forme quelconque, délimitant dans l'éther immobile un volume quelconque, grand ou petit, dont tous les points participent au mouvement imposé par les ondes, alors, la seule modification qui peut affecter une tranche découpée dans ce volume par deux plans parallèles au plan d'onde infiniment proches l'un de l'autre est une variation de son épaisseur ; et, puisque la conservation de la densité que nous avons admise impose que le volume de cette tranche ne change pas, et donc son épaisseur non plus, il en résulte que les déplacements doivent avoir lieu dans le plan de la tranche, c'est-à-dire qu'il doivent être parallèles aux plans d'onde. Et inversement, quand cette condition est remplie, il est évident que tout le volume délimité par la surface précédente garde même valeur au cours du mouvement, la surface contenant toujours exactement les mêmes particules d'éther que lorsqu'elle était immobile. Tout ceci reste rigoureusement exact, quelle que soit l'amplitude des déplacements.

Soit x, y, z les coordonnées cartésiennes d'une particule avant qu'elle soit perturbée, et $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, ses coordonnées à l'instant t, les déplacements ξ, η, ζ, étant des fonctions de x, y, z et t. Prenons la densité de l'éther — qui a même valeur dans tous les corps — égale à l'unité ; on peut alors à tout instant considérer $dx\,dy\,dz$ aussi bien comme l'élément de volume que l'élément de masse. L'équation du mouvement est alors de la forme[3]

$$\iiint dxdydz \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right) = \iiint dxdydz\delta V, \qquad (1)$$

2. Afin de rendre compte de la rigidité de l'éther (nécessaire à la propagation d'ondes transversales), Fresnel le concevait comme un système discret de points matériels agissant les uns sur les autres par des forces centrales. Un solide continu n'est pas concevable, si l'on exige (comme les contemporains de Fresnel) que les interactions entre les parties du solide puissent se réduire à des forces agissant directement d'un point matériel à un autre.

3. Cette équation exprime le principe de la dynamique de Lagrange, selon lequel le travail total des forces d'interaction des particules doit être égal au travail total des « forces accélératrices » (produit de la masse d'une particule par son accélération) lors d'un déplacement virtuel des particules (auquel corrspond la variation notée δ).

où V est une fonction qui dépend des interactions mutuelles exercées par les particules. Les intégrales s'étendent à tout le volume du milieu en vibration, ou de tous les milieux, s'il y en a plus d'un.

En écrivant cette équation, qui est la relation générale de la dynamique appliquée au cas considéré, nous nous rendons compte que la principale difficulté sera de déterminer convenablement la fonction V ; car, si cette fonction était connue, pour trouver les lois que nous cherchons, il n'y aurait plus qu'à appliquer les méthodes de la mécanique analytique, telles qu'elles ont été indiquées par Lagrange. La détermination de V dépend évidemment des hypothèses sur la nature des vibrations de l'éther que nous avons énoncées ci-dessus ; mais, avant de continuer, il semble raisonnable d'introduire un certain nombre de lemmes, de façon à abréger ces considérations et les suivantes.

[...] En autres lemmes utiles, MacCullagh démontre que les quantités qu'il exprime comme

$$X = \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy},\ Y = \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz},\ Z = \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}$$

se transforment comme les composantes d'un vecteur lors d'un changement d'axes de coordonnées. En termes modernes, cela signifie que $\nabla \times \mathbf{u}$ est un vecteur si $\mathbf{u}$ en est un.

Troisième partie. — Détermination de la fonction dont dépend le mouvement Axes principaux d'un cristal

Il nous reste maintenant à déterminer la forme particulière qu'il faut donner à la fonction V pour que l'équation (1) représente le mouvement des particules d'éther. Pour cela choissons des axes x', y' parallèles à un ensemble d'ondes planes dont les vibrations sont transverses, parallèles à l'axe y', de sorte que $\xi' = 0$, $\zeta' = 0$. Considérons dans l'éther immobile un parallélépipède $dx'dy'dz'$, dont les arrêtes sont parallèles aux axes x', y', z' et dont tous les points se déplacent selon la même loi que les particules d'éther qui le constituent. Les faces du parallélépipède qui sont perpendiculaires à l'arrête dz′ vont être décalées, chacune dans son propre plan, dans une direction parallèle à y', mais leurs déplacements ne seront pas égaux, la différence étant égale à $d\eta'$; en conséquence, les arrêtes qui relient leurs coins ne seront plus parallèles à l'axe z', mais feront avec lui un angle κ dont la tangente est égale à $d\eta'/dz'$.

Mais la fonction V ne peut dépendre que des directions des axes x', y', z' par rapport à des directions fixées dans le cristal, et de l'angle κ, qui mesure la déformation produite par les vibrations dans le parallélépipède. C'est la supposition la plus générale que nous puissions faire en ce qui la concerne. Or, d'après notre deuxième hypothèse, l'une quelconque des directions choisies, disons celle de x', détermine les deux autres et nous pouvons considérer que V ne dépend que de l'angle κ et de la direction de l'axe x'. D'après l'équation[4] (F), il est évident que l'angle κ et les angles que fait x' avec les directions fixes x, y, z sont tous connus lorsque les grandeurs X, Y, Z le sont. En conséquence, V est une fonction de X, Y, Z.

Supposons l'angle κ très petit. Les grandeurs X, Y, Z sont très petites elles aussi et nous pouvons développer V en puissances de ces grandeurs ; on trouve :

$$V = K + AX + BY + CZ + DX^2 + EY^2 + FZ^2 + GYZ + HXZ + IXY + \dots$$

les quantités K, A, B, C, D... étant des constantes. Mais, dans l'état d'équilibre, la valeur de δV doit être nulle, quelle que soit la façon dont on a modifié la position du système ; cela signifie que, lorsque les déplacements ξ, η, ζ et, par voie de conséquence, les grandeurs X, Y, Z s'annulent, la quantité

$$\delta V = A\delta X + B\delta Y + C\delta Z + 2DX\delta X + \dots$$

doit s'annuler elle aussi, indépendemment de δX, δY, δZ. Ainsi[*] nous devons avoir $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; donc, si nous négligeons les termes du troisième ordre et plus, nous pouvons en déduire que la partie variable de V est une fonction homogène de second degré, dont la forme générale est une somme des carrés et des produits de X, Y, Z, introduisant six coefficients constants.

Par un changement des axes x, y, z, on peut toujours annuler les trois coefficients qui font intervenir le produit de deux variables. C'est une propriété connue des fonctions du second degré, quand les coordonnées sont les variables ; or nous avons montré dans le lemme II que les quantités X, Y, Z se transforment selon les mêmes formules que les coordonnées elles-mêmes. Ainsi, dans tout cristal, il existe trois directions perpendiculaires pour

4. L'équation (F) du lemme non reproduit est l'équation de transformation des quantités $X = \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}$, $Y = \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}$, $Z = \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}$ lors du passage des coordonnées x, y, z, aux coordonnées x', y', z' (expression du caractère vectoriel du rotationnel). Dans ce dernier système, la seule composante non-nulle du rotationnel est $X' = \frac{d\eta'}{dz'}$.

* Voir le raisonnement de Lagrange dans un cas similaire, *Mécanique Analytique*, tome 1, p.68.

lesquelles la fonction V ne dépend que des carrés de X, Y, Z, et comme il apparaîtra bientôt que, pour que la vitesse de propagation ne devienne jamais imaginaire, les coefficients de ces termes doivent tous être négatifs, nous pouvons écrire, en nous référant à ces axes :

$$V = -\frac{1}{2}\left(a^2 X^2 + b^2 Y^2 + c^2 Z^2\right) \tag{2}$$

en omettant la constante K qui n'intervient pas dans le mouvement.

Dans cette situation, les axes de coordonnées sont les *axes principaux* du cristal, habituellement connus sous le nom d'*axes d'élasticité*. L'existence de ces axes peut donc être prouvée sans faire aucune hypothèse sur la disposition des particules dans le milieu. Les constantes a, b, c sont les trois vitesses principales de propagation, comme nous allons le voir dans la section suivante.

Ayant déterminé la forme de V, nous pouvons la prendre comme point de départ de notre théorie, et oublier les hypothèses qui nous y ont conduits. Suppposons donc, pour commencer, qu'une onde plane traverse un cristal ; c'est à partir des équations (1) et (2), qui contiennent tout ce qu'il faut pour résoudre le problème, que nous allons déterminer l'équation du mouvement. C'est ainsi que nous déduirons les lois de la propagation, comme on les appelle ; nous verrons que, pour les amplitudes, elles coïncident exactement celles observées par Fresnel, mais que la direction des vibrations d'un rayon polarisé est différente de ce qu'il avait trouvé. Nous déterminerons ensuite les conditions qui doivent être satisfaites lorsque la lumière passe d'un milieu à un autre, et nous obtiendrons ainsi les lois de la réflexion et de la réfraction à la surface d'un cristal.

QUATRIÈME PARTIE.–PROPAGATION DE LA LUMIÈRE DANS UN MILIEU CRISTALLIN LOIS DE FRESNEL.–MODIFICATIONS À Y APPORTER. SURFACES D'ONDE, SURFACE DES INDICES ET LEURS PROPRIÉTÉS

Les axes x, y, z étant choisis suivant les axes principaux du cristal, l'équation (2) nous donne

$$-\delta V = a^2 X\delta X + b^2 Y\delta Y + c^2 Z\delta Z \; ; \tag{3}$$

ou, en tirant de l'équation (C) les expressions des variations[5] et en permutant les symboles d et δ,

$$-\delta V = a^2 X\left(\frac{d\delta\eta}{dz}-\frac{d\delta\zeta}{dy}\right) + b^2 Y\left(\frac{d\delta\zeta}{dx}-\frac{d\delta\xi}{dz}\right) + c^2 Z\left(\frac{d\delta\xi}{dy}-\frac{d\delta\eta}{dx}\right);$$

soit, en substituant cette expression pour δV dans l'équation (1), et en intégrant par parties le membre de droite, de façon à éliminer les dérivées des variations

$$\begin{aligned}\iiint dxdydz\ \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi+\frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right) &= \iint \mathrm{d}y\mathrm{d}z\ (c^2 Z\delta\eta - b^2 Y\delta\zeta)\\ &+\iint dxdz\ (a^2X\delta\zeta - c^2 Z\delta\xi) + \iint dxdy\ (b^2Y\delta\xi - a^2X\delta\eta) \qquad (4)\\ &+\iiint dxdydz\ \left\{\left(c^2\frac{dZ}{dy}-b^2\frac{dY}{dz}\right)d\xi\right.\\ &\left.+\left(a^2\frac{dX}{dz}-c^2\frac{dZ}{dx}\right)\delta\eta+\left(b^2\frac{dY}{dx}-a^2\frac{dX}{dy}\right)\delta\zeta\right\}.\end{aligned}$$

Mais, comme les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sont arbitraires et indépendantes, cette équation ne peut être vérifiée que si les intégrales doubles, qui concernent les limites du système, s'annulent en laissant une égalité qui ne fait intervenir que les intégrales triples, et doit être indépendante des variations. Identifiant donc les coefficents de chacune des variations, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= c^2\frac{dZ}{dy}-b^2\frac{dY}{dz},\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= a^2\frac{dX}{dz}-c^2\frac{dZ}{dx}, \qquad (5)\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= b^2\frac{dY}{dx}-a^2\frac{dX}{dy},\end{aligned}$$

qui sont les équations de propagation, et donnent l'expression de la force accélératrice dans la direction de chacun des axes de coordonnées.

5. L'équation (C) réfère à $X = \frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}$, $Y = \frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}$, $Z = \frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}$.

6. En réalité, le déplacement virtuel $\boldsymbol{\delta u}$ est soumis à la contrainte d'incompressibilité $\nabla\cdot\boldsymbol{\delta u} = 0$ Mais il se trouve que pour le potentiel V de MacCullagh, la prise en compte de la contrainte ne modifie pas les conclusions.

[…] Dans le reste de son mémoire, MacCullagh utilise les équations (5) pour dériver les lois de propagation d'ondes planes dans un milieu anisotrope. Il obtient aussi les lois de réflexion et de réfraction à la surface d'un tel milieu grâce aux conditions aux limites suivantes : continuité du déplacement et continuité de la composante tangentielle du vecteur (a^2X, b^2Y, c^2Z), comme l'exige l'annulation de l'intégrale de surface dans l'équation (4). Dans l'interprétation électromagnétique des équations de MacCullagh, la dérivée temporelle du déplacement correspond au vecteur **B** (qui diffère peu de **H** dans les milieux non ferromagnétiques) ; le triplet (a^2X, b^2Y, c^2Z) correspond aux coordonnées du vecteur **E** ; et le rotationnel du déplacement correspond au vecteur **D**. Par conséquent, les composantes tangentielles de **E** et **H** et les composante normales de **D** et **B** doivent être continues, conformément aux conditions aux limites de la théorie de Maxwell. Il s'ensuit que les lois déduites par MacCullagh sont les mêmes que celles la théorie électromagnétique moderne de l'optique anisotrope.

2. L'éther conducteur de Ludvig Lorenz

Le physicien et ingénieur danois Ludvig Lorenz considérait le caractère exclusivement transverse des vibrations lumineuses comme un obstacle insurmontable à toute théorie mécanique de l'éther. En effet, un solide élastique est nécessairement compressible et permet donc des vibrations longitudinales. Pour l'ingénieur électricien qu'était Lorenz, la propagation de la lumière s'apparentait plutôt à l'induction électromagnétique dans une série de fils parallèles. Cette image naïve rend bien compte de la transversalité des vibrations, mais pas de la vitesse finie de leur propagation. Lorenz chercha donc à modifier les équations de l'électrodynamique de Weber et Kirchhoff de manière à y intégrer un retard de propagation. Le mémoire reproduit ci-dessous, publié en 1867, représente l'aboutissement de ces réflexions.

Les équations de Kirchhoff pour la densité de courant électrique $\mathbf{j}$ en présence des potentiels ϕ et $\mathbf{A}$ s'écrivent

$$\mathbf{j} = \sigma(-\nabla\phi - c^{-2}\partial\mathbf{A}/\partial t) ,$$

avec

$$\phi(\mathbf{r}) = \int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau' , \ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau' \ \text{(à un gradient près).}$$

Lorenz leur substitue les potentiels retardés

$$\phi_R(\mathbf{r}, t) = \int\frac{\rho(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau' , \ \mathbf{A}_R(\mathbf{r}) = \int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'$$

et constate que ces expressions modifiées restent compatibles avec les expériences effectuées sur des courants quasi-stationnaires. Le courant $\mathbf{j}$ obéit alors à l'équation[1]

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{j}) + c^{-2}\partial^2\mathbf{j}/\partial t^2 + 4\pi\sigma c^{-2}\partial\,\mathbf{j}/\partial t = 0.$$

En faisant abstraction du dernier terme, le lecteur reconnaît ici l'équation fondamentale de l'optique de MacCullagh (p. 239) et donc, implicitement, les équations de Maxwell. Lorenz, quant à lui, ne connaissait pas MacCullagh, mais il avait proposé la même équation dans sa propre théorie de la propagation des vibrations lumineuses. C'est pourquoi il identifia ces vibrations à des courants dans un milieu très faiblement conducteur. Dans un milieu conducteur, le terme supplémentaire proportionnel à la conductivité σ implique une absorption de la lumière, conformément à l'opacité des métaux.

1. On peut s'en persuader en notant que le d'Alembertien des potentiels retardés est nul.

Deux ans après Maxwell, Lorenz aboutit ainsi à une véritable théorie électromagnétique de la lumière, mais son approche ne permettait pas de faire le lien entre permittivité diélectrique et indice optique, ce qui explique sans doute qu'elle soit restée sans suite.

Maxwell connaissait le travail de Lorenz et un manuscrit de Bernhard Riemann dans lequel figurait le potentiel électrostatique retardé. Il reconnaissait la capacité de ces théories à donner une interprétation électromagnétique de la lumière. Cependant, il leur reprochait de ne pas faire intervenir explicitement la dynamique du milieu responsable du retard artificiellement introduit dans les formules de potentiel. Il exigeait, suivant le mot de Carl Friedrich Gauss, « une représentation constructible » des phénomènes électrodynamiques. Son idée d'un éther agité de mouvements tourbillonnaires cachés donnait corps à ce vieux rêve de Gauss[2]. Lorenz, quant à lui, doutait qu'une théorie mécanique de l'éther fût possible. Mais il croyait, comme son maître Ørsted, en une unité profonde de la nature. À ses yeux, la théorie électromagnétique de la lumière contribuait à révéler cette unité, sans trop faire d'hypothèses physiques incontrôlables.

2. Cf. Maxwell, *Treatise* (1873), articles 861, 866.

Extrait n° 9 :

DE L'IDENTITÉ DES VIBRATIONS DE LA LUMIÈRE AVEC LES COURANTS ÉLECTRIQUES

« On the identity of the vibrations of light with electrical currents. », Ludvig Lorenz, *Philosophical Magazine* 34 (1867), 287-301.
Extraits traduits par Danièle Lederer (compte tenu de la source allemande publiée dans *Annalen der Physik* 121 (1867), 243-263).

La science de notre siècle a réussi à démontrer tellement de relations entre les diverses forces (entre l'électricité et le magnétisme, entre la chaleur, la lumière, et les actions moléculaires et chimiques), que nous sommes d'une certaine façon nécessairement amenés à les considérer comme *les manifestations d'une seule et unique force*, qui, suivant les circonstances, se présente sous des formes différentes. Mais, bien que cela ait été l'idée directrice des plus grands chercheurs de notre temps, cela n'a, en aucune manière, été démontré de façon théorique ; et, bien que la connection entre les diverses forces ait été montrée, elle n'a été expliquée que pour des points particuliers. Ainsi, Ampère a expliqué de façon théorique la relation entre l'électricité et le magnétisme, pourtant il n'a pas prouvé la possibilité des courants électriques moléculaires auto-entretenus qu'il admet ;[1] et, de même, Melloni a été par la suite amené pas à pas à l'hypothèse d'une identité entre la lumière et la chaleur rayonnée. Toutefois ces théories sont des maillons tout à fait isolés de la grande chaîne et nous sommes tellement loin de pouvoir suivre de façon théorique l'idée d'une force unique que, même maintenant un demi-siècle après la découverte d'Œrsted, les deux électricités sont considérées comme des *fluides* électriques, la lumière comme des vibrations de *l'éther*, et la chaleur comme le mouvement des *molécules des corps*.

1. Lorenz veut dire que les courants ampériens des aimants persistent indéfiniment en l'absence de toute force électromotrice, contrairement aux courants usuels.

Pour l'instant, ces hypothèses physiques sont à peine réconciliables avec l'idée d'unité de la force ; tandis que la dernière a eu une influence importante sur la science, on ne peut pas en dire autant des premières qui ne sont utiles que dans la mesure où elles fournissent un support à notre imagination. Il serait sans doute préférable d'admettre que, dans l'état actuel de la science, nous ne pouvons pas concevoir la cause physique des forces et de leur action à l'intérieur des corps ; et donc (à l'heure actuelle, en tous cas) nous devons chercher une autre voie, indépendante de toute hypothèse physique, qui permette d'élaborer une théorie pas à pas, de façon à ce que les progrès futurs ne viennent pas annuler les résultats obtenus.

Cette idée se trouve à l'origine, non seulement de l'étude présentée ici, mais aussi des mes recherches précédentes sur la théorie de la lumière ;* et je suis d'autant plus enclin à y croire qu'elle montre de façon remarquable comment les résultats que je m'avance à présenter ici se rattachent à ceux que j'ai trouvés précédemment, et s'accordent avec eux. Alors même que je procède à une étude indépendante de toute hypothèse physique, je vais entreprendre de démontrer un autre maillon de la chaîne qui relie entre elles les diverses manifestations des forces ; je vais prouver que, en accord avec les lois de la propagation de l'électricité sous l'action de l'électricité libre et des courants électriques des milieux voisins, lois déduites de l'expérience, des courants électriques périodiques sont possibles, qui se comportent en tout point comme les vibrations de la lumière ; il s'ensuit sans doute possible que les vibrations de la lumière sont elles-mêmes des courants électriques.

Nous savons que la lumière est produite par une onde, présentant des mouvements périodiques très rapides que l'on peut appeler des vibrations. La particularité de ces vibrations est qu'elles sont perpendiculaires à la direction dans laquelle se propage la lumière ; et nous pouvons dire que cette particularité n'a trouvé aucune explication correcte dans la théorie de l'élasticité, ni dans la théorie apparentée de Cauchy ; car, mis à part le fait que cette théorie nécessite d'admettre l'existence d'un milieu spécial (l'éther lumineux, qui, de plus, ne se manifeste dans aucune autre observation ou relation prouvée avec d'autres forces), même en acceptant cette supposition et les diverses hypothèses de Cauchy, il est difficilement possible d'imaginer un milieu dans lequel une onde pourrait se propager sans la moindre vibration longitudinale. Convaincu que cette théorie ne peut donner qu'une explication factice et non réelle, ne serait-ce que de la particularité de la lumière (les vibrations transverses), j'ai déjà attiré l'attention sur le fait que des courants

* *Phil. Mag.* S. 4. vol.XXVI. p.81.

électriques variables, qui induisent dans des conducteurs fermés des courants parallèles aux courants d'origine, sont similaires aux vibrations de la lumière, qui, d'une certaine façon, induisent elles aussi des vibrations parallèles. Mais, comme les lois des courants induits admises généralement, et basées sur les résultats expérimentaux, ne donnent pas directement le résultat escompté, la question était de savoir s'il ne serait pas possible de modifier les lois de façon qu'elles soient en accord à la fois avec les expériences sur lesquelles elles reposent et les phénomènes qui relèvent de la théorie de la lumière.

Kirchhoff (Pogg. *Ann*. vol. CII.) a exprimé les lois du mouvement de l'électricité dans les corps à conductivité constante sous la forme suivante[2]

$$\left.\begin{aligned} u &= -2k\left(\frac{d\Omega}{dx} + \frac{4}{c^2}\frac{dU}{dt}\right), \\ v &= -2k\left(\frac{d\Omega}{dy} + \frac{4}{c^2}\frac{dV}{dt}\right), \\ w &= -2k\left(\frac{d\Omega}{dz} + \frac{4}{c^2}\frac{dW}{dt}\right); \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où u, v, w sont les composantes de la densité de courant au point x, y, z, k est la conductivité constante et c une constante, et[3]

$$U = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}\,(x-x')[u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')],$$

$$V = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}\,(y-y')[u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')],$$

$$W = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}\,(z-z')[u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')],$$

$$\Omega = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\varepsilon' + \int \frac{ds'}{r}e'.$$

dans lesquelles u', v', w' sont les composantes de la densité de courant aux points x', y', z', ε' la densité d'électricité libre en ce point, e' la densité sur l'élément de surface ds', et r la distance entre les points x, y, z et x', y', z'.

2. En notations modernes et en unités électrostatiques, ces équations s'écrivent $\mathbf{j} = \sigma(-\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/c^2\partial t)$. Le c de Weber, Kirchhoff et Lorenz correspond à notre $c\sqrt{2}$. Les facteurs 2 supplémentaires des formules de Kirchhoff proviennent du fait que Weber ne comptait comme courant électrique que le courant de fluide positif, alors qu'il admettait un courant égal et opposé de fluide négatif.

3. Les formules de Kirchhoff pour le potentiel vecteur (U, V, W) résultent d'une sommation des forces données par la loi de Weber (voir chapitre 1, p. 14). Elles diffèrent de la formule de Neumann-Maxwell $\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'$ par un gradient qui disparaît après intégration sur un circuit fermé (et donc indiscernable par les expériences de l'époque).

Ces formules montrent que les composantes de la force électromotrice au point x, y, z, égales d'après la loi d'Ohm à $\frac{u}{k}$, $\frac{v}{k}$, $\frac{w}{k}$ sont égales à la somme de deux termes, — l'un provenant de l'action inductrice de l'électricité libre, l'autre de l'action inductrice des intensités variables du courant dans tout le volume du corps.

Kirchhoff a de plus écrit les relations entre les composantes du courant et l'électricité libre dans les deux relations[4]

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} &= -\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dt}, \\ u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu &= -\frac{1}{2}\frac{de}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où λ, μ, et ν sont les angles que font avec les axes de coordonnées les normales à la surface, orientées vers l'intérieur.

On voit immédiatement que les équations (1), déduites de façon purement empirique, ne sont pas nécessairement la formulation exacte de la loi véritable ; et l'on pourra toujours leur ajouter plusieurs termes, ou leur donner une autre forme, à condition que ces modifications n'altèrent pas les résultats qui sont tirés de l'expérience. Commençons par considérer les deux termes du membre de droite de ces équations *comme les premiers termes d'une série*.

Définissons une nouvelle fonction $\overline{\Omega}$ par l'équation

$$\overline{\Omega} = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\varepsilon'\left(t-\frac{r}{a}\right) + \int \frac{ds'}{r}e'\left(t-\frac{r}{a}\right).$$

Dans l'expression de Ω, ε' et e' sont des fonctions de t ; dans $\overline{\Omega}$, ce sont les mêmes fonctions, mais de la variable $\left(t-\frac{r}{a}\right)$, où a et une constante. Les développements en série donnent

$$\varepsilon'\left(t-\frac{r}{a}\right) = \varepsilon' - \frac{d\varepsilon'}{dt}\cdot\frac{r}{a} + \frac{d^2\varepsilon'}{dt^2}\cdot\frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2} - \dots,$$

$$e'\left(t-\frac{r}{a}\right) = e' - \frac{de'}{dt}\cdot\frac{r}{a} + \frac{d^2 e'}{dt^2}\cdot\frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2} - \dots,$$

et ces séries sont introduites dans les équations ci-dessus, puis dérivées par rapport à x. On obtient ainsi

$$\frac{d\overline{\Omega}}{dx} = \frac{d\Omega}{dx} + \frac{1}{2a^2}\frac{d}{dt^2}\left[\iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}(x-x')\varepsilon' + \int \frac{ds'}{r}(x-x')e'\right] - \dots;$$

4. On a là l'équation de continuité du courant, $\nabla\cdot\mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$ en notation moderne (voir la note (2) pour comprendre le facteur ½ de Kirchhoff).

et, en substituant dans cette équation les expressions (2) pour $\frac{d\varepsilon'}{dt}$ et $\frac{de'}{dt}$, on obtient en intégrant par parties

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dx} = \frac{d\Omega}{dx} - \frac{1}{a^2}\frac{d}{dt}\iiint\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}u' + \frac{1}{a^2}\frac{dU}{dt} - \ldots, \tag{3}$$

où U a la même signification que précédemment. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dx} + \frac{1}{a^2}\frac{d}{dt}\iiint\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}u'\left(t-\frac{r}{a}\right) = \frac{d\Omega}{dx} + \frac{1}{a^2}\frac{dU}{dt}\,, \tag{4}$$

où l'écriture $u'\left(t-\frac{r}{a}\right)$ indique que u' est une fonction de $\left(t-\frac{r}{a}\right)$ plutot que de t seul.

Le membre de droite de cette dernière équation est une série dont on n'a gardé que les deux premiers termes, et dont les termes suivants sont des puissances croissantes de $\frac{r}{a}$. Si l'on suppose a égal à $\frac{c}{a}$, les deux membres deviennent identiques à l'expression entre parenthèses dans la première des équations (1). Mais, d'après la détermination de Weber,

$$c = 284736 \text{ miles},$$

alors que la plus grande valeur de r lors d'une expérience ne dépasse pas quelques pieds ; ce qui fait que $\frac{r}{a}$ est infiniment petit. Ainsi, les termes suivants de la série sont partout négligeables, à la seule condition que les dérivées qui apparaissent dans les termes du deuxième et troisième ordre du courant ne soient pas trop grandes par rapport au temps, qui intervient ici lui aussi.

Ainsi, en ce qui concerne les résultats sur lesquels elles s'appuient, les équations de propagation de l'électricité sont tout aussi valables que les équations (1), et à l'aide de l'équation (4) et des deux équations analogues, on peut les mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} u &= -2k\left(\frac{d\bar{\Omega}}{dx} + \frac{4}{c^2}\frac{d\alpha}{dt}\right),\\ v &= -2k\left(\frac{d\bar{\Omega}}{dy} + \frac{4}{c^2}\frac{d\beta}{dt}\right),\\ w &= -2k\left(\frac{d\bar{\Omega}}{dz} + \frac{4}{c^2}\frac{d\gamma}{dt}\right), \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$\alpha = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} u'\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

$$\beta = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} v'\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

$$\gamma = \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} w'\left(t - \frac{r}{a}\right).$$

Ces équations se distinguent des équations (1) en ce qu'elles font intervenir, plutôt que U, V, W, les expressions plus simples α, β, γ; et elles indiquent de plus que toute l'action entre l'électricité libre et les courants électriques *prend du temps pour se propager* – une supposition qui n'est pas surprenante en science, et qui pourrait par elle-même être créditée d'une certaine probabilité. En effet, d'après la formule trouvée, l'action au point x, y, z à l'instant t ne dépend pas des conditions en x', y', z' *au même instant*, mais à l'instant $t - \frac{r}{a}$, c'est-à-dire aussi longtemps en avance que ce qui est nécessaire pour parcourir la distance r à la vitesse a.

La constante a qui intervient dans les équations (A) devrait, d'après ce qui précède, être égale à $\frac{c}{2}$; pourtant une étude plus fine va nous montrer que d'autres valeurs sont possibles aussi. En effet, on peut aussi écrire la première des équations (A) de la façon suivante

$$u = -2k\left(\frac{d\Omega}{dx} + \left(\frac{4}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\frac{d}{dt}\iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} u' + \frac{1}{a^2}\frac{dU}{dt} \ldots\right),$$

qui, lorsque $a = \frac{c}{2}$, nous ramène à la première des équations (1) tandis que si a était supposé infiniment grand, elle donnerait la forme qui se déduit de la théorie électrodynamique de Neumann.[5] Et comme cette théorie est elle aussi en accord avec l'expérience, il est clair qu'elle ne peut pas donner la valeur de a qui doit pour l'instant être considérée comme une quantité indéterminée. Elle doit toutefois être très grande, du même ordre de grandeur que c, de façon à ce que les termes suivants de la série soient infiniment petits. Si, par exemple, $a = c/\sqrt{2}$, l'équation ci-dessus se trouvera à mi-chemin entre les théories de Weber et de Neumann.[6]

5. Voir la note (3).

6. Ce choix fait de a la vitesse de propagation d'une perturbation électrique le long d'un fil (aujourd'hui notée c) selon Kirchhoff, comme Lorenz le rappellera plus loin. Les mesures de Weber et Kohlrausch donnaient à ce nombre une valeur très proche de la vitesse de la lumière, ce qui explique l'anticipation de Lorenz.

Il nous faut maintenant trouver, d'une autre façon, une détermination des constantes indéterminées et, si possible, chercher une confirmation des résultats obtenus. En utilisant l'indication donnée par la formule sur le fait que les actions électriques nécessitent du temps pour se propager, on pourrait alors tenter de trouver une hypothèse plausible sur le mode d'action de l'électricité dynamique, qui donnerait des résultats analogues à ceux déjà trouvés. J'ai trouvé que cela peut être réalisé de *plusieurs* façons ; toutefois cette méthode perd toute valeur, car sa signification dépendrait entièrement de la découverte d'une hypothèse qui serait, par elle-même, plus probable que toutes les autres. Après avoir beaucoup étudié cette question, j'ai complètement abandonné l'idée de trouver quoi que ce soit de bon à partir d'hyptohèses physiques ; nous ne pouvons que développer les conséquences des résultats obtenus, et nous demander si cela ne nous fournit pas une indication pour répondre à la question.

Pour une fonction ϕ donnée, pourvu que le point x, y, z se trouve à l'intérieur du domaine d'intégration, nous avons

$$\left.\begin{aligned}\left(\Delta_2 - \frac{d^2}{a^2\,dt^2}\right)\iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\,\phi\left(t-\frac{r}{a}, x', y', z'\right)\\ = -4\pi\phi(t, x, y, z),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où l'on a écrit Δ_2 à la place de $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}$. La démonstration de ce théorème, qui par ailleurs n'est pas difficile à comprendre, se trouve dans mon article dans le Journal de Crelle, vol. LVIII. En l'utilisant, on écrit les équations (A) sous la forme des équations différentielles suivantes :

$$\Delta_2 u - \frac{1}{a^2}\frac{d^2u}{dt^2} = 8\pi k\left(\frac{d\varepsilon}{dx}+\frac{4}{c^2}\frac{du}{dt}\right),$$

$$\Delta_2 v - \frac{1}{a^2}\frac{d^2v}{dt^2} = 8\pi k\left(\frac{d\varepsilon}{dy}+\frac{4}{c^2}\frac{dv}{dt}\right),$$

$$\Delta_2 w - \frac{1}{a^2}\frac{d^2w}{dt^2} = 8\pi k\left(\frac{d\varepsilon}{dz}+\frac{4}{c^2}\frac{dw}{dt}\right),$$

reliées par (2) à l'équation

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Ces équations sont satisfaites par exemple par

$$u = e^{-hx}\cos p\,(\omega t - z), \quad v = 0, \quad w = 0, \tag{6}$$

où h, p, ω sont des constantes telles que

$$h^2a^2 = p^2\,(a^2 - \omega^2) \quad \text{et} \quad hc^2 = 16\pi k\omega \tag{7}$$

Ce traitement préliminaire des équations (A) montre clairement que des courants électriques *périodiques* sont possibles, qu'ils se déplacent *comme une onde* à la vitesse ω, et, comme la lumière, produisent des vibrations qui sont *perpendiculaires* à la direction de propagation. Si donc nous supposons que les vibrations de la lumière sont des courants électriques, ω représente la vitesse de la lumière, tandis que a est la vitesse à laquelle l'action électrique se propage dans l'espace. La dernière équation montre de plus que, lorsque la conductivité électrique k du corps est très petite, les deux vitesses tendent à devenir égales.

La vitesse à laquelle, dans les expériences électrodynamiques de Weber, l'action électrique est passée d'un conducteur à l'autre à travers l'air est,[7] d'après ces résultats, égale à la vitesse de la lumière dans l'air. Mais, d'après la détermination de Weber, c = 284 736 miles, et donc

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 201360\,,$$

valeur qui est en accord remarquable avec les diverses déterminations de la vitesse de la lumière ; elles se situent en effet autour de cette valeur de sorte que celle-ci peut être considérée comme une nouvelle détermination de la vitesse de la lumière, et pas nécessairement moins précise que les autres. Nous avons donc des raisons de choisir $a = c/\sqrt{2}$ et si, dans l'équation (A) nous remplaçons c par $a\sqrt{2}$, le bien-fondé de cette hypothèse est confirmé par le fait que les équations prennent alors une forme très simple, et donnent exactement les mêmes équations différentielles que celles que j'avais précédemment établies pour les vibrations de la lumière, en leur ajoutant seulement un terme.

En effet, d'après l'équation (2), nous avons

$$\frac{d\varepsilon'\left(t-\frac{r}{a}\right)}{dt} = -2\left[\frac{\delta u'\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\delta x'} + \frac{\delta v'\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\delta y'} + \frac{\delta w'\left(t-\frac{r}{a}\right)}{\delta z'}\right],$$

7. Cette vitesse – plus précisément la vitesse de propagations d'une perturbation électrique le long d'un fil – doit être $c/\sqrt{2}$ (dans la notation de Weber et Lorenz) suivant un calcul de Kirchhoff. Weber et Kohlrausch avaient mesuré le rapport c de l'unité électrodynamique de charge à l'unité électrostatique.

où les dérivées par rapport à x', y' et z' doivent être effectuées en considérant r comme une constante, d'où

$$\frac{de'\left(t-\frac{r}{a}\right)}{dt} = -2\left[u'\left(t-\frac{r}{a}\right)\cos\lambda + v'\left(t-\frac{r}{a}\right)\cos\mu + w'\left(t-\frac{r}{a}\right)\cos\nu\right].$$

En reportant ces valeurs dans

$$\frac{d\overline{\Omega}}{dt} = \iiint\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\frac{d\varepsilon'\left(t-\frac{r}{a}\right)}{dt} + \int\frac{ds'}{r}\frac{de'\left(t-\frac{r}{a}\right)}{dt},$$

on obtient, en intégrant par parties et en introduisant les notations[8] α, β, γ

$$\frac{d\overline{\Omega}}{dt} = -2\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right).$$

De plus, d'après (5)

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \Delta_2\alpha + 4\pi u,$$

et des expressions analogues pour β, γ. Après les avoir dérivées par rapport à t, reportons ces expressions dans les équations (A) ; en prenant $c = a\sqrt{2}$, on obtient

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{4k}\frac{du}{dt} + 4\pi u &= \frac{d}{dz}\left(\frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right),\\
\frac{1}{4k}\frac{dv}{dt} + 4\pi v &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}\right),\\
\frac{1}{4k}\frac{dw}{dt} + 4\pi w &= \frac{d}{dy}\left(\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

On obtient par ailleurs directement à partir des équations (A)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} &= -\frac{4k}{a^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}\right),\\
\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} &= -\frac{4k}{a^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz}\right),\\
\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} &= -\frac{4k}{a^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

8. Le lecteur reconnaît ici la « jauge de Lorentz » $\nabla\cdot\mathbf{A} + \partial\varphi/\partial t = 0$ pour laquelle les potentiels scalaire et vecteur sont tous deux retardés dans la théorie de Maxwell moderne.

qui permettent d'éliminer α, β et γ des équations (8), après les avoir dérivées par rapport à t. On obtient alors les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}\right) &= \frac{1}{a^2}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{16\pi k}{a^2}\frac{du}{dt},\\
\frac{d}{dz}\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right) &= \frac{1}{a^2}\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{16\pi k}{a^2}\frac{dv}{dt},\\
\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}\right) &= \frac{1}{a^2}\frac{d^2w}{dt^2}+\frac{16\pi k}{a^2}\frac{dw}{dt}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}$$

Ces équations pour les composantes du courant électrique et celles que j'ai déjà trouvées pour les composantes de la lumière sont en accord parfait mis à part le dernier terme, dans lequel intervient la conductivité électrique k. Ce terme représente une absorption qui est d'autant plus grande que la conductivité électrique est grande, et qui est définie par la constante h des équations (6) lorsqu'on y prend $c = a\sqrt{2}$.

Lorsque k est *très grande*, comparée à pa, les équations (7) donnent

$$h = p = \frac{2\pi}{\lambda},$$

si λ représente la longueur d'onde de la lumière ; il s'ensuit par exemple d'après (6), que l'amplitude d'un rayon lumineux qui a traversé un bon conducteur, d'épaisseur égale à une demi-longueur d'onde, est réduite d'un facteur e^{π}, et l'intensité, proportionnelle au carré de l'amplitude, d'un facteur $e^{2\pi}$, soit 535. Ce sera le cas pour tous les métaux ; en effet, d'après Weber, la conductivité du cuivre est $\frac{1}{274100}$ en mesure magnétique en prenant la seconde et le millimètre comme unités de temps et de longueur, et donc $\frac{c^2}{8} \times \frac{1}{274100}$, ou encore $283433a$ en mesure mécanique, valeur qui est grande en comparaison avec $\frac{2\pi}{\lambda}a$. Toutefois, il est clair que ce résultat ne peut être qu'approximativement correct, d'autant que l'on a supposé que la conductivité est parfaitement constante, ce qui n'existe pas en réalité. Malgré tout, le résultat principal que *tous les bons conducteurs de l'électricité absorbent la lumière dans de grandes proportions*, est en accord manifeste avec l'expérience. Quand la conductivité est très petite, les équations (7) donnent

$$h = 8\pi\frac{k}{a}.$$

Dans le cas du cuivre, dont la conductivité est donnée ci-dessus, on a trouvé $\frac{k}{a}$ égal à 283 433 ; mais, pour tous les corps transparents, la conductivité est des millions de fois plus petite que celle du cuivre. Les liquides sont une exception, dans lesquels l'activité chimique et la mobilité des particules influent tellement sur la détermination de la conductivité au sens propre, qu'elles la rendent impossible. Nous trouvons donc que la conductivité des autres corps transparents est tellement de millions de fois plus petite que celle des métaux, que le coefficient d'absorption h disparaît, tout comme le dernier terme des équations (B), ce qui rend ces dernières exactement identiques aux équations de la lumière. Tout comme nous pouvons relier l'opacité des métaux à leur bonne conductivité, de la très faible transparence d'un corps nous pouvons déduire que, comparé aux métaux, il s'agit d'un *très mauvais conducteur* du courant électrique, résultat qui a été pleinement vérifié par l'expérience.[9]

Les vibrations décrites par les équations (B) sont transverses ; et, même si l'on garde le terme qui contient k, des vibrations longitudinales ne sont pas possibles. En dérivant les trois équations (8) par rapport à x, y, z et en les additionnant, on obtient

$$\frac{d\theta}{dt} + 16\pi k\theta = 0,$$

en posant

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \theta.$$

Il apparaît clairement que θ ne peut pas être une fonction périodique du temps, d'où il résulte que des vibrations longitudinales ne peuvent pas se produire. Comme, de plus, cette équation montre que la valeur de θ diminue lorsque le temps augmente, et ne dépend pas des valeurs aux points voisins, nous sommes amenés à supposer de façon générale que $\theta = 0$; il s'ensuit, puisque

$$\theta = -\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dt},$$

qu'il ne peut pas apparaître d'électricité libre dans un corps dont la conductivité est constante. Ce résultat est différent de celui que Kirchhoff avait déduit des équations (1) originales – à savoir qu'il y a en général de l'électricité libre à l'intérieur d'un conducteur ; mais, d'après la totalité de la

9. La théorie de Maxwell prévoit de même un amortissement des ondes lumineuses lorsqu'elles traversent un conducteur. Au paragraphe 799 de son Traité de 1873, Maxwell notait l'exception des électrolytes et aussi le désaccord quantitatif entre la théorie et ses propres mesures d'absorption par des métaux. Hendrik Lorentz attribua plus tard cette insuffisance de la théorie de Maxwell à un effet de l'inertie des ions ou des électrons responsables du courant électrique.

présente étude, il est clair, en tout état de cause, que cette conclusion ne peut pas être tirée avec certitude.

Ainsi, ayant prouvé que, à partir des équations (A) qui incluent les lois des courants électriques en accord avec l'expérience, on peut déduire les équations différentielles (B) qui montrent que les courants électriques se comportent à tout point de vue comme les vibrations de la lumière, la question se pose de savoir si, par ailleurs, les lois des courants électriques peuvent se déduire des lois connues pour la lumière. Je vais montrer maintenant qu'en fait c'est possible, et que l'on peut retrouver les équations (A) en partant des équations (B), à condition d'introduire dans ces dernières les conditions qui doivent être remplies aux limites du corps, et que nous devons connaître pour déduire, à partir des équations différentielles, d'autres équations, qui sont en quelque sorte leurs intégrales. Nous verrons aussi que ces conditions aux limites sont les mêmes que celles que j'avais déjà trouvées (*Pogg. Ann.* vol. CXVIII. p.126 ; *Phil. Mag.* S.4. vol. XXVI. p. 93) pour les composantes de la lumière ; de sorte que pour ce calcul nous n'avons besoin de faire aucune autre supposition que celles que donne la théorie de la lumière.

[...] Nous omettons la section où Lorenz retrouve les équations électrodynamiques de Kirchhoff (modifiées par le retard) à partir des équations (B) et des conditions aux limites exigées par les lois de l'optique.

Ce résultat constitue une nouvelle preuve de l'identité des vibrations de la lumière avec les courants électriques ; car il est maintenant clair, non seulement que l'on peut déduire les lois de la lumière de celles des courants électriques, mais que la démarche inverse peut aussi être menée à bien, à condition d'introduire les mêmes conditions aux limites que celles qu'impose la théorie de la lumière. Nous sommes maintenant en mesure de trouver par le seul calcul les propriétés d'induction de l'électricité libre telles qu'elles sont décrites par les équations de Kirchhoff (2), tout comme les propriétés d'induction des courants électriques variables, les unes comme les autres étant contenues dans les équations (A). Cela se fait en partant simplement de ce qui est nécessaire pour établir les lois de la lumière, en ajoutant un seul terme aux équations différentielles trouvées pour ce que l'on appelle les composantes de la lumière. Ce terme représente de façon correcte l'absorption de la lumière dans les bons conducteurs de l'électricité, et disparait pour les corps parfaitement transparents.

Sans m'étendre plus en détail sur les conséquences des résultats que nous avons obtenus ici, qui font manifestement franchir un pas de plus vers l'explicitation de l'idée d'une force unique et ouvrent un nouveau domaine pour des recherches futures, je vais terminer en attirant l'attention sur les conclusions qu'il est légitime de tirer avec un certain degré de probabilité sur le mode d'action de la lumière, et sur la façon dont nous nous situons par rapport aux hypothèses physiques sur la lumière.

Si nous avions à écrire les lois des courants électriques de façon qu'elles soient valables de façon générale pour des corps *hétérogènes*, et non simplement pour des corps homogènes à conductivité constante, la meilleure façon de le faire serait de partir des équations différentielles, en considérant que a et k sont des grandeurs variables. Ce serait tout particulièrement en accord avec les équations générales que l'on trouve dans la théorie de la lumière dons les milieux hétérogènes ; de plus, les conditions aux limites qui doivent être satisfaites dans les corps homogènes seraient alors contenues dans les équations différentielles et pourraient s'en déduire. Toutefois, en procédant ainsi, on ne trouverait pas pour les corps hétérogènes une expression aussi simple que les équations (A) ; celles-ci devant être considérées comme un cas spécial qui n'est valable que pour les corps homogènes, tandis que les équations différentielles resteraient les équations de base et les seules valables, sur lesquelles devrait s'appuyer une explication physique. La conclusion théorique importante proviendrait de ce que nous avons déjà indiqué, que la propagation des forces électriques prend du temps, et que leur action à distance n'est qu'une apparence (que l'on déduirait des équations (A) si on les considérait comme les équations fondamentales), et que l'action de l'électricité et des courants électriques ne dépend en fait que de l'état électrique des éléments *immédiatement voisins*, comme le montrent les équations différentielles (B). On sait bien que c'est une idée avancée par Ampère et défendue par plusieurs physiciens, et plus particulièrement par Faraday.

À l'heure actuelle, l'opinion générale est que la lumière est constituée par des mouvements en avant et en arrière[10] des particules d'éther. Si c'était le cas, le courant électrique serait un mouvement de progression de l'éther dans la direction des courants (positif ou négatif). Mais il est impossible que l'équation que l'on établit de façon théorique en considérant de très petits écarts à l'équilibre puisse rester valable pour toutes sortes de déplacements

10. Il s'agit simplement d'oscillations rectilignes.

quelconques ; or l'ensemble de notre recherche montre justement que les mêmes équations sont valables dans les deux cas. La lumière ne peut donc pas être constituée par les vibrations imaginées jusqu'ici ; cette dernière conséquence de la théorie de l'éther la rend inacceptable.

Il existe par ailleurs une autre conception de la nature des vibrations lumineuses à laquelle j'ai déjà fait allusion, et qui maintenant devient peut-être plus probable. Si nous considérons que la lumière est constituée de vibrations circulaires à l'intérieur des corps, autour d'axes que, d'après la théorie de l'électricité, nous considérons comme les directions de la vibration, le courant électrique n'est plus un mouvement de translation mais une rotation se produisant toujours dans le même sens, l'axe de rotation devenant alors la direction du courant. Cette rotation ne sera continue que dans les bons conducteurs, où le déplacement se produira dans la direction de l'axe, tandis qu'elle deviendra périodique dans les mauvais conducteurs, se propageant par ce que l'on appelle l'induction en électricité, dans une direction perpendiculaire à l'axe de rotation. Dans cette vision, il n'y a pratiquement aucune raison d'adhérer à l'hypothèse de l'éther ; car on peut admettre que dans ce que l'on appelle le vide, il y a suffisamment de matière pour former un support à ce mouvement.

Lors des développements de la science, cette hypothèse concernant la nature de la lumière va probablement, soit prendre une nouvelle forme soit être totalement abandonnée. Mais le résultat de la présente recherche, à savoir que les vibrations de la lumière sont des courants électriques, ayant été obtenu sans utiliser d'hypothèse, restera indépendant de toute hypothèse.

Pogg. *Ann.* vol. CXVIII. p.113 ; *Phil. Mag.* S.4. vol. XXVI. p.82.

Notices biographiques

Ampère, André Marie (1775-1836)

Mathématicien, chimiste, physicien et philosophe français. Après s'être surtout intéressé aux mathématiques et aux fondements moléculaires de la chimie (hypothèse d'Avogadro-Ampère), il prit connaissance de la découverte d'Ørsted et se tourna vers l'électromagnétisme. En l'espace de quelques mois, il parvint à réduire l'ensemble des phénomènes magnétiques et électromagnétiques à l'interaction entre des éléments de courant suivant une formule précise. Cette formule, tout au moins ses conséquences pour les circuits fermés, devint un résultat incontournable de la nouvelle science qu'il nomma électrodynamique. Elle lui valut, de la part de Maxwell, le titre de « Newton de l'électricité ».

Coulomb, Charles Augustin (1736-1806)

Ingénieur militaire et savant français, auteur de travaux fondamentaux sur l'élasticité, l'électricité et le magnétisme. Grâce à une balance de torsion, il établit (ou crut établir) la loi qui porte son nom pour la force entre deux charges électriques ponctuelles. Il donna aussi une loi analogue pour des fluides magnétiques hypothétiques et s'en servit pour expliquer le ferromagnétisme par des déplacement intramoléculaires de tels fluides.

Faraday, Michael (1791-1867)

Chimiste et physicien anglais, réputé pour ses travaux sur l'électricité et le magnétisme. Il apprit la chimie de son maître Humphry Davy à la Royal Institution de Londres, dont il devint le membre le plus illustre. En physique, il était surtout autodidacte. Parmi ses découvertes essentielles, on trouve les rotations électromagnétiques, l'induction électromagnétique, le pouvoir diélectrique des isolants, le diamagnétisme et les lois quantitatives de l'électrolyse. Sa démarche expérimentale supposait et justifiait l'attention au « champ » (espace entre les sources) parcouru par des lignes de forces douées d'existence physique.

Fresnel, Augustin (1788-1827)

Ingénieur et mathématicien français, auteur, vers 1820, d'une théorie ondulatoire de la lumière et d'expériences la corroborant. La théorie de Fresnel faisait de l'éther un corps rigide élastique (composé de molécules liées par des forces centrales), néanmoins perméable aux corps matériels (afin de rendre compte de l'aberration des étoiles).

De plus Fresnel admettait un entraînement partiel de l'éther par les corps transparents, afin de rendre compte de l'absence d'effets du mouvement de la terre sur les lois de la réfraction. À l'inverse, la théorie de Maxwell impliquait un entraînement complet de l'éther par tout corps matériel. Lorentz la modifia considérablement pour se conformer aux hypothèses de Fresnel.

Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)

Puissant mathématicien et astronome allemand, directeur de l'Observatoire de Göttingen. Avec l'aide du physicien Wilhelm Weber, Gauss lança un programme ambitieux d'étude du magnétisme terrestre, fondé sur de nouveaux dispositifs de mesure absolue (ramenée aux unités fondamentales de longueur, de temps et de masse), sur un approfondissment de la théorie du potentiel, et sur l'organisation méthodique d'un réseau d'observateurs. Wilhelm Weber diffusa largement cette nouvelle physique au moyen de son séminaire à l'Université de Göttingen et par ses propres recherches en electrodynamique.

Heaviside, Oliver (1850-1925)

Opérateur télégraphiste et physicien amateur, il fut le plus important réformateur britannique de l'électrodynamique maxwellienne. Nous lui devons l'élimination des potentiels, l'explicitation des aspects énergétiques de cette théorie, la rationalisation des unités, une terminologie efficace, de puissantes techniques de calcul (dont une anticipation de la théorie des distributions de Laurent Schwarz) et la solution de nombreux problèmes de propagation dans les cables, les fils et l'air. Son excentricité et son esprit caustique lui valurent l'hostilité des autorités britanniques du télégraphe. Mais il sut se faire apprécier des autre disciples de Maxwell (FitzGerald, Lodge et Hertz).

Helmholtz, Hermann von (1821-1894)

Physiologiste et physicien allemand, disciple du physiologiste Johannes Müller mais essentiellement autodidacte en physique mathématique. Ce géant de la science du XIX^{e} a contribué de façon décisive à l'essor de domaines très divers de la connaissance : physiologie des sensations, médecine, philosophie de la perception, esthétique musicale, mathématiques, physique, etc. Il est l'auteur d'un mémoire fondateur sur la conservation de l'énergie (1847). Dans les années 1870, il s'intéressa à l'électricité à travers ses expériences de physiologie et fut ainsi amené à comparer les diverses théories électrodynamiques de son temps. Ses réflexions critiques et de nouvelles expériences le conduirent à préférer la théorie de Maxwell aux théories allemandes. Mais il laissa à son disciple Heinrich Hertz le soin d'apporter la preuve décisive de la supériorité du système de Maxwell.

Hertz, Heinrich (1857-1894)

Physicien allemand, théoricien profond et brillant expérimentateur. Répondant à une question de son maître Hermann von Helmholtz, Hertz parvint en 1887-88 à établir la supériorité de la théorie de Maxwell sur ses rivales continentales. La preuve la plus décisive concernait la production d'ondes électromagnétiques par un oscillateur de haute fréquence. Au bout de deux ou trois ans de confusions partielles et temporaires, ces expériences aboutirent à un consensus en faveur de la théorie de Maxwell. Hertz les accompagna d'une reformulation de la théorie de Maxwell dont l'élégance et la pureté logique séduisirent ses contemporains.

Kirchhoff, Gustav (1824-1887)

Physicien mathématicien et expérimenteur, disciple de Franz Neumann et auteur de travaux importants dans les domaines de la mécanique, de l'optique (spectroscopie), de la thermodynamique (rayonnement du corps noir) et de l'électricité. Dans ce dernier domaine, il combina l'approche phénoménologique de Neumann et la théorie de Weber en formulant sous forme d'équations différentielles les conséquences observables de cette dernière théorie. Il obtint ainsi la forme la plus pratique et la plus générale de l'électrodynamique continentale.

Lorentz, Hendrik Antoon (1853-1928)

Physicien théoricien néerlandais. Familier des trois cultures britannique, allemande et française et impreigné des conceptions moléculaires de son compatriote Johannes Diderik van der Waals, Lorentz parvint à élargir le champ d'application de l'électrodynamique maxwellienne en y intégrant les conceptions moléculaires continentales du courant et de la polarisation électrique et magnétique. À l'issue de cette réforme, l'éther se trouvait séparé de la matière et les équations de Maxwell prenaient un tout autre sens que celui imaginé par Maxwell. Ainsi se trouvait franchie une étape essentielle vers la Relativité, comme le remarqua plus tard Albert Einstein. De la fin du XIXe jusqu'à sa mort, Lorentz fut souvent considéré comme l'autorité suprême de la physique.

Lorenz, Ludvig (1829-1891)

Ingénieur civil et physicien danois, auteur de brillants travaux dans les domaines de l'optique, de l'électricité et de la chaleur, soucieux d'unifier la physique à la manière de son maître Ørsted. Son nom est attaché à la relation dite « de Lorenz-Lorentz » entre polarisabilité moléculaire et indice optique d'un milieu transparent. Sa théorie optique de 1863 et sa théorie électromagnétique de la lumière de 1867 contiennent un cas particulier des équations de Maxwell.

MacCullagh, James (1809-1847)

Mathématicien irlandais, formé dans la grande tradition de mathématiques de Trinity College, Dublin, à laquelle se rattachent aussi les noms de William Rowan Hamilton et de George Francis FitzGerald. Inversant la méthode de ses prédécesseurs français (Fresnel, Cauchy et Poisson), MacCullagh détermina les propriétés élastiques de l'éther optique à partir des lois empiriques de propagation de la lumière. Il obtint ainsi une théorie jugée mécaniquement impossible par ses contemporains, mais réhabilitée plus tard par FitzGerald et Larmor dans leurs réinterprétations de la théorie de Maxwell. L'éther de MacCullagh est en effet régi par les équations de Maxwell.

Maxwell, James Clerk (1831-1879)

Physicien britannique d'origine écossaise, formé dans les Universités d'Edinburgh et de Cambridge. Nous lui devons une théorie profondément originale de l'électrodynamique, inspirée des travaux antérieurs de Faraday et de William Thomson. Il fut aussi l'un des principaux fondateurs de la théorie cinétique des gaz et de la mécanique statistique. Enfin, en tant que premier directeur du laboratoire Cavendish, il promut la physique expérimentale de précision à Cambridge. Son approche de la physique s'accompagnait d'une réflexion philosophique sur les fondements, tout en restant consciente des exigences des techniques de son temps.

Neumann, Franz (1798-1895)

Physicien allemand, fondateur d'une importante école de physique mathématique et expérimentale à Königsberg. Neumann établit de nouvelles exigences de rigueur dans la mesure de grandeurs physiques (théorie des appareils, calculs d'erreurs, méthodes statistiques). Son approche phénoménologique de l'électromagnétisme le conduisit à la notion abstraite de potentiel électrodynamique, susceptible d'engendrer f.e.m et forces mesurables par de simples différentiations.

Ørsted, Hans Christian (1777-1851)

Physicien danois, rendu célèbre par sa découverte de l'électromagnétisme. Impreigné de *Naturphilosophie* allemande, Ørsted croyait en une unité profonde des diverses forces de la nature et pensait en particulier qu'un courant galvanique devait pouvoir agir sur une aiguille aimantée. C'est ce qu'il établit en 1820, ainsi que les principales caractéristiques de ce phénomène. Cette découverte bouleversa immédiatement le monde de la physique et suscita, entre autres, l'électrodynamique d'Ampère et les premiers travaux de Faraday dans le domaine de l'électricité.

Poisson, Siméon Denis (1781-1840)

Prolifique mathématicien français, formé à l'Ecole Polytechnique et y enseignant plus tard, disciple le plus doué de Pierre Simon de Laplace. Il élabora de savantes théories mathématiques de l'élasticité, de l'optique, de la chaleur, de l'électricité et du magnétisme, dans le cadre laplacien de molécules agissant entre elles par des forces centrales. À cette fin, il élabora une bonne partie des techniques de l'analyse utiles à la physique mathématique du XIX^e^.

Thomson, William, baron Kelvin of Largs (1824-1907)

Mathématicien et physicien britannique d'origine irlandaise et écossaise, longtemps titulaire de la chaire de physique expérimentale de Glasgow. Formé à Glasgow, à Cambridge et à Paris dans le laboratoire de Victor Regnault, Thomson a contribué plus que tout autre britannique à définir les fondements conceptuels et méthodologiques de la physique du XIX^e^. En Grande Bretagne, il fut le principal promoteur d'une physique fondée sur le concept d'énergie. En tant qu'expert conseil et concepteur d'intruments, il contribua au succès de maints projets technico-industriels, tel le premier cable transatlantique. Il co-fonda la thermodynamique moderne avec Rudolf Clausius. Dans ses travaux théoriques, il favorisait l'élaboration de concepts génériques et ontologiquement neutres, mais spéculait volontiers sur des représentations ou analogies mécaniques des phénomènes physiques.

Weber, Wilhelm (1804-1891)

Physicien allemand, réputé pour ses travaux expérimentaux et théoriques sur l'électricité et du magnétisme, en partie sous l'égide de Carl Friedrich Gauss à l'Université de Göttingen. Il promut une physique de précision, fondée sur des mesures absolues (rapportées aux unités fondamentales de la mécanique) et sur la décomposition de toute action physique en forces agissant directement d'une particule de matière (ou d'électricité) à une autre. Sa théorie de l'électrodynamique, élaborée en 1847, eut longtemps la faveur des physiciens continentaux.

Bibliographie

Les notes et commentaires du présent ouvrage ont été rédigés à partir de mon livre sur l'histoire de l'électrodynamique (Darrigol 2000). En ce qui concerne les équations de Maxwell, leur origine et leurs développements, les études les plus pertinentes sont celles de Daniel Siegel (1991), Jed Buchwald (1985) et Bruce Hunt (1991). La liste qui suit est très limitative. Pour une plus ample bibliographie, le lecteur pourra consulter les quatre ouvrages que nous venons d'indiquer.

BLONDEL CHRISTINE (1982), *Ampère et la création de l'électrodynamique*, Paris.

BUCHWALD JED (1985), *From Maxwell to microphysics: Aspects of electromagnetic theory in the last quarter of the nineteenth century*, Chicago.

BUCHWALD JED (1994), *The creation of scientific effects: Heinrich Hertz and electric waves*, Chicago.

DARRIGOL OLIVIER (2000), *Electrodynamics from Ampère to Einstein*, Oxford.

GOODING DAVID (1978), « Conceptual and experimental bases of Faraday's denial of electrostatic action at a distance », *Studies in history and philosophy of science,* **9**, 117-149.

GOODING DAVID (1981), « Final steps to the field theory: Faraday's study of magnetic phenomena, 1845-1850 », *Historical studies in the physical sciences,* **11**, 231-275.

GOODING DAVID (1985), « In Nature's school: Faraday as an experimentalist », dans D. Gooding et F. James (éds.), *Faraday rediscovered: Essays on the life and work of Michael Faraday, 1791-1867* (London), 182-223.

HARMAN PETER (1990-1995), (éd.), *The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell,* Cambridge, 2 vols.

HARMAN PETER (1998), *The natural philosophy of James Clerk Maxwell*, Cambridge.

HUNT BRUCE (1991), *The Maxwellians*, Ithaca et Londres.

JECH BRUNO (1999-2003), Articles sur l'histoire du potentiel vecteur dans le *Bulletin de l'union des physiciens*.

JUNGNICKEL CHRISTA et RUSSELL MCCORMMACH (1986), *Intellectual mastery of nature: Theoretical physics from Ohm to Einstein*, vol. 1, *The torch of mathematics, 1800-70*, vol. 2, *The now mighty theoretical physicist,* Chicago.

KNUDSEN OLE (1971), « From Lord Kelvin's notebook: Ether speculations », *Centaurus,* **16**, 41-53.

KNUDSEN OLE (1976), « The Faraday effect and physical theory », *Archive for history of exact sciences,* **15**, 135-281.

OLESKO KATHRYN (1991), *Physics as a calling: Discipline and practice in the Königsberg seminar of physics*, Ithaca et Londres.

SCHAFFER SIMON (1995), « Accurate Measurement is an English science », dans N. Wise (éd.), *The values of precision*, 135-172, Princeton.

SCHAFFNER KENNETH (1972), *Nineteenth-century aether theories*, Oxford.

SIEGEL DANIEL (1991), *Innovation in Maxwell's electromagnetic theory: Molecular vortices, displacement current, and light*, Cambridge.

SMITH CROSBIE et NORTON WISE (1989), *Energy and empire: A biographical study of Lord Kelvin*, Cambridge.

WHITTAKER EDMUND (1951), *A history of the theories of aether and electricity*, 2 vols, London. Vol. 1, *The classical theories.*

WISE NORTON (1979), « The mutual embrace of electricity and magnetism », *Science,* **203**, 1310-1318.

YAVETZ IDO (1995), *From obscurity to enigma: The work of Oliver Heaviside, 1872-1889*, Bâle.

Sources citées par les auteurs des textes reproduits

FARADAY MICHAEL (1839-55), *Experimental researches in electricity*, 3 vols, Londres.

FIZEAU HIPPOLYTE (1849), « Sur une expérience relative à la propagation de la lumière », Académie des Sciences, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances,* **29**, 90-92.

GIBSON JOHN ET T. BARCLAY (1871), « Measurements of the specific inductive capacity of dielectrics, in the Physical Laboratory of the University of Glasgow », Royal Society of London, *Transactions,* **161**, 573-584.

FRESNEL AUGUSTIN (1827), « Sur la double réfraction », Académie Royale des Sciences, *Mémoires,* **7**, 45-176.

GOODEVE THOMAS MINCHIN (1860), *The elements of Mechanism*, Londres.

GREEN GEORGE (1828), *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Nothingam.

HEAVISIDE OLIVER (1888), « On electromagnetic waves, especially in relation to the vorticity of the impressed forces; and the forced vibrations of electromagnetic systems », *Philosophical Magazine,* **25**, 130-156, 379-405; **26**, 360-382, 434-449, 488-500.

HELMHOLTZ HERMANN VON (1847), *Über die Erhaltung der Kraft, eine physikalische Abhandlung*, Berlin.

HELMHOLTZ HERMANN VON (1882), « Über absolute Maassysteme für elektrische und magnetische Grössen », *Annalen der Physik und Chemie,* **17**, 42-54.

KIRCHHOFF GUSTAV (1857), « Über die Bewegung der Electricität in Leitern », *Annalen der Physik*, Reproduit dans Kirchhoff, *Gesammelte Abhanlungen* (Leipzig, 1882), 154-168.

LAGRANGE JOSEPH LOUIS (1811-15), *Mécanique analytique*, 2e éd., 2 vols, Paris.

LORENZ LUDVIG VALENTIN (1861), « Sur la théorie de l'élasticité dans les corps homogènes à élasticité constante », *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **58**, 329-360.

LORENZ LUDVIG VALENTIN (1863), Über die Theorie des Lichtes. *Annalen der Physik und der Chemie,* **118**, 11-145. Version anglaise dans *Philosophical Magazine,* **26** (1864).

MACCULLAGH JAMES (1836), « On the laws of crystalline reflexion and refraction », Royal Irish Academy, *Transactions,* **18**, 31-?

MOSSOTTI OTTAVIANO (1850), « Discussione analitica sull'influenza che l'azione di un mezzo dielettrico ha sulla distribuzione dell' elettricità alla superficie di più corpi elettrici disseminati in esso », Società Italiana delle Scienze residente in Modena, *Memorie di matematica e di fisica,* **24** (2), 49-74.

POISSON SIMÉON DENIS (1818), « Sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différentielles partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides », Académie des Sciences, *Mémoires,* **3**, 121-176.

POYNTING JOHN HENRY (1884), « On the transfer of energy in the electromagnetic field », Royal Society of London, *Philosophical Transactions.* Reproduit dans Poynting, *Collected scientific papers* (Cambridge, 1920), 175-193.

RANKINE WILLIAM JOHN MACQUORN (1851), « Laws of elasticity of solid bodies », *The Cambridge and Dublin mathematical journal,* **6**, 47-80, 178-181, 185-186.

RANKINE WILLIAM JOHN MACQUORN (1858), *A manual of applied mechanics*, Londres et Glasgow.

STOKES GEORGE GABRIEL (1849), « On the dynamical theory of diffraction », Cambridge Philosophical Society, *Transactions*. Reproduit dans Stokes, *Mathematical and Physical papers*, 5 vols. (Cambridge, 1880-1905), **2**, 243-328.

THOMSON WILLIAM (1847), « On a mechanical representation of electric, magnetic, and galvanic forces », *The Cambridge and Dublin mathematical journal*, reproduit dans Thomson, *Mathematical and physical papers*, vol. 1 (Cambridge, 1882), 76-79.

TYNDALL JOHN (1863), *Heat considered as a mode of motion: being a course of twelve lectures delivered at the Royal Institution of Great Britain in the season of 1862*, London.

WEBER WILHELM et RUDOLPH KOHLRAUSCH (1857), « Elektrodynamische Maasbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanische Maass. Königlliche Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig », *Berichte*. Reproduit dans Weber, *Werke*, 6 vols. (Berlin, 1892-94), **3**, 609-676.

Imprimé en France par Chirat à Saint-Just-la-Pendue
N° d'édition : 003075-01 - Dépôt légal : mars 2005